République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre :

№ de séries :

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse Fonctionnelle.

Thème

Inclusions différentielles avec perturbation non bornée : Théorèmes d'existence et de relaxation

Présenté par :

- **Bouabdallah Radia**
- **Bouhali Nesrine**

Soutenu le **18 / 06 / 2018**

Devant le jury :

Président :	D. Azzam-Laouir	Prof.	Université de Jijel
Encadreur :	A. Makhlouf	MCB.	Université de Jijel
Examinateur :	S. Medjrab	MAA.	Université de Jijel

Promotion **2017/2018**

Remerciements

Tout travail réussi dans la vie nécessite en premier lieu la Bénédiction de ***Dieu***, et ensuite l'aide et le support de plusieurs personnes. Nous tenons donc à remercier et à adresser notre reconnaissance à toute personne qui nous a aidé de loin ou de près afin de réaliser ce travail.

Nous voudrons tout d'abord adresser toute notre gratitude à la directrice de ce mémoire Madame ***Amira Makhlouf***, Maitre de conférence à l'université de Jijel, pour sa précieuse présence assistance, sa disponibilité et l'intérêt qu'elle a manifesté pour ce modeste travail, nous la remercions pour ses orientations et son enthousiasme envers notre travail. Les judicieux conseils et rigueur qu'elle nous a prodigué tout au long de ce travail. Nous avons pris un grand plaisir en travaillant avec elle.

Nous adressons également, nos remerciements chaleureux à Madame **D. Azzam-Laouir**, Professeur à l'université de Jijel pour avoir accepter la présidence du jury de ce mémoire et pour son propre aide, nos remerciements vont également à Madame **S. Medjrab**, Maitre assistant à l'université de Jijel, qui a bien voulu prendre la responsabilité d'évaluer ce travail. Merci aussi à tous nos collègues et amis, nous leurs exprimons notre amitié et nous leur souhaitons beaucoup de réussites.

Enfin, nous tenons à exprimer notre reconnaissance à Monsieur ***Bensouilah Bachir***, et à tous les enseignants du département de mathématiques de l'université de Jijel, et en particulier Madame **F. Alliouane**.

Un grand merci à nos familles, la famille **Bouabdallah** et **Bouhali** qui nous ont toujours soutenues et à tous ceux qui ont participé à la réalisation de ce mémoire.

Radia & Nesrine.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

L'objectif de ce mémoire est d'étudier l'existence de solution pour certaines classes d'inclusions différentielles du premier ordre et du seconde ordre et d'établir la relation entre les solutions d'une inclusion différentielle du premier ordre et les solutions de cette inclusion différentielle convexifiée.

Nous commençons par introduire un aperçu sur les inclusions différentielles existant dans la littérature (voir[11] et [31]).

Ces dernières années beaucoup de travaux ont été consacrés à l'étude des équations et d'inclusions différentielles vu leur large application dans de nombreux domaines de mathématiques, physique, médecine et même en économie. Ils ont commencé par les équations différentielles mais à travers l'évolution, ces équations ne suffisaient plus.
Un aspect plus général est apparu, il s'agit des inclusions différentielles, celles ci permettant aujourd'hui de modéliser une plus large classe de phénomènes de la vie réelle.

A vrai dire, la théorie des inclusions différentielles est relativement ancienne. Elle repose sur les travaux des pionniers comme G. Bouligand (1932), P. Painlevée (1863-1933) et H. Marchaud (1938). Mais cette théorie ne redevient à la mode qu'avec les travaux d'une école polonaise autour de T. Wazewski (1961) qui a montré comment poser un problème de contrôle optimal dans le carde des inclusions différentielles. Depuis, le champs s'est considérablement élargi et les applications de cette théorie touchent de très nombreux domaines.

- L'optimisation (travaux de F. H. Clarck[13], J. P. Aubin,...).
- Le contrôle optimal (travaux de H. J. Sussmann[30], A. F. Filippov, P. Varaiya,...).

- L'analyse numérique (travail de F.Lempio,...).
- L'analyse stochastique (travaux de F. Bernardin, F. Bernicot, ...).
- La théorie d'inclusion différentielles elle même (travaux de J. P. Aubin, A. Cellina, H. Frankowska,[2], [3]...).

Dans ce présent mémoire nous étudions des inclusions différentielles du premier ordre de la forme

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad p.p\ sur\ [0,1] \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où $F : I \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est une multi-application à valeurs fermées non bornées vérifiant certaines conditions, et du deuxième ordre de la forme

$$(\mathcal{P}'_F)\begin{cases} \ddot{x}(t) \in F(t, x(t), \dot{x}(t)) \quad p.p\ sur\ [0,1] \\ \dot{x}(0) = 0,\ x(1) = 0, \end{cases}$$

où $F : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est une multi-application à valeurs fermées non bornées vérifiant certaines conditions.

Concernant les inclusions différentielles du premier ordre de la forme $(\mathcal{P}_F)$, on présente le travail de Tolstonogov [31], où il donne des théorèmes d'existence de solutions locales et globales du problème $(\mathcal{P}_F)$. Ainsi qu'une approximation des solutions de l'inclusion convexifiée

$$(\mathcal{P}_{\overline{co}F})\begin{cases} \dot{x}(t) \in \overline{co}F(t, x(t)), \quad p.p\ sur\ [0,1] \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

par les solutions de l'inclusion $(\mathcal{P}_F)$. Cette propriété est appelé **relaxation**.

Pour le cas où les valeurs de la multi-application F sont des ensembles non vides fermées et bornées, les questions d'existence de solutions de l'inclusion $(\mathcal{P}_F)$ sont bien étudiées, en commençant par les papiers de Wazewski [35] et Filippov [14]. L'hypothèse de base, à la fois dans [14] et dans la majorité des articles traitant la relaxation en dimension finie, est la condition de Lipschitz de F par rapport à la deuxième variable, c'est à dire

$$haus(F(t, x), F(t, y)) \leq k(t)\|x - y\| \tag{1}$$

où $haus$ est la distance de Hausdorff sur l'espace des ensembles non vides et fermés et $k(\cdot)$ est une fonction intégrable sur $[0, 1]$.

Cette inégalité est tout à fait acceptable si les valeurs de F sont fermées bornées, mais elle est lourde si les valeurs de F sont non bornées.

Ioffe [22] à donné les théorème d'existence et de relaxation avec une version plus faible de la condition de Lipschitz qui est plus acceptable lorsque les valeurs de F sont non bornées, appelée version globale de la condition pseudo-Lipschitz d'Aubin et donnée par

$$y \in F(t,x) \Longrightarrow d(y, F(t,x)) \leq (k(t) + \beta\|y\|)\|x-y\|,$$

où $\beta > 0$ et $k(\cdot)$ est une fonction intégrable sur $[0,1]$. Une généralisation de ce théorème d'existence au cas d'un espace de Banach séparable et donnée dans [24].

