République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahai - Jijel
faculté des sciences exacte et d'informatique

Département de Mathématique

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.
Option : Analyse fonctionnel.

Thème

Sur un théorème de Dugungji généralisé

Présenté par :

– Ilham Zerrouk.

– Saliha Boukefda.

Devant le jury :

Président	: D. Affane	M.C.A Université de Jijel
Encadreur	: W. Boukrouk	M.C.B Université de Jijel
Examinateur	: F. Slamnia	M.A.A Université de Jijel

Promotion **2017/2018**

Remerciements

Louange à Dieu le tout puissant de nous avoir accordé toute la volonté et la persévérance durant nos cinq ans d'études.

*Nous remercions en suite, notre encadreur **W. Boukrouk** pour les conseils, l'orientation, et l'assistance, qu'il nous a apportés jusqu'à la fin de ce travail.*

Sans oublier de remercier le membre du jury qui a bien voulu accepter d'examiner ce modeste travail.

Nos vifs remerciements sont aussi adressés à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation.

Nos parents, nos frères et sœurs qui nous ont aidés moralement et physiquement.

A tous nos amis.

Enfin, nous remercions toutes les personnes qui nous ont aidés de près ou de loin ne serait-ce que par le simple signe d'encouragement.

Dédicace

Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude,

l'amour, le respect, la reconnaissance.

À ma tendre mère :Tu représente pour moi la source de tendresse et l'exemple de dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager .

À mon très cher père :aucun dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours pour vous.

À mes chers frères et mes belles sœurs à tous les membres de ma famille, petits et grands.

À mes très chères amis :Noura, Nesrine, Asma.H, Asma.A, Imane, Chahra, Assia, Fadia, Amina, nawel.

À mon binôme Ilham qui est partagées avec moi les moments difficiles pour réaliser ce travail.

À tous ceux qui me sens chers et que j'ai omis de citer.

Saliha Boukefda

Dédicace

Je dédie ce mémoire de fin d'études

A Mon très cher père et ma très chère mère pour leur soutiens, les sacrifices et tous les offerts consentis pour mon éducation et ma formation.

A mes très chère sœurs et mes frères.

A mon fiancé qui m'a soutenu moralement et m'a aidé dans la recherche, en reconnaissance de son don de la présente note.

À tous mes amis surtout Nadjat, Karima, Soumia, Asma.

À mes collègue de travail grand respect.

Je tiens à vous témoigner ma reconnaissance, mon amour et mon affection.

À mon binôme Saliha qui est partagées avec moi les moments difficiles pour réaliser ce travail.

Que dieu vous protège et vous bénisse.

Ilham Zerrouk

Table des matières

1 Préliminaires **1**

1.1 Espace métrique 1

1.2 Espace normé 5

1.3 Espace topologique 7

1.4 Espace paracompact 8

1.5 Continuité des applications 9

1.6 Convexité dans les espaces vectoriels 10

1.7 Espace vectoriel topologique 11

1.8 Espace-c 14

2 Théorème de Dugundji **18**

3 Théorème de Dugundji généralisé **31**

Introduction générale

Le théorème du prolongement de Dugundji est un théorème de topologie générale. Il consiste à prolonger une application "continue" définie sur une partie fermée d'un espace métrique X à valeurs dans un espace Y, la prolonger "par continuité" sur tout l'espace X. Il est du au mathématicien américain James Dugundji. Quand à ses applications, on les retrouve souvent dans la résolution et l'étude analytique des équations différentielles.

Dans le papier de Dugundji [5] considéré comme version classique, l'espace d'arrivée Y est supposé être un espace vectoriel topologique localement convexe. Ceci nécessite implicitement d'avoir non seulement une structure vectorielle mais aussi une condition de convexité. Cependant, dans l'histoire des mathématiques, on trouve que à un certain moment, développement du calcule dans les espaces "métrique", plusieurs notions mathématiques ont été généralisées loin du cadre "vectoriel" Y compris la convexité. Bien évidemment, les théorèmes fondés sur ces notions ont été aussi généralisés.

C'est le cas dans [11], où l'auteur introduit une notion de convexité abstraite, puis il s'est intéressé au théorèmes classiques qui sont liés à la convexité et il a vérifie leur validité par rapport à la nouvelle notion généralisée. Le théorème de prolongement du Dugundji en fait partie.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à ce théorème (dans ses deux versions) et nous présentons sa démonstration d'une manière très très détaillée. Le mémoire s'articule autour de trois chapitres, après avoir introduit les préliminaires nécessaires dans le chapitre un, dans le deuxième chapitre, nous étudions le théorème de Dugundji dans sa version classique, nous nous somme référées à [1]. Nous donnons aussi un exemple d'applications de ce théorème.

Dans le dernier chapitre, nous nous intéressons à la version généralisée en donnant la démonstrations détaillée. Notons que dans [11], l'auteur a donné les grandes lignes pour la démonstration. Notre r$\hat{o}$le était de déchiffrer ses lignes et bien éclaircir les choses.

Notations

$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	L'ensemble des nombres réels positives.
(X, d_X)	L'espace métrique X muni de la distance d_X.
$(E, \|\|\|\|)$	L'espace normé E muni de la norme $\|\|\|\|$.
$d(x, A)$	La distance de l'élément x à l'ensemble A.
$d(x, y)$	La distance de x à y.
$B(x_0, r)$	La boule ouverte de centre x_0 et de rayon r.
$\bar{B}(x_0, r)$	La boule fermée de centre x_0 et de rayon r.
$\bar{A}$	L'adhérence de A.
$fr(A)$	La frontière de A.
$\overset{\circ}{A}$	L'intérieur de A.
$Co(A)$	L'enveloppe convexe de A.
$X \backslash A$	Le complémentaire de L'ensemble A dans X.
(X, θ_X)	L'espace topologique X muni de la topologie θ_X.
(Y, τ_Y)	L'espace vectoriel topologique Y muni de la topologie τ_Y.
$\mathcal{P}(X)$	L'ensemble de tous les parties de X.
$\mathcal{V}(x)$	La famille de tous les voisinages de x.
$\mathcal{V}_X(x_0)$	Le voisinage de x_0 dans l'ensemble X.
$\widetilde{f}$	L'application qui prolonge f.
(X, τ)	L'espace vectoriel topologique $(e.v.t)$ X muni de la topologie τ.
$f(A)$	L'image directe de l'ensemble A par l'application f.
$\prec Y \succ$	La famille des parties non vides et finies de Y.
(Y, Γ)	L'espace-c muni de la famille Γ.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et quelques théorèmes de base que l'on utilise dans les chapitres suivants. Certaines sections comportent des notions peu familières mais très essentielles pour la compréhension de ce mémoire, en plus des démonstrations.

1.1 Espace métrique

Les notions de cette section ont été prises des références [7] et [13].

Definition 1.1. *Soit X un ensemble non vide quelconque. On appelle distance sur X une application $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ qui à $(x, y) \in X \times X$ fait correspondre le nombre réel fini positif d(x,y) appelle distance de x à y, et satisfaisant aux trois conditions suivantes*

(i) $\forall x, y \in X, d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y,$

(ii) $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$ *(relation de symétrie),*

(iii) $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ *(inégalité triangulaire).*

Definition 1.2. *On appelle espace métrique le couple (X, d_X) formé d'un ensemble X et une distance d définie sur X.*

Definition 1.3. *(**Distance induite**)*

Soit (X, d_X) *un espace métrique et soit* F *une partie non vide de l'ensemble* X*. l'espace métrique* $(F, d_{F\times F})$ *(où* $d_{F\times F}$ *désigne la réstriction de* d *à* $F \times F \subset X \times X$*) est appelé sous-espace métrique.*
On dit que F *est muni de la distance induite par celle de* X*. On note simplement* d *la distance induite.*

Definition 1.4. *Soit* (X, d_X) *un espace métrique, soient* $x_0 \in X$ *et* $r > 0$*.*
1)On appelle boule ouverte de centre x_0 *et de rayon* r*, notée* $B(x_0, r)$ *l'ensemble*

$$\{x \in X/d(x_0, x) < r\}.$$

2)On appelle boule fermée de centre x_0 *et de rayon* r*, notée* $\bar{B}(x_0, r)$ *l'ensemble*

$$\{x \in X/d(x_0, x) \leqslant r\}.$$

3) On appelle sphère de centre x_0 *et de rayon* r*, notée* $S(x_0, r)$ *l'ensemble*

$$\{x \in X/d(x_0, x) = r\}.$$

Definition 1.5. *(**Les ouverts et les fermés dans un espace métrique**)*

Soit (X, d_X) *un espace métrique et* A *un sous-ensemble de* X
1) On dit que A *est un ensemble ouvert dans* X *si*

$$\forall x \in A, \exists r > 0, B(x, r) \subset A.$$

2) A *est dit fermé dans* X *si son complémentaire* C_X^A *est ouvert dans* X*.*

Propriété

Dans un espace métrique (X, d_X), toute boule ouverte est un ouvert, et toute boule fermée est fermée.

Definition 1.6. *Soient* A, B *deux parties d'un espace métrique* (X, d_X) *et* $x \in X$*. On appelle* *distance de x à l'ensemble A la quantité définie par*

$$d(x, A) = \underset{y \in A}{inf} d(x, y).$$

On appelle distance de A à B la quantité $d(A, B)$ définie par

$$d(A, B) = \underset{x \in A}{inf} d(x, B).$$

Remarque

Si $A = \emptyset$, alors pour tout $x \in X$, $d(x, A) = \inf \emptyset = \infty$.

Proposition 1.1. *Si $A \neq \emptyset$, alors*

1) $d(x, A) \leq d_X(x, y) + d(y, A)$, pour tout $y \in X$.

2) L'application $d_A : X \to \mathbb{R}$ définie par

$$x \mapsto d_A(x) = d(x, A)$$

est continue sur X.

Démonstration. 1) Soit $y \in X$.

$$\begin{aligned} d(x, A) = \underset{z \in A}{Inf}\ d_X(x, z) \leqslant\ & d_X(x, z),\ \forall z \in A \\ \leqslant\ & d_X(x, y) + d_X(y, z),\ \forall z \in A, \end{aligned}$$

d'où

$$d(x, A) - d_X(x, y) \leqslant d_X(y, z),\ \forall z \in A,$$

donc

$$\begin{aligned} d(x, A) - d_X(x, y) &\leq \underset{z \in A}{Inf} d_X(y, z), \\ &= d(y, A). \end{aligned}$$

Alors, $d(x, A) \leqslant d_X(x, y) + d(y, A),\ \forall y \in X$.

2) Soit $x_0 \in X$

$$\Big(d_A \textit{ est continue en } x_0\Big) \Longleftrightarrow \Big(\lim_{x \to x_0} |\ d_A(x) - d_A(x_0)| = 0\Big).$$

Pour tout $x \in X$, d'après 1) nous avons

$$\begin{aligned} d_A(x) = d(x, A) &\leqslant d_X(x, x_0) + d_A(x_0, A) \\ &\leqslant d_X(x, x_0) + d_A(x_0) \end{aligned}$$

d'où

$$d_A(x) - d_A(x_0) \leqslant d_X(x, x_0).$$

De même

$$d(x_0, A) - d_A(x) \leqslant d_E(x_0, x) = d_X(x, x_0),$$

d'où

$$d_A(x) - d_A(x_0) \geqslant -d_X(x, x_0),$$

par conséquent

$$-d_X(x, x_0) \leqslant d_A(x) - d_A(x_0) \leqslant d_E(x, x_0),$$

alors

$$|d_A(x) - d_A(x_0)| \leqslant d_X(x, x_0), \quad \forall x \in X,$$

par passage à la limite

$$\lim_{x \to x_0} |d_A(x) - d_A(x_0)| \leqslant \lim_{x \to x_0} d_X(x, x_0) = 0.$$

On aura

$$\lim_{x \to x_0} |d_A(x) - d_A(x_0)| = 0.$$

D'où d_A est continue en x_0. ■

Definition 1.7. ***(L'adhérence)***
On appelle adhérence de A et on note $\bar{A}$, le sous-ensemble de (X, d_X) défini par

$$\bar{A} = \{x \in X,\ d(x, A) = 0\}.$$

Propriétés

1) $A \subset \bar{A}$.
2) $x \in \bar{A} \Longleftrightarrow d(x, A) = 0$.

3) A est fermé dans $X \Longleftrightarrow A = \bar{A}$.

4) $\bar{A}$ est fermé dans X.

5) $\bar{A}$ est le plus petit fermé qui contient A.

Definition 1.8. ***(Frontière)***
soit (X, d_X) un espace métrique et A un sous-ensemble de X. On appelle frontière de A, et on note $Fr(A)$, l'ensemble

$$Fr(A) = \{x \in X; \forall r > 0, B_X(x,r) \cap A \neq \emptyset \text{ et } B_X(x,r) \cap C_X^A \neq \emptyset\}.$$

Propriétés

1) $Fr(A) = Fr(X \backslash A)$.

2) $Fr(A)$ est un fermé.

3) A fermé $\Longleftrightarrow Fr(A) \subset A$.

Definition 1.9. ***(Intérieur)***

Soient (X, d_X) un espace métrique et A un sous ensemble de X. On dit qu'un élément x de X est un point intérieur à A si A est un voisinage de x i.e., s'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$.
On appelle intérieur de A et on note $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A, définie par

$$x \in \overset{\circ}{A} \Longleftrightarrow \exists r > 0,\ B(x,r) \subset A$$

Propriétés

1) $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de X et $\overset{\circ}{A} \subset A$

2) A *ouvert* $\Longleftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$

3) $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert de X contenu dans A

1.2 Espace normé

Les notions de cette section ont été prises des références [7] et [13].

Definition 1.10. *Une norme sur un $\mathbb{R}^+$-espace vectoriel E est une application*

$$\begin{aligned} \| \ \| : E &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

possédant les propriétés suivantes

i) Pour tout $x \in E$ non nul, on a $\|x\| \neq 0$.

ii) Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\|\lambda\, x\| = |\lambda|\|x\|$.

iii) Pour tout $x, y \in E$, on a $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

L'espace E muni de la norme $\| \ \|$, est dit espace normé ou espace vectoriel normé. On note souvent un tel espace $(E, \|\|)$. On déduit de la propriété ii) que l'on a $\|0_E\| = 0$.

Proposition 1.2. *Soit $(E, \| \ \|)$ un espace normé*

1) La propriété (ii) ci-dessus est équivalente à la forme affaiblie suivante

$$(ii')\textit{Pour tout } x \in E \textit{ et tout } \lambda \in \mathbb{K}, \textit{on a} \|\lambda x\| \leqslant |\lambda| \ \|x\|.$$

2) On peut remplacer la propriété (iii) ci-dessus par la propriété suivante (iii') Pour tout $x, y \in E$ et tout $t \in [0, 1]$, on a

$$\|tx + (1 - t)y\| \leqslant t\|x\| + (1 - t)\|y\|.$$

3) Pour tout $x, y \in E$, on a l'inégalité $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$.

4) L'inégalité(iii) se généralise à n points. Pour tout $x_1, x_2, ..., x_n \in E$, on a

$$\|\sum_{i=1}^{n} x_i\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|x\|.$$

Remarque (**Distance associée à une norme**)

Soit $(E, \| \ \|)$ un espace normé. Pour tout $x, y \in E$, on pose $d(x, y) = \|x - y\|$. On vérifie facilement que d est une distance sur E, appelée **distance associée à la norme**. La topologie correspondante sera appelée **topologie normique**.

1.3 Espace topologique

Les notions de cette section ont été prises des références et [7] et [3].

Definition 1.11. *Soit X un ensemble non vide. Soit θ une famille de parties de X ($\theta \subset \mathcal{P}(X)$). On dit que θ est une topologie sur X ssi*

1) $\emptyset \in \theta, X \in \theta.$

2) $\forall (A_i)_{i\in I} \subset \theta \Longrightarrow \underset{i\in I}{\cup} A_i \subset \theta$
(stabilité par union quelconque).

3) $\forall (A_i)_{i=1,..,n} \subset \theta \Longrightarrow \overset{n}{\underset{i=1}{\cap}} A_i \subset \theta$
(stabilité par intersection finie).

Definition 1.12. *Soit θ une topologie sur X alors, (X, θ_X) est appelé un espace topologique.*
On appelle ensemble ouvert de X tout ensemble appartenant à θ, c'est-à-dire

$$A \text{ est ouvert dans } X \iff A \in \theta.$$

Definition 1.13. *Soit (X, θ_X) un espace topologie et soit $A \subset X$. On dit que V est un voisinage de A si et seulement si V contient un ouvert qui contient A*

$$V \text{ est un voisinage de } A \Longleftrightarrow \exists O \in \theta,\ A \subset O \subset V.$$

Si $A = \{x\}$ le voisinage de A s'appelle voisinage de point x

$$W \text{ est un voisinage de } x \Longleftrightarrow \exists O \in \theta,\ x \in O \subset W.$$

La famille de tous les voisinages de x est notée $\mathcal{V}(x)$ c'est-à-dire

$$W \in \mathcal{V}(x) \Longleftrightarrow \exists O \in \theta,\ x \in O \subset W.$$

Remarque : *Nous avons $W \neq \emptyset$ pour tout $W \in \mathcal{V}(x)$ (car $x \in W$).*

Definition 1.14. *([3])(**système fondamentale de voisinages**)*
Soit (X, θ) un espace topologie, $A \subset X$ et V un voisinage de A.

Un système fondamentale de voisinages de A, est une famille $\mathcal{F}$ de voisinages de A, telle que tout voisinage de A contienne au moins un des éléments de $\mathcal{F}$. La même définition s'applique pour un point (cas $A = \{a\}$).

Definition 1.15. ***(topologie produit)***
Soit $(X_1, \theta_1), (X_2, \theta_2)$ deux espaces topologies et soit

$$X = X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2)/x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}.$$

1) On appelle ouvert premier tout ensemble

$$O = O_1 \times O_2/O_1 \in \theta_1, O_2 \in \theta_2.$$

2) On appelle ouvert de X tout union d'ouverts premier, i.e.

$$\theta = \{\bigcup_k (O_1^k \times O_2^k)/O_1^k \in \theta_1, O_2^k \in \theta_2\},$$

est une topologie sur X appelée la topologie produit de $\theta_1 \times \theta_2$
le couple (X, θ) est appelée l'espace topologique produit de $(X_1, \theta_1), (X_2, \theta_2)$.

1.4 Espace paracompact

Les notions de cette section ont été prises de référence [8].

Definition 1.16. *Soit (X, θ_X) un espace topologique et soit $A \subset X$, soit $(A_i)_{i \in I} \subset X$ une famille d'ensembles.*
On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de A si $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$
Si $A = X, (A_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de X ssi $X = \bigcup_{i \in I} A_i$.
Si A_i est ouvert, $\forall i \in I$. On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X.

Definition 1.17. *Un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de X est dit localement fini si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de X tel que $V \cap U_i \neq \emptyset$ pour un nombre fini d'indice i.*

Definition 1.18. *Soient $(U_i)_{i \in I}$ et $(V_j)_{j \in J}$ deux recouvrement d'un espace topologique (X, θ), on dit que $(U_i)_{i \in I}$ est un raffinement de $(V_j)_{j \in J}$ si pour tout $i \in I$, il existe un $j \in J$ tel que $U_i \subset V_j$.*

Definition 1.19. *Un espace topologique X est dit paracompact s'il est séparé et si de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un sous recouvrement localement fini.*

Proposition 1.3. *Tout espace métrique est paracompact.*

Lemme 1.1. *Soit X un espace métrique, A un sous ensemble fermé de X, alors il existe un recouvrement $\{U_i\}_{i\in I}$ de $X\backslash A$ tel que,*

1) *$\{U_i\}_{i\in I}$ est localement fini,*
2) *Tout voisinage de point $a \in (A\backslash \mathring{A})$ contient une infinité d'ensemble U_i,*
3) *Pour tout voisinage W de $a \in A$, il existe un voisinage $W' \subset W$, tel que*

$$U_i \cap W' \neq \emptyset \Longrightarrow U_i \subset W.$$

un tel recouvrement est dit canonique.

Proposition 1.4. *Soient X un espace métrique et A un sous ensemble fermé de X. Alors, de tout recouvrement ouvert de A on peut extraire un raffinement ouvert localement fini et canonique*

1.5 Continuité des applications

Les notions de cette section ont été prises des références [7] et [9].

Definition 1.20. *Soient (X, θ_X), (Y, θ_Y) deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application*
Soit $x_0 \in X$, on dit que f est continue au point x_0 si

$$\forall\, V \in \mathcal{V}_Y(f(x_0)), \exists\, W \in \mathcal{V}_X(x_0),\ f(W) \subset V.$$

Definition 1.21. *Soit $(X, d_X), (Y, d_Y)$ deux espaces métriques, et $f : X \longrightarrow Y$ une application. On dit que f est continue en $x_0 \in X$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in X, d_X(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

L'application f est continue si et seulement si elle est continue en tous point $x_0 \in X$.

Remarque 1.1. *Soit (E,d) un espace métrique et (Y,θ) un espace topologique, soit $f : E \longrightarrow Y$ une application, $x_0 \in E$. On dit que f continue en x_0 si*

$$\forall\, V \in \mathcal{V}_Y(f(x_0)), \exists \delta > 0; \forall x \in X, d_X(x,x_0) < \delta \Longrightarrow f(x) \in V.$$

Ce qui est équivalent à ;

$$\forall\, V \in \mathcal{V}_Y(f(x_0)), \exists\, \delta > 0; \quad f(B_X(x_0,\delta)) \subset V.$$

Proposition 1.5. *(Composition de deux applications continues)*
Soient $(X_1,\theta_1),(X_2,\theta_2)$ et (X_3,θ_3) trois espaces topologiques, $A_1 \subset X_1$ et $A_2 \subset X_2$. Soient $f : A_1 \longrightarrow X_2$ et $g : A_2 \longrightarrow X_3$ deux applications telles que $f(A_1) \subset A_2$.
Si f est continue en $x_0 \in A_1$ et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.
On en déduit que si f et g sont continues alors $g \circ f$ est continue.

Proposition 1.6. *([9])(**Composantes continues**)*
Soient $E, E_1, E_2, ..., E_n$ des espaces topologiques, et $f : E \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} E_i$ une application telle que pour tout $x \in E$

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)).$$

Alors, f est continue sur E si et seulement si chaque composante f_i est continue.

1.6 Convexité dans les espaces vectoriels

Les notions de cette section ont été prises des références [7] et [11].

Definition 1.22. *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $x, y \in E$, le segment de droite $[x,y]$ d'extrémités x et y est défini par l'ensemble*

$$\{\lambda x + (1-\lambda)y,\ 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Une partie A de E est dite convexe si $[x, y] \subset A, \quad \forall x, y \in A$.
Une combinaison convexe (finie) des points $x_1, ..., x_n$ *de* E *est un point* x *de* E*, définit par*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \lambda_i \geq 0 \ \ et \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Definition 1.23. ***(L'enveloppe convexe)***
Soit E un espace vectoriel et $A \subset E$, on a l'intersection de tous les convexes qui contient A est un convexe qui contient A; On appelle L'enveloppe convexe de A.
L'enveloppe convexe de A. est le plus petit convexe contenant A, notée $Co(A)$. ($A \subset Co(A)$).
Si $A \subset B$ alors $Co(A) \subset Co(B)$.

Remarque 1.2. *$Co(A)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes (finie) des éléments de A.*

1.7 Espace vectoriel topologique

Les notions de cette section ont été prises des références [7] et [3].

Definition 1.24. *Soit $(Y, +, .)$ un espace vectoriel réel et τ une topologie sur Y. On dit que Y est un espace vectoriel topologique (e.v.t) si τ vérifie*
a) $\forall y \in Y$, $\{y\}$ *est un fermé de* Y.
b)

$$\begin{aligned} f : Y \times Y &\longrightarrow Y \\ (y, y') &\longmapsto f(y, y') = y + y' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \times Y &\longrightarrow Y \\ (\beta, y) &\longmapsto g(\beta, y) = \beta.y \end{aligned}$$

f et g sont continues.

Proposition 1.7. *([7]) Tout espace vectoriel normé est un espace vectoriel topologique.*

Proposition 1.8. *Soit B un espace topologique, Y un espace vectoriel topologique réel, $y_0 \in Y$ et $\psi : B \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors, l'application h définie pour tout $x \in B$ par*

$$h(x) = \psi(x)\, y_0,$$

est continue sur B.

Démonstration. Considérons l'application h_0 définie par

$$\begin{aligned} h_0 : B &\longrightarrow \mathbb{R} \times Y \\ x &\longmapsto h_0(x) = (\psi(x), y_0). \end{aligned}$$

Puisque ψ est continue sur B, et l'application $x \longmapsto y_0$ est continue sur Y(car elle est constante),alors h_0 est continue sur $B(Proposition(1.6))$. Et comme Y est un espace vectoriel topologique réel, alors l'application

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \times Y &\longrightarrow Y \\ (\beta, y) &\longmapsto g(\beta, y) = \beta.y, \end{aligned}$$

est continue sur $\mathbb{R} \times Y$(d'après la Définition (1.24)).
Par conséquent, l'application composée

$$\begin{aligned} g \circ h_0 : B &\longrightarrow \mathbb{R} \times Y \\ x &\longmapsto g \circ h_0(x) \end{aligned}$$

est continue sur B. Or $g \circ h_0 = h$. En effet, pour tout $x \in B$

$$(g \circ h_0)(x) = g(h_0(x)) = g(\psi(x), y_0) = \psi(x).y_0,$$

d'où la continuité de h sur B. ■

Proposition 1.9. *Soit B un espace topologique, Y un espace vectoriel topologique,*
et $(h_\lambda)_{\lambda \in J}$ une famille finie d'applications continues, $h_\lambda : B \longrightarrow Y$. Alors l'application $\sum\limits_{\lambda \in J} h$ définie sur B par

$$x \longmapsto \sum_{\lambda \in J} h_\lambda(x),$$

est continue sur B.

Démonstration. On prend le cas de deux applications. Considérons l'application h_c définie par

$$\begin{aligned} h_c : B &\longrightarrow Y \times Y \\ x &\longmapsto h_c(x) = (h_1(x), h_2(x)). \end{aligned}$$

Puisque h_1, h_2 sont continues sur B, alors h_c est continue sur B (Proposition (1.6)). Comme Y est un espace vectoriel topologique, alors l'application

$$\begin{aligned} f : Y \times Y &\longrightarrow Y \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) = f(x + y), \end{aligned}$$

est continue sur $Y \times Y$ (d'après la Définition (1.24)).
Par conséquent, l'application composée

$$\begin{aligned} f \circ h_c : &\longrightarrow Y \times Y \\ x &\longmapsto f \circ h_c(x), \end{aligned}$$

est continue sur B. Or pour tout $x \in B$

$$\begin{aligned} (f \circ h_c)(x) &= f(h_c(x)) \\ &= f(h_1(x), h_2(x)) \\ &= h_1(x) + h_2(x). \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Definition 1.25. *Soit (Y, τ_Y) un espace vectoriel topologique (e.v.t). On dit que Y est localement convexe si chaque point de Y admet un système fondamental de voisinages dont les éléments sont convexes.*

Proposition 1.10. *Tout espace vectoriel normé est localement convexe.*

Démonstration. Soit $(E, \| \ . \ \|)$ un espace vectoriel normé. Pour chaque point $x \in E$, considérons la famille $\mathcal{V} = \{B_E(x, r), \ r > 0\}$. Il est clair que $\mathcal{V}$ est un système fondamental de voisinages pour x. En effet, soit V un voisinage de x dans E. Alors, V contient un ouvert O dans E qui contient x, d'où

$$\exists r_x > 0;\ B_E(x, r_x) \subset O,$$

donc

$$B_E(x, r_x) \subset V,$$

i.e.

$$\exists V' \in \mathcal{V};\ V' \subset V.$$

De plus ces voisinages (les boules) sont convexes. ∎

1.8 Espace-c

Les notions de cette section ont été prises des références [10] et [12].

Definition 1.26. *([12]) Un espace topologique X est contractible s'il existe un point x_0 dans X et une application continue $h : X \times [0, 1] \longrightarrow X$ tel que pour tout $x \in X$ nous avons*

$$h(x, 1) = x_0 \text{ et } h(x, 0) = x\ .$$

Definition 1.27. *([11]) Si Y un espace topologique, et $\prec Y \succ$ désigne la famille des parties non vides et finies de Y, alors une structure-c sur Y est donnée par une application $\Gamma : \prec Y \succ \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ qui satisfait*

1) pour tous $B \in \prec Y \succ$, $\Gamma(B)$ est non vide et contractible.

2) pour tous $B,\ B' \in \prec Y \succ$, $B \subseteq B' \Rightarrow \Gamma(B) \subseteq \Gamma(B')$.

Le couple (Y, Γ) appelé espace-c et un sous ensemble $Z \subseteq Y$ est appelé un Γ-ensemble si et seulement s'il vérifie $\Gamma(B) \subseteq Z$, pour tout $B \in \prec Z \succ$.

Proposition 1.11. *Tout espace vectoriel topologique (Y, Γ) est un espace-c. De plus, chaque convexe $C \subset Y$ est un Γ-ensemble.*

Démonstration. Soit (Y, θ) un espace vectoriel topologique. Considérons l'application $\Gamma : \prec Y \succ \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ définie par

$$B \longmapsto \Gamma(B) = Co(B).$$

$Co(B)$ est l'enveloppe convexe de B.
1. Pour $B \in \prec Y \succ$, il est clair que $\Gamma(B) \neq \emptyset$, car $B \subset Co(B) = \Gamma(B)$ et $B \neq \emptyset$.
$\Gamma(B)$ est aussi contractible, car pour un élément $x_0 \in \Gamma(B)$, si on définit l'appliation

$$\begin{aligned} h_{x_0} : \Gamma(B) \times [0,1] &\longrightarrow \Gamma(B) \\ (y,t) &\longmapsto h_{x_0}(y,t) = tx_0 + (1-t)y \end{aligned}$$

alors on aura, pour tout $y \in \Gamma(B)$,

$$h_{x_0}(y,1) = 1.x_0 + (1-1).y = x_0$$

et

$$h_{x_0}(y,0) = 0.x_0 + (1-0).y = y.$$

De plus, h_{x_0} est continue. Donc $\Gamma(B)$ est contractible.
2. Soient B, $B' \in \prec Y \succ$, alors

$$\begin{aligned} B \subseteq B' &\Longrightarrow Co(B) \subseteq Co(B') \\ &\Longrightarrow \Gamma(B) \subseteq \Gamma(B') \end{aligned}$$

On conclut que Y est un espace-c.
Soit $C \subset Y$ un ensemble convexe.
Par définition, C est un Γ-ensemble si et seulement si pour tout $B \in \prec C \succ$ $, \Gamma(B) \in C$.
Soit $B \in \prec C \succ$, alors $B \subset C$ donc

$$\Gamma(B) \subset \Gamma(C) = Co(C),$$

et comme C est convexe, alors $Co(C) = C$, donc $\Gamma(B) \subset C$.
Par conséquent, C est un Γ-ensemble.

$\blacksquare$

Definition 1.28. *([11]) Un espace-c* (Y, Γ) *est appelé espace-m.c, si pour tout espace métrique* (D, d) *et toute application continue* $f : D \longrightarrow Y$ *nous avons la propriété (m) suivante*
Pour tout $x \in D$ *et tout voisinages* W *de* $f(x)$*, il existe un voisinage* V *de* x *et un* Γ*-ensemble* $Z \subset Y$ *tels que* $f(V) \subseteq Z \subseteq W$*.*

Definition 1.29. *([11]) Soient* (Y, d) *un espace métrique et*
$\Gamma : \prec Y \succ \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ *une application vérifiant 1) et 2) de la Définition* (1.27)*, i.e un espace métrique-c. On dit que* $(Y, d; \Gamma)$ *est un espace-l.c. si les boules ouvertes sont des* Γ*-ensembles et si tout voisinage* $\{y \in Y; d(y, Z) < r\}$ *de tout* Γ*-ensemble* $Z \subseteq Y$ *est aussi un* Γ*-ensemble.*

Proposition 1.12. *Tout espace métrique-l.c est un espace-m.c.*

Démonstration. Soit (E, d_E, Γ) un espace-l.c, montrons que c'est un espace-m.c, c'est-à-dire qu'il vérifie (m). Soit (X, d_X) un espace métrique et $f : (X, d_X) \to (E, d_E)$ une application continue. Soit $x \in X$ et soit $W \in \mathcal{V}_E(f(x))$. $\exists ?V \in \mathcal{V}_X(x)$, $\exists ?Z \subset E$ *un* Γ-ensemble tel que

$$f(V) \subset Z \subset W.$$

Comme $W \in \mathcal{V}_E(f(x))$, alors $\exists O$ ouvert dans E tels que $f(x) \in O \subset W$. Puisque O est ouvert dans E et $f(x) \in O$, alors $\exists r > 0$, $B_E(f(x), r) \subset O$. Donc $B_E(f(x), r) \in \mathcal{V}_E(f(x))$. Mais f est continue au point x, donc $\exists V \in \mathcal{V}_X(x), f(V) \subset B_E(f(x), r)$. Alors

$$f(V) \subset B_E(f(x), r) \subset O \subset W.$$

Il suffit de prendre $Z = B_E(f(x), r)$, car c'est un Γ-ensemble. ■

Proposition 1.13. *Tout espace vectoriel topologique localement convexe est un espace m-c.*

Démonstration. Soit Y un espace vectoriel topologique localement convexe. D'après la Proposition 1.11, c'est un espace-*c*. Il reste donc à vérifier la propriété (m). Soit D un espace métrique et $f : D \longrightarrow Y$ une application continue. Soit $x \in D$ et soit $W \in \mathcal{V}_Y(f(x))$, $\exists ?\ V \in \mathcal{V}_D(x), \exists ?\ Z \subset Y$ un Γ-ensemble tels que

$$f(V) \subset Z \subset W.$$

Comme Y est localement convexe, $f(x)$ admet un système fondamental de voisinages dont les éléments sont convexes, et puisque $W \in \mathcal{V}_Y(f(x))$, alors

$$\exists W' \in \mathcal{V}_Y(f(x)); W' \subset W \text{ et } W' \text{ est convexe.}$$

Mais f est continue au point x, donc

$$\exists\ V \in \mathcal{V}_D(x),\ f(V) \subset W'.$$

Donc

$$f(V) \subset W' \subset W,$$

il suffit alors de prendre $Z = W'$, c'est un Γ-ensemble car il est convexe d'après la Proposition 1.11. ■

Chapitre 2

Théorème de Dugundji

Dans ce chapitre, nous présentons le théorème de Dugundji dans sa version classique (voir [5]). On s'est référé à [1] pour la démonstration, en la présentant d'une manière approfondi et très bien détaillée.

Théorème 2.1([5]) Soit (X, d_X) un espace métrique, A un ensemble fermé de X, Y un espace vectoriel localement convexe et $f : A \longrightarrow Y$ une application continue. Alors, il existe une application continue $\widetilde{f} : X \longrightarrow Y$ qui prolonge f, c'est-à-dire, $\widetilde{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in A$. De plus

$$\widetilde{f}(X) \subset Co(f(A)). \tag{P}$$

Démenstration.

Etape1. Pour chaque $x \in X \backslash A$, fixons un réel r_x tel que

$$0 < r_x < \frac{1}{3}\, d(x, A). \tag{2.1}$$

Un tel nombre existe puisque A est fermé dans X. En effet,

$x \in X \backslash A \Longrightarrow x \notin A \Longrightarrow x \notin \bar{A} \Longrightarrow d(x, A) \neq 0 \Longrightarrow d(x, A) > 0 \Longrightarrow \exists r \in \mathbb{R}, 0 < r < d(x, A)$.

(r dépend de x, $\ r = r_x$)

Pour chaque $x \in X \backslash A$, posons $B_x = B_X(x, r_x)$. la boule ouverte dans X de centre x et de rayon r_x. Alors,

$$X \backslash A = \bigcup_{x \in X \backslash A} B_x.$$

En effet

$$\begin{aligned} x' \in X \backslash A &\overset{x' \in B_{x'}}{\Longrightarrow} \exists x \in X \backslash A, x' \in B_x \\ &\Longrightarrow x' \in \bigcup_{x \in X \backslash A} B_x, \end{aligned}$$

d'où $X \backslash A \subset \bigcup\limits_{x \in X \backslash A} B_x$.
Maintenant

$$\begin{aligned} x' \in \bigcup_{x \in X \backslash A} B_x &\Longrightarrow \exists x \in X \backslash A, x' \in B_x \\ &\Longrightarrow \exists x \in X \backslash A, d(x', x) < r_x \\ &\Longrightarrow \exists x \in X \backslash A, -d(x', x) > -r_x, \end{aligned}$$

mais

$$d(x, A) \leq d(x, x') + d(x', A),$$

d'où

$$d(x, A) - d(x, x') \leq d(x', A).$$

Comme $x \in X \backslash A$, alors d'après la relation (2.1)

$$3r_x < d(x, A),$$

d'où

$$0 < 2r_x = 3r_x - r_x < d(x', A).$$

i.e.

$$x' \notin \bar{A},$$

donc

$$x' \notin A,$$

alors

$$x' \in X \backslash A,$$

d'où, $\bigcup\limits_{x\in X\setminus A} B_x \subset X\setminus A$.
Donc $(B_x)_{x\in X\setminus A}$ est un recouvrement ouvert de $X \setminus A$, or, $X\setminus A$ est paracompacte car c'est un espace métrique (proposition (1.3))
Par conséquent $(B_x)_{x\in X\setminus A}$ admet un raffinement ouvert localement fini canonique (proposition (1.4)), qu'on note $(U_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$, c'est-à-dire il existe une famille $(U_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ de parties de X vérifiant

(A) $X\setminus A \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Omega} U_\lambda$,

(B) $\forall\lambda \in \Omega,\ U_\lambda$ est ouvert dans X,

(C) $\forall\lambda \in \Omega,\ \exists x \in X\setminus A,\ U_\lambda \subset B_x$, (raffinement)

(D) $\forall x \in X\setminus A, \exists V \in \mathcal{V}_X(x)$, il existe un nombre fini (n_x) de U_λ vérifiant $V \bigcap U_\lambda \neq \emptyset$, (localement fini)

(E) $\forall a \in A,\ \forall W \in \mathcal{V}_X(a),\ \exists W' \in \mathcal{V}_X(a)$ tels que

$$W' \subset W,$$

et

$$U_\lambda \cap W' \neq \emptyset \Longrightarrow U_\lambda \subset W.$$

D'autre part, pour tout $x \in X\setminus A$, nous avons la relation

$$0 < 2r_x \leq d(B_x, A). \tag{2.2}$$

En effet, soit $x \in X\setminus A$ et soit $y \in B_x$. On sait que $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$, d'où

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A).$$

Comme $y \in B_x$, $d(x, y) < r_x$ d'où $-d(x, y) > -r_x$,
et comme $x \in X\setminus A$, alors d'après la relation (2.1), $3r_x < d(x, A)$, par conséquent

$$2r_x = 3r_x - r_x < d(y, A).$$

On conclut que

$$2r_x < d(y, A),\ \ \forall y \in B_x,$$

d'où

$$0 < 2r_x \leq \underset{y\in B_x}{inf}\, d(y,A) = d(B_x,A).$$

Etape2. Pour chaque $\lambda \in \Omega$, considérons l'application

$$\begin{aligned} \psi_\lambda : X\backslash A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \psi_\lambda(x) = \frac{d(x, X\setminus U_\lambda)}{\sum\limits_{\lambda\in\Omega} d(x, X\setminus U_\lambda)}. \end{aligned}$$

L'application ψ_λ est bien définie. En effet, soit $x \in X\backslash A$, d'après (D), il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}_X(x)$ $(x \in V)$, et il existe un nombre fini noté n_x de U_λ vérifiant $V \bigcap U_\lambda \neq \emptyset$.
C'est-à-dire, il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}_X(x)$, et il existe un ensemble fini d'indices $J_x \subset \Omega$ $\big(Card(J_x) = n_x\big)$ tels que

$$V \cap U_\lambda = \emptyset, \quad \forall\lambda \in \Omega\backslash J_x. \tag{2.3}$$

Puisque $x \in V$, alors d'après (2.3), les $(U_\lambda)_{\lambda\in J_x}$ sont les seuls qui peuvent contenir x, c'est-à-dire, x n'appartient pas aux autres, i.e.

$$x \notin U_\lambda, \;\; \forall\lambda \in \Omega\backslash J_x.$$

D'autre part, x appartient au moins à un U_λ $\big($ d'après (A)$\big)$, par conséquent, x appartient à un nombre fini, n'_x, de U_λ $(1 \leqslant n'_x \leqslant n_x)$.
Alors,

$$\sum_{\lambda\in\Omega} d(x, X\backslash U_\lambda) = \sum_{\lambda\in J_x} d(x, X\backslash U_\lambda) + \sum_{\lambda\in\Omega\backslash J_x} d(x, X\backslash U_\lambda).$$

Pour tout $\lambda \in \Omega\backslash J_x$, $x \notin U_\lambda$, d'où $x \in X\backslash U_\lambda$, (qui est fermé dans X) donc $d(x, X\backslash U_\lambda) = 0$, d'où

$$\sum_{\lambda\in\Omega\backslash J_x} d(x, X\backslash U_\lambda) = 0.$$

Puisque J_x est fini, alors la somme $\sum\limits_{\lambda\in J_x} d(x, X\backslash U_\lambda)$ est finie. Par conséquent la somme $\sum\limits_{\lambda\in\Omega} d(x, X\backslash U_\lambda)$ est finie.

Maintenant, on va montrer que

$$\sum_{\lambda\in\Omega} d(x, X\backslash U_\lambda) \neq 0.$$

Supposons que $\sum\limits_{\lambda\in\Omega} d(x, X\backslash U_\lambda) = 0$.

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda\in\Omega} d(x, X\backslash U_\lambda) = 0 &\Longleftrightarrow \forall\lambda \in \Omega,\ d(x, X\backslash U_\lambda) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \forall\lambda \in \Omega,\ x \in \overline{X\backslash U_\lambda} \\
&\Longleftrightarrow \forall\lambda \in \Omega,\ x \in X\backslash U_\lambda\ \ \big(car\ U_\lambda\ est\ ouvert\big) \\
&\Longleftrightarrow \forall\lambda \in \Omega,\ x \notin U_\lambda,
\end{aligned}$$

contradiction avec (A), x appartient au moins à un U_λ.
Donc $\sum\limits_{\lambda\in\Omega} d(x, X\backslash U_\lambda) \neq 0$.
On conclut que ψ_λ est bien définie.Notons par $J'_x = \{\lambda \in \Omega, \quad x \in U_\lambda\}$. $J'_x \subset J_x$.

$$x \in U_\lambda \Leftrightarrow \forall\lambda \in J'_x. \tag{2.4}$$

On peut écrire

$$\begin{aligned}
\psi_\lambda : X\backslash A &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \psi_\lambda(x) = \frac{d(x, X\backslash U_\lambda)}{\sum\limits_{\lambda\in J_x} d(x, X\backslash U_\lambda)} = \frac{d(x, X\backslash U_\lambda)}{\sum\limits_{\lambda\in J'_x} d(x, X\backslash U_\lambda)}.
\end{aligned}$$

En fait, pour tout $\lambda \in \Omega$, ψ_λ est continue et $Supp(\psi_\lambda) \subset U_\lambda$. En plus $\sum\limits_{\lambda\in\Omega} \psi_\lambda(x) = 1$ pour tout $x \in X\backslash A$. En effet

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda\in\Omega} \psi_\lambda(x) &= \sum_{\lambda\in J_x} \psi_\lambda(x) \\
&= \sum_{\lambda\in J_x} \frac{d(x, X\backslash U_\lambda)}{\sum\limits_{\lambda\in J_x} d(x, X\backslash U_\lambda)} \\
&= \frac{\sum\limits_{\lambda\in J_x} d(x, X\backslash U_\lambda)}{\sum\limits_{\lambda\in J_x} d(x, X\backslash U_\lambda)}) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Supp(\psi_\lambda) &= \{x \in X\backslash A,\ \psi_\lambda(x) \neq 0\} \\
&= \{x \in X\backslash A,\ d(x, X\backslash U_\lambda) \neq 0\} \\
&= \{X\backslash A,\ x \in U_\lambda\} \\
&= X\backslash A \bigcap U_\lambda \\
&\subset U_\lambda.
\end{aligned}$$

ψ_λ est continue puisque le numérateur est une fonction continue (la propriété 2) de la proposition (1.1)).Pour le dénominateur, pour chaque $x \in X\backslash A$, l'image de x est une somme finie d'images de x par des applications continues, elle est donc continue (par la proposition (1.9)).
Maintenant, pour chaque $\lambda \in \Omega$, choisissons un couple $(u_\lambda, a_\lambda) \in (U_\lambda \times A)$ tel que

$$d(u_\lambda, a_\lambda) < 2d(u_\lambda, A) \tag{2.5}$$

De tels éléments existent. En effet, pour tout $\lambda \in \Omega$ prenant un élément $u_\lambda \in U_\lambda$ ($U_\lambda \neq \emptyset$). D'après la relation (C), il existe un élément $x \in X\backslash A$ tel que

$$U_\lambda \subset B_x,$$

d'où

$$d(B_x, A) \leqslant d(U_\lambda, A),$$

car

$$\begin{aligned}
d(B_x, A) &= Inf_{t\in B_x} d(t, A) \\
&\leqslant d(t, A), \forall t \in B_x \\
&\leqslant d(t, A), \forall t \in U_\lambda (car\ U_\lambda \subset B_x) \\
&\leqslant \underset{t\in U_\lambda}{Inf} d(t, A) \\
&= d(U_\lambda, A).
\end{aligned}$$

Or d'après (2.2)

$$0 < d(B_x, A),$$

donc

$$0 < d(U_\lambda, A).$$

Mais $d(U_\lambda, A) = \underset{u\in U_\lambda}{Inf} d(u, A) \leqslant d(u_\lambda, A)$ car $u_\lambda \in U_\lambda$, donc $0 < d(u_\lambda, A)$ d'où

$$d(u_\lambda, A) < 2d(u_\lambda, A),$$

i.e.

$$\underset{y\in A}{inf} f(u_\lambda, y) < 2d(u_\lambda, A),$$

Par conséquent, il existe un élément $y \in A$ tel que

$$d(u_\lambda, y) < 2d(u_\lambda, A),$$

on prend $a_\lambda := y$, on obtient

$$d(u_\lambda, a_\lambda) < 2d(u_\lambda, A).$$

Etape3. Définissons l'application

$$\widetilde{f} : X \longrightarrow Y$$

$$x \longmapsto \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x\ \in A, \\ \sum\limits_{\lambda\in\Omega} \psi_\lambda(x) f(a_\lambda) & si\ x\ \in X \backslash A. \end{cases}$$

Il est claire que $\widetilde{f}$ est un prolongement de f. Pour la propriété (P), nous avons

$$\begin{aligned} x \in A &\Longrightarrow \widetilde{f}(x) = f(x) \\ &\Longrightarrow \widetilde{f}(x) \in f(A)\ (car\ f(x) \in f(A)) \\ &\Longrightarrow y \in Co(f(A))\ \ \big(car\ \ f(A) \subset Co(f(A)\big). \end{aligned}$$

Par contre

$$\begin{aligned} x \in X \setminus A \Rightarrow y = \widetilde{f}(x) &= \sum_{\lambda\in\Omega} \psi_\lambda(x) f(a_\lambda) \\ &= \sum_{\lambda\in J_x} \psi_\lambda(x) f(a_\lambda) + \sum_{\lambda\in\Omega\backslash J_x} \psi_\lambda(x) f(a_\lambda) \\ &= \sum_{\lambda\in J_x} \psi_\lambda(x) f(a_\lambda)\ \ \big(car\ \psi_\lambda(x) = 0, \forall\lambda \in \Omega\backslash J_x\big), \end{aligned}$$

donc $\widetilde{f}(x)$ est une combinaison convexe des éléments $(f(a_\lambda))_{\lambda \in J_x}$, mais les $f(a_\lambda)$ appartiennent à $f(A)$, pour tout $\lambda \in \Omega$, en particulier, pour tout $\lambda \in J_x$ $\big(car\ a_\lambda \in A, \forall \lambda \in \Omega\big)$. Alors, $\widetilde{f}(x) \in Co(f(A))$.

Continuité de $\widetilde{f}$. Montrons que $\widetilde{f}$ est continue sur X. Pour cela, il suffit de montrer que $\widetilde{f}$ est continue sur $fr(A)$ et sur $X \backslash A$.
Soit $a \in fr(A)$

$$(\widetilde{f}\ continue\ en\ a) \Leftrightarrow (\forall V' \in \mathcal{V}_Y(\widetilde{f}(a)), \exists W' \in \mathcal{V}_X(a); \widetilde{f}(W') \subset V').$$

Soit $V' \in \mathcal{V}_Y(\widetilde{f}(a))$ un voisinage quelconque de $\widetilde{f}(a)$ dans Y. Comme l'espace vectoriel topologique Y est localement convexe, chaque point de Y, en particulier $\widetilde{f}(a)$ possède un système fondamental de voisinages noté $\mathcal{B}(\widetilde{f}(a))$ formé d'ensembles convexes, i.e., il existe une famille $\mathcal{B}(\widetilde{f}(a)) \subset \mathcal{V}_Y(\widetilde{f}(a))$ telle que

$$\forall V \in \mathcal{B}(\widetilde{f}(a)), V \text{ est convexe,}$$

et

$$\forall V' \in \mathcal{V}(\widetilde{f}(a)), \exists V \in \mathcal{B}(\widetilde{f}(a)); V \subset V'.$$

Soit $V \in \mathcal{B}(\widetilde{f}(a))$. V un voisinage convexe de $\widetilde{f}(a)$ dans Y inclu dans V'.
On a $\widetilde{f}(a) = f(a)$ (puisque A est fermé alors $fr(A) \subset A$, d'où $a \in A$). Mais f est continue sur A, en particulier au point a, d'où il existe un réel $\delta > 0$ tel que

$$f(B_A(a, \delta)) \subset V. \tag{2.6}$$

On sait que $B_A(a, \delta) = A \cap B_X(a, \delta)$.
Soit $W = B_X(a, \frac{\delta}{3})$. Pour tout $\lambda \in \Omega$, nous avons

$$\begin{aligned} d(a_\lambda, a) &\leq d(a_\lambda, u_\lambda) + d(u_\lambda, a) \quad (\textit{inégalité triangulaire}) \\ &< 2\,d(u_\lambda, A) + d(u_\lambda, a) \quad (\textit{grâce à la relation}(2.5)) \\ &\leq 2\,d(u_\lambda, a) + d(u_\lambda, a) \qquad (car\ a \in A) \\ &= 3\,d(u_\lambda, a). \end{aligned}$$

Donc, si $u_\lambda \in W$ on aura $d(u_\lambda, a) < \frac{\delta}{3}$, d'où $d(a_\lambda, a) < 3\,\frac{\delta}{3} = \delta$, donc $a_\lambda \in B_A(a, \delta)$ (car $a_\lambda \in A$), d'où, grâce à (2.6), $f(a_\lambda) \in V$.
En résumé, pour tout $\lambda \in \Omega$, nous avons

$$u_\lambda \in W \Rightarrow f(a_\lambda) \in V. \tag{2.7}$$

Maintenant, puisque $W \in \mathcal{V}_X(a)$, alors d'après (E), il existe $W' \in \mathcal{V}_X(a)$ tel que

$$W' \subset W \tag{2.8}$$

et

$$U_\lambda \cap W' \neq \emptyset \Rightarrow U_\lambda \subset W \tag{2.9}$$

Dans la suite, en va montrer que $\widetilde{f}(W') \subset V'$. Comme

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(W') &= \widetilde{f}(W' \cap X) \\
&= \widetilde{f}(W' \cap (A \cup X \backslash A)) \\
&= \widetilde{f}((W' \cap A) \cup (W' \cap X \backslash A)) \\
&= \widetilde{f}(W' \cap A) \cup \widetilde{f}(W' \cap X \backslash A) \\
&= f(W' \cap A) \cup \widetilde{f}(W' \cap X \backslash A),
\end{aligned}$$

il suffit de montrer que $f(W' \cap A) \subset V'$ et que $\widetilde{f}(W' \cap X \backslash A) \subset V'$.
Grâce à la relation (2.8) nous avons

$$(W' \cap A) \subset (W \cap A),$$

or

$$W \cap A = B_A(a, \tfrac{\delta}{3}),$$

et

$$B_A(a, \tfrac{\delta}{3}) \subset B_A(a, \delta),$$

donc

$$(W' \cap A) \subset B_A(a, \delta)$$

D'où grâce à la relation (2.6),

$$f(W' \cap A) \subset f(B_A(a, \delta)) \subset V \subset V'.$$

D'autre part, soit $x \in W' \cap X \setminus A$. $\quad (\widetilde{f}(x) \in V?)$
Puisque $x \in X \setminus A$, alors

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{\lambda \in J'_x} \psi(x) f(a_\lambda).$$

Avec $\sum\limits_{\lambda \in J'_x} \psi_\lambda(x) = 1$ et $0 < \psi_\lambda(x) < 1$, $\forall \lambda \in J'_x$.
Or, pour tout $\lambda \in J'_x$, nous avons $x \in U_\lambda$, d'où $x \in W' \bigcap U_\lambda$ (car $x \in W'$), donc $W' \bigcap U_\lambda \neq \emptyset$ et donc d'après (2.9), $U_\lambda \subset W$ d'où $u_\lambda \in W$ (car $u_\lambda \in U_\lambda$,$\forall \lambda$).On en déduit d'après la relation (2.7) que $f(a_\lambda) \in V$.

$$\begin{aligned}
\lambda \in J'_x &\overset{(2.4)}{\Longrightarrow} x \in U_\lambda \\
&\overset{x \in W'}{\Longrightarrow} x \in W' \cap U_\lambda \\
&\Longrightarrow W' \cap U_\lambda \neq \emptyset \\
&\overset{(2.9)}{\Longrightarrow} U_\lambda \subset W \\
&\overset{u_\lambda \in U_\lambda, \forall \lambda}{\Longrightarrow} u_\lambda \in W \\
&\overset{(2.7)}{\Longrightarrow} f(a_\lambda) \in V.
\end{aligned}$$

Donc $\widetilde{f}(x)$ est une combinaison convexe des éléments $f(a_\lambda), \lambda \in J'_x$ qui appartiennent à V, mais V est convexe donc $\widetilde{f}(x) \in V$. On conclut que $\widetilde{f}(W' \cap X \backslash A) \subset V \subset V'$,
d'où la continuité de $\widetilde{f}$ sur $fr(A)$.
<u>Continuité de $\widetilde{f}$ sur $X \setminus A$.</u> Pour tout $\lambda \in \Omega$ (λ est fixé), considérons l' application

$$\begin{aligned}
h_\lambda : X \backslash A &\rightarrow Y \\
x &\mapsto h_\lambda(x) = \psi_\lambda(x).f(a_\lambda).
\end{aligned}$$

Notons que $f(a_\lambda)$ est constant dans Y (a_λ ne dépend pas de x). En prenant $B = X\backslash A$, $y_0 = f(a_\lambda)$, et en appliquant la Proposition 1.8, on conclut que h_λ est continue sur $X\backslash A$. C'est-à-dire pour chaque $x \in X\backslash A$, l'image de x, $\widetilde{f}(x)$ est une somme finie d'images de x par des applications continues (les h_λ), elle est donc continue (d'après la Proposition 1.9). Par conséquent, $\widetilde{f}$ est continue sur $X\backslash A$, et donc sur A. ■

Le théorème de Dugundji non seulement permet de prolonger par continuité une application sur l'espace entier, mais aussi permet souvent de préserver les caractéristiques de l'application qu'on a prolongé, comme le montre l'exemple suivant. Il s'agit d'une propriété qui a été utilisé implicitement dans [2] lors de la démonstration d'un résultat principal concernant l'existence de solution pour une équation différentielle du second ordre avec des conditions aux limites où l'application f représente le second membre de l'équation. Pour plus de détail sur l'équation différentielle et le résultat d'existence, voir [2].

Proposition 2.1 Soient E un espace vectoriel normé, $J \subset [0,1]$ un fermé et soit
$f : J \times E \times E \to E$ une application continue satisfaisant les conditions suivantes
(i) il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $(t, x, y) \in J \times E \times E$

$$\| f(t,x,y) \| \leq c \ (1+ \| x \| + \| y \|);$$

(ii) il existe deux constantes positives λ_1, λ_2 satisfaisant $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$, telles que pour tout $t \in J$ et tous $(x,y), (x', y') \in E \times E$

$$\| f(t,x,y) - f(t,x',y') \| \leq \lambda_1 \| x - x' \| + \lambda_2 \| y - y' \| .$$

Alors, il existe une application continue $\widetilde{f} : [0,1] \times E \times E \longrightarrow E$ qui prolonge f, de plus $\widetilde{f}$ vérifie (i) et (ii).

Démonstration. Puisque l'espace E est vectoriel topologique localement convexe (Proposition (1.10)), on suit le même schéma de démonstration du Théorème 2.1. En prenant $A = J$ et $X = [0,1]$, les étapes 1 et 2 restent entièrement valables. On obtient les même relations même la relation (2.5). Définissons l'application

$$\widetilde{f} : [0,1] \times E \times E \longrightarrow E$$

$$(t,x,y) \longmapsto \widetilde{f}(t,x,y) = \begin{cases} f(t,x,y) & si\ t\ \in J, \\ \sum\limits_{\lambda\in\Omega} \psi_\lambda(t) f(a_\lambda,x,y) & si\ t\ \in [0,1]\backslash J. \end{cases}$$

Par construction, le reste de la démonstration reste entièrement valable avec adaptation.

Par conséquent, $\widetilde{f}$ vérifie (i) puisque pour tout $(t,x,y) \in [0,1] \times E \times E$, si $t \in J$ c'est immédiat. Sinon

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{f}(t,x,y)\| &= \|\sum_{\lambda\in\Omega} \psi_\lambda(t) f(a_\lambda,x,y)\| \\
&\leq \sum_{\lambda\in\Omega} \|\psi_\lambda(t) f(a_\lambda,x,y)\| \\
&= \sum_{\lambda\in\Omega} |\psi_\lambda(t)| \|f(a_\lambda,x,y)\| \\
&= \sum_{\lambda\in\Omega}\ \psi_\lambda(t) \|f(a_\lambda,x,y)\| \\
&\leq \sum_{\lambda\in\Omega} [\psi_\lambda(t)\ c\ (\ 1+ \parallel x \parallel + \parallel y \parallel)] \\
&\leq \sum_{\lambda\in\Omega} (\psi_\lambda(t))\ c(\ 1+ \parallel x \parallel + \parallel y \parallel) \\
&= c\ (1 + \|x\| + \|y\|).
\end{aligned}$$

$\widetilde{f}$ vérifie aussi (ii) puisque pour tout $t \in [0,1]$ et tous $(x,y),(x',y') \in E \times E$,si

$t \in [0,1] \setminus J$

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{f}(t,x,y) - \widetilde{f}(t,x',y')\| &= \|\sum_{\lambda\in\Omega} \psi_\lambda(t) f(a_\lambda,x,y) - \sum_{\lambda\in\Omega} \psi_\lambda(t) f(a_\lambda,x',y')\| \\
&= \|\sum_{\lambda\in\Omega} \psi_\lambda(t)(f(a_\lambda,x,y) - f(a_\lambda,x',y'))\| \\
&\leq \sum_{\lambda\in\Omega} \|\psi_\lambda(t)(f(a_\lambda,x,y) - f(a_\lambda,x',y'))\| \\
&= \sum_{\lambda\in\Omega} \psi_\lambda(t)\ \|f(a_\lambda,x,y) - f(a_\lambda,x',y')\| \\
&\leq \sum_{\lambda\in\Omega} [\psi_\lambda(t)\ (\lambda_1 \parallel x - x' \parallel + \lambda_2 \parallel y - y' \parallel)] \\
&= (\sum_{\lambda\in\Omega} \psi_\lambda(t))\ (\lambda_1 \parallel x - x' \parallel + \lambda_2 \parallel y - y' \parallel) \\
&= \lambda_1 \parallel x - x' \parallel + \lambda_2 \parallel y - y' \parallel .
\end{aligned}$$

■

Chapitre 3

Théorème de Dugundji généralisé

Le théorème principale dans ce chapitre (Théorème 3.2) est une généralisation du fameux théorème classique de Dugundji au cas des espaces pas nécessairement vectoriels mais qui possèdent une structure abstraite analogue à celle des espaces vectoriels topologiques localement convexes. De tels espaces sont dits espaces-m.c.

Dans [11] , il a été mentionné que la démonstration suit celle du théorème classique, l'auteur a donné les grandes lignes de démonstration. Dans ce mémoire, et dans cette partie nous présentons une démonstration en suivant celle que nous avons présenté pour le théorème (2.1) du chapitre précédent (théorème classique) que nous avons très bien détaillée, mais avec les changements adéquats. Le lecteur trouvera dans ce mémoire une référence assez claire et détaillée concernant la démonstration.

Le théorème 3.2 est basé sur le théorème suivant

Théorème 3.1 ([11])Soit D un espace paracompact, $(U_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ un recouvrement ouvert localement fini de D, (Y,Γ) un espace-c et $\eta : \Omega \longrightarrow Y$ une application. Alors, il existe une application continue $g : D \longrightarrow Y$ telle que pour tout $x \in D$,

$$g(x) \in \mathit{\Gamma}(\{\eta(\lambda); \lambda \in \sigma(x,\Omega)\}), \tag{3.1}$$

avec $\sigma(x,\Omega) = \{\lambda \in \Omega; x \in U_\lambda\}$.

Théorème 3.2 ([11]) Soient (X, d_X) un espace métrique, $A \subset X$ un ensemble fermé, $(Y, \mathit{\Gamma})$ un espace-m.c et $f : A \longrightarrow Y$ une application continue.Alors, il existe une application continue $\widetilde{f} : X \longrightarrow Y$ qui prolonge f et qui vérifie

$$\widetilde{f}(X) \subset Z, \tag{P}$$

pour tout $\Gamma - ensemble\ Z \subset \mathit{\Gamma}$ contenant $f(A)$.

Démonstration. L'étape 1 et une partie de l'étape 2 de la démonstration du Théorème 2.1 restent entièrement valables car l'ensemble de départ pour l'application f est le même.

Etape1. Pour chaque $x \in X\backslash A$, fixons un réel r_x tel que

$$0 < r_x < \frac{1}{3}d(x, A). \tag{3.2}$$

Un tel nombre existe puisque A est fermé dans X. En effet

$$\begin{aligned} x \in X\backslash A &\Longrightarrow x \notin A \\ &\Longrightarrow x \notin \bar{A} \\ &\Longrightarrow d(x, A) \neq 0 \\ &\Longrightarrow d(x, A) > 0 \\ &\Longrightarrow \exists r \in \mathbb{R}, 0 < r < d(x, A). \end{aligned}$$

(r dépend de x, $r = r_x$)

Pour chaque $x \in X\backslash A$, posons $B_x = B_X(x, r_x)$, la boule ouverte dans X de centre x et de rayon r_x. Alors,

$$X\backslash A = \bigcup_{x \in X\backslash A} B_x.$$

En effet

$$x' \in X\backslash A \overset{x' \in B_{x'}}{\Rightarrow} \exists x \in X\backslash A,\ x' \in B_x \Rightarrow x' \in \bigcup_{x \in X\backslash A} B_x,$$

d'où $X\backslash A \subset \bigcup_{x \in X\backslash A} B_x$.

Maintenant,

$$x' \in \bigcup_{x \in X\backslash A} B_x \Longrightarrow \exists x \in X\backslash A, x' \in B_x$$
$$\Longrightarrow \exists x \in X\backslash A, (x', x) < r_x$$
$$\Longrightarrow \exists x \in X\backslash A, -d(x', x) > -r_x$$

mais

$$d(x, A) \leqslant d(x, x') + d(x', A),$$

d'où

$$d(x, A) - d(x, x') \leqslant d(x', A).$$

Comme $x \in X\backslash A$, alors d'après la relation (3.2),

$$3r_x < d(x, A),$$

d'où

$$0 < 2r_x = 3r_x - r_x < d(x', A),$$

i.e.

$$x' \notin \bar{A},$$

donc

$$x' \notin A,$$

alors

$$x' \in X\backslash A,$$

d'où

$$\bigcup_{x \in X\backslash A} B_x \subset X\backslash A.$$

Donc $(B_x)_{x \in X\backslash A}$ est un recouvrement ouvert de $X \setminus A$, or, $X\backslash A$ est paracompact car c'est un espace métrique $\big($Proposition (1.3) $\big)$, par conséquent $(B_x)_{x \in X\backslash A}$ admet un raffinement ouvert localement fini canonique (Proposition (1.4)), qu'on note $(U_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$, c'est-à-dire il existe une famille $(U_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ de parties de X vérifiant

(A) $X\backslash A \subset \bigcup_{\lambda \in \Omega} U_\lambda,$

(B) $\forall \lambda \in \Omega,\ U_\lambda$ est ouvert dans X,

(C) $\forall \lambda \in \Omega,\ \exists x \in X \backslash A,\ U_\lambda \subset B_x, (raffinement)$

(D) $\forall x \in X \backslash A$,$\exists V \in \mathcal{V}_X(x)$, il existe un nombre fini (n_x) de U_λ vérifiant $V \bigcap U_\lambda \neq \emptyset, (localement\ fini)$

(E) $\forall a \in A,\ \forall W \in \mathcal{V}_X(a),\ \exists W' \in \mathcal{V}_X(a)$ tels que

$$W' \subset W,$$

et

$$U_\lambda \cap W' \neq \emptyset \Longrightarrow U_\lambda \subset W.$$

D'autre part, pour tout $x \in X \backslash A$, nous avons la relation

$$0 < 2r_x \leqslant d(B_x, A). \tag{3.3}$$

En effet, soit $x \in X \backslash A$ et soit $y \in B_x$. On sait que

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A),$$

d'où

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A).$$

Comme $y \in B_x, d(x, y) < r_x$, d'où $-d(x, y) > -r_x$,

et comme $x \in X \backslash A$, alors d'après la relation(3.2), $3r_x < d(x, A)$, par conséquent

$$2r_x = 3r_x - r_x < d(y, A).$$

On conclut que

$$2r_x < d(y, A),\ \forall y \in B_x,$$

d'où

$$0 < 2r_x \leq \underset{y \in B_x}{inf}\, d(y, A) = d(B_x, A).$$

D'autre par, d'après (D), pour tout $x \in X \backslash A$, il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}_X(x)$ $(x \in V)$, et il existe un nombre fini(noté n_x) de U_λ vérifiant

$V \bigcap U_\lambda \neq \emptyset$. C 'est-à-dire, il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}_X(x)$, et il existe un ensemble fini d'indices $J_x \subset \Omega$ $(Card J_x = n_x)$ tels que

$$V \cap U_\lambda = \emptyset, \forall \lambda \in \Omega \backslash J_x \tag{3.4}$$

Puisque $x \in V$, alors d'après(3.4), les $(U_\lambda)_{\lambda \in J_x}$ sont les seuls qui peuvent contenir x, c'est-à-dire, x n'appartient pas aux autres, i.e.

$$x \notin U_\lambda, \forall \lambda \in J_x.$$

D'autre part, x appartient au moins à un U_λ (d'après (A)) , par conséquent, x appartient a un nombre fini, n'_x, de U_λ $(1 \leqslant n'_x \leqslant n_x)$. Notons par
$J'_x = \{\lambda \in \Omega, x \in U_\lambda\}$. $J'_x \subset J_x$,

$$x \in U_\lambda \Leftrightarrow \forall \lambda \in J'_x. \tag{3.5}$$

Maintenant, pour chaque $\lambda \in \Omega$ choisissons un couple $(u_\lambda, a_\lambda) \in (U_\lambda \times A)$ tel que

$$d(u_\lambda, a_\lambda) < 2d(u_\lambda, A). \tag{3.6}$$

De tels éléments existent. En effet, pour tout $\lambda \in \Omega$ prenant un élément $u_\lambda \in U_\lambda (U_\lambda \neq \emptyset)$. D'après la relation C), il existe un élément $x \in X \backslash A$ tel que

$$U_\lambda \subset B_x,$$

d'où

$$d(B_x, A) \leqslant d(U_\lambda, A),$$

en effet,

$$\begin{aligned} d(B_x, A) &= \underset{t \in B_x}{Inf} d(t, A) \\ &\leqslant d(t, A), \forall t \in B_x \\ &\leqslant d(t, A), \forall t \in U_\lambda (car\ U_\lambda \subset B_x) \\ &\leqslant \underset{t \in U_\lambda}{Inf} d(t, A) \\ &= d(U_\lambda, A). \end{aligned}$$

Or d'après (3.3)

$$0 < d(B_x, A),$$

donc

$$0 < d(U_\lambda, A).$$

Mais $d(U_\lambda, A) = \underset{u \in U_\lambda}{inf}\, d(u, A) \leqslant d(u_\lambda, A)$ *car* $u_\lambda \in U_\lambda$, donc $0 < d(u_\lambda, A)$ d'où

$$d(u_\lambda, A) < 2d(u_\lambda, A),$$

i.e.

$$\underset{y \in A}{inf}\, d(u_\lambda, y) < 2d(u_\lambda, A).$$

Par conséquent, il existe un élément $y \in A$ tel que

$$d(u_\lambda, y) < 2d(u_\lambda, A),$$

on prend $a_\lambda := y$, on obtient

$$d(u_\lambda, a_\lambda) < 2d(u_\lambda, A).$$

Etape2.

Définissons l'application

$$\eta : \Omega \longrightarrow Y$$
$$\lambda \longmapsto \eta(\lambda) = f(a_\lambda).$$

Puisque $X \backslash A$ est paracompacte (car il est métrique), alors en appliquant le Théorème 3.1, il existe une application continue

$$g : X \backslash A \longrightarrow Y$$

qui vérifie la propriété (3.1). Or, pour tout $x \in X \backslash A$ nous avons par la relation (3.5)

$$\sigma(x, \Omega) = \{\lambda \in \Omega; x \in U_\lambda\} = J'_x$$

Donc g vérifie pour tout $x \in X \backslash A$

$$g(x) \in \Gamma(\{f(a_\lambda); \lambda \in J'_x\}).$$

Etape3.

Définissons l'application

$$\widetilde{f} : X \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x\ \in A, \\ g(x) & si\ x\ \in X\backslash A. \end{cases}$$

Il est claire que $\widetilde{f}$ est un prolongement de f. Pour la propriété (P), Soit $Z \subset Y$ un $\Gamma - ensemble$ contenant $f(A)$, c'est-à-dire

$$\forall B \in < Z >, \Gamma(B) \subset Z, \tag{3.7}$$

$$f(A) \subset Z, \tag{3.8}$$

où $\prec Z \succ$ est la famille des parties finies et non vides de Z. Montrons que $\widetilde{f}(X) \subset Z$. Nous avons

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(X) &= \widetilde{f}(A \cup X\backslash A) \\ &= \widetilde{f}(A) \cup \widetilde{f}(X\backslash A) \\ &= f(A) \cup g(X\backslash A). \end{aligned}$$

D'après(3.8) $f(A) \subset Z$ soit maintenant $x \in X\backslash A$. $(g(x) \in Z?)$

Nous avons d'après (3.1), $g(x) \in \Gamma(\{f(a_\lambda); \lambda \in J'_x\})$. D'autre part, on sait que $\{f(a_\lambda); \lambda \in J'_x\} \subset f(A)$ (car $\forall \lambda, a_\lambda \in A$), d'oÙ d'après (3.8)

$$\{f(a_\lambda); \lambda \in J'_x\} \subset Z.$$

On sait que $\{f(a_\lambda); \lambda \in J'_x\}$, est un ensemble non vide (carJ'_x est non vide est fini). Par conséquent

$$\{f(a_\lambda); \lambda \in J'_x\} \in \prec Z \succ .$$

donc d'après (3.7)

$$g(x) \in \{f(a_\lambda); \lambda \in J'_x\} \subset Z.$$

(car Z est un $\Gamma-$ensemble). On conclut que $g(X \backslash A \subset Z)$, d'où la propriété (P) est vérifiée.

Continuité de $\widetilde{f}$. Sur $X \backslash A$ (qui est ouvert dans X) $\widetilde{f}$ est continue. Sur $\mathring{A}$, $\widetilde{f}$ est continue. Reste à montrer que $\widetilde{f}$ est continue sur $fr(A)$.
Soit $a \in fr(A)$.

$$(\widetilde{f} \textit{ est continue en } a) \Leftrightarrow (\forall V' \in \mathcal{V}_Y(\widetilde{f}(a)), \exists W' \in \mathcal{V}_X(a); \widetilde{f}(W') \subset V').$$

Soit $V' \in \mathcal{V}_Y(\widetilde{f}(a))$. On sait que $\widetilde{f}(a) = f(a)$ (puisque A est fermé alors $fr(A) \subset A$, d'où $a \in A$). Donc $V' \in \mathcal{V}_Y(f(a))$.
Puisque Y est un espace m-c, et comme $f : A \longrightarrow Y$ est continue, alors d'après la propriété (m)
$\forall x \in A, \forall V \in \mathcal{V}_Y(f(x)), \exists W \in \mathcal{V}_A(x), \exists Z \subset Y$ un $\Gamma-$ensemble tel que

$$f(W) \subset Z \subset V.$$

Donc pour $x = a$ et $V = V'$, il existe un voisinage $W \in \mathcal{V}_A(a)$, i.e. un réel $\delta > 0$, et un $\Gamma-$ensemble $Z_\delta \subset Y$ tels que

$$f(B_A(a, \delta)) \subset Z_\delta \subset V' \tag{3.9}$$

On sait que $B_A(a, \delta) = A \cap B_X(a, \delta)$. Soit $W = B_X(a, \frac{\delta}{3})$. Pour tout $\lambda \in \Omega$, nous avons

$$\begin{aligned} d(a_\lambda, a) &\leq d(a_\lambda, u_\lambda) + d(u_\lambda, a) \quad (\textit{inégalité triangulaire}) \\ &< 2\, d(u_\lambda, A) + d(u_\lambda, a) \quad (\textit{grâce à la relation}(3.6)) \\ &\leq 2\, d(u_\lambda, a) + d(u_\lambda, a) \qquad (\textit{car } a \in A) \\ &= 3\, d(u_\lambda, a). \end{aligned}$$

Donc, si $u_\lambda \in W$ on aura $d(u_\lambda, a) < \frac{\delta}{3}$, d'où $d(a_\lambda, a) < 3\,\frac{\delta}{3} = \delta$, donc $a_\lambda \in B_A(a, \delta)$ (car $a_\lambda \in A$), d'où, grâce à (3.9) $f(a_\lambda) \in Z_\delta$.
En résumé, pour tout $\lambda \in \Omega$, nous avons

$$u_\lambda \in W \Rightarrow f(a_\lambda) \in Z_\delta. \tag{3.10}$$

Maintenant, puisque $W \in \mathcal{V}_X(a)$, alors d'après la propriété (E) établie dans l'étape 1, il existe
$W' \in \mathcal{V}_X(a)$ tel que

$$W' \subset W \tag{3.11}$$

et

$$U_\lambda \cap W' \neq \emptyset \Rightarrow U_\lambda \subset W. \tag{3.12}$$

Dans la suite, nous allons montrer que $\widetilde{f}(W') \subset V'$. Comme

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(W') = \widetilde{f}(W' \cap X) = \widetilde{f}(W' \cap (A \cup X \backslash A)) &= \widetilde{f}((W' \cap A) \cup (W' \cap X \backslash A)) \\ &= \widetilde{f}(W' \cap A) \cup \widetilde{f}(W' \cap X \backslash A) \\ &= f(W' \cap A) \cup g(W' \cap X \backslash A),\end{aligned}$$

il suffit de montrer que $f(W' \cap A) \subset V'$ et que $g(W' \cap X \backslash A) \subset V'$.
Grâce à la relation (3.11) nous avons,

$$(W' \cap A) \subset (W \cap A)$$

or

$$W \cap A = B_A(a, \frac{\delta}{3}),$$

mais

$$B_A(a, \frac{\delta}{3}) \subset B_A(a, \delta)$$

donc

$$W' \cap A \subset B_A(a, \delta),$$

d'où grâce à la relation (3.9)

$$f(W' \cap A) \subset f(B_A(a, \delta)) \subset V'.$$

D'autre part, soit $x \in W' \cap X \backslash A$. $\qquad (g(x) \in V'\ ?)$
Puisque $x \in X \backslash A$, alors d'après la propriété (3.1)

$$g(x) \in \Gamma\big(\{f(a_\lambda); \lambda \in J'_x\}\big).$$

Or, pour tout $\lambda \in J'_x$, nous avons $x \in U_\lambda$, d'où $x \in W' \cap U_\lambda$ $\big($car $x \in W'\big)$, donc $W' \cap U_\lambda \neq \emptyset$ et donc d'après la relation (3.12), $U_\lambda \subset W$ d'où $u_\lambda \in W$ (car $u_\lambda \in U_\lambda, \forall \lambda$). On en déduit d'après la relation (3.10) que $f(a_\lambda) \in Z_\delta$.

$$\begin{aligned}
\lambda \in J'_x &\overset{(3.5)}{\Longrightarrow} x \in U_\lambda \\
&\overset{x \in W'}{\Longrightarrow} x \in W' \cap U_\lambda \\
&\Longrightarrow W' \cap U_\lambda \neq \emptyset \\
&\overset{(3.12)}{\Longrightarrow} U_\lambda \subset W \\
&\overset{u_\lambda \in U_\lambda, \forall \lambda}{\Longrightarrow} u_\lambda \in W \\
&\overset{(3.10)}{\Longrightarrow} f(a_\lambda) \in Z_\delta.
\end{aligned}$$

Donc $\{f(a_\lambda); \lambda \in J'_x\} \subset Z_\delta$. Mais $\{f(a_\lambda); \lambda \in J'_x\}$ est fini et non vide (car J'_x l'est), d'où $\{f(a_\lambda); \lambda \in J'_x\} \in \prec Z_\delta \succ$. Comme Z_δ est un Γ-ensemble, il vérifie

$$\forall B \in \prec Z_\delta \succ, \Gamma(B) \subset Z_\delta.$$

On conclut que

$$\Gamma(\{f(a_\lambda); \lambda \in J'_x\}) \subset Z_\delta,$$

par conséquent,

$$g(x) \in Z_\delta,$$

ce qui implique d'après (3.9) que

$$g(x) \in V',$$

d'où la continuité de $\widetilde{f}$ sur $fr(A)$ et donc sur X. La démonstration du Théorème 3.2 est alors achevée. ■

Conclusion

Dans la version classique du théorème de Prolongement de Dugundji, l'espace d'arrivée de l'application prolongée possède la structure vectorielle topologique localement convexe. Si cet espace n'est pas vectoriel mais topologique, alors cette structure est remplacée par un espace-m.c, c'est en fait une structure analogue. Dans ce cas le théorème de Dugundji reste vrai, c'est "la version généralisée".

■

Bibliographie

[1] **D. Azzam-Laouir**, Analyse multivoque. Notes de cours. Université Mohammed Esseddik Ben Yahia, Jijel, 2008-2009.

[2] **D. Azzam-Laouir**, Contribution à l'étude de problème d'évolution du second ordre, Thèse de Doctorat d'état, Université de Constantine, Juin 2003.

[3] **N. Bourbaki**, «Sur certains espaces vectoriels topologiques», Annales de l'institut fourier, 1950.

[4] **G. CARLIER**, Analyse fonctionnelle, Notes de cours. ENS, 2009-2010.

[5] **J. Dugundji**, An extension of Tietz's theorem. Pacific J. Math. 1 (1951), 353-367.

[6] **J. Dugundji**, Topologiy, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[7] **N. El Hage Hassan**, Topologie générale et espace normés, Université d'Orléans, août 2011.

[8] **M. Ernest**, «A Note on Paracompact Spaces», Proc. Amer. Math. Soc, vol.4, n 5, october 1953, p.831-838.

[9] **G. Fichou**, fonctions de plusieurs variables, Université de Rennes 1, L2 MiEE 2014-2015.

[10] **C. D. Horvath**, Contractibility and generalized convexity. J. math. Ana. Appl. 156, n 2 (1991), p.p. 341-357.

[11] **C. D. Horvath**, Extension and selection theorems in topoligical spaces with a generalied convexity structure. Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, Vole. II, n 2 (1993), p.p. 253-269.

[12] **J. V. Llinares**, Abstract convexity, some relations and applications.

[13] **P. Mironescu**, Cours de topologie métrique, Université Lyon 1, 2005.