République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahai - Jijel

Faculté des Sciences Exacte et Informatique

Département de Mathématique

№ d'ordre : ....

№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse Fonctionnelle.

Thème

Existence de solutions locales pour une classe d'équations différentielles multivoques

Présenté par :

- Belemrabet Hala
- Boutouil Dounia

Devant le jury :

Président	: M. Yarou	Prof. Université de Jijel
Encadreur	: S. Melit	M.C.B Université de Jijel
Examinateur	: W. Boukrouk	M.C.B Université de Jijel

Promotion 2017/2018

Table des matières

Introduction **3**

1 Notations et Préliminaires **4**

1.1 Notations 4

1.2 Quelques notions d'analyse fonctionnelle 5

1.3 La distance de Hausdorff 8

1.4 Mesure de non compacité de Hausdorff 9

1.5 Multi-applications et sélections 11

1.6 Mesurabilité des multi-applications 11

1.7 Concepts de continuité des multi-applications 13

1.8 Dérivée de Hukuhara 14

1.9 Intégrale multivoque 15

1.10 Quelque résultats de convergence 16

2 Résultat d'existence pour une équation différentielle multivoque avec des conditions de type compact **18**

3 Résultat d'existence pour une équation différentielle multivoque "Théorème de comparaison" **34**

Bibliographie **48**

Remerciements

D'abord, nous tenons à remercier $\mathcal{ALLAH}$ *qui nous a données la volonté et la sonté pour finir ce mémoire.*

Nous tenons à remercier vivement et chaleureusement nos chéres familles pour leur soutien, leurs patience, leurs encouragement et tout ce qu'elles ont fait pour nous au long de cette période.

Nous remercions chaleureusement notre encadreur Melle ***S. Melit****, pour avoir assumé la responsabilité de nous encadrer, nous orienter et de nous conseiller tout au long de la réalisation de ce travail,*

Nous la remercions très sincèrement pour sa compétence. Ses remarquables conseils divers et riches, qui nous ont été d'une grande utilité pour mener à bien ce travail.

Nous tenons à formuler nos remerciements les plus sincères à Mr **M.Yarou***, Professeur à l'université de Jijel pour avoir accepté la présidence du jury de ce mémoire et pour l'honneur qu'elle nous a fait par sa présence ainsi que Melle* **W.Boukrouk***, M.C.B à l'université de Jijel pour avoir accepté d'être membre du jury, avoir examiné et corrigé notre mémoire et nous les remercions aussi pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail.*

Un grand merci à tous les enseignants du département de Mathématiques.

$\mathcal{DOUNIA}$ et $\mathcal{HALA}$

Introduction

Après l'introduction de la notion de dérivée de Hukuhara, une équation différentielle utilisant cette notion, et dont la solution est une application multivoque, a été considérée pour la première fois en 1969 par de Blasi et Iervolino [10].

Plus tard, dans [11], [8], [15] et [17], diverses définitions d'une solution de cette équation ont été introduites et des théorèmes sur leur existence ont été démontrés.

Dans ce mémoire on s'intéresse à l'étude de l'existence de solutions locales pour une équation différentielle générée par une inclusion différentielle sur l'espace semi-linéaire de tous les ensembles convexes compacts d'un espace de Banach initial.

La solution de cette équation différentielle est une application multivoque qui dépend du temps à valeurs convexes compactes.

Notre mémoire est organisé sur un plan structuré par trois chapitres.

Dans le premier, nous donnons quelques résultats préliminaires et outils de base utilisés dans la démonstration des théorème d'existence, en particulier les multi-applications et leurs propriétés, la dérivée de Hukuhara et l'intégrale multivoque.

Dans le deuxième chapitre on étudie l'existence de solutions de l'équation différentielle multivoque de la forme

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} D_H U = G(t, U) = \overline{co}(\Gamma(t, U)), \ \ p.p \ t \in T \\ U(0) = U_0. \end{cases}$$

où $U_0 \in P_{kc}(X)$ et $\Gamma : \overline{B}(U_0, b) \to P_{kc}(X)$ est une muti-application de Carathéodory et intégrablement bornée. Il s'agit d'un résultat donné par A. Tolstonogov [23], nous l'avons repris et détaillé sa démonstration.

Enfin, dans le troisième chapitre, on présente un résultat d'existence de solutions pour l'équation $(\mathcal{P})$, en appliquant le "théorème de comparaison".

Chapitre 1

Notations et Préliminaires

1.1 Notations

L'objet de ce chapitre est de donner des notions de base, quelques résultats fondamentaux sur les multi-applications ainsi que des résultats que nous avons utilisé dans ce mémoire. Nous commençons par fixer les notions utilisées.

Soit X un espace de Banach, muni de la norme $\|.\|$ et $d(.,.)$ la métrique générale. Dans la suite de ce travail, on note par

- $B(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon $r > 0$.
- $\overline{B}(x, r)$ la boule fermée de centre x et de rayon $r > 0$.
- Θ singleton , c'est à dire $\Theta = \{0_X\}$.
- $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.
- $\mathcal{P}_f(X)$ la famille des sous ensembles non vides fermées de X.
- $\mathcal{P}_b(X)$ la famille des sous ensembles bornés de X.
- $\mathcal{P}_k(X)$ la famille des sous ensembles non vides compacts de X.
- $\mathcal{P}_{kc}(X)$ la famille des sous ensembles non vides convexes compacts de X.

Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. On note par

- $\mathcal{L}(I)$ la tribu de Lebesgue sur l'intervalle I.
- $\mu(.)$ la mesure de Lebesgue.
- $\mathcal{B}(X)$ la tribu de Borel sur X (Tribu engendrée par la topologie de X).
- $\mathbf{L}^p(I, X)$ ($p \in [1, +\infty[$) l'espace quotient de Banach des applications $u : I \to X$

mesurables et telles que $\int_I \|u(t)\|^p dt < +\infty$, muni de la norme

$$\|u\|_p = \left(\int_I \|u(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- $\mathbf{C}(I, X)$ l'espace de Banach des applications continues $u : I \to X$, muni de la norme de la convergence uniforme, i.e.

$$\|u(.)\| = \sup_{t \in I} \|u(t)\|, \; \textit{pour tout } u(.) \in \mathbf{C}(I, X).$$

1.2 Quelques notions d'analyse fonctionnelle

Définition 1.2.1. *Soit X un espace topologique. On dit que X est un espace séparé si pour tous x, $y \in X$, $x \neq y$, il existe V_x, V_y deux voisinage de x et y respectivement tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$.*

Remarque 1.2.2. *Tout espace métrique est séparé.*

Définition 1.2.3. ***(Recouvrement d'un ensemble)***
Soit X un ensemble quelconque et soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille de sous ensembles de X. On dit que $(\Omega_i)_{i \in I}$ est une recouvrement de X si $X \subset \bigcup_{i \in I} (\Omega_i)$.

Si X est un espace topologique et pour tout $i \in I$, Ω_i est un sous ensemble ouvert de X, alors $(\Omega_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X.

Définition 1.2.4. ***(Sous recouvrement)***
Soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ un recouvrement de E. Si $J \subset I$ est $(\Omega_i)_{i \in J}$ est un recouvrement de E, alors $(\Omega_i)_{i \in J}$ est appelé un sous recouvrement du recouvrement $(\Omega_i)_{i \in I}$ de E.

Définition 1.2.5. *Soit X un espace topologique. Un sous ensemble S de X est dit compact si de tout recouvrement ouvert de S on peut extraire un sous recouvrement fini, c'est à dire, $S \subset \bigcup_{\alpha \in \Delta} O_\alpha$, $\exists I \subset \Delta$ (I fini), tel que $S \subset \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$.*

Définition 1.2.6. *Soit X un espace topologique. On dit que X est séparable s'il admet un sous ensemble dénombrable par tout dense. X est parfaitement séparable si sa topologie admet une base dénombrable.*

Définition 1.2.7. *Soit X un espace topologique séparé et A une partie sur X. On dit que A est compact si de tout recouvrement de A par des ouverts de X, on peut extraire un sous recouvrement fini.*

Théorème 1.2.8. *Soit X un espace métrique compact, alors toute suite de points de X admet une sous suite convergente.*

Définition 1.2.9. *Soient X un espace topologique séparé, A une partie de X. On dit que A est relativement compact si sont adhérence dans X est compacts.*

Rappelons la définition d'une fonction absolument continue.

Définition 1.2.10. *Soit X un espace de Banach. Une fonction $f : [a, b] \to X$ est dite absolument continue si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tels que pour toute partition dénombrable de l'intervalle $[a, b]$ par des intervalles disjoints $[a_k, b_k]$ vérifiant*

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta,$$

on a

$$\sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\| < \varepsilon.$$

Théorème 1.2.11. *Une fonction $f : [a, b] \to X$ est absolument continue si et seulement si elle est l'intégrale p.p, c'est à dire,*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \dot{f}(t)dt.$$

On voit bien qu'une fonction absolument continue est continue par contre la réciproque est fausse.

Ensembles convexes

On rappelle la définition et quelques propriétés des **ensembles convexes** (voir [4]).

Définition 1.2.12. *Soit X un espace vectoriel, $a, b \in X$. On appelle segment fermé ou simplement segment d'extrémités a et b que l'on note $[a, b]$, l'ensemble*

$$\{\lambda a + (1 - \lambda)b, \ \ 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Le segment ouvert est l'ensemble $\{\lambda a + (1 - \lambda)b, \ \ 0 < \lambda < 1\}$, noté $]a, b[$.

Définition 1.2.13. *Une partie A d'un espace vectoriel X est dite convexe si, toutes les fois que deux points a et b appartiennent à A, le segment $[a, b]$ est contenu dans A, i.e.,*

$$\forall a,\, b \in A,\, \forall\, \lambda \in [0, 1],\, \lambda a + (1 - \lambda)b \in A.$$

On pose

$$\mathcal{T}_n := \left\{(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \ \lambda_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leq 1\right\} \ (n \in \mathbb{N})$$

et

$$\mathcal{T}'_n := \left\{(\lambda_1, ..., \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ \lambda_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\right\} \ (n \in \mathbb{N}),$$

et remarquons que si $(\lambda_1, ..., \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in \mathcal{T}'_n$ alors $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathcal{T}_n$, et que si

$$(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathcal{T}_n \ \text{alors} \ (\lambda_1, ..., \lambda_n, 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i) \in \mathcal{T}'_n.$$

Définition 1.2.14. *Soit A un sous ensemble d'un espace vectoriel X. On appelle enveloppe convexe de A, que l'on note $co(A)$, l'intersection de tous les sous ensembles convexes de X contenant A.*

C'est donc le plus petit convexe de X contenant A.

Et on appelle enveloppe convexe fermée de A, que l'on note $\overline{co}(A)$, l'intersection de tous les sous ensembles convexes fermés de X contenant A.

C'est donc le plus petit convexe fermé de X contenant A.

Théorème 1.2.15. *Soit X un espace vectoriel et $A \subset X$. Alors*

$$co(A) = \left\{\sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j x_j : \ k \in \{0, 1, ...\}, \ (\lambda_1, ..., \lambda_{k+1}) \in \mathcal{T}'_k, \ x_1, ..., x_{k+1} \in A\right\}.$$

Théorème 1.2.16. ***(Théorème de Carathéodory).***
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \subset \mathbb{R}^n$. Alors

$$co(A) = \left\{\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j : \ (\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}) \in \mathcal{T}'_n, \ x_1, ..., x_{n+1} \in A\right\}.$$

Théorème 1.2.17. *Soient X est un espace vectoriel topologique, A, $B \in X$, alors*

(1) *si A est un sous ensemble convexe de X, et $\overline{A}$ le sont aussi.*

(2) $\overline{co}(A) = \overline{co(A)}$

(3) $\overline{co}(\alpha.A) = \alpha.\overline{co}(A)$

(4) *Si $\overline{co}(A)$ est compact, $\overline{co}(A + B) = \overline{co}(A) + \overline{co}(B)$.*

1.3 La distance de Hausdorff

Définition 1.3.1. *(voir [4]) Soient A, B deux sous ensembles d'un espace métrique (X, d), l'écart entre A et B est défini par*

$$e(A, B) = \sup_{a \in A} d(a,\ B),$$

avec

$$d(a,\ B) = \inf_{b \in B} d(a,\ b),$$

et la distance de Hausdorff entre A et B est définie par

$$\mathcal{H}(A, B) = max(e(A, B), e(B, A)).$$

Propriétés élémentaires

Soient $A, B, C \subset X$. Alors

1. $e(A, \emptyset) = \infty$ *si* $A \neq \emptyset$,
2. $e(\emptyset, B) = 0$,
3. $e(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$,
4. $e(A, B) \leq e(A, C) + e(C, B)$,
5. $\mathcal{H}(A, B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$,
6. $\mathcal{H}(A, B) \leq \mathcal{H}(A, C) + \mathcal{H}(C, B)$,
7. $|d(x, A) - d(x, B)| \leq \mathcal{H}(A, B)$, $\forall x \in X$.

$-$L'ensemble $\mathcal{P}_f(X)$ muni de la distance de Hausdorff $\mathcal{H}$, est un espace métrique.
Rappelons les propriétés suivantes
$-$ Si (X, d) est un espace métrique complet, alors $(\mathcal{P}_f(X), \mathcal{H})$ l'est aussi, et $\mathcal{P}_k(X)$ est fermé dans $\mathcal{P}_f(X)$ de plus, $\big(\mathcal{P}_k(X), \mathcal{H}\big)$ est complet.
$-$ Si X est séparable, l'ensemble $\mathcal{P}_k(X)$ muni de $\mathcal{H}$ est aussi séparable.
$-$ Si X un espace de Banach et $Y \subset X$ un ensemble compact, alors $\mathcal{P}_k(Y)$ (resp. $\mathcal{P}_{kc}(Y)$) est compact dans $\mathcal{P}_k(X)$ (resp. $\mathcal{P}_{kc}(Y)$).
En plus, si $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}_k(X)$ (resp. $\mathcal{P}_{kc}(X)$) un ensemble compact, alors l'ensemble $Y = \bigcup\limits_{A \in \mathcal{U}} A$ est compact dans X.

Définition 1.3.2. *Soient X un espace de Banach, $A \in \mathcal{P}_k(X)$, on utilisera la notation*

$$\big|A\big|_X := \mathcal{H}(A, \Theta).$$

Il est claire que

$$|A|_X := \mathcal{H}(A,\Theta) = \sup_{x\in A} \|x\|.$$

En effet, on a

$$\begin{array}{rcl} e(A,\Theta) & = & \sup_{x\in A} d(x,\Theta) \\ & = & \sup_{x\in A} \inf_{y\in\Theta} d(x,y) \\ & = & \sup_{x\in A} d(x,0_X) \\ & = & \sup_{x\in A} \|x\|, \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} e(\Theta,A) & = & \sup_{y\in\Theta} d(y,A) \\ & = & d(0_X,A) \\ & = & \inf_{x\in A} d(0_X,x) \\ & = & \inf_{x\in A} \|x\|, \end{array}$$

alors, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(A,\Theta) &= \max\Big(e(A,\Theta), e(\Theta,A)\Big) \\ &= e(A,\Theta) \\ &= \sup_{x\in A} \|x\|. \end{aligned}$$

Lemme 1.3.3. *Soient X un espace de Banach, pour tous $A,B,C,D \in \mathcal{P}_{kc}(X)$ et $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, nous avons*

(1) $\mathcal{H}(A,A) = 0$.

(2) $\mathcal{H}(A+C, B+C) = \mathcal{H}(A,B)$.

(3) $\mathcal{H}(A+B, C+D) \leq \mathcal{H}(A,C) + \mathcal{H}(B,D)$.

(4) $\mathcal{H}(\alpha A, \alpha B) = |\alpha|\mathcal{H}(A,B)$.

(5) $\mathcal{H}(\alpha A, \beta B) = |\alpha-\beta|\mathcal{H}(A,\Theta)$.

(6) $\mathcal{H}\Big(\overline{co}(A), \overline{co}(B)\Big) \leq \mathcal{H}\big(A,B\big)$.

1.4 Mesure de non compacité de Hausdorff

Dans cette section, on donne la définition de la mesure de non compacité de Hausdorff et nous allons donner leurs propriétés fondamentales.

Définition 1.4.1. *(voir [7]) La mesure de non compacité de Hausdorff d'un sous ensemble bornée M d'un espace de Banach X est la fonction $\mathcal{X} : \mathcal{P}_b(X) \to \mathbb{R}^+$, définie par*

$$\mathcal{X}(M) = \inf\left\{\varepsilon > 0,\ M \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i),\ x_i \in X,\ r_i < \varepsilon\right\},\ i = 1, 2, ..., n,$$

c'est à dire, M est recouvert par la réunion finie des boules ouvertes dans X.

Remarque 1.4.2. *Dans le cas où M est un sous ensemble non vide et non bornée, alors*

$$\mathcal{X}(M) = +\infty.$$

Proposition 1.4.3. *(voir[6]) Soit X un espace de Banach et soit $A, B \in \mathcal{P}_b(X)$, alors les propriétés suivantes sont satisfaites*

(1) *monotonie : $A \subset B \Rightarrow \mathcal{X}(A) \leq \mathcal{X}(B)$;*

(2) *semi-additivité algébrique : $\mathcal{X}(A + B) \leqslant \mathcal{X}(A) + \mathcal{X}(B)$;*

(3) *semi-additivité : $\mathcal{X}(A \bigcup B) \leq max(\mathcal{X}(A), \mathcal{X}(B))$;*

(4) *semi-homogénéité : $\mathcal{X}(t\ A) = |t|\mathcal{X}(A)$, pour tout nombre t ;*

(5) *invariance par translation : $\mathcal{X}(x + A) = \mathcal{X}(A)$;*

(6) *$\mathcal{X}(\overline{co}A) = \mathcal{X}(A)$;*

(7) *$\mathcal{X}(\overline{B}(x, r)) = r$;*

(8) *$\mathcal{X}(A) = 0 \Leftrightarrow \overline{A}$ est compact ;*

(9) *$|\mathcal{X}(A) - \mathcal{X}(B)| \leqslant \mathcal{H}(A, B)$;*

Lemme 1.4.4. *(Voir [16]) Si X un espace séparable et $v_n : I \to X, n \geq 1$ une suite des applications intégrablements bornés et mesurables. Alors, l'application $u(t) = \mathcal{X}(\bigcup\{v_n(t) : n \geq 1\})$ est intégrable sur I et pour tout ensemble mesurable $\mathcal{I} \subset I$*

$$\mathcal{X}\left(\bigcup\left\{\int_{\mathcal{I}} v_n(s)ds;\ n \geqslant 1\right\}\right) \leqslant \int_{\mathcal{I}} u(s)ds.$$

Lemme 1.4.5. *Soient X un espace de Banach, $H \subset C(I, X)$ bornée et équicontinue, et $\mathcal{X}_C$ est la mesure de non compacité de Hausdorff de l'espace $C(I, X)$, alors*

$$\mathcal{X}_C(H) = \mathcal{X}(H(I)) = \sup\{\ \mathcal{X}(H(t)) :\ \ t \in I\},$$

où

$$H(t) = \cup\{x(t) :\ x(.) \in H\},\ H(I) = \cup\{H(t) :\ t \in I\}.$$

1.5 Multi-applications et sélections

Pour une étude détaillée des multiapplications et leurs sélections on peut se référer à [4] et [9].

Définition 1.5.1. *Soient X, Y deux ensembles non vides. Une multi-application (au fonction multivoque) Γ définie sur X à valeurs dans Y est une application qui à chaque élément $x \in X$ associe un sous ensemble $\Gamma(x)$ de Y. Il ya dans la littérature plusieurs notations mais nous allons adopté la suivante $\Gamma : X \to \mathcal{P}(Y)$.*
Le domaine, le graphe et l'image de la multi-application $\Gamma : X \to \mathcal{P}(Y)$ sont donnés respectivement par

$$D(\Gamma) := Dom(\Gamma) = \Big\{x \in X :\ \Gamma(x) \neq \emptyset\Big\},$$

$$gph(\Gamma) = \Big\{(x, y) \in X \times Y :\ x \in D(\Gamma),\ y \in \Gamma(x)\Big\},$$

$$Im(\Gamma) = \bigcup_{x \in D(\Gamma)} \Gamma(x).$$

Définition 1.5.2. *Soit $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : X \to Y$ vérifiant*

$$f(x) \in F(x),\ \ \forall x \in X.$$

1.6 Mesurabilité des multi-applications

Pour plus de détails sur la mesurabilité des multi-application on peut se référer à [4], [9] et [14].

Définition 1.6.1. *Soient (Ω, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique et $\Gamma : \Omega \to \mathcal{P}(X)$. On dit que Γ est Σ-mesurable, si pour tout ouvert V de X,*

$$\Gamma^{-1}(V) = \{t \in \Omega :\ \Gamma(t) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Lemme 1.6.2. *Soient (Ω, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique complet séparable et $\Gamma : \Omega \to \mathcal{P}(X)$ une multi-application à valeurs non vides fermées. Considérons les propriétés suivantes*

(i) $\Gamma^{-1}(B) \in \Sigma$ pour tout Borélien B de X.

(ii) $\Gamma^{-1}(V) \in \Sigma$ *pour tout ouvert* V *de* X.

(iii) Il existe une suite $(f_n)_n$ *de sélections mesurables de* Γ *tel que*

$$\forall t \in \Omega, \Gamma(t) = \overline{\{f_n(t)\}}_{n \in N}.$$

(iv) $\forall x \in X$, *la fonction distance* $d(x, \Gamma(.))$ *est mesurable.*

(v) Le graphe de Γ *appartient à* $\Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$.

Alors (i) $\Rightarrow$ *(ii)* $\Leftrightarrow$ *(iii)* $\Leftrightarrow$ *(iv)* $\Rightarrow$ *(v).*

Si Γ *est à valeurs non vides complètes alors (ii)* $\Leftrightarrow$ *(iii)* $\Leftrightarrow$ *(iv).*

Si Γ *est à valeurs non vides compactes alors (ii)* $\Rightarrow$ *(i).*

Lemme 1.6.3. *Soit* (Ω, Σ, μ) *un espace mesuré avec* $\mu \geq 0$, σ*-finie et* Σ μ*-complète. Soient* X *un espace métrique complet,* $\Gamma : \Omega \to \mathcal{P}(X)$ *une multi-application à valeurs non vides fermées, alors*

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v).$$

Définition 1.6.4. *(Mesurabilité forte) Soient* (Ω, Σ) *un espace mesurable,* X *un espace métrique séparable, on dit que* $\Gamma : \Omega \to \mathcal{P}(X)$ *est fortement mesurable si l'image réciproque de tout fermé* $\mathcal{B}$

$$\Gamma^{-1}(\mathcal{B}) = \{t \in \Omega : F(t) \cap \mathcal{B} \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Lemme 1.6.5. *Soient* (Ω, Σ) *un espace mesurable,* X *un espace métrique séparable,* $\Gamma : \Omega \to \mathcal{P}(X)$ *une multi-application fortement mesurable, alors* Γ *est mesurable.*

Théorème 1.6.6. *Soient* (Ω, Σ) *un espace métrique séparable,* $\Gamma : \Omega \to \mathcal{P}_k(X)$ *une multi-application. Alors* Γ *est mesurable si et seulement si* Γ *est fortement mesurable.*

Définition 1.6.7. *(Voir [23],[24]) Soit* X *un espace de Banach, une multi-application* $\Gamma : I \to \mathcal{P}_{kc}(X)$ *est à valeurs* μ*-presque séparables s'il existe un ensemble mesurable* $\mathcal{I} \subset I$, $\mu(\mathcal{I}) = \mu(I)$, *tel que l'ensemble* $\cup\{F(t); t \in \mathcal{I}\} \subset X$ *est séparable.*

Théorème 1.6.8. ***(Théorème d'existence de sélections mesurables)****.*
Soient (Ω, Σ) *un espace mesurable,* X *un espace métrique complet séparable et* $F : \Omega \to \mathcal{P}(X)$ *une multi-application* Σ*-mesurable à valeurs fermées. Alors* F *admet au moins une sélection mesurable.*

Théorème 1.6.9. *(voir [23]) Soient* X *un espace de Banach,* $\Gamma : I \to \mathcal{P}_{kc}(X)$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(a) Γ *est fortement mesurable,*

(b) Γ *est mesurable et à valeurs μ-presque séparables,*

(c) *il existe une famille dénombrable* $\{v_n(t)\}_{n\geq 1}$ *des sélections de* Γ *fortements mesurables tel que presque partout sur* I*, on a*

$$\Gamma(t) = \overline{\bigcup \{v_n(t);\ n \geq 1\}}.$$

Définition 1.6.10. *Soit* (T, Σ, μ) *un espace mesuré, on dit que* μ *est non atomique pour tout ensemble* A*, avec* $\mu(A) > 0$*,s'il existe un sous ensemble mesurable non vide* $B \subset A$*, tel que* $\mu(A) > \mu(B)$.

Exemple 1.6.11. *la mesure de Lebesgue est une mesure non atomique.*

1.7 Concepts de continuité des multi-applications

Enonçons les propriétés suivantes, et pour plus de détails on peut se référer à [1]

Définition 1.7.1. *Soient* X, Y *deux espaces métriques et* $\Gamma : X \to \mathcal{P}(Y)$ *une multi-application. On dit que* Γ *est continue, si pour tout* $x \in X$ *nous avons*

$$\lim_{x' \to x} \mathcal{H}(\Gamma(x), \Gamma(x')) = 0,$$

$\mathcal{H}$ *est la distance de Hausdorff.*

Définition 1.7.2. *Soient* (Y, d) *un espace métrique,* $b > 0$ *et* $C : [0, b] \to P(Y)$*. On dit que* C *est absolument continue si pour tout* $y \in Y$ *et tous* t, $t' \in [0, b]$*, nous avons*

$$|d(y, C(t)) - d(y, C(t'))| \leq |a(t) - a(t')|, \tag{1.1}$$

où $a : [0, b] \to \mathbb{R}^+$ *est une fonction absolument continue satisfaisant* $\dot{a}(t) \neq 0$*, p.p. sur* $[0, b]$.

Observons que la relation (1.1) *nous donne pour* $t \geq t'$,

$$|d(y, C(t)) - d(y, C(t'))| \leq \int_{t'}^{t} |\dot{a}(s)| ds.$$

On peut alors supposer, (en remplaçant $\dot{a}$ *par* $|\dot{a}|$ *si c'est nécessaire), que* $\dot{a}(t) \geq 0$, $\forall\, t \in [0, b]$.

Définition 1.7.3. *Soient* X *un espace de métrique,* $E \subset X$*. On dit que* $\Gamma : I \times E \to \mathcal{P}(X)$ *une multi-application de Carathéodory si*

(i) *pour tout* $x \in E$*,* $t \mapsto \Gamma(t, x)$ *est fortement mesurable ;*

(ii) *pour tout* $t \in T$*,* $x \mapsto \Gamma(t, x)$ *est continue.*

Définition 1.7.4. *Soit X un espace de Banach et Y un espace métrique. Soit la multi-application $\Gamma : I \times Y \to \mathcal{P}_{kc}(X)$.*

1. *On dit que Γ vérifie la propriété de Scorza-Dragoni, Si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble fermé $I_\varepsilon \subset [0, a]$ tel que la mesure de Lebesgue $\mu(I \setminus I_\varepsilon) \leq \varepsilon$ et la restriction de Γ sur $I_\varepsilon \times Y$ notée $\big(\Gamma/_{I_\varepsilon \times Y}\big)$ est continue.*
2. *La multi-application Γ est dite intégrablement bornée sur les compacts de Y, si pour tout compact $D \subset Y$, nous Pouvons trouver une fonction intégrable $a_D : I \to \mathbb{R}_+$ tel que*
$$\sup \big\{ \|y\|;\ y \in \Gamma(t, z) \big\} \leq a_D(t).$$
pour presque tout $z \in \mathcal{D}$.

Définition 1.7.5. *Soient X un espace de Banach, $\Gamma : \mathbb{R}^+ \times X \to \mathcal{P}_{kc}(X)$ une multi-application, on dit que Γ est complètement bornée au point $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times X$, s'il existe des voisinages $V(t_0), W(x_0)$ des points t_0 et x_0, tel que l'ensemble $\Gamma\big(V(t_0), W(x_0)\big)$ est relativement compact.*

- *la multi-application Γ est localement bornée si elle est complètement bornée à chaque point.*
- *la multi-application $\Gamma : T \times E \to \mathcal{P}_{kc}(X)$ $(E \subset X)$ est complètement bornée sur $T \times E$ si l'ensemble $\Gamma(T, E)$ est relativement compact.*

Théorème 1.7.6. *(**Théorème de Dugunji**) (voir [14])*
Soient X un espace métrique, Y un espace normé, $A \in \mathcal{P}_f(X)$ et $\Gamma : A \to \mathcal{P}_{kc}(Y)$ est continue, alors il existe une multi-application continue $G : X \to \mathcal{P}_{kc}(Y)$ tel que la restriction de G sur A, $G/_A = \Gamma$ et $G(x) \subseteq \overline{co}(\Gamma(A))$, pour tout $x \in X$.

1.8 Dérivée de Hukuhara

Définition 1.8.1. *(voir [22]) Soit X un espace vectoriel topologique, A, $B \in \mathcal{P}_{kc}(X)$, on dit que l'ensemble $C \in \mathcal{P}_{kc}(X)$ est la différence de Hukuhara entre A et B si $A = B + C$. On le note par $C := A \ominus B$, C se détermine d'une manière unique.*

Lemme 1.8.2. *(voir[5]) Soient A, B et C des ensembles d'un espace vectoriel topologique réel tel que*
$$A + B \subset C + B.$$
Si C est convexe fermé et B est non vide bornée, alors $A \subset C$.

Définition 1.8.3. *(voir [22]) Soit X un espace normé et $\phi : [0,\infty[\to \mathcal{P}_{kc}(X)$ une multi-application, tel que la différence de Hukuhara $\phi(t+s) \ominus \phi(t)$ existe pour $t, s > 0$ et la différence de Hukuhara $\phi(t) \ominus \phi(t-s)$ existe pour $t > 0$ et $s \in]0,t[$. La dérivé de Hukuhara de ϕ à $t \in]0,\infty[$ est défini par la formule*

$$D_H\phi(t) = \lim_{s\to+0^+} \frac{\phi(t+s) \ominus \phi(t)}{s} = \lim_{s\to+0^+} \frac{\phi(t) \ominus \phi(t-s)}{s}$$

quand ces deux limites existent (voir [16]). De plus

$$D_H\phi(0) = \lim_{s\to+0^+} \frac{\phi(s) \ominus \phi(0)}{s}.$$

.

1.9 Intégrale multivoque

Définition 1.9.1. *(voir [24]) Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, X un espace de Banach et $\Gamma : \Omega \to \mathcal{P}_{kc}(X)$ une multi-application*

- *L'intégrale de Bochner de Γ est définie par*

$$\Phi : \Sigma \to \mathcal{P}_{kc}(X),\ \ \Phi(\mathcal{I}) = \int_{\mathcal{I}} \Gamma(t)dt,\ \ \forall \mathcal{I} \in \Sigma.$$

- *L'intégrale de Aumann sur l'ensemble mesurable $\mathcal{I}$ de Γ est donné par*

$$(\mathcal{A})\int_{\mathcal{I}} \Gamma(t)dt = \left\{ \int_{\mathcal{I}} f(t)dt :\ f(.) \in S^1_\Gamma \right\}$$

où S^1_Γ l'ensemble de toutes les sélections intégrables de Γ, c'est à dire $S^1_\Gamma = \Bigg\{ f(.) \in L^1(T,X) : f(t) \in \Gamma(T),\ pour\ tout\ t \in T \Bigg\}$.

Théorème 1.9.2. *(voir [24]) Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, X un espace de Banach et $\Gamma : \Omega \to \mathcal{P}_{kc}(X)$ une multi-applcation intégrable au sens de Bochner. Alors*

$$\int_{\mathcal{I}} F(t)dt = (\mathcal{A})\int_{\mathcal{I}} F(t)dt,\ \ \forall\ \mathcal{I} \in \Sigma.$$

Lemme 1.9.3. *(voir [24]) Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré X un espace de Banach, μ non atomique, soit $\Gamma : \Omega \to \mathcal{P}_{kc}(X)$ une muti-application fortement mesurable et il existe $w(.)$ Lebesgue intégrable définie sur Ω, telle que*

$$\mathcal{H}(\Gamma(t), \Theta) \leq w(t),\ \forall\, t \in \Omega.$$

Alors, pour tout $\mathcal{I} \in \Sigma$

$$\int_{\mathcal{I}} \overline{co}(F(t))dt = (\mathcal{A})\int_{\mathcal{I}} \overline{co}(F(t))dt = \overline{(\mathcal{A})\int_{\mathcal{I}} F(t)dt}. \tag{1.2}$$

Quelques propriétés.

Soient X un espace de Banach, $F, G : [a, b] \to \mathcal{P}_{kc}(X)$ sont intégrable, alors

1) $\mathcal{H}\left(\int_a^b F(t)dt, \int_a^b G(t)dt\right) \leq \int_a^b \mathcal{H}(F(t), G(t))dt.$

2) $\left|\int_a^b F(t)dt\right|_X \leq \int_a^b |F(t)dt|_X.$

3) pour tout $c \in \,]a, b[$,

$$\int_a^b F(t)dt = \int_a^c F(t)dt + \int_c^b F(t)dt.$$

4) $\int_a^b (F(t) + G(t))dt = \int_a^b F(t)dt + \int_a^b G(t)dt.$

Théorème 1.9.4. *(voir [23]) Soient X un espace de Banach, $\Phi : [0, a] \to \mathcal{P}_{kc}(X)$. Si*

$$\Phi(t) = U_0 + \int_0^t \Gamma(s)ds, \quad U_0 \in \mathcal{P}_{kc}(X),$$

où $\Gamma : I \to \mathcal{P}_{kc}(X)$ intégrable au sens de Bochner, alors $D_H\Phi(t)$ existe presque partout et on a l'égalité

$$D_H\Phi(t) = \Gamma(t).$$

presque partout.

1.10 Quelque résultats de convergence

Les résultats suivants sont pris de la référence [12].

Théorème 1.10.1. ***(Théorème de la convergence de Lebesgue)****.*

Soient (J, Σ, μ) un espace mesuré et X un espace de Banach, soit $1 \leq p < +\infty$ et (f_n) une suite de fonctions μ-mesurables définies sur J à valeurs dans X, si la suite (f_n) vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$

(i) $f_n \to f$ *μ.p.p sur J,*

(ii) il existe une fonction positive $g \in \mathbf{L}^p(J, \mathbb{R})$ telle que, $\|f_n(t)\| \leq g(t)$ μ.p.p.

Alors $f_n \to f$ dans $\mathbf{L}^p(J, X)$. En particulier, dans le cas $p = 1$,

$$\int_J f_n d\mu \to \int_J f d\mu.$$

Théorème 1.10.2. ***(Théorème d'Ascoli-Arzelà)****.*

Soient J un espace métrique compact, Y un espace métrique complet, et H un sous ensemble de $\mathbf{C}(J, Y)$, l'espace des applications continues définies sur J à valeurs dans Y, *muni de la topologie de la convergence uniforme. Alors H est relativement compact si et seulement si H est équicontinu et $H(x)$ est relativement compact, avec*

$$H(x) = \{f(x) : f \in H\}.$$

Chapitre 2

Résultat d'existence pour une équation différentielle multivoque avec des conditions de type compact

Dans ce chapitre, sur la base d'une inclusion différentielle, nous introduisons une équation différentielle multivoque et nous examinons quelques questions de l'existence de solutions.

Nous désignons par $B(U, r),\ U \subset X$, l'ensemble $\{x \in X; d(x, U) < r\}$ et $\overline{B}(U, r)$ sa fermeture.

considérons l'inclusion différentielle

$$\dot{x}(t) \in \Gamma(t, x), \tag{2.1}$$

où $\Gamma : T \times \overline{B}(U_0, b) \to \mathcal{P}_k(X),\ T = [0, a],\ a, b > 0$, et $U_0 \in \mathcal{P}_{kc}(X)$. Si Γ une multi-application de Carathéodory, alors il est possible de définir la multi-application $G : T \times \mathcal{P}_{kc}\big(\overline{B}(U_0, b)\big) \to \mathcal{P}_{kc}(X)$, par $G(t, A) = \overline{co}\big(\Gamma(t, A)\big)$ qui est de Carathéodory.

Nous examinons l'équation différentielle multivoque

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} D_H U = G(t, U), \\ U(0) = U_0. \end{cases}$$

Où $G : T \times \mathcal{P}_{kc}\big(\overline{B}(U_0, b)\big) \to \mathcal{P}_{kc}(X)$ est construite à l'aide de la multi-application Γ et $D_H U$ désigne la dérivée au sens du Hukuhara de la multi-application $U : T_0 \to \mathcal{P}_{kc}(X),\ (T_0 = [0, a_0),\ 0 < a_0 \leq a)$. L'équation différentielle $(\mathcal{P})$ joue un rôle crucial dans l'étude de l'inclusion différentielle (2.1), dans le cas d'un espace infini, alors l'équation $(\mathcal{P})$ sera appelée l'équation différentielle générée par l'inclusion différentielle.

Soient X un espace de Banach, $E \subset X$ et $\Gamma : T \times E \to \mathcal{P}_k(X)$, une multi-application continue en x presque partout sur T. Alors pour presque tout $t \in T$, en peut définir une multi-application $G : T \times \mathcal{P}_{kc}(E) \to \mathcal{P}_{kc}(X)$, par

$$G(t, A) = \overline{co}\big(\Gamma(t, A)\big).$$

Lemme 2.0.1. *Soient X un espace de Banach, $E \subset X$ et $\Gamma : T \times E \to \mathcal{P}_k(X)$ une multi-application. Alors*

a) si Γ est uniformément continue, alors G l'est aussi ;

b) si Γ est continue, alors G est continue ;

c) si Γ est de Carathéodory, alors G est de Carathoédory ;

d) si Γ est complètement bornée sur $T \times E$, alors G est complètement bornée sur $T \times \mathcal{P}_{kc}(E)$;

e) Si Γ est intégralement (essentiellement) bornée sur $T \times E$, alors G est intégrablement bornée sur $T \times \mathcal{P}_{kc}(E)$.

Définition 2.0.2. *Soit $w_I : T \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+)$ une fonction de Carathéodory et intégralement bornée sur les sous ensembles bornées de $[c, a] \times \mathbb{R}^+$ $([c, \infty) \times \mathbb{R}^+)$, $c > 0$, tel que*

(1) $w_I(t, 0) = 0$, pour presque tout $t \in T$,

(2) pour chaque $c, 0 < c \leq a$ $(0 < c < \infty)$, la seule fonction absolument continue $r : [0, c] \to \mathbb{R}^+$, $r(0) = 0$, qui satisfait l'équation différentielle

$$\dot{r}(t) = w_I(t, r(t)),$$

presque partout sur $[0, c]$, est la fonction $r(.)$ qui est identiquement nulle.

- *La fonction w_I sera appelé la fonction de Kamke du premier type.*

Définition 2.0.3. *Soit $w_{II} : T \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+)$ une fonction de Carathéodory et intégrablement bornée sur les sous ensembles bornées de $[c, a] \times \mathbb{R}^+$ $([c, \infty) \times \mathbb{R}^+), c > 0$, tel que*

(1) $w_{II}(t, 0) = 0$, pour presque tout $t \in T$,

(2) pour chaque $c, 0 < c \leq a$ $(0 < c < \infty)$, la fonction qui est identiquement nulle et la seule fonction absolument continue $r : [0, c] \to \mathbb{R}^+$, tel que pour presque partout sur $[0, c]$, elle est satisfait l'équation différentielle

$$\dot{r}(t) = w_{II}(t, r(t)), \; r(0) = 0,$$

où le symbole D^+ désigne la dérivée a droit.

- *La fonction w_{II} sera appelé la fonction de Kamke du deuxième type.*

Lemme 2.0.4. *Soit $\omega_I : T \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+)$ une fonction de Kamke du premier type. Alors pour tout segment $[c,d], 0 \leq c < d \leq a$ $(0 \leq c < d < \infty)$, la seule fonction absolument continue $r : [c,d] \to \mathbb{R}^+,\ r(c) = 0$, presque partout sur $[c,d]$, qui satisfait l'inégalité*

$$\dot{r}(t) \leq \omega_I(t, r(t)),$$

est la fonction qui est identiquement nulle.

Lemme 2.0.5. *Soit $\omega_{II} : T \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+)$ une fonction de Kamke du deuxième type. Alors pour tout segment $[c,d]$, $0 < c < d \leq a$ $(0 < c < d < \infty)$, la seule fonction absolument continue $r : [c,d] \to \mathbb{R}^+, r(c) = 0$, presque partout sur $[c,d]$, qui satisfait l'inégalité*

$$\dot{r}(t) \leq \omega_{II}(t, r(t)),$$

est la fonction qui est identiquement nulle. (Pour $c = 0$ l'énoncé du Lemme reste valide s'il est en outre requis que $r(0) = D^+r(0) = 0$).

Exemple 2.0.6. *Un exemple classique de w_I et w_{II}, peut être donné par $w(t,r) = k(t).r$, où $k(.)$ une fonction intégrable sur T (sur les segment de $\mathbb{R}^+$), $k(t) \geq 0$ et $w_{II}(t,r) = \dfrac{r}{t}$, définie au point $t = 0$, d'une manière arbitraire.*

Une fonction de Kamke du premier type est aussi la fonction de la forme $k(t).l(r)$, où $k(t) \geq 0$ intégrable sur T (sur les segment de $\mathbb{R}^+$), et $l(r) > 0,\ r > 0$, est continue et $\displaystyle\int_{0^+} \frac{dr}{l(r)} = \infty$.

Nous sommes maintenant en mesure de donner le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 2.0.7. *Soient X un espace de Banach, $U_0 \in \mathcal{P}_{kc}(X)$ et $\Gamma : T \times \overline{B}(U_0, b) \to \mathcal{P}_k(X)(b > 0)$ une multi-application intégrablement bornée sur l'ensemble $T \times \overline{B}(U_0, b)$ et de Carathéodory. Supposons que presque partout sur T et pour tout $E \subset \overline{B}(U_0, b)$, on a*

$$\chi(\Gamma(t, E)) \leq \omega_I(t, \chi(E)), \tag{2.2}$$

où $\omega_I : T \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction de Kamke du premier type. Alors l'équation différentielle $(\mathcal{P})$ admet une au moins une solution $U(.)$ absolument continue.

Démonstration. Comme Γ est intégrablement bornée, alors il existe une fonction $\lambda(.)$ positive, Lebesgue intégrable définie sur T, telle que pour presque partout sur T et pour tout $x \in \overline{B}(U_0, b)$, on a l'inégalité

$$\mathcal{H}(\Gamma(t,x),\Theta) \leq \lambda(t).$$

On pose

$$M(t) = \int_0^t \lambda(s)ds, \quad t \in T.$$

Nous choisissons le nombre c tel que $0 < c \leq a$, $M(c) \leq b$ et nous prenons $T_0 = [0,c]$. D'après les hypothèses du Théorème, on a presque partout sur T et pour tout $U \in \mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0,b))$

$$\mathcal{H}(G(t,U),\Theta) \leq \lambda(t). \tag{2.3}$$

Par cette inégalité et par le Lemme 2.0.1, nous avons pour tout multi-application continue $U : T \to \mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0,b))$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^t G(s,U(s))ds, \quad t \in T$ existe.

Pour tout $n \geqslant 1$, nous définissons les multi-applications $U_n : T_0 \to \mathcal{P}_{kc}(X)$ et $V_n : T_0 \to \mathcal{P}_{kc}(X)$, par

$$U_n(t) = \begin{cases} U_0, & 0 \leq t \leq \dfrac{c}{n} \\ U_0 + \displaystyle\int_0^{t-\frac{c}{n}} G(s,U_n(s))ds, & \dfrac{c}{n} \leq t \leq c, \end{cases} \tag{2.4}$$

et

$$V_n(t) = U_0 + \int_0^t G(s,U_n(s))ds, \qquad 0 \leq t \leq c. \tag{2.5}$$

Par les relations (2.4) et (2.5), grâce au propriétés de l'intégrale et la distance de Housdorff nous avons,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(V_n(t),V_n(s)) &= \mathcal{H}\left(U_0 + \int_0^t G(\tau,U_n(\tau))d\tau, U_0 + \int_0^s G(\tau,U_n(\tau))d\tau\right) \\
&= \mathcal{H}(U_0,U_0) + \mathcal{H}\left(\int_0^t G(\tau,U_n(\tau))d\tau, \int_0^s G(\tau,U_n(\tau))d\tau\right) \\
&= \mathcal{H}\left(\int_0^t G(\tau,U_n(\tau))d\tau, \int_0^s G(\tau,U_n(\tau))d\tau\right) \\
&= \mathcal{H}\left(\int_0^s G(\tau,U_n(\tau))d\tau + \int_s^t G(\tau,U_n(\tau))d\tau, \int_0^s G(\tau,U_n(\tau))d\tau\right) \\
&= \mathcal{H}\left(\int_0^s G(\tau,U_n(\tau))d\tau, \int_0^s G(\tau,U_n(\tau))d\tau\right) + \mathcal{H}\left(\int_s^t G(\tau,U_n(\tau))d\tau, \Theta\right) \\
&= \mathcal{H}\left(\int_s^t G(\tau,U_n(\tau))d\tau, \Theta\right) \\
&= \left|\int_s^t G(\tau,U_n(\tau))d\tau\right|_X
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_s^t \Big|G(\tau, U_n(\tau))\Big|_X d\tau \\
&= \int_s^t \mathcal{H}\Big(G(\tau, U_n(\tau)), \Theta\Big) d\tau \\
&\leq \int_s^t \lambda(\tau) d\tau \\
&\leq \big|M(t) - M(s)\big|,
\end{aligned}
$$

alors, pour tout $n \geq 1$,

$$
\mathcal{H}(V_n(t), V_n(s)) \leq \big|M(t) - M(s)\big|, \quad t, s \in T_0. \tag{2.6}
$$

En plus,

si $0 \leq t \leq \dfrac{c}{n}$, on a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}(V_n(t), U_n(t)) &= \mathcal{H}\left(U_0 + \int_0^t G(s, U_n(s)) ds, U_0\right) \\
&= \mathcal{H}(U_0, U_0) + \mathcal{H}\left(\int_0^t G(s, U_n(s)) ds, \Theta\right) \\
&= \left|\int_0^t G(s, U_n(s)) ds\right|_X \\
&\leq \int_0^t \Big|G(s, U_n(s))\Big|_X ds \\
&= \int_0^t \mathcal{H}\Big(G(s, U_n(s)), \Theta\Big) ds \\
&\leq \int_0^t \lambda(s) ds \\
&\leq \big|M(t) - M(0)\big|,
\end{aligned}
$$

si $\dfrac{c}{n} \leq t \leq c$, nous avons

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}(V_n(t), U_n(t)) &= \mathcal{H}\left(U_0 + \int_0^t G(s, U_n(s)) ds, U_0 + \int_0^{t-\frac{c}{n}} G(s, U_n(s)) ds\right) \\
&= \mathcal{H}(U_0, U_0) + \mathcal{H}\left(\int_0^t G(s, U_n(s)) ds, \int_0^{t-\frac{c}{n}} G(s, U_n(s)) ds\right) \\
&= \mathcal{H}\left(\int_0^{t-\frac{c}{n}} G(s, U_n(s)) ds + \int_{t-\frac{c}{n}}^t G(s, U_n(s)) ds, \int_0^{t-\frac{c}{n}} G(s, U_n(s)) ds\right) \\
&= \mathcal{H}\left(\int_{t-\frac{c}{n}}^t G(s, U_n(s)) ds, \Theta\right) \\
&= \left|\int_{t-\frac{c}{n}}^t G(s, U_n(s)) ds\right|_X
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{t-\frac{c}{n}}^{t} \Big|G(s, U_n(s))\Big|_X ds \\
&= \int_{t-\frac{c}{n}}^{t} \mathcal{H}\Big(G(s, U_n(s)), \Theta\Big) ds \\
&\leq \int_{t-\frac{c}{n}}^{t} \lambda(s) ds \\
&= \big|M(t) - M(t - \frac{c}{n})\big|,
\end{aligned}$$

donc, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathcal{H}(V_n(t), U_n(t)) \leq h(\frac{c}{n}), \quad t \in T_0, \tag{2.7}$$

où

$$h(r) = \sup \Big\{ |M(t) - M(s)| : \ t, s \in T_0, \ |t - s| \leq r \Big\}.$$

Par la définition de $M(.)$ et $h(.)$, on conclut que $h(\frac{c}{n}) \to 0$ quand $\frac{c}{n} \to 0^+$.

On pose

$$X_n(t) = \bigcup \Big\{ U_m(t); m \geq n \Big\}$$

et

$$Y_n(t) = \bigcup \Big\{ V_m(t); m \geq n \Big\}.$$

Grâce au propriétés (1), (3) et (8) de la mesure de non compacité de Hausdorff, on obtient

$$\chi(X_n(t)) = \chi(X_1(t)), \ n \geq 1,$$

et

$$\chi(Y_n(t)) = \chi(Y_1(t)), \ n \geq 1.$$

En effet.On a

$$\begin{aligned}
X_1(t) &= \bigcup \Big\{ U_m(t) : \ m \geq 1 \Big\} \\
&= U_1(t) \cup X_2(t),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}(X_1(t)) &= \mathcal{X}\Big(U_1(t) \cup X_2(t)\Big) \\
&\leq \max\Big(\mathcal{X}(U_1(t)), \mathcal{X}(X_2(t))\Big) \\
&= \mathcal{X}(X_2(t)),
\end{aligned}$$

d'autre part

$$X_2(t) \subset X_1(t) \Rightarrow \mathcal{X}(X_2(t)) \leq \mathcal{X}(X_1(t)),$$

alors

$$\mathcal{X}(X_2(t)) = \mathcal{X}(X_1(t)).$$

Maintenant, en utilisant le raisonnement par récurrence, donc supposons que $\mathcal{X}(X_n(t)) = \mathcal{X}(X_1(t))$ et montrons que $\mathcal{X}(X_{n+1}(t)) = \mathcal{X}(X_1(t))$.

On a

$$\begin{aligned} X_n(t) &= \cup \{U_m(t); m \geq n\} \\ &= U_n(t) \cup X_{n+1}(t), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(X_n(t)) &= \mathcal{X}\Big(U_n(t) \cup X_{n+1}(t)\Big) \\ &\leq \max\Big(\mathcal{X}(U_n(t), \mathcal{X}(X_{n+1}(t))\Big) \\ &= \mathcal{X}(X_{n+1}(t)), \end{aligned}$$

et comme

$$X_{n+1}(t) \subset X_n(t) \Rightarrow \mathcal{X}(X_{n+1}(t)) \leq \mathcal{X}(X_n(t)),$$

donc

$$\mathcal{X}(X_{n+1}(t)) = \mathcal{X}(X_n(t)) = \mathcal{X}(X_1(t)),$$

c'est à dire l'égalité est vraie pour tout $n \geq 1$.

La deuxième égalité peut être facilement démontrée d'une manière identique.

Par les deux égalités précédentes, par la propriété (9) de la mesure de non compacité de Haussdorff et par (2.7) on obtient

$$\begin{aligned} |\chi(X_1(t)) - \chi(Y_1(t))| &\leq \mathcal{H}\left(X_1(t), Y_1(t)\right) \\ &\leq h\Big(\frac{c}{n}\Big), \ \textit{pour tout } n \geq 1. \end{aligned}$$

Comme $n \geq 1$ est arbitraire, alors la dernière inégalité implique

$$\chi(X_1(t)) = \chi(Y_1(t)). \tag{2.8}$$

De mâme, par l'inégalité (2.6), on obtient

$$\begin{aligned}\big|\chi(Y_1(t))-\chi(Y_1(s))\big| &\leq \mathcal{H}\Big(Y_1(t),Y_1(s)\Big)\\ &\leq \big|M(t)-M(s)\big|, \quad t,s\in T_0. \end{aligned}\tag{2.9}$$

Donc par les relations (2.8) et (2.9), on conclut que $\chi(X_1(t))$ et $\chi(Y_1(t))$ sont égaux et absoluments continues.

D'après la relations (2.5), on obtient pour $h>0$

$$\begin{aligned}V_n(t+h) =&U_0+\int_0^{t+h} G(s,U_n(s))ds\\ &= U_0+\int_0^{t} G(s,U_n(s))ds+\int_t^{t+h} G(s,U_n(s))ds\\ &= V_n(t)+\int_t^{t+h} G(s,U_n(s))ds,\end{aligned}$$

donc, par la relation (1.2)

$$\begin{aligned}Y_1(t+h)\subset Y_1(t)&+\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\int_t^{t+h} G(s,U_n(s))ds\right)\\ &\subset Y_1(t)+\left((\mathcal{A})\int_t^{t+h} G(s,X_1(s))ds\right).\end{aligned}\tag{2.10}$$

Comme la multi-application $s\mapsto G(s,U_n(s))$ est fortement mesurable, il est à valeurs séparables $\mu.p.p$, c'est à dire il existe un ensemble mesurable $\mathcal{I}\subset T_0,\mu(\mathcal{I})=\mu(T_0)$, tel que l'ensemble

$$\bigcup\Big\{G(s,U_n(s));\quad n\geq 1, s\in\mathcal{I}\Big\}$$

est séparable. Par conséquent, il existe un espace de Banach séparable $Y\subset X$ et un ensemble mesurable $\mathcal{I}\subset T_0,\mu(\mathcal{I})=\mu(T_0)$, tel que

$$\Gamma(s,X_1(s))=\bigcup\Big\{\Gamma(s,U_n(s));\quad n\geq 1\Big\}\subset Y,\ pour\ tout\ s\in\mathcal{I}.$$

Donc

$$G(s,X_1(s))=\overline{co}\Big(\Gamma(s,X_1(s))\Big)\subset Y,\ pour\ tout\ s\in\mathcal{I}.$$

Par conséquent, en étudiant l'intégrale

$$(\mathcal{A})\int_t^{t+h} G(s,X_1(s))ds,$$

sans perte de généralité, l'espace X peut être considéré comme un espace de Banach séparable, car on peut effecteur tout raisonnement par rapport à un espace de Banach séparable Y.

Nous désignous par $\mathbf{S}^1_{G(.,X_1(.))}$ l'ensemble de toute les sélections intégrables de Bochner de la multi-application $G(.,X_1(.))$. Puisque l'espace X est séparable, $\mathbf{L}^1(T,X)$ est également séparable. Donc l'ensemble $\mathbf{S}^1_{G(.,X_1(.))}$ contient un sous ensemble $\{v_n(.); n \geq 1\}$ dense dénombrable.

Comme l'intégrale de Bochner est un opérateur linéaire continue de $\mathbf{L}^1(T,X)$ dans X, l'ensemble

$$\left\{\int_t^{t+h} v_n(s)ds, n \geq 1\right\}$$

est dense dans l'ensemble

$$(\mathcal{A})\int_t^{t+h} G(s,X_1(s))ds.$$

D'où grâce au propriétés de la mesure de non compacité de Housdorff, nous avons

$$\chi\left(\left\{\int_t^{t+h} v_n(s)ds; n \geq 1\right\}\right) = \chi\left((\mathcal{A})\int_t^{t+h} G(s,X_1(s))ds\right). \tag{2.11}$$

Comme $\|v_n(s)\| \leq \lambda(s), n \geq 1$, presque partout sur T_0, par le lemme 1.4.5 de la mesure de non compacité, on obtient

$$\chi\left(\left\{\int_t^{t+h} v_n(s)ds;\ n \geq 1\right\}\right) \leq \int_t^{t+h} \chi\Big(\ \{v_n(s)ds;\ n \geq 1\}\ \Big)ds. \tag{2.12}$$

Maintenant par la relation (2.10), et les propriétés de la mesure de non compacité de Hausdorff, on a

$$Y_1(t+h) \subset Y_1(t) + \left((\mathcal{A})\int_t^{t+h} G\big(s,X_1(s)\big)ds\right)$$

donc

$$\begin{aligned}\chi\big(Y_1(t+h)\big) &\leq \chi\bigg(Y_1(t) + \bigg((\mathcal{A})\int_t^{t+h} G(s,Y_1(s)\bigg)ds\bigg)\\ &\leq \chi\big(Y_1(t)\big) + \chi\bigg((\mathcal{A})\int_t^{t+h} G(s,Y_1(s))ds\bigg),\end{aligned}$$

et par les relations (2.11) et (2.12), on obtient

$$\begin{aligned}\chi\big(Y_1(t+h)\big)-\chi\big(Y_1(t)\big) &\leq \chi\bigg((\mathcal{A})\int_t^{t+h} G(s,Y_1(s))ds\bigg)\\ &= \chi\bigg(\bigg\{\int_t^{t+h} v_n(s)ds;\ n\geq 1\bigg\}\bigg)\\ &\leq \int_t^{t+h}\chi\bigg(\ \{v_n(s)ds;\ n\geq 1\}\ \bigg)ds.\end{aligned}$$

alors

$$\chi(Y_1(t+h))-\chi(Y_1(t)) \leq \int_t^{t+h}\chi\bigg(\ \{v_n(s)ds; n\geq 1\}\ \bigg)ds. \tag{2.13}$$

Comme $\{v_n(s);\ n\geq 1\}\subset G(s,X_1(s))$, presque partout sur T_0, alors par la relation (2.2), nous avons

$$\chi\left(\{v_n(s)ds:\ \ n\geq 1\}\right)\leq \omega_I(s,\chi(X_1(s))),\ p.p. \tag{2.14}$$

Par la continuité absolue de la fonction $\chi(X_1(t))$, l'égalité (2.8) et les inégalités (2.13) et (2.14), on obtient

$$\dot{\chi}(X_1(t))\leq \omega_I(t,\chi(X_1(t))), \tag{2.15}$$

presque partout sur T_0.

Puisque $\chi(X_1(0))=\chi(U_0)=0$, par la relation (2.15) et par le Lemme 2.0.4, on obtient $\chi(X_1(t))\equiv 0, t\in T_0$. Implique que pour chaque $t\in T_0$, l'ensemble $X_1(t)$ est relativement compact.

De plus, soient $t_1,t_2\in T_0$, alors grâce au propriétés de l'intégrale et de la distance de Hausdorff, on a
si $0\leq t_1,t_2\leq \dfrac{c}{n}$

$$\mathcal{H}(U_n(t_2),U_n(t_1))=0,$$

si $\dfrac{c}{n}\leq t_1,t_2\leq c$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\left(U_n(t_2),U_n(t_1)\right) &= \mathcal{H}\left(U_0+\int_0^{t_2-\frac{c}{n}} G(s,U_n(s))ds, U_0+\int_0^{t_1-\frac{c}{n}} G(s,U_n(s))ds\right)\\ &= \mathcal{H}(U_0,U_0)+\mathcal{H}\left(\int_0^{t_2-\frac{c}{n}} G(s,U_n(s))ds, \int_0^{t_1-\frac{c}{n}} G(s,U_n(s))ds\right)\\ &= \mathcal{H}\left(\int_0^{t_1-\frac{c}{n}} G(s,U_n(s))ds+\int_{t_1-\frac{c}{n}}^{t_2-\frac{c}{n}} G(s,U_n(s))ds, \int_0^{t_1-\frac{c}{n}} G(s,U_n(s))ds\right)\\ &= \mathcal{H}\left(\int_{t_1-\frac{c}{n}}^{t_2-\frac{c}{n}} G(s,U_n(s))ds, \Theta\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{t_1-\frac{c}{n}}^{t_2-\frac{c}{n}} G(s,U_n(s))ds \right|_X \\
&\leq \int_{t_1-\frac{c}{n}}^{t_2-\frac{c}{n}} \left|G(s,U_n(s))\right|_X ds \\
&= \int_{t_1-\frac{c}{n}}^{t_2-\frac{c}{n}} \mathcal{H}\left(G(s,U_n(s)),\Theta\right) ds \\
&\leq \int_{t_1-\frac{c}{n}}^{t_2-\frac{c}{n}} \lambda(t)dt \\
&\leq \left| M(t_2-\frac{c}{n}) - M(t_1-\frac{c}{n}) \right|,
\end{aligned}$$

d'ou l'équicontinuité de la suite $\big(U_n(.)\big)_{n\geq 1}$.

Comme $U_n(t) \subset X_1(t), t \in T_0, n \geq 1$, alors par le Théorème d'Arzelà-Ascoli la suite $\big(U_n(.)\big)_{n\geq 1}$ est relativement compact dans l'espace des multi-applications continues $U : T_0 \to \mathcal{P}_{kc}(X)$, avec la topologie de la convergence uniforme.

Par conséquent, on peut extraire de la suite $\big(U_n(.)\big)_{n\geq 1}$ une sous suite $\big(U_{n_k}(.)\big), k \geq 1$ qui converge uniformément vers une application continue $U : T \to \mathcal{P}_{kc}(X)$.

On passe à la limite dans (2.4), quand $n_k \to \infty$, on obtient

$$U(t) = U_0 + \int_0^t G(s,U(s))ds, \quad t \in T_0, \tag{2.16}$$

implique que presque partout sur T_0

$$D_H U(t) = G(t,U(t)).$$

■

Dans le Théorème suivant la fonction de Kamke du premier type peut être remplacée par la fonction de Kamke du deuxième type.

Théorème 2.0.8. *Soient X un espace de Banach, $U_0 \in \mathcal{P}_{kc}(X)$ et $\Gamma : T \times \overline{B}(U_0,b) \to \mathcal{P}_k(X)$ une multi-application continue. Supposons que presque partout sur T et pour tout $E \subset \overline{B}(U_0,b)$, on a*

$$\chi(\Gamma(t,E)) \leq w_I(t,\chi(E)),$$

ou

$$\chi(\Gamma(t,E)) \leq w_{II}(t,\chi(E)).$$

Alors, il existe au moins une solution absolument continue $U(.)$, de l'équation différentielle $(\mathcal{P})$.

Démonstration. Puisque nous cherchons la solution locale de l'équation $(\mathcal{P})$ et la multi-application Γ est continue, donc localement bornée, on suppose qu'il existe $M > 0$, tel que

$$\mathcal{H}(\Gamma(t,x),\Theta) \leq M, \;\; x \in \overline{B}(U_0,b), \quad t \in T.$$

Par conséquent

$$\mathcal{H}(G(t,A),\Theta) \leq M, \;\; \textit{pour tout } A \in \mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0,b)), \quad t \in T.$$

Dans le cas où l'inégalité (2.2) est satisfaite avec la fonction de Kamke du premier type, le Théorème 2.0.7 représente un Corollaire du Théorème 2.0.8.

Dans le cas où l'inégalité (2.2) est satisfaite avec la fonction de Kamke $\omega_{II} : T \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ du deuxième type, alors en répétant la preuve du Théorème 2.0.7 et en conservant les même notations, nous obtenons l'inégalité

$$\dot{\chi}(X_1(t)) \leq \omega_{II}(t, \chi(X_1)), \tag{2.17}$$

presque partout sur T_0.

Puisque la suite $\big(U_n(.)\big)_{n\geq 1}$ est équicontinue et U_0 est compact, par la continuité de la multi-application $\Gamma(t,x)$ au point $(0,x), x \in U_0$, on conclut que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que pour tout $n \geq 1$ et $0 \leq t \leq \delta$, on a l'inclusion

$$\Gamma(t, U_n(t)) \subset \Gamma(0, U_0) + \varepsilon \overline{B}(0,1).$$

Par cette inclusion et par les relations (2.5) et (2.8) à $0 \leq t \leq \delta$, nous avons

$$0 \leq \chi(X_1(t)) \leq \varepsilon t. \tag{2.18}$$

Puisque $\chi(X_1(0)) = 0$, alors par la relation (2.18), il existe aussi $D^+\chi(X_1(0))$ et $D^+\chi(X_1(0)) = 0$. Donc par le Lemme 2.0.5 et l'inégalité (2.17), on obtient $\chi(X_1(t)) = 0, t \in T_0$. Cela implique que pour chaque $t \in T_0$, l'ensemble $X_1(t)$ est relativement compact.

Maintenant, afin de compléter la preuve, il est nécessaire de répéter la fin de la preuve du Théorème 2.0.7. ■

Corollaire 2.0.9. *Soient X un espace de Banach, $U_0 \in \mathcal{P}_{kc}(U_0)$ et $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ avec $\Gamma_1, \Gamma_2 : T \times \overline{B}(U_0,b) \to \mathcal{P}_k(X)$ deux multi-applications, intégrablements bornées sur $T \times$*

$\overline{B}(U_0, b)$, et de Carathéodory. Supposons que presque tout $t \in T$, l'ensemble $\Gamma_2(t, \overline{B}(U_0, b))$ est relativement compact et presque partout sur T et pour tout $E \subset \overline{B}(U_0, b)$, on a l'inégalité

$$\chi(\Gamma_1(t, E)) \leq \omega_I(t, \chi(E)).$$

Alors, l'équation différentielle $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution absolument continue $U(.)$.

Démonstration. Par les hypothèses du Corollaire, en conclut que la multi-application $\Gamma(t, x) = \Gamma_1(t, x) + \Gamma_2(t, x)$ est de Carathéodory de $T \times \overline{B}(U_0, b)$ dans $\mathcal{P}_k(X)$, et intégrablement bornée sur l'ensemble $T \times \overline{B}(U_0, b)$.

Puisque pour tout $E \subset \overline{B}(U_0, b)$, on a

$$\Gamma(t, E) \subset \Gamma_1(t, E) + \Gamma_2(t, E), \tag{2.19}$$

presque partout et l'ensemble $\Gamma_2(t, E)$ est relativement compact, alors par les propriétés de la mesure de non compacité de Hausdorff et la relation (2.19), on a

$$\begin{aligned}\chi(\Gamma(t, E)) &= \chi\Big(\Gamma_1(t, E) + \Gamma_2(t, E)\Big) \\ &\leq \chi(\Gamma_1(t, E)) + \chi(\Gamma_2(t, E)) \\ &= \chi(\Gamma_1(t, E)) \\ &\leq \omega_I(t, \chi(E)).\end{aligned}$$

Donc toutes les hypothèses du Théorème 2.0.7 sont satisfaites. Par conséquent, le Corollaire suivant à partir du Théorème 2.0.7. ■

Corollaire 2.0.10. *Soient X un espace de Banach, $U_0 \in \mathcal{P}_{kc}(X), \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ une multi-application avec $\Gamma_1, \Gamma_2 : T \times \overline{B}(U_0, b) \to \mathcal{P}_k(X)$, deux multi-applications continues. Supposons que presque tout $t \in T$, l'ensemble $\Gamma_2(t, \overline{B}_b(U_0, b))$ est relativement compact et on a l'inégalité*

$$\chi(\Gamma_1(t, E)) \leq \omega_i(t, \chi(E)), \quad i = I, II, \tag{2.20}$$

presque partout sur T, et pour tout $E \subset \overline{B}(U_0, b)$.

Alors l'équation différentielle $(\mathcal{P})$ admet une solution absolument continue $U(.)$.

Démonstration. D'après les hypothèses du Corollaire, on conclut que la multi-application $\Gamma(t, x) = \Gamma_1(t, x) + \Gamma_2(t, x)$ est continue. Maintenant, par analogue avec le Corolaire 2.0.9, nous trouvons que les hypothèses du Théorème 2.0.7 sont satisfaites. ■

Remarque 2.0.11. *Dans les Théorème 2.0.7 et 2.0.8, et dans les Corollaires 2.0.9 et 2.0.10 l'instant initial est représenté par* $t_0 = 0$. *A partir les preuves des Théorèmes 2.0.7, et 2.0.8, et les Lemmes 2.0.4 et 2.0.5 il est évident que les hypothèses des Théorèmes 2.0.7 et 2.0.8 sont valables pour chaque* $0 \leq t_0 < a$. *Par conséquent, dans le cadre des hypothèses indiquées ci-dessus l'équation* $(\mathcal{P})$ *admet une solution absolument continue* $U(.), U(t_0) = U_0$, *défini sur un segment* $T_0 = [t_0, c], t_0 < c \leq a$.

Une condition fondamentale dans les Théorèmes 2.0.7 et 2.0.8 est l'inégalité (2.2). *Nous donnons quelques exemples sur les multi-applications qui satisfait cette inégalité.*

Exemple 2.0.12. X *un espace de dimension finie et* Γ *une multi-application intégrablement bornée sur* $T \times \overline{B}(U_0, b)$.

Exemple 2.0.13. *Pour presque tout* $t \in T$, *l'ensemble* $\Gamma(t, \overline{B}(U_0, b))$ *est relativement compact.*

Dans ces exemples, on peut prendre toutes les fonctions $w_I, w_{II} : T \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *du Kamke du premier et du deuxième type, et en particulier identiquement égales à zéro.*

Un exemple, plus représentatif sera obtenu si le Lemme suivant utilisé.

Lemme 2.0.14. *Soient* X *un espace de Banach,* $U_0 \in \mathcal{P}_{kc}(X)$, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ *une multi-application avec* $\Gamma_1, \Gamma_2 : T \times \overline{B}(U_0, b) \to \mathcal{P}_k(X)$. *Supposons que pour presque tout* $t \in T$, *l'ensemble* $\Gamma_2(t, \overline{B}(U_0, b))$ *est relativement compact et on a l'inégalité*

$$\mathcal{H}(\Gamma_1(t, x), \Gamma_1(t, y)) \leq \omega_i(t, \|x - y\|), \tag{2.21}$$

presque partout sur T *et pour tout* $x, y \in \overline{B}(U_0, b)$, *où la fonction de Kamke* $\omega_i, i = I, II$ *croissante par rapport à la deuxième variable. Alors presque partout, pour tout* $E \subset \overline{B}\left(U_0, \frac{b}{4}\right)$, *nous avons l'inégalité*

$$\chi(\Gamma(t, E)) \leq \omega_i(t, \chi(E)), \quad i = I, II. \tag{2.22}$$

Démonstration. Soit $t \in T$, tel que pour tout $x, y \in \overline{B}(U_0, b)$, on a

$$\mathcal{H}\Big(\Gamma_1(t, x), \Gamma(t, y)\Big) \leq \omega_i\Big(t, \|x - y\|\Big),$$

et les fonctions $\omega_i(t, r), i = I, II$, sont continues par rapport à la deuxième variable.

Prendre arbitrairement $E \subset \overline{B}\left(U_0, \frac{b}{4}\right)$ et $0 < \delta \leq \frac{b}{4}$.

Par la définition de la mesure de non compacité de Hausdorff $\chi(E)$, nous avons

$$\mathcal{X}(E) = \inf\left\{\varepsilon > 0, E \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, r_i), y_i \in X, r_i < \varepsilon\right\},\ i = 1, 2, 3, ..., n,$$

donc

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{n} \big(y_i + (\chi(E) + \delta)\overline{B}(0, 1)\big)\,, \tag{2.23}$$

c'est à dire E est recouvert par la réunion fini de boules ouvertes de centre si et de rayon $\leq \Big(\chi(E) + \delta\Big)$.

Comme $\chi(E) \leq \dfrac{b}{4}$, on obtient $y_i \in \overline{B}(U_0, b),\ \ i = \overline{1, n}$.

Par conséquent, par la relation (2.21), on a, pour tout $x \in E$, il existe y_i tel que

$$\Gamma_1(t, x) \subset \Gamma_1(t, y_i) + \omega_j(t, \|x - y_i\|)\overline{B}(0, 1),$$

et comme $x \in E$, alors par l'inclusion(2.3), on obtient

$$x \in \Big(y_i + \big(\chi(E) + \delta\big)\overline{B}(0, 1)\Big)$$

implique

$$\big\|x - y_i\big\| \leq \chi(E) + \delta,$$

donc

$$\Gamma_1\big(t, x\big) \subset \Gamma_1\big(t, y_i\big) + w_j\Big(t, \chi(E) + \delta\Big)\overline{B}(0, 1),\ j = I, II.$$

Par conséquent,

$$\Gamma_1(t, E) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_1(t, y_i) + \omega_j\Big(t, \chi(E) + \delta\Big)\overline{B}(0, 1), \quad j = I, II. \tag{2.24}$$

Par cette inclusion, la compacité de l'ensemble $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \Gamma_1(t, y_i)$ et par les propriétés de la mesure de non-compacité, nous obtenons

$$\chi(\Gamma_1(t, E)) \leq \omega_i(t, \chi(E) + \delta), \quad i = I, II.$$

Comme $\omega_i(t, r), i = I, II$, sont des fonctions continues en r et $\delta > 0$ arbitraire, nous avons

$$\chi(\Gamma_1(t, E)) \leq \omega_i(t, \chi(E)), \quad i = I, II.$$

D'autre part, on a

$$\Gamma\big(t, E\big) \subset \Gamma_1\big(t, E\big) + \Gamma_2\big(t, E\big),\ p.p.\ t \in T,$$

donc, par les propriétés de la mesure de non compacité de Hausdorff, et puisque $\Gamma_2(t,E)$ est relativement compact, on obtient

$$\begin{aligned}\chi\big(\Gamma(t,E)\big) &= \chi\Big(\Gamma_1(t,E)+\Gamma_2(t,E)\Big)\\ &\leq \chi\big(\Gamma_1(t,E)\big)+\chi\big(\Gamma_2(t,E)\big)\\ &\leq \chi\big(\Gamma_1(t,E)\big)\\ &\leq w_i\big(t,\chi(E)\big),\ i=I,II.\end{aligned}$$

■

Chapitre 3

Résultat d'existence pour une équation différentielle multivoque "Théorème de comparaison"

Dans le chapitre précédent, nous avons examiné les questions de l'existence d'une solution locale de l'équation différentielle $(\mathcal{P})$, en utilisant la notion de mesure de non compacité.

Dans ce chapitre, nous examinerons les mêmes questions sur la base des principales idées et méthodes du principe de comparaison (voir [19], [20] et [21] en leur communiquant une interprétation multivoque.
On pose $T = [0, a],\ a > 0$

Définition 3.0.1. *Soient X un espace de Banach, $U_0 \in \mathcal{P}_{kc}(X)$, on dit que $\Gamma : T \times \overline{B}(U_0, b) \to \mathcal{P}_k(X)$ une multi-application localement essentiellement bornée au point $(t, x) \in T \times \overline{B}(U_0, b)$, s'il existe des voisinages $O(t), Q(x)$ des points t, x et un nombre $M > 0$, tel que*

$$\mathcal{H}(\Gamma(\tau, y), \Theta) \leq M,$$

presque pour tout $\tau \in O(t)$ et pour tout $y \in Q(x)$.

- *La multi-application Γ est localement essentiellement bornée sur $T \times \overline{B}(U_0, b)$, si elle est localement essentiellement bornée à chaque point $(t, x) \in T \times \overline{B}(U_0, b)$.*

Remarque 3.0.2. *Si Γ est localement essentiellement bornée sur $T \times \overline{B}(U_0, b)$ donc par la compacité des ensembles T et U_0, on conclut qu'il existe $d, 0 < d \leq b$, tel que Γ est* *essentiellement bornée sur l'ensemble* $T \times \overline{B}(U_0, d)$.

Lemme 3.0.3. *Soient* X *un espace de Banach,* $G : T \times \mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0, b)) \to \mathcal{P}_{kc}(X)$ *une multi-application continue et bornée par un nombres* $M > 0$, $T_0 = [0, c]$, $0 < c < \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$. *Alors pour tout* $n \geq 1$, *il existe un nombre entier* $N(n) > 0$, *et des nombre* δ_i^n, t_i^n, $i = 1, ..., N(n)$, *et une multi-application* $U^n : T_0 \to \mathcal{P}_{kc}(X), U^n(0) = U_0$, *tel que*

$$\mathcal{H}(U^n(t), U^n(s)) \leq M|t - s|, \qquad t, s \in T_0, \tag{3.1}$$

$$\mathcal{H}(U_0, U^n(t)) < b, \qquad t \in T_0, \tag{3.2}$$

$$\delta_i^n > 0, \ t_{i-1}^n + \delta_i^n \in T_0, \quad i = 1, ..., N(n). \tag{3.3}$$

Si

$$\mathcal{H}(U, U^n(t_{i-1}^n)) \leq M\delta_i^n, \quad t \in [t_{i-1}^n, t_{i-1}^n + \delta_i^n],$$

alors

$$\mathcal{H}\Big(G(t, U), G\big(t_{i-1}^n, U^n(t_{i-1}^n)\big)\Big) \leq \frac{1}{n}, \tag{3.4}$$

où $U \in \mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0, b))$, *avec* δ_i^n *est le plus grand des nombres possibles où les inégalités* (3.3) *et* (3.4) *sont satisfaites.*

Démonstration. On pose $t_0^n = 0$, $U^n(t_0^n) = U_0$.

Par la continuité de la multi-application G au point $(0, U_0)$, il existe un nombre maximal $\delta_1^n > 0$, tel que quand $i = 1$ les deux inégalités (3.3) et (3.4) sont satisfaites.

En prenant $t_1^n = t_0^n + \delta_1^n$, et on définit sur $[t_0^n, \ t_1^n]$ la multi-application $U^n(.)$ par

$$U^n(t) = U^n(t_0^n) + \int_{t_0^n}^{t} G(s, U^n(s))ds,$$

il est claire que la multi-application $U^n(.)$ vérifie les inégalités (3.1) et (3.2) sur l'intervalle $[t_0^n, t_1^n]$.

En effet.

Soient $t, s \in [t_0^n, t_1^n]$, nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(U^n(t), U^n(s)) &= \mathcal{H}\left(U^n(t_0^n) + \int_{t_0^n}^{t} G(\tau, U^n(\tau))d\tau, U^n(t_0^n) + \int_{t_0^n}^{s} G(\tau, U^n(\tau))d\tau\right) \\ &= \mathcal{H}\left(U^n(t_0^n), U^n(t_0^n)\right) + \mathcal{H}\left(\int_{t_0^n}^{t} G(\tau, U^n(\tau))d\tau, \int_{t_0^n}^{s} G(\tau, U^n(\tau))d\tau\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathcal{H}\left(\int_{t_0^n}^{s} G(\tau, U^n(\tau))d\tau + \int_{s}^{t} G(\tau, U^n(\tau))d\tau, \int_{t_0^n}^{s} G(\tau, U^n(\tau))d\tau\right) \\
&= \mathcal{H}\left(\int_{s}^{t} G(\tau, U^n(\tau))d\tau, \Theta\right) \\
&= \left|\int_{s}^{t} G(\tau, U^n(\tau))d\tau\right|_X \\
&\leq \int_{s}^{t} |G(\tau, U^n(\tau))|_X d\tau \\
&= \int_{s}^{t} \mathcal{H}\left(G(\tau, U^n(\tau))d\tau, \Theta\right) d\tau \\
&\leq M|t-s|,
\end{aligned}
$$

en plus, si $t \in [t_0^n, t_1^n]$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}(U_0, U^n(t)) &= \mathcal{H}\left(U_0, U^n(t_0^n) + \int_{t_0^n}^{t} G(s, U^n(s))ds\right) \\
&= \mathcal{H}(U_0, U^n(t_0^n)) + \mathcal{H}\left(\int_{t_0^n}^{t} G(s, U^n(s))ds, \Theta\right) \\
&= \left|\int_{t_0^n}^{t} G(s, U^n(s))ds\right|_X \\
&\leq \int_{t_0^n}^{t} |G(s, U^n(s))|_X \, ds \\
&= \int_{t_0^n}^{t} \mathcal{H}\left(G(s, U^n(s)), \Theta\right) ds \\
&\leq Mt, \\
&\leq Mc \\
&< M\frac{b}{M} = b.
\end{aligned}
$$

Supposons maintenant que $U^n(.)$ est définie sur $[t_0^n, t_{i-1}^n]$, $2 \leq i \leq N(n)$. En utilisant la continuité de G au point $(t_{i-1}^n, U^n(t_{i-1}))$ et nous choisissons le plus grand des nombres $\delta_i^n > 0$, tel que les inégalités (3.3) et (3.4) sont satisfaites.

En prenant $t_i^n = t_{i-1}^n + \delta_i^n$ et on définit $U^n(.)$ sur $[t_{i-1}^n, t_i^n]$, par

$$
U^n(t) = U^n(t_{i-1}^n) + \int_{t_{i-1}^n}^{t} G(s, U^n(s))ds. \tag{3.5}
$$

Il est facile de vérifier que sur $[t_0^n, t_i^n]$, l'application $U^n(.)$ vérifie les inégalités (3.1) et (3.2).

Pour compléter la démonstration, nous allons démontrer qu'il existe un nombre entier positif $N(n)$ pour lequel $t^n_{N(n)} = c$.

Supposons que le contraire est vrai. Alors il existe une limite $t^* = \lim_{i\to\infty} t^n_i,\ t^* \in (t^n_0, c]$. Par l'inégalité (3.1), on conclut que la suite $\big(U^n(t^n_i)\big)_{i\geq 1}$, est fondamental dans l'espace $\mathcal{P}_{kc}(X)$. Puisque $\mathcal{P}_{kc}(X)$ est complet, il existe une limite $\lim_{i\to\infty} U^n(t^n_i) = U^*$, et d'après l'inégalité (3.2), $U^* \in \overline{B}(U_0, b)$.

Par la continuité de G et la convergence $t^n_i \to t^*, U^n(t^n_i) \to U^*$ quand $i \to +\infty$, alors il existe $\sigma > 0$ et i_0 tel que

$$\mathcal{H}(G(t,U), G(t^*, U^*)) \leq \frac{1}{2n}, \tag{3.6}$$

alors $|t-t^*| \leq 2\sigma, \mathcal{H}(U, U^*) \leq 2\sigma, t \leq c,\ U \in \mathcal{P}_{kc}\big(\overline{B}(U_0, b)\big)$ et $t^*-t^n_{i-1} \leq \sigma, \mathcal{H}(U^*, U^n(t^n_i)) \leq \sigma$, pour tout $i \geq i_0$.

Choisissez un nombre entier $k \geq i_0$, tel que

$$\delta^n_k < \min\left\{\frac{\sigma}{2M}, \sigma\right\}.$$

Si nous prenons $t \in T, U \in \mathcal{P}_{kc}\big(\overline{B}(U_0, b)\big)$ qui satisfait les conditions

$$t^n_{k-1} \leq t \leq t^n_{k-1} + \sigma,$$

$$\mathcal{H}(U, U^n(t^n_{k-1})) \leq M\left(\delta_k + \frac{\sigma}{4M}\right),$$

alors, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(U, U^*) &\leq \mathcal{H}(U, U^n(t^n_{k-1})) + \mathcal{H}(U^n(t^n_{k-1}), U^*)\\
&\leq M\left(\delta^n_k + \frac{\sigma}{4M}\right) + \sigma\\
&\leq M\left(\frac{\sigma}{2M} + \frac{\sigma}{4M}\right) + \sigma\\
&\leq M.\frac{3\sigma}{4M} + \sigma\\
&\leq \frac{3\sigma}{4} + \sigma\\
&\leq 2\sigma
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|t - t^*| &\leq |t - t^n_{k-1}| + |t^n_{k-1} - t^*|\\
&\leq 2\sigma.
\end{aligned}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\big(G(t,U),G(t_{k-1}^n,U^n(t_{k-1}^n))\big) &\le \mathcal{H}\big(G(t,U),G(t^*,U^*)\big)+\mathcal{H}\big(G(t^*,U^*),G(t_{k-1}^n,U^n(t_{k-1}^n))\big)\\ &\le \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}\\ &= \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Ce qui est une contradiction avec le choix de δ_k^n, parce que $\delta_k^n < \sigma$. ■

Soit $\mathbb{R}^k$ un espace de dimension k, muni de la norme $\|r\| = \max\{|r_l|;\ l=1,...,k\}$ et la relation semi-ordonné : $s \le r$, si $s_l \le r_l,\ l=1,...,k$.

Considérons la fonction vectorielle continue $V=(V_1,...,V_k),\ V: T\times\mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0,b))\times\mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0,b))\to\mathbb{R}^k$ avec $U_0\in\mathcal{P}_{kc}$ et X un espace de Banach, et la fonctionnelle continue $v(.)$, tel que $v(t,A,B)=\max\limits_{1\le l\le k}\{V_l(t,A,B)\}$ vérifie les propriétés :

1) $v: T\times\mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0,b))\times\mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0,b))\to\mathbb{R}^+ :\ A=B\Rightarrow v(0,A,B)=0$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} v(t,A_n,B_n)=0,\ t\in T\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{H}(A_n,B_n)=0$;
3) $V_l(t_1,A_1,B_1)-V_l(t_2,A_2,B_2)\le L\big[(t_1-t_2)+\mathcal{H}(A_1+B_2,B_1+A_2)\big],\ L>0,\ t_1\ge t_2, l=1,...,k.$

Soit $w: T\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ une fonction vectorielle tel que

1) w est une fonction de Carathéodory, intégralement bornée sur des ensembles bornées de $T\times\mathbb{R}^k$;
2) pour presque $t\in T$, $w(t,r)$ satisfait la condition de Wazewski [25] sur le deuxième variable, c'est à dire

$$w_l(t,r)\le w_l(t,s),\ r_l=s_l, r_m\le s_m, m\ne l \ et\ m,l=1,...,k;$$

3) sur chaque segment $[0,c], 0<c\le a$, la solution de l'équation

$$\dot r(t)=w(t,r(t)),\quad r(0)=0,$$

est la fonction de Carathéodory $r(.)$ qui est identiquement égal à zéro.

On note par $\underline{D}^+V(t,A,B)$, l'expression

$$\lim_{h\to 0^+} inf h^{-1}\Big[V\Big(t+h, A+h\,\overline{co}\big(\Gamma_1(t,A)\big), B+h\,\overline{co}\big(\Gamma_1(t,B)\big)\Big)-V(t,A,B)\Big],\ A,B\in\mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0,b)).$$

Proposition 3.0.4. *Soient X un espace de Banach, Y un espace métrique, Z un sous ensemble fermé de Y, et $F: Z\to\mathcal{P}_{kc}(X), H: Y\to\mathcal{P}_{kc}(X)$ des multi-applications continues avec $F(z)\subset H(z),\ z\in Z$. Alors il existe une multi-application continue $F^*: Y\to\mathcal{P}_{kc}(X)$, tel que $F^*(y)\subset H(y)$, pour tout $y\in Y$.*

Définition 3.0.5. $\big(voir[2]\big)$ *Une fonction* $r : T \to \mathbb{R}^k$ *est dite absolument semi-continue supérieurement sur le segment* T*, si pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\delta > 0$ *tels que pour toute partition dénombrable de* T *par des intervalles disjoints* $(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)$*, vérifiant*

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta,$$

alors, on a

$$\sum_{i=1}^{n}\{r_j(b_i) - r_j(a_i)\} < \varepsilon, \qquad j = 1, ..., k.$$

La proposition suivante est un cas particulier du Théorème 1 dans Kozlov [18].

Proposition 3.0.6. *Soit* $\varphi : T \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ *une fonction vectorielle des variables* (t, r) *qui a les mêmes propriétés* 1) *et* 2) *que la fonction* $\omega(t, r)$*. Supposons que* $r(.), r(0) = r_0$*, est une solution de l'équation* $\dot{r} = \varphi(t, r)$ *définie sur* T*. Si la fonction continue* $s(t)$ *est absolument semi continue supérieurement ,* $s(0) \leq r(0)$*, et*

$$\underline{D}^+ s(t) \leq \varphi(t, s(t)),$$

presque partout sur T*, où le symbole* $\underline{D}^+$ *désigne la dérivée inférieure droite de* $s(t)$*, alors* $s(t) \leq r(t),\ t \in T$*. (La proposition sera également vraie dans le cas où les fonctions* $\varphi(t, r)$ *et* $s(t)$ *sont continues, et l'inégalité* $\underline{D}^+ s(t) \leq \varphi(t, s(t))$ *est satisfaite partout sur* T*, Sauf pour un nombre dénombrable de points).*

Le Théorème suivant est le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 3.0.7. *Soient* X *un espace de Banach* $U_0 \in \mathcal{P}_{kc}(X), \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ *avec* $\Gamma_1, \Gamma_2 : T \times \overline{B}(U_0, b) \to \mathcal{P}_k(X)$*,* Γ_1 *une multi-applications localement essentiellement bornée vérifie la propriété de Scorza-Dragoni, et* Γ_2 *une multi-application localement complètement bornée, uniformément continue. S'il existe des fonctions vectorielles* V *et* w *avec les propriétés* 1) *à* 3) *tel que ,*

$$\underline{D}^+ V(t, A, B) \leq w(t, V(t, A, B)), \tag{3.7}$$

presque partout sur T*, et pour tout* $A, B \in \mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0, b))$*.*

Alors, il existe une solution $U(.)$ *de l'équation différentielle* $(\mathcal{P})$*.*

Démonstration. Par les hypothèses du Théorème, il existe $d > 0,\ N > 0$, tel que

$$\mathcal{H}(\Gamma_1(t, x), \Theta) \leq N,$$

presque partout sur T pour tout $x \in \overline{B}(U_0, d)$, et l'ensemble $\Gamma_2(t, \overline{B}(U_0, d))$ est relativement compact.

Puisque nous traitons une solution locale de l'équation différentielle $(\mathcal{P})$, on peut supposer que

$$\mathcal{H}(\Gamma_1(t,x), \Theta) \leq M_1$$

et

$$\mathcal{H}(\Gamma_2(t,x), \Theta) \leq M_2,$$

presque partout sur T, pour tout $x \in \overline{B}(U_0, b)$ et l'ensemble $\Gamma_2(T, \overline{B}(U_0, b))$ est relativement compact.

Soit $0 < c < \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$, $M = M_1 + M_2, T_0 = [0, c]$, et soit $\varepsilon \downarrow 0,\ n \geq 1$. Comme la multi-application Γ_1 est vérifie la propriété de Scorza-Dragoni, il existe une suite des compacts $\mathcal{I}_n \subset T_0,\ n \geq 1$, croissant par rapport à l'inclusion telle que $\mu(T_0 \setminus \mathcal{I}_n) \leq \varepsilon_n,$ la restriction de Γ_1 sur $\mathcal{I}_n \times \overline{B}(U_0, b)$ notée $\Gamma_1 \big|_{\mathcal{I}_n \times \overline{B}(U_0,b)}$ est continue, et $\mathcal{H}(\Gamma_1(t,x), \Theta) \leq M_1$, pour chaque $t \in \mathcal{I}_n,\ x \in \overline{B}(U_0, b)$.

Maintenant, on considère les deux multi-applications $G_1, G_2 : T \times \mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0, b)) \to \mathcal{P}_{kc}(X)$ généré respectivement par Γ_1 et Γ_2, c'est à dire $G_1(t, A) = \overline{co}\big(\Gamma_1(t, A)\big)$ et $G_2(t, A) = \overline{co}\big(\Gamma_2(t, A)\big)$, où $A \in \mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0, b))$.

Par le Lemme 2.0.1, on conclut que G_1 vérifie la propriété de Scorza-Dragoni, et G_2 est uniformément continue et complètement bornée.

En plus

$$\mathcal{H}(G_1(t, A), \Theta) \leq M_1,$$

et

$$\mathcal{H}(G_2(t, A), \Theta) \leq M_2,$$

presque partout sur T_0, pour tout $A \in \mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0, b))$, la restriction de G_1 sur $\mathcal{I}_n \times \mathcal{P}_{kc}\big(\overline{B}(U_0, b)\big)$ est continue, et $\mathcal{H}(G_1(t, A), \Theta) \leq M_1$, pour tout $t \in \mathcal{I}_n,\ A \in \mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0, b))$.

En utilisant le Théorèmes de Dugunji, on obtient pour tout $n \geq 1$, il existe une application continue $G_{1,n} : T_0 \times \mathcal{P}kc\big(\overline{B}(U_0, b)\big) \to \mathcal{P}_{kc}(X)$, tel que

$$G_{1,n}\big/_{\mathcal{I}_n \times \mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0,b))} = G_1$$

et

$$\mathcal{H}(G_{1,n}(t, A), \Theta) \leq M_1, \quad t \in T_0,\ A \in \mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0, b)).$$

Soit $G_n^* = G_{1,n} + G_2$. Il est clair que G_n^* est une multi-application continue de $T_0 \times \mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0, b))$ dans $\mathcal{P}_{kc}(X)$, et nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(G_n^*(t,A),\Theta) &= \mathcal{H}\big(G_{1,n}(t,A) + G_2(t,A),\Theta\big) \\
&\leq \mathcal{H}\big(G_{1,n}(t,A),\Theta\big) + \mathcal{H}\big(G_2(t,A),\Theta\big) \\
&\leq M_1 + M_2 \\
&= M,
\end{aligned}$$

donc

$$\mathcal{H}(G_n^*(t,A),\Theta) \leq M, \quad t \in T_0,\ A \in \mathcal{P}_{kc}\big(\overline{B}(U_0,b)\big).$$

Pour chaque G_n^* et par la relation (3.5), nous allons construire une multi-application $U_*^n : T_0 \to \mathcal{P}_{kc}(X)$, avec les propriétés établies dans le Lemme 3.0.3.

On pose $r_{nm}(t) = V(t, U_*^n(t), U_*^m(t)),\ m \geq n \geq 1$. Alors par les propriétés de la fonction vectorielle V et par la relation (3.1), on conclut que $r_{nm}(.)$ est une fonction vectorielle continue, $r_{nm}(0) \leq 0$, et

$$\begin{aligned}
r_{nm}(t_1) - r_{nm}(t_2) &= V\big(t_1, U_*^n(t_1), U_*^m(t_1)\big) - V\big(t_2, U_*^n(t_2), U_*^m(t_2)\big) \\
&= \big[V_l\big(t_1, U_*^n(t_1), U_*^m(t_1)\big) - V_l\big(t_2, U_*^n(t_2), U_*^m(t_2)\big)\big]I, l = 1, ..., k \\
&\leq L\big[(t_1 - t_2) + \mathcal{H}\big(U_*^n(t_1) + U_*^m(t_2), U_*^n(t_2) + U_*^m(t_1)\big)\big]I \\
&\leq L\big[(t_1 - t_2) + \mathcal{H}\big(U_*^n(t_1), U_*^n(t_2)\big) + \mathcal{H}\big(U_*^m(t_2) + U_*^m(t_1)\big)\big]I \\
&\leq L\big[(t_1 - t_2) + M(t_1 - t_2) + M(t_1 - t_2)\big]I \\
&= L\big[(t_1 - t_2) + 2M(t_1, t_2)\big]I \\
&= \big(2M + 1\big)L(t_1 - t_2)I,
\end{aligned}$$

donc

$$r_{nm}(t_1) - r_{nm}(t_2) \leq (2M+1)L(t_1 - t_2)I,\ t_1 \geq t_2, \tag{3.8}$$

où I est une colonne unitaire de dimension k.

Par l'inégalité (3.8), on conclut que $r_{nm}(.)$ est une fonction absolument semi-continue supérieurement .

Nous prenons $t \in \mathcal{I}_n$. Alors il existe des nombres positifs i et j, tels que $t \in [t_{j-1}^m, t_j^m) \cap [t_{i-1}^n, t_i^n)$.

Par conséquent, par les relations (3.7), (3.8), par la propriété 3) de la fonction vectorielle V, et le Lemme 3.0.3, nous avons pour presque partout $t \in \mathcal{I}_n$,

$$\underline{D}^+ r_{nm}(t) \leq w(t, r_{nm}(t)) + L\left(\varphi_{nm}(t) + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)I, \tag{3.9}$$

où

$$\varphi_{n,m}(t) = \mathcal{H}\left(\Gamma_2(t, U_*^n(t)), \Gamma_2(t, U_*^m(t))\right).$$

En utilisant l'equicontinuité de la suite $U_*^n : T_0 \to \mathcal{P}_{kc}\big(\overline{B}(U_0, b)\big), n \geq 1$, et les propriétés de la multi-application Γ_2, on obtient que la suite $(\Gamma_2(., U_*^n(.)))_{n\geq 1}$, est relativement compact dans l'espace des multi-applications continues, de T_0 dans $\mathcal{P}_k(X)$, avec la topologie de convergence uniforme.

Par conséquent, on peut extraire de $(\Gamma_2(., U_*^n(.)))_{n\geq 1}$ une sous suite qu'on note aussi de la même manière converge uniformément.

Soit

$$e_n = \sup\{\varphi_{nm}(t);\ m \geq n,\ t \in T_0\}.$$

Alors, par la convergence de la suite $(\Gamma_2(., U_*^n(.)))_{n\geq 1}$, on conclut que $e_n \downarrow 0, n \geq 1$.

Donc la relation (3.9), implique

$$\underline{D}^+ r_{nm}(t) \leq w(t, r_{nm}(t)) + L\left(\frac{2}{n} + e_n\right) I,\ m \geq n. \tag{3.10}$$

presque partout sur $\mathcal{I}_n$.

On note par $Q \subset \mathbb{R}^k$ un cube de centre 0 et ses côtés de la longueur $2L(2M+1)c$.

Soit $\lambda_Q(t)$ une fonction intégrable sur T_0, tel que $\|w(t,r)\| \leq \lambda_Q(t)$, presque partout sur T_0, pour tout $r \in Q$. On pose

$$\lambda_n(t) = \max\left\{L(2M+1), \lambda_Q(t) + L\left(\frac{2}{n} + e_n\right)\right\},\ n \geq 1, T_1 = [0, c_1],$$

$$c_1 = \max\left\{t \in T_0\ ;\ \int_0^1 \lambda_1(s)ds \leq (2M+1)Lc\right\}. \tag{3.11}$$

On considère la fonction $w_n : T_0 \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, définie par

$$w_n(t,r) = \begin{cases} w(t,r) + L\left(\dfrac{2}{n} + e_n\right) I, & t \in \mathcal{I}_n, \\ \lambda_n(t) I, & t \in T \setminus \mathcal{I}_n. \end{cases} \tag{3.12}$$

Il est claire que $w_n(t,r),\ n = 1, 2, ...$ est une fonction de Carathéodory, pour presque tout $t \in T_0$, satisfait la condition de Wazewski par rapport à la deuxième variable et tel que

$$\begin{aligned} w(t,r) &\leq w_{n+1}(t,r) \\ &\leq w_n(t,r), \end{aligned}$$

et

$$\|w_n(t,r)\| \leq \lambda_1(t) \tag{3.13}$$

presque partout sur T_0, pour tout $r \in Q$. Par les relations (3.8) et (3.10), on obtient

$$\underline{D}^+ r_{nm}(t) \leq w_n(t, r_{nm}(t)), \quad m \geq n, \tag{3.14}$$

presque par tout sur T_0.

Par les relations (3.11) et (3.12), et par les propriétés de w_n, on conclut que pour tout $n \geq 1$, l'équation

$$\dot{y} = w_n(t,y), \ y(0) = 0, \tag{3.15}$$

admet une solution $y_n(.)$ définie sur T_1. Par les relations (3.13), (3.14) et la propriété 3) de la fonction w, et par la Proposition 3.0.6, la suite $\big(y_n(.)\big)_{n\geq 1}$, est relativement compact dans l'espace $C(T_1, \mathbb{R}^k)$, et pour tout $n \geq 1$

$$0 \leq y_{n+1}(t) \leq y_n(t),$$

et

$$r_{nm}(t) \leq y_n(t), \quad t \in T_1, \quad m \geq n. \tag{3.16}$$

Par la relation (3.16) et la compacité relativement de $\big(y_n(.)\big)_{n\geq 1}$, la suite $\big(y_n(t)\big)_{n\geq 1}$ est décroissante, converge uniformément sur T_1 vers la fonction continue $y(t) \geq 0$. D'après la définition de w_n, on conclut que la suite $\big(w_n(t, y_n(t))\big)_{n\geq 1}$, converge vers $w(t, y(t))$, presque partout sur T_1.

par conséquent, par les relations (3.13), (3.15) et par le Théorème de Lebesgue, on obtient que

$$\dot{y}(t) = w(t, y(t)), \quad y(0) = 0, \tag{3.17}$$

presque partout sur T_1. La propriété 3) de la fonction w, implique que $y(t) \equiv 0, \quad t \in T_1$. Donc, par (3.16) et par la propriété 1) de la fonction vectorielle V, on conclut que pour tout $\eta > 0$, il existe $n(\eta)$, tel que pour tout $m \geq n(\eta)$,

$$0 \leq v(t, U_*^n(t), U_*^m(t)) \leq \eta. \tag{3.18}$$

Par la relation (3.18) et de la propriété 2) de la fonction vectorielle V, on obtient que la suite $U_*^n : T_1 \to \mathcal{P}_{kc}(X),\ n \geq 1$, est fondamental dans la topologie de convergence ponctuel sur T_1. Comme l'espace $\mathcal{P}_{kc}(X)$ est complet, et la suite $\big(U_*^n(.)\big)_{n\geq 1}$, est équicontinue, alors il est converge uniformément sur T_1 vers une multi-application $U_* : T_1 \to \mathcal{P}_{kc}(X),\ \ U_*(0) = U_0,\ \ U_*(t) \subset \overline{B}(U_0, b),\ \ t \in T_1$.

Considérons maintenant la multi-application $G : T \times \mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0, b)) \to \mathcal{P}_{kc}(X)$, générée par la multi-application $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$. Il est clair que $G(t, A) \subset G_1(t, A) + G_2(t, A)$, presque partout sur T, pour tout $A \in \mathcal{P}_{kc}\big(\overline{B}(U_0, b)\big)$, la restriction de G sur $\mathcal{I}_n \times \mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0, b)),\ n \geq 1$, est continue, et $\mathcal{H}(G(t, A), \Theta) \leq M$, pour tout $A \in \mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0, b))$ et $t \in \mathcal{I}_n,\ n \geq 1$. Comme

$$G(t, A) \subset G_n^*(t, A),\ t \in \mathcal{I}_n,\ A \in \mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0, b)),\quad n \geq 1,$$

alors par la proposition 3.0.4, pour tout $n \geq 1$, il existe une multi-application continue $G_n : T_0 \times \mathcal{P}_{kc}\big(\overline{B}(U_0, b)\big) \to \mathcal{P}_{kc}(X)$ tel que

$$G_n(t, A) \subset G_n^*(t, A),\ t \in T_0,\ A \in \mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0, b)).$$

On pose

$$Y = \overline{co}\bigg(\bigcup \{U_*^n(t);\ t \in T_1,\ n \geq 1\}\bigg).$$

Comme la suite $U_*^n : T_1 \to \mathcal{P}_{kc}(X),\ n \geq 1$, converge uniformément sur T_1, alors Y est un ensemble convexe compact dans X. L'ensemble $\mathcal{P}_k(Y) \subset \mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0, b))$ est aussi un ensemble compact dans $\mathcal{P}_{kc}(X)$.

Fixer $n \geq 1$. Comme les multi-applications G_n sont uniformément continues sur $T_1 \times \mathcal{P}_{kc}(Y)$, alors il existe $\delta_n > 0$, tel que

$$\mathcal{H}(G_n(t, A), G_n(s, B)) \leq \frac{1}{n},$$

pour $|t - s| < \delta_n,\ \mathcal{H}(A, B) \leq M\delta_n,\ t, s \in T_1,\ A, B \in \mathcal{P}_{kc}(Y)$.

Soit $\big\{0 = s_0^n < s_1^n < ... < s_{k_n}^n = c_1\big\}$ une subdivision de T_1, tel que la longueur maximale des intervalles $\leq \delta_n$.

On note par $\tau_0^n = 0 < \tau_1^n < ... < \tau_{m_n}^n = c_1$, les points $s_j^n, j = 0, ..., k_n$, et les points t_l^n du segment T_1 numéroté en ordre croissant qui ont été obtenus la construction de la multi-application $U_*^n(T)$.

On définit la multi-application $U^n : T_1 \to \mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0, b)),\ \ U^n(0) = U_0$, on suppose que pour $t \in [\tau_{i-1}^n, \tau_i^n],\ \ i = 1, ..., m_n$,

$$U^n(t) = U^n(\tau_{i-1}^n) + \int_{\tau_{i-1}^n}^t G(s, U(s)ds.$$

Comme $G_n(t,A) \subset G_n^*(t,A),\ t \in T_0,\ A \in \mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0,b))$ et parmi les points $\tau_i^n, i = 1,...,m_n$, de la subdivision du segment T_1 il ya des points contenus t_l^n, alors $U^n(t) \subset U_*^n(t),\ t \in T_1$. Donc $U^n(t) \subset Y,\ t \in T_1$.

Sur l'exécution des constructions pour chaque $n \geq 1$, on obtient une suite $U^n : T_1 \to \mathcal{P}_{kc}(Y),\ n \geq 1$. Puisque

$$\mathcal{H}(G_n(t,A),\Theta) \leq M,\ t \in T_0,\ A \in \mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0,b)),$$

alors

$$\mathcal{H}(U^n(t),U^k(s)) \leq M|t-s| \ \ t,s \in T_1.$$

Ainsi la suite $\big(U^n(.)\big)_{n\geq 1},\ t \in T_1$, est relativement compact dans l'espace des multi-applications continue de T_1 dans $\mathcal{P}_{kc}(X)$, avec la topologie de convergence uniforme, on peut supposer que la suite $\big(U^n(.)\big)_{n\geq 1}$, converge uniformément vers une multi-application $U : T_1 \to \mathcal{P}_{kc}(X)$.

Soit $t \in T_1 \bigcap (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}_n)$. Alors pour n suffisamment grand on a l'inégalité

$$G(t,U^n(t)) = G_n(t,U^n(t)),$$

Par conséquent la suite $G_n(t,U^n(t)),\ n \geq 1$. converge vers $G(t,U(t))$, presque partout sur T_1. Donc pour chaque $t \in T_1$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t G_n(s,U^n(s))ds = \int_0^t G(s,U(s))ds. \tag{3.19}$$

A partir de la construction de $U^n(t)$ et l'inégalité

$$\mathcal{H}(G_n(t,A),G_n(s,B)) \leq \frac{1}{n},\ |t-s| < \delta_n,\ \mathcal{H}(A,B) \leq M\delta_n,\ t,s \in T_1,\ A,B \in \mathcal{P}_{kc}(Y),$$

on conclut que pour tout $t \in T_1$,

$$\mathcal{H}(U^n(t), U_0 + \int_0^t G_n(s,U^n(s))ds) \leq \frac{t}{n}. \tag{3.20}$$

Les relations (3.19) et (3.20) impliquent immédiatement

$$U(t) = U_0 + \int_0^t G(s,U(s))ds, \quad t \in T_1.$$

Par conséquent, $U : T_1 \to \mathcal{P}_{kc}(X),\ U(0) = U_0$, est une solution de l'équation différentielle $(\mathcal{P})$ définie sur T_1. $\blacksquare$

Remarque 3.0.8. *Si* $\Gamma_2(t,x) = \Theta,\ t \in T,\ x \in \overline{B}(U_0,b)$*, alors la condition* 3) *de la fonction vectorielle* V *peut être remplacée par la condition suivante*

$$V_l(t_1,A_1,B_1) - V_l(t_2,A_2,B_2) \leq L\big[(t_1-t_2) + \mathcal{H}(A_1,A_2) + \mathcal{H}(B_1,B_2)\big].$$

Théorème 3.0.9. *Soient* X *un espace de Banach,* $U_0 \in \mathcal{P}_{kc}(X), \Gamma_1, \Gamma_2 : T \times \overline{B}(U_0,b) \to \mathcal{P}_k(X)$*,* Γ_1 *est continue et* Γ_2 *est uniformément continue complètement localement bornée. S'il existe une fonction vectorielle* V *vérifie les propriétés*

1) $v : T \times \mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0,b)) \times \mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0,b)) \to \mathbb{R}^+ :\ A = B \Rightarrow v(0,A,B) = 0$ *;*

2) $\lim\limits_{n\to\infty} v(t,A_n,B_n) = 0,\ t \in T \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{H}(A_n,B_n) = 0$ *;*

3)* $\big|V_l(t,A_1,B_1) - V_l(t,A_2,B_2)\big| \leq L\mathcal{H}(A_1+B_2, B_1+A_2), \quad t \in T$ *;*

et une fonction vectorielle w *vérifie les propriétés*

1) la fonction* w *est continue ;*

2) pour presque $t \in T$*,* $w(t,r)$ *satisfait la condition de Wazewski(voir*[25]*) par rapport à le deuxième variable, c'est à dire*

$$w_l(t,r) \leq w_l(t,s),\ r_l = s_l, r_m \leq s_m, m \neq l \text{ et } m,l = 1,...,k;$$

3) sur chaque segment $[0,c], 0 < c \leq a$*, la solution de l'équation*

$$\dot{r}(t) = w(t,r), \quad r(0) = 0,$$

est la fonction de Carathéodory $r(.)$ *qui est identiquement nulle, tel que sur* T*,*

pour tout $A,B \in \mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0,b))$*, on a*

$$\underline{D}^+V(t,A,B) \leq w\big(t,V(t,A,B)\big).$$

Alors, il existe une solution $U(.)$ *absolument continue, de l'équation différentielle* $(\mathcal{P})$*.*

On donne des exemples sur les fonctions V et w qui vérifie les propriétés 1) à 3), et la multi-applications Γ_1 vérifie l'inégalité (3.7).

Exemple 3.0.10. *Soient* X *un espace de Banach,* $U_0 \in \mathcal{P}_{kc}(X)$ *et* $\Gamma_1 : T \times \overline{B}(U_0,b) \to \mathcal{P}_k(X)$ *une multi-application tel que*

$$\mathcal{H}(\Gamma_1(t,A), \Gamma_1(t,B)) \leq \omega_I(t, \mathcal{H}(A,B)), \tag{3.21}$$

presque partout sur T*, pour tout* $A,B \in \mathcal{P}_{kc}(\overline{B}(U_0,b))$*, où* $\omega_I : T \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *est une fonction de Kamke du premier type qui est intégralement bornée sur les ensembles bornées de* $T \times \mathbb{R}^+$*.*

On pose $V(t,A,B) = \mathcal{H}(A,B)$ *et* $w(t,r) = \omega_I(t,r)$, *pour* $r \geq 0$ *et* $w(t,r) = 0$ *quand* $r < 0$.

Il est clair que $\mathcal{H}(A,B)$ *vérifie les propriétés* $1) - 3)$, *et* $3^*)$, *et* $w(t,r)$ *vérifié les propriétés* $1) - 3)$, *et La relation* (3.21) *implique la relation* (3.7), *avec les fonction* V *et* w *indiquées ci-dessus.*

Exemple 3.0.11. *Soient* X *un espace de Banach,* $U_0 \in \mathcal{P}_{kc}(X)$ *et* $\Gamma_1 : T \times \overline{B}(U_0,b) \to \mathcal{P}_k(X)$ *satisfait l'inégalité*

$$\mathcal{H}(\Gamma_1(t,x), \Gamma_1(t,y)) \leq k(t)\|x - y\|, \tag{3.22}$$

presque partout sur T, *pour chaque* $x, y \in \overline{B}(U_0,b)$, *où* $k(t) \geq 0$, *intégrable sur* T.

La fonction

$$V(t,A,B) = exp\left(-\int_0^t k(s)ds\right).\mathcal{H}(A,B),$$

vérifie les propriétés $1) - 3)$ *et* $3^*)$.

Maintenant, par la relation (3.22), *on conclut que l'inégalité* (3.7) *est satisfaite, et la fonction* $w(t,r)$ *identiquement nulle. Dans cet exemple en peut prendre*

$$V(t,A,B) = \mathcal{H}(A,B).$$

Alors, l'inégalité (3.7) *et satisfaite, et la fonction* $w(t,r) = k(t)r$, *si* $r \geq 0$ *et* $w(t,r) \equiv 0$, *quand* $r < 0$, *vérifie les propriétés* $1) - 3)$.

Bibliographie

[1] **J.P. Aubin, A. Cellina**, Differential inclusions, Set-valued maps an viability theory, Springer-verlag, Berlin (1984).

[2] **V.M. Alekseev**, Theorem for integral inequality and some its applications, *Mat. Sbornik*, 68 (1965),251-273 (in Russian).

[3] **D. Azzam-Laouir**, Contribution à l'étude de problèmes d'évolution du second ordre, Thèse de doctorat d'état, Université de Constantine (2003).

[4] **D. Azzam-Laouir**, Polycopié, cours d'analyse multivoque, Laboratoire de Mathématiques Pure et Appliquées, Université de Jijel (2009).

[5] **H. Badstrom**, An embedding theorem for space of convex sets, Proc. Amer. Math. Soc. 3(1952),165-169.

[6] **J. Banàs, K. Goebel**, Measures of non compactness in Banach spaces, In Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Dekker, New York, 60, (1980).

[7] **J. Banàs, M. Musaleen**, Sequence Spaces and Measure of Noncompactness with Applications to Differential Equations, Springer, New Delhi, (2014).

[8] **L. P. A. J. Brandao, F. S. de Blasi, and F. Iervolino**, Uniqueness and existence theorems for differential equations with compact convex valued solutions, Boll. Unione Mat. Ital., 4, 534–538 (1970).

[9] **C. Castaing, M. Valadier**, Convex analysis and measurable multifunctions, Lectures Notes in Math, 580. Springer-Verlag, Berlin (1977).

[10] **F. S. De Blasi and F. Iervolino**, Equazioni differenziali con soluzioni a valore compatto convesso, Boll. Unione Mat. Ital., 2, No. 4-5, 491-501 (1969).

[11] **F. S. De Blasi and F. Iervolino**, Euler method for differential equations with set-valued solutions, Boll. Unione Mat. Ital., 4, No. 4, 941-949 (1971).

[12] **R. Descombes**, *Cours d'analyse,* Librairie Vuibert, Paris, (1962).

[13] **M. Hukuhara**, *Intégration des application mesurable dont la valeur est un compact convexe, Funkcial. Ekvac.* 10 (1967), 43-6.

[14] **S. Hu, N.S. Papagiorgiou**, Handbook of multivalued analysis. Volume I : Theory. Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, (1997).

[15] **M. Kisielewicz**, Description of a class of differential equations with set-valued solutions, Lincei-Rend. Sci. Fis. Mat. Nat., 58, 158– 162 (1975).

[16] **M. Kisielewicz**, Multivalued differential equations in separable Banach spaces, *J. Optimiz. Theory Appl.* 37 (1982),231-249.

[17] **M. Kisielewicz, B. Serafin, and W. Sosulski**, Existence theorem for functional-differential equation with compact convex valued solutions, Demonstr., Math. 13, No. 2, 229–237 (1975).

[18] **R.I. Kozlov**, On the theory of differential equations with discontinuous right hand sides, *Diff. Uravneniya* , 10 (1974),1264-1275 (in Russian).

[19] **V.M. Matrosov**, The principle of comparison with vector Lyapunov function, I, *Diff. Uravneniya*, 4 (1968), 1336-1374 (in Russian).

[20] **V.M. Matrosov**, The principle of comparison with vector Lyapunov function, II, *Diff. Uravneniya*, 4 (1968), 1739 - 1752 (in Russian).

[21] **V.M. Matrosov**, The principle of comparison with vector Lyapunov function, III, *Diff. Uravneniya*, 5 (1969),1171-1185 (in Russian).

[22] **A. Smajdor**, Hukuhara's derivative and concave iteration semigroups of linear set-valued functions, Jornal of Applied Analysis, Vol. 8, N. 2(2002), p.p. 297-305.

[23] **A.A Tolstonogov**, On some properties of spaces of sublinear functionals, *Sib. Mat. Zhurnal*, 18 (1977), 429-443 (in Russian)

[24] **A.A Tolstonogov**, On support functions of convex compact sets, *Mat. zametki*, 22, (1977) 203-213 (in Russian).

[25] **T. Wazwski**, Systemes des equations et des inequalites differentielles ordinaires aux deuxiemes membres monotones et leurs applications, *Ann.* Soc. *Polon. Math.*, 23 (1950), 112-166.