Les resultats du travail de Tolstonogov [31] complètent et généralisent les résultats dans [22].

On essaye, dans ce mémoire, de généraliser le théorème d'existence de solutions globales de Tolstonogov au cas d'inclusions différentielles du seconde ordre de la forme $(\mathcal{P}'_F)$.

L'inclusion $(\mathcal{P}'_F)$ a été étudiée par plusieurs auteurs [5],[25],[4]... .
Dans [4], D. Azzam-Laouir et al. ont donné un théorème d'existence avec des conditions aux limites en trois points et quand F est à valeurs fermées vérifiant la condition de Lipschitz. Ce travail a été généralisé dans [6] au cas où F vérifie la version globale de la condition pseudo-Lipschitz d'Aubin.

Ce mémoire comprend cinq chapitres

Le premier chapitre intitulé “Notations et préliminaires ”, il contient des notations ainsi qu'un ensemble de définitions, propositions et théorèmes qui nous seront utiles pour la suite de cette étude.

Le deuxième chapitre intitulé “Multi-applications ”. Son objectif est de donner des notions de bases sur les multi-applications ainsi que leurs continuité et mesurabilité.

Le troisième chapitre intitulé “Existence de solutions globales et locales ”. Ce chapitre est partagé en deux sections. Dans la première section, nous démontrons l'existence de solutions globales de l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_F)$, et dans la deuxième section, nous établissons l'existence de solutions locales , en réduisant ce problème au problème d'existence de solutions globales d'une inclusion différentielle étendue.

Le quatrième chapitre intitulé “Relaxation”. Dans ce chapitre, nous prouvons le théorème de relaxation associé à l'inclusion $(\mathcal{P}_F)$.
Les résultats de ces deux derniers chapitres sont pris de [31].

Le cinquième chapitre intitulé “ Existence de solutions pour une inclusion différentielle du seconde ordre ”. Dans ce chapitre, on donne une petite contribution, où on essaye de démontrer un théorème d'existence de solutions globales de l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}'_F)$.

CHAPITRE 1

NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES

On commence par ce chapitre, dans lequel nous précisons nos notations et nous rappelons certains définitions, propositions et théorèmes dont on aura besoin tout au long de ce mémoire.

1.1 Notations générales

On note

- $I = [0, 1]$ l'intervalle unité de $\mathbb{R}$.
  Soit X un espace topologique. On note
- (X, τ) un espace topologique.
- (X, d) un espace métrique.
- (X, Σ) un espace mesurable.
- (X, Σ, μ) un espace mesuré.
- $\mathcal{B}(X)$ la tribu Borélienne sur X.
- $\mathcal{P}_{cl}(X)$ l'ensemble des parties fermées de X.
- $\mathcal{P}_k(X)$ l'ensemble des parties compactes de X.

- $\mathcal{L}(I)$ la tribu sur I des ensembles mesurables au sens de Lebesgue et dans ce cas μ est la mesure de Lebesgue.

Soit E un espace de Banach, alors on note

- E' le dual topologique de E, $\|\cdot\|$ la norme de E et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit de dualité entre E et E'.
- $C(I,E)$ l'espace de Banach de toutes les applications continues définies sur I à valeurs dans E muni de la norme $\|f(\cdot)\|_C = \sup\limits_{t\in I}\|f(t)\|$.
- $C^1(I,E)$ l'espace de Banach des applications continuement différentiables muni de la norme $\|f(\cdot)\|_{C^1} = \max\{\|f(\cdot)\|_C\,,\,\|f'(\cdot)\|_C\}$.
- $L^1(I,E)$ l'espace de Banach de toutes les applications intégrables au sens de Bochner définies sur I à valeurs dans E muni de la norme $\|f(\cdot)\| = \int_I \|f(s)\|ds$.
- C^c le complémentaire de C.
- $\sigma(E,E')$ la topologie faible sur E.
- $\sigma(E',E)$ la topologie faible* sur E'.
- $\to$ la convergence forte dans E.
- $\rightharpoonup$ la convergence faible dans E.
- $\omega - E$ l'espace E muni de la topologie faible.
- $co(A)$ l'enveloppe convexe de A.
- $\overline{co}(A)$ l'enveloppe convexe fermée de A.
- $B_E(x,r)$ la boule ouverte de E de centre x et de rayon r.
- $\overline{B}_E(x,r)$ la boule fermée de E de centre x et de rayon r.
- B la boule unité ouverte de E.
- $\overline{B}$ la boule unité fermée de E.
- $\mathbb{R}^{n+1}_*$ l'espace $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|(t,x)\|_* = \max\{|t|,\|x\|\}$, $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.
- $\mathbb{R}^{n+1}$ l'espace $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne $\|.\|$.
- εB^{n+1}_* la boule ouverte de rayon $\varepsilon > 0$ et de centre 0 sur $\mathbb{R}^{n+1}_*$.
- εB^{n+1} la boule ouverte de rayon $\varepsilon > 0$ et de centre 0 sur $\mathbb{R}^{n+1}$.
- $1\!\!\mathrm{I}_A$ la fonction caractéristique d'une partie A d'un ensemble donné, définie par

$$1\!\!\mathrm{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x\in A; \\ 0 & si\ x\notin A. \end{cases}$$

1.2 Mesurabilité

Les résultats suivants sont pris de la référence [9].

Définition 1.1 (La tribu borélienne).
Soit (X, τ) un espace topologique, on appelle tribu borélienne la tribu engendrée par τ, on la note $\mathcal{B}(X)$.
Les éléments de la tribu borélienne sont appelés ensembles boréliens.

Définition 1.2. *Soient (X_1, Σ_1), (X_2, Σ_2) deux espaces mesurables et f une application définie sur X_1 à valeurs dans X_2. On dit que f est (Σ_1, Σ_2)-**mesurable** si pour tout $A \in \Sigma_2$, $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$.*
*Si X_2 est un espace topologique, une fonction $(\Sigma_1, \mathcal{B}(X_2))$-mesurable est dite **fonction Borélienne** ou Σ_1-**mesurable**.*

Proposition 1.1. *Soient (X_1, θ_1), (X_2, θ_2) deux espaces topologiques et $f : X_1 \to X_2$. Si f est continue alors $f : (X_1, \mathcal{B}(\theta_1)) \to (X_2, \mathcal{B}(\theta_2))$ est mesurable.*

Définition 1.3. *Soit (X, Σ) un espace mesurable. Alors l'application $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ est une **mesure** si*

1. *$\mu(\emptyset) = 0$;*
2. *$\mu(\bigcup\limits_n A_n) = \sum\limits_n \mu(A_n)$, pour toute suite dénombrable (A_n) d'éléments de Σ deux à deux disjoints.*

- *Le triple (X, Σ, μ) est appelé **espace mesuré**.*
- *Si $\mu(A) \geq 0$, pour tout $A \in \Sigma$, on dit que μ est une **mesure positive** et on note $\mu \geq 0$, ou que l'espace (X, Σ, μ) est positif.*
- *Si $\mu(A) < \infty$, pour tout $A \in \Sigma$, on dit que μ est une **mesure finie** ou que l'espace (X, Σ, μ) est fini.*
- *Si X est un espace topologique, la mesure $\mu : \mathcal{B}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ est appelée **mesure Borélienne**.*

Définition 1.4. *Soit X un espace topologique séparé et μ une mesure Borélienne. Alors μ est dite régulière si pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert C et un fermé G de X, tels que $G \subset A \subset C$ et $\mu(C \backslash G) \leq \varepsilon$.*
*Une mesure borélienne finie et régulière est appelée mesure de **Radon**.*

Définition 1.5. *Soient (X, Σ, μ) un espace mesuré et A un sous ensemble de X tel que $A \in \Sigma$. On dit que A est μ-**négligeable** ou **négligeable**, si $B \subset X$ tel que $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$.*

- On dit qu'une propriété sur X est vraie **μ-presque partout** (μ.p.p.), si l'ensemble où elle n'est pas vérifiée est μ-négligeable.
- La tribu μ-complète de Σ notée Σ_μ est la tribu engendrée par Σ et les ensembles μ-négligeables, c'est à dire
$$\Sigma_\mu = \{A \cup Z;\ A \in \Sigma \text{ et } Z \text{ ensemble } \mu - \text{négligeable}\}.$$
- La tribu Σ est dite **complète** si $\Sigma = \Sigma_\mu$, c'est à dire, si tout ensemble μ-négligeable appartient à Σ.

Définition 1.6 (Tribu de Lebesgue).
La tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ notée $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ est la tribu complétée de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour la mesure de Lebesgue.

Définition 1.7 (Fonction simple).
*Soient (X, Σ) un espace mesurable, E un espace de Banach et $f : X \to E$. On dit que f est une **fonction simple** si elle est de la forme*
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} 1\!\!1_{E_i}(x) y_i,$$
où les $E_i = f^{-1}(y_i),\ i \in \{1, \cdots, n\}$, sont des éléments deux à deux disjoints de Σ et les $y_i,\ i \in \{1, \cdots, n\}$, sont des éléments distincts de E.
*Cette formule est appelée **la représentation canonique** de f.*

Proposition 1.2. *Soient (X, Σ) un espace mesurable et $\{f_n\}_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge simplement vers f alors f est mesurable.*

Théorème 1.1. *Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré fini et E un espace de Banach séparable. Si $f : X \to E$ est mesurable, alors il existe une suite $\{f_n\}_{n\geq 1}$ de fonctions simples telles que $f_n \to f$ μ-p.p, et pour μ-presque tout $x \in E$, $\|f_n(x)\| \leq \|f(x)\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

1.3 Fonction intégrable au sens de Bochner

Les résultats suivants sont pris des références [16] et [28].
Soient (X, Σ, μ) un espace mesuré fini et $(E, \|.\|)$ un espace de Banach .

Définition 1.8. *Une fonction mesurable $f : X \longrightarrow E$ est dite **intégrable au sens de Bochner**, s'il existe une suite de fonctions simples $(f_n)_n$ telle que $f_n \longrightarrow f$ μ p.p,*

$\|f_n - f\|$ *est intégrable au sens de Lebesgue et*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int\limits_X \|f_n - f\| d\mu = 0.$$

On pose alors

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\longrightarrow\infty}\int\limits_X f_n d\mu.$$

Dans ce cas $\int_A f d\mu$ *est défini pour tout* $A \in \Sigma$ *par* $\int\limits_A f d\mu = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\int\limits_A f_n d\mu.$
Où

$$\begin{aligned} \|f\| : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|f\|(x) = \|f(x)\|, \end{aligned}$$

Théorème 1.2. *Une fonction mesurable* $f : X \longrightarrow E$ *est dite intégrable au sens de Bochner si et seulement si*

$$\int\limits_X \|f\| d\mu < \infty.$$

Corollaire 1.1. *Si* $f : X \longrightarrow E$ *est une fonction intégrable au sens de Bochner et* $A \in \Sigma$, *alors*

$$\|\int\limits_A f(x) d\mu\| \leqslant \int\limits_A \|f(x)\| d\mu.$$

Corollaire 1.2. *Si* $f, g : X \longrightarrow E$ *sont deux fonctions intégrables au sens de Bochner et pour tout* $A \in \Sigma$, $\int\limits_A f d\mu = \int\limits_A g d\mu$, *alors*

$$f(x) = g(x) \quad pour \quad \mu - presque \quad tout \quad x \in X.$$

Théorème 1.3. *Soit* $f : X \longrightarrow E$ *une fonction intégrable au sens de Bochner et soit* $G : E \to F$ *un opérateur linéaire continu, où* F *un espace de Banach. Alors* Gf *est une fonction intégrable au sens de Bochner à valeurs dans* F, *et on a*

$$G(\int\limits_X f(x) d\mu) = \int\limits_X Gf(x) d\mu.$$

En particulier, si $x' \in E'$ *et* $f : X \longrightarrow E$ *est une fonction intégrable au sens de Bochner, alors* $x \longmapsto \langle f(x), x' \rangle$ *est intégrable et*

$$\langle \int\limits_X f(x) d\mu, x' \rangle = \int\limits_X \langle f(x), x' \rangle d\mu.$$

Théorème 1.4 (Théorème de la convergence dominée).
Soit $f : X \longrightarrow E$ *une fonction mesurable, et* $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite de fonctions mesurables de* X *dans* E *vérifiant*

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \quad \mu\text{-presque partout sur } X.$$

S'il existe $h : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ Lebesgue intégrable telle que

$$\|f_n(x)\| \leq h(x), \quad \mu\text{-presque partout sur } X, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*,$$

alors, f_n, $n \geq 1$ et f sont Bochner intégrables et

$$\int_X f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d\mu.$$

On note $\mathscr{L}^1(X, E)$ l'ensemble des fonctions mesurable f telle que $\|f\|$ est intégrable au sens de Lebesgue.
Si on note $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : X \longrightarrow E$ telle que $f(x) = 0$ μ-p.p sur X, l'espace des classes d'équivalence $\mathscr{L}^1(X, E)\backslash\mathcal{N}$ est noté par $L^1(I, E)$ c'est un espace de Banach muni de la norme $\|f\|_1 = \int_X \|f(x)\|d\mu$.

Définition 1.9. *Un sous ensemble $K \subset L^1(I, E)$ est dit uniformément intégrable si $\lim\limits_{\mu(C)\to 0} \int_C \|f(x)\|d\mu = 0$ uniformément en $f \in K$.*

Proposition 1.3. *Si $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy de $L^1(I, \mathbb{R}^n)$, alors il existe une sous suite $(f_{n_k})_k$ qui converge presque partout vers une fonction $f \in L^1(I, \mathbb{R}^n)$.*

Théorème 1.5. *Soit φ une fonction à valeurs réelles sur $V_s \times (E\backslash A)$ où V_s est un voisinage d'un point $s \in \mathbb{R}$, E un espace de Banach séparable, (E, Σ, μ) un espace mesuré fini et $A \subset E$ est un sous ensemble μ-négligeable.*
Si pour chaque $t \in V_s$, la fonction $x \longmapsto \varphi(t, x)$ est intégrable sur E et si de plus, sur $V_s \times (E\backslash A)$ la fonction φ admet une dérivée partielle par rapport à t vérifiant l'inégalité $|\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(t, x)| \leq g(x)$, où g est μ-intégrable et indépendante de t, alors la fonction $t \longmapsto \int_E \varphi(t, x)d\mu$ est dérivable au point s et l'on a

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_E \varphi(s, x)d\mu = \int_E \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s, x)d\mu.$$

1.4 Ensembles convexes

Ces résultats sont pris des références [29], [34] et [7].

Définition 1.10. *Soit E un espace vectoriel et soient $a, b \in E$.*
- *On appelle segment fermé d'extrémités a et b (ou tout simplement segment) que l'on note $[a, b]$, l'ensemble $\{\lambda a + (1-\lambda)b \quad \text{tel que} \quad \lambda \in [0, 1]\}$.*
- *On appelle segment ouvert que l'on note $]a, b[$ l'ensemble $\{\lambda a+(1-\lambda)b \text{ tel que } \lambda \in]0.1[\}$.*

De la même manière on définit les segments $]a, b]$ et $[a, b[$.

Définition 1.11. *Une partie A de l'espace vectoriel E, est dite convexe si toutes les fois que deux points a, b appartient à A le segment $[a, b]$ est contenue dans A, i.e.*
$\lambda A + (1-\lambda)A \subset A, \forall \lambda \in [0,1],$ *ou encore* $\forall x, y \in A, \forall \lambda \in [0,1], \lambda x + (1-\lambda)y \in A.$
*On appelle **simplexe** de $\mathbb{R}^n$ le sous ensemble Δ_n, tel que*

$$\Delta_n = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,\ \lambda_i \geq 0\ ,\ i = 1...n,\ \sum_1^n \lambda_i = 1\}.$$

Définition 1.12. *Soit E un espace vectoriel et soient $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$. On appelle **combinaison convexe** des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tout élément x qui s'écrit comme suit*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad \textit{tels que} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \Delta_n\,.$$

Proposition 1.4. *Soit E un espace vectoriel et soit $A \subset E$. Alors A est convexe si et seulement si n'importe quelle combinaison convexe des vecteurs de A est un vecteur de A.*

Définition 1.13. *Soit A un sous ensemble de l'espace vectoriel E. On appelle **enveloppe convexe** de A qu'on note $co(A)$ l'intersection de tous les convexes de E contenant A. C'est en fait le plus petit convexe de E contenant A.*
*Si E est un espace vectoriel topologique, on appelle **enveloppe convexe fermée** de A qu'on note $\overline{co}(A)$ le plus petit convexe fermé de E contenant A.*

Théorème 1.6 (Théorème de Carathéodory).
Soit E un espace vectoriel et soit $A \subset E$. Alors,

$$co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i; \quad k \in \mathbb{N},\ (\lambda_i)_{1 \leq i \leq k+1} \subset \Delta_{k+1},\ x_i \in A, \quad \forall i = 1, ..., k+1 \right\}.$$

Proposition 1.5. *Soit E un espace vectoriel topologique, soit $A, B \subset E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$*

1. $co(\alpha.A) = \alpha co(A)$.
2. $co(A + B) = co(A) + co(B)$.
   Si E un espace vectoriel topologique. Alors
3. *Si A est un espace convexe de E alors $\overline{A}$ et $\mathring{A}$ le sont aussi.*
4. $\overline{co}(A) = \overline{co(A)}$.
5. $\overline{co}(\alpha A) = \alpha \overline{co}(A)$.

Proposition 1.6. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et A borné. Alors $\overline{co}(A) = co(\overline{A})$.*

Proposition 1.7. *Soit E un espace vectoriel topologique et C_1, C_2 deux sous ensembles convexes de E tels que C_1 est fermé et $C_1 \cap \mathring{C}_2 \neq \emptyset$, alors*

$$\overline{C_1 \cap C_2} = C_1 \cap \overline{C_2}.$$

1.5 Quelques résultats de compacité

Les résultats suivants sont pris des références [19] et [12].

Définition 1.14. *Soit* (X, θ) *un espace topologique et soit* $A \subset X$ *et* $(A_i)_{i\in J} \subset X$.
On dit que $(A_i)_{i\in J}$ *est un recouvrement de* A *si* $A \subset \bigcup\limits_{i\in J} A_i$.

- *Si* $A = X$, $(A_i)_{i\in J}$ *est un recouvrement de* X *si* $X \subset \bigcup\limits_{i\in J} A_i$, *i.e.,* $X = \bigcup\limits_{i\in J} A_i$.
- *Si pour tout* $i \in J$, A_i *est ouvert, on dit que* $(A_i)_{i\in J}$ *est un recouvrement ouvert de* X.

Définition 1.15. *Soit* (X, θ) *un espace topologique. On dit que* X *est* ***compact*** *s'il est séparé et de tout recouvrement ouvert de* X *on peut extraire un sous recouvrement fini.*

Proposition 1.8. *Soit* (X, θ_X), (Y, θ_Y) *deux espaces topologiques, et* $f : X \longrightarrow Y$ *une application continue. Si* $A \subset X$ *est un compact de* X, *alors* $f(A)$ *est un compact de* Y.

Théorème 1.7. *Soit* (X, d) *un espace métrique. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes,*

1. X *est compact.*
2. *Toute suite infinie de points de* X *admet au moins une valeur d'adhérence.*
3. *De toute suite infinie de points de* X *on peut extraire une sous suite convergente.*
4. *Tout sous ensembles infini de* X *admet au moins un point d'accumulation.*

Remarque 1.1. *Dans* $\mathbb{R}^n$, A *est compact si et seulement si* A *est borné fermé.*

Définition 1.16. *Soit* (X, d) *un espace métrique, et soit* A *un sous ensemble de* X. *On dit que* A *est* ***relativement compact*** *si* $\overline{A}$ *est compact.*

Remarque 1.2. *Tous sous ensembles d'un compact est relativement compact.*

Proposition 1.9. *Soit* X *un espace métrique et soient* A *un ensemble compact et* B *un ensemble fermé tel que* $A \cap B = \emptyset$. *Alors il existe deux ouverts* V *et* W *dans* X *tels que* $A \subset V$ *et* $B \subset W$ *et* $V \cap W = \emptyset$.

Théorème 1.8 (Heine).
Soient $(X, d), (Y, d')$ *deux espaces métriques et* f *une application définie sur* X *à valeurs dans* Y. *Si* X *est compact et* f *est continue alors* f *est uniformément continue.*

Définition 1.17. *Soient* (X, d) *espace métrique compact,* (Y, d') *un espace métrique complet et* K *un sous ensemble borné de* $C(X, Y)$ *(l'espace des applications continues définies sur* X *à valeurs dans* Y *muni de la topologie de la convergence uniforme). On dit que* K *est* ***équicontinu*** *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x_1, x_2 \in X, d(x_1, x_2) < \delta_\varepsilon \Longrightarrow d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon, \quad \text{pour tout } f \in K.$$

Théorème 1.9 (Théorème d'Ascoli-Arzelà).
Soit X un espace métrique compact, Y un espace métrique complet et K un sous ensemble de $C(X,Y)$. Alors K est relativement compact dans $C(X,Y)$ si et seulement si les deux conditions ci-dessous sont satisfaites.

1. *K est équicontinue.*
2. *$K(x) := \{f(x) \,:\, f \in K\}$ est relativement compact dans Y.*

1.6 Topologies faible et faible *

Les résultats suivants sont pris des références [10] et [8].
Soient X un espace topologique, I un ensemble quelconque et soit $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Pour chaque $i \in I$, on se donne une application $\varphi_i : X \longrightarrow Y_i$.
Le problème posé est de munir X par une topologie τ la moins fine (avec le minimum d'ouverts) qui rend continues toutes les applications $(\varphi_i)_{i\in I}$.

Proposition 1.10. *Soit τ l'ensemble des parties de X de la forme*

$$\bigcup_{j\in J} \bigcap_{i\in F_j} \varphi_i^{-1}(U_i),$$

où U_i est un ouvert quelconque de Y_i, F_j est un sous ensemble fini quelconque de I et J est un ensemble quelconque d'indices. Alors, τ définit une topologie sur E. De plus, τ est la topologie la moins fine qui rend continues toutes les applications φ_i $(i \in I)$.

1.6.1 Topologie faible

Soient E un espace de Banach et E' son dual topologique, c'est à dire, l'espace des formes linéaires continues sur E muni de la norme

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x\in \overline{B}} \mid \langle f, x\rangle \mid .$$

Définition 1.18. *Soit $f \in E'$, et considérons la fonction*

$$\begin{array}{rcl} \varphi_f : E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \varphi_f(x) = f(x) := \langle f, x\rangle. \end{array}$$

Lorsque f décrit E' nous obtenons une famille d'applications $(\varphi_f)_{f\in E'}$ définies sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$.

*On appelle **la topologie faible** sur E la topologie la moins fine rendant les applications $(\varphi_f)_{f\in E'}$ continues et on la note $\sigma(E, E')$.*

Remarque 1.3.

1. *E étant un espace de Banach, E est muni d'une norme (donc d'une distance) et alors on définit la topologie associée à cette norme, cette topologie sera dite **topologie forte**.*
2. *Les ouverts (resp. fermés) faibles (pour $\sigma(E, E')$) sont aussi des ouverts (resp. fermés) pour la topologie forte.*

Proposition 1.11. *Soit E un espace vectoriel normé, la topologie $\sigma(E, E')$ est séparée.*

Preuve. Soit $x, y \in E$ tels que $x \neq y$. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe $f \in E'$ telle que $\langle f, x\rangle \neq \langle f, y\rangle$,i.e, $\varphi_f(x) \neq \varphi_f(y)$.
On pose $a = \varphi_f(x)$ et $b = \varphi_f(y)$.
Puisque $\mathbb{R}$ est séparé, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap]b-\varepsilon, b+\varepsilon[= \emptyset$, donc,

$$\varphi_f^{-1}(]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap]b-\varepsilon, b+\varepsilon[) = \varphi_f^{-1}(]a-\varepsilon, a+\varepsilon[) \cap \varphi_f^{-1}(]a-\varepsilon, a+\varepsilon[) \neq \emptyset.$$

De plus, $\varphi_f^{-1}(]a-\varepsilon, a+\varepsilon[)$ est un voisinage de x pour la topologie faible et, $\varphi_f^{-1}(]b-\varepsilon, b+\varepsilon[)$ est un voisinage de y pour la topologie faible.
D'où $(E, \sigma(E, E'))$ est séparé. □

Théorème 1.10. *Soit $C \subset E$ un sous ensemble convexe, alors C est faiblement fermé (fermé pour $\sigma(E, E')$), si et seulement s'il est fortement fermé.*

Preuve. Supposons que C est fortement fermé, et montrons qu'il est faiblement fermé. Vérifions que C^c est ouvert pour la topologie $\sigma(E, E')$.
Soit $x_0 \in C^c$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $f \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle f, x_0\rangle < \alpha < \langle f, y\rangle, \forall y \in C.$$

Posons

$$V = \{x \in E;\ \langle f, x\rangle < \alpha\},$$

de sort que $x_0 \in V$, $V \cap C = \emptyset$ (i.e. $V \subset C^c$) et V est ouvert pour $\sigma(E, E')$. Donc C^c est un voisinage de x pour $\sigma(E, E')$, et comme x_0 est arbitraire dans C^c, c'est un ouvert pour $\sigma(E, E')$. D'où C est faiblement fermé. □

Proposition 1.12. *Soit $(x_n)_n$ une suite de E.*

1. *La suite* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *converge vers* x *pour* $\sigma(E,E')$ *(ou faiblement) si et seulement si* $(\langle f,x_n\rangle)_{n\geqslant 1}$ *converge vers* $\langle f,x\rangle$ *pour tout* $f\in E'$.
2. *Si* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *converge fortement vers* x*, alors* $(x_n)_n$ *converge faiblement vers* x.
3. *Si* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *converge faiblement vers* x *alors* $\|x_n\|$ *est bornée et nous avons*
$$\|x\| \leqslant \liminf_{n\to\infty}\|x_n\|.$$
4. *Si* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *converge faiblement vers* x *et* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *converge fortement vers* f *dans* E'*, alors* $(\langle f_n,x_n\rangle)_{n\geqslant 1}$ *converge vers* $\langle f,x\rangle$.

Proposition 1.13. *Lorsque* E *est de dimension finie, la topologie forte de* E *et la topologie faible* $\sigma(E,E')$ *coïncident. En particulier, une suite* $(x_n)_n\subset E$ *converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.*

Théorème 1.11 (**Théorème d'Ebalein-Smûlian**).
Soit S *un sous ensemble d'un espace de Banach* E*. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) S *est faiblement (relativement) séquentiellement compact.*

(ii) S *est faiblement (relativement) compact.*

1.6.2 Topologie faible *

Soit E un espace vectoriel normé, E' son dual et E'' son bidual (c'est à dire le dual de E') muni de la norme
$$\|\xi\|_{E''} = \sup_{f\in\overline{B}_{E'}} |\langle \xi, f\rangle|.$$
Alors on a une injection canonique $J : E \to E''$ définie de la façon suivante, pour tout $x\in E$ fixé, l'application
$$\begin{aligned}\xi_x : E' &\longrightarrow \mathbb{R}\\ f &\longmapsto \xi_x(f) = \langle \xi_x, f\rangle = \langle f,x\rangle,\end{aligned}$$
est linéaire continue sur E', c'est à dire, ξ_x est un élément de E'', et
$$\begin{aligned}J : E &\longrightarrow E''\\ x &\longmapsto J(x) = \xi_x,\end{aligned}$$
est linéaire continue, de plus, elle est une isométrie (on dit que J est une isométrie si $\|J(x)\| = \|\xi_x\| = \|x\|$), et on a
$$\langle J(x), f\rangle = \langle \xi_x, f\rangle_{E'',E'} = \langle f,x\rangle_{E',E} \quad \forall x\in E, \quad \forall f\in E'.$$
Sur l'espace E' sont définies déjà deux topologies

1. La topologie forte associée à la norme de E' ($\|f\|_{E'} = \sup_{f \in \overline{B}_{E'}(0.1)} |\langle f, x\rangle|$).
2. La topologie faible $\sigma(E', E'')$.

On définit une troisième topologie sur E' qui est la topologie faible* que l'on note $\sigma(E', E)$.

Définition 1.19. *La topologie faible* sur E' est la topologie la moins fine sur E' qui rend continues toutes les applications $(\xi_x)_{x\in E}$. On la note $\sigma(E', E)$.*

Proposition 1.14. *Soit E un espace vectoriel normé. La topologie faible* est séparée.*

Proposition 1.15. *Soit $(f_n)_n$ une suite de E'.*

1. *La suite $(f_n)_n$ converge vers f pour $\sigma(E', E)$ (ou faiblement*) si et seulement si $(\langle f_n, x\rangle)_n$ converge vers $\langle f, x\rangle$ pour tout $x \in E$.*
2. *Si $(f_n)_n$ converge fortement vers f, alors $(f_n)_n$ converge faiblement* vers f.*
3. *Si $(f_n)_n$ converge vers f pour $\sigma(E', E)$, alors $(\|f_n\|_{E'})$ est bornée et nous avons*

$$\|f\|_{E'} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|.$$

4. *Si $(f_n)_n$ converge vers f pour $\sigma(E', E)$ et $(x_n)_n$ converge fortement vers x dans E alors $(\langle f_n, x_n\rangle)_n$ converge vers $\langle f, x\rangle$.*

Proposition 1.16. *Si E est de dimension finie, les topologies forte, faible $\sigma(E', E'')$ et faible* $\sigma(E', E)$ coïncident sur E'.*

Théorème 1.12. *(**Théorème d'Alaoglu**).*
Soit E un espace vectoriel normé. Alors, la boule unité fermée de E' (pour la norme de la topologie forte) est faiblement compacte.*

1.6.3 Espaces réflexifs

Définition 1.20. *Soit E un espace normé, on dit que E est **réflexif** si $J(E) = E''$, c'est à dire, si J est bijective (on identifie alors E à E'' à l'aide de l'isomorphisme J).*

Théorème 1.13. *Soit E un espace normé. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *E est réflexif.*
2. *$\overline{B}_E(0, 1) = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ est $\sigma(E, E')$-compact.*
3. *Pour tout suite $\{x_n\}_{n\geq 1}$ bornée dans E il existe une sous suite $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$ qui converge pour $\sigma(E, E')$.*

Proposition 1.17.

- *Tout espace de Hilbert est réflexif.*
- *Tout espace de dimension finie est réflexif .*

Corollaire 1.3. *Soit X un espace réflexif et soit $C \subset X$ un convexe fermé borné. Alors C est compact pour la topologie $\sigma(X, X')$.*

Proposition 1.18. *Si E est réflexif, alors les topologies faible et faible* sur E' coïncident.*

Dans la suite, on donne comme cas particulier les espaces $L^p(I, \mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

Proposition 1.19. *Soit $p \in]1, +\infty]$ et soit q son conjugué. Alors l'application*

$$\begin{aligned} J : L^p(I, \mathbb{R}^n) &\longrightarrow (L^q(I, \mathbb{R}^n))' \\ f &\longmapsto J(f) = \varphi_f, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \varphi_f : L^q(I, \mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longmapsto \varphi_f(g) = \int_I \langle f(t), g(t) \rangle dt, \end{aligned}$$

est une bijection. On identifie alors f avec $J(f) \in (L^q(I, \mathbb{R}^n))'$.
On a alors une notion de convergence faible* dans $L^p(I, \mathbb{R}^n)$. Si $1 < p < +\infty$ (on a alors aussi $1 < q < +\infty$), les notions de convergence faible et faible* dans $L^p(I, \mathbb{R}^n)$ coïcident. Dans le cas de $L^\infty(I, \mathbb{R}^n)$, que l'on identifie fréquemment avec le dual topologique de $L^1(I, \mathbb{R}^n)$, les notions de convergence faible et faible* sont différentes.

Proposition 1.20 (Convergence faible dans $L^p(I, \mathbb{R}^n)$).
Soient $p \in [1, +\infty[$ et q le conjugué de p, $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset L^p(I, \mathbb{R}^n)$ et $f \in L^p(I, \mathbb{R}^n)$. Alors, la suite $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge faiblement vers f si et seulement si on a, pour tout $g \in L^q(I, \mathbb{R}^n)$

$$\langle f_n, g \rangle = \int_I \langle f_n(t), g(t) \rangle \, dt \longrightarrow \int_I \langle f(t), g(t) \rangle dt \quad \textit{quand} \quad n \longrightarrow +\infty \, .$$

Proposition 1.21. *Soit $p \in]1, +\infty[$. Alors $L^p(I, \mathbb{R}^n)$ est un espace réflexif.*

1.7 Fonctions absolument continues

Les résultats suivants sont pris des références [8] et [15].

Définition 1.21. *Une application f définie sur I à valeur dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dite* ***absolument continue*** *si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\zeta > 0$ tel que pour toute famille finie d'intervalle ouverts disjoints deux à deux de I ; $(]a_i, b_i[)_{i\in\{1,\dots,n\}}$, nous avons*

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \leq \zeta \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}\|f(b_i) - f(a_i)\| \leq \varepsilon\,.$$

Proposition 1.22. *Soient E un espace réflexif et $f \in C(I, E)$. Alors f est absolument continue si et seulement si il existe une fonction $g \in L^1(I, E)$ telle que*

$$f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)ds\,, \quad \forall\, t \in I.$$

Dans ce cas, $\dot{f}(t) = g(t)$ p.p sur I.

Proposition 1.23. *Si E est réflexif et f est absolument continue, alors f est dérivable pour presque tout $t \in I$, et on a*

$$f(t) - f(0) = \int_0^t \dot{f}(s)ds, \quad \forall\, t \in I.$$

1.8 Distance de Hausdorff

Nous allons donner dans cette section quelques résultats sur la distance de Hausdorff qui sont pris des références [8] et [1].

Définitions 1.1. *Soient A, B deux sous ensembles d'un espace métrique (X, d).*

- *On a $d(x, A) = \inf_{y\in A} d(x, y)$.*
- *On appelle* **écart** *entre A et B que l'on note e(A,B) la quantité définie par*

$$e(A, B) = \mathop{sup}_{x\in A}\, d(x, B) = \sup_{x\in A}\left(\inf_{y\in B} d(x, y)\right).$$

- *On appelle* **distance de Hausdorff** *entre A et B et on la note $haus(A, B)$ la quantité définie par*

$$haus(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\}.$$

Remarquons que $haus(A, B) = haus(B, A)$.

Proposition 1.24. *Soient A, B, C trois sous ensembles d'un espace métrique (X, d).*

1. *$e(A, \emptyset) = \infty$ si $A \neq \emptyset$.*
2. *$e(\emptyset, B) = 0$.*

3. $e(A,B) = 0 \Longleftrightarrow A \subset \overline{B}$.
4. $e(A,C) \leq e(A,B) + e(B,C)$.
5. $haus(A,B) = 0 \Longleftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$.
6. $haus(A,C) \leq haus(A,B) + haus(C,B)$.
7. $\mid d(x,A) - d(x,B) \mid \leq haus(A,B)$, $\forall x \in X$.

Rappelons les propriétés suivantes.

- $(\mathcal{P}_{cl}(X), haus)$ est un espace métrique.
- Si (X,d) est un espace métrique complet, alors $(\mathcal{P}_{cl}(X), haus)$ est complet.
- Si X est séparable, $(\mathcal{P}_k(X), haus)$ est aussi séparable.

Soit E un espace vectoriel normé.
Soit $C \subset E$. On note $C_\rho = C \cap \rho\overline{B},\ \rho \geq 0$.

Définition 1.22. *Soient $C, D \subset E$ et $\rho \geqslant 0$. La distance* ***haus***$_\rho$ *est définie par*

$$haus_\rho(C,D) = \max\{e(C_\rho, D), e(D_\rho, C)\}.$$

Proposition 1.25. *Soient $C, D \subset E$ non vides.*

1. *$haus_\rho(C,D) \neq +\infty,\ \rho \geq 0$.*
2. *Si C et D sont non vides et fermés, alors $haus_\rho(C,D) = 0$ pour tout $\rho > 0$ si et seulement si $C = D$.*

Définition 1.23. *Soit E un espace de Banach, $Q \subset I \times E$, $F : Q \rightrightarrows E$ une multi-application et $(t', x') \in Q$. On dit que la multi-application F est localement intégrablement $(\rho - H)$-lipschitzienne en $(t', x') \in Q$ s'il existe $\varepsilon > 0$ et $\beta \geqslant 0$ et une fonction $k(.)$ strictement positive et intégrable sur $]t' - \varepsilon, t' + \varepsilon[$ telle que*

$$haus_\rho(F(t,x), F(t,y)) \leqslant (k(t) + \beta\rho)\|x - y\|, \tag{1.1}$$

pour tous $(t,x), (t,y) \in (]t' - \varepsilon, t' + \varepsilon[\times (x' + \varepsilon B)) \cap Q$ et pour tout $\rho \geqslant 0$.

Définition 1.24. *Soit E un espace de Banach, $Q \subset I \times E$, $F : Q \rightrightarrows E$ une multi-application et $(t', x') \in Q$. On dit que la multi-application F est intégrablement $(\rho -\ H)$ lipschitzienne sur Q s'il existe $\beta \geqslant 0$ et $k(.) \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$ telle que (1.1) est vérifiée pour tous $(t,x), (t,y) \in\ Q$ et pour tout $\rho \geqslant 0$.*

Lemme 1.1. *Soit E un espace vectoriel normé et C un ensemble convexe fermé tel que $C_{\rho_0} \neq \emptyset$. Alors pour tout $\rho > \rho_0$ et $\eta \geq 0$ on a*

$$haus(C_{\rho+\eta}, C_\rho) \leqslant [(\rho + \rho_0)/(\rho - \rho_0)]\eta,$$

ce qui implique que l'application $\eta \longmapsto haus(C_{\rho+\eta}, C_\rho)$ *est lipschitzienne sur* $\mathbb{R}_+$.

Proposition 1.26. *Soient* $C, D \subset E$ *deux sous ensembles fermés convexes tels que* C_{ρ_0}, D_{ρ_0} *sont non vides pour un certain* $\rho_0 \geqslant 0$. *Alors pour tout* $\rho > \rho_0$,

$$haus(C_\rho, D_\rho) \leq \frac{2\rho}{\rho - \rho_0} haus_\rho(C, D). \tag{1.2}$$

Preuve. On a

$$e(D_\rho, C_\rho) \leqslant e(D_\rho, C_{\rho+\eta}) + e(C_{\rho+\eta}, C_\rho)$$

et

$$e(C_\rho, D_\rho) \leqslant e(C_\rho, D_{\rho+\eta}) + e(D_{\rho+\eta}, D_\rho),$$

cela implique que

$$\begin{array}{rcl} haus(C_\rho, D_\rho) & = & \max\{e(D_\rho, C_\rho), e(C_\rho, D_\rho)\} \\ & \leqslant & \max\{e(D_\rho, C_{\rho+\eta}), e(C_\rho, D_{\rho+\eta})\} + \max\{e(C_{\rho+\eta}, C_\rho), e(D_{\rho+\eta}, D_\rho)\}, \end{array}$$

c'est à dire

$$haus(C_\rho, D_\rho) \leqslant \beta_1 + \beta_2,$$

avec, pour tout $\eta > 0$

$$\beta_1 = \max\{e(D_\rho, C_{\rho+\eta}), e(C_\rho, D_{\rho+\eta})\}$$

et

$$\beta_2 = \max\{e(C_{\rho+\eta}, C_\rho), e(D_{\rho+\eta}, D_\rho)\}.$$

On va montrer que $\beta_2 \leqslant \frac{\rho+\rho_0}{\rho-\rho_0}\eta$.

On a

$$\begin{array}{rcl} e(C_{\rho+\eta}, C_\rho) & \leqslant & haus(C_{\rho+\eta}, C_\rho) \\ & \leqslant & ((\rho + \rho_0)/(\rho - \rho_0))\eta, \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} e(D_{\rho+\eta}, D_\rho) & \leqslant & haus(D_{\rho+\eta}, D_\rho) \\ & \leqslant & ((\rho + \rho_0)/(\rho - \rho_0))\eta. \end{array}$$

Alors

$$\begin{aligned} \beta_2 &\leqslant \max\{haus(C_{\rho+\eta}, C_\rho), haus(D_{\rho+\eta}, D_\rho)\} \\ &\leqslant ((\rho + \rho_0)/(\rho - \rho_0))\eta. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Maintenant on va prouver que $\beta_1 = haus_\rho(C, D)$.

En posant $\eta = haus_\rho(C, D)$ on trouve,

$$e(D_\rho, C_{\rho+\eta}) = e(D_\rho, C) \quad et \quad e(C_\rho, D_{\rho+\eta}) = e(C_\rho, D).$$

En effet, pour tout $y \in D_\rho$, on a $d(y,C) \leq e(D_\rho, C) \leq \eta$. D'ou $d(0,C) \leq \|y\| + d(y,C) \leq \rho + \eta$. C'est à dire $C \subset (\rho+\eta)\overline{B}$, donc, $C = C_{\rho+\eta}$ et $e(D_\rho, C) = e(D_\rho, C_{\rho+\eta})$ et de la même façon, $e(C_\rho, D) = e(C_\rho, D_{\rho+\eta})$.
D'où

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \max\{e(D_\rho, C_{\rho+\eta}), e(C_\rho, D_{\rho+\eta})\} \\ &= \max\{e(D_\rho, C), e(C_\rho, D)\} \\ &= haus_\rho(C,D). \end{aligned} \tag{1.4}$$

De (1.3) et (1.4) on a

$$\begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 &\leqslant ((\rho+\rho)/(\rho-\rho))haus_\rho(C,D) + haus_\rho(C,D) \\ &\leqslant (2\rho/(\rho-\rho_0))haus_\rho(C,D), \end{aligned}$$

cela implique que

$$haus(C_\rho, D_\rho) \leqslant (2\rho/(\rho-\rho_0))haus_\rho(C,D).$$

□

1.9 Projection

Ces résultats sont pris des références [10] et [21]

Théorème 1.14. *Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert et soit A un sous ensemble convexe fermé non vide de H. Alors pour tout $x \in H$, il existe $x' \in A$ tel que*

$$\|x - x'\| = d(x,A) = \inf_{z \in A} \|x - z\|.$$

x' s'appelle la projection de x sur A et on la note $pr(x,A)$,i.e., $x' = pr(x,A)$.
De plus $pr(x,A)$ est caractérisée par, $Re < x - pr(x,A), z - pr(x,A) > \leqslant 0 \quad \forall z \in A$.

Proposition 1.27. *Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert et soit A un sous espace vectoriel. Soit $x' \in A$. Si $x' = pr(x,A)$ alors, $x - x \in A^\perp$,i.e., $< x - x', y >= 0 \quad \forall y \in A$.*

Proposition 1.28. *Soit $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne et soit $A, (A_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^n$ des sous ensembles non vides fermés et convexes.*
Si $\lim\limits_{n\to\infty} haus(A_n, A) = 0$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\lim\limits_{n\to\infty} pr(x, A_n) = pr(x,A)$, où $pr(x,A)$ noté la projection de x sur A.

1.10 Théorème du point fixe de Schauder

Ce théorème est pris de la référence [36].

Théorème 1.15. *Soient E un espace de Banach et $K \subset E$ un convexe compact. Alors toute application continue $f : K \longrightarrow K$ possède un point fixe, i.e., il existe un point $x^* \in K$ tel que $x^* = f(x^*)$.*

1.11 Lemme de Gronwall

Ce lemme est pris de la référence [27].
Le lemme de Gronwall s'interprète en disant qu'à partir d'une inégalité intégrale portant sur f, on trouve une inégalité sur f. Ce lemme sert souvent dans la théorie des équations différentielles, notamment pour obtenir des majorations de solutions.

Lemme 1.2. *Soient a un réel positif et f, g, h des fonctions continues définies sur $[0, T]$ à valeurs dans $[0, +\infty[$ telles que*

$$f(t) \leq a + \int_0^t f(\tau)h(\tau)d\tau + \int_0^t g(\tau)\, d\tau, \quad \forall\, t \in [0, 1],$$

alors

$$f(t) \leq a\ \exp\left(\int_0^t h(\tau)d\tau\right) + \int_0^t g(\tau) \exp\left(\int_\tau^t h(s)ds\right) d\tau, \quad \forall\, t \in [0, 1].$$

En particulier si $a = 0$ et $f \geq 0$ alors $f \equiv 0$.

CHAPITRE 2

MULTI-APPLICATIONS

Dans ce chapitre nous donnons quelques définitions et résultats qui concernent les multi-applications. Ces résultats sont pris des références [8], [17], [20], [33], [18], [28], [26], [18] et [23].

2.1 Multi-applications et sélections

Définitions 2.1. *Soient X, Y deux ensembles non vides. On appelle* ***multi-application*** *(ou* ***fonction multivoque****) F définie sur X à valeurs dans Y toute application qui à chaque élément $x \in X$ associe un sous ensemble $F(x)$ de Y, et on note $F : X \rightrightarrows Y$ ou $F : Y \to \mathcal{P}(Y)$.*

- *On appelle* **domaine** *(effectif) de la multi-application F qu'on note $dom(F)$, le sous ensemble de Y défini par*

$$D(F) := dom(F) = \{x \in X;\ F(x) \neq \emptyset\}.$$

- *On appelle* **graphe** *de F, qu'on note $gph(F)$, le sous ensemble de $X \times Y$ défini par*

$$gph(F) = \{(x, y) \in X \times Y;\ y \in F(x)\}.$$

- *On appelle* **image** *de* F*, qu'on note* $Im(F)$*, le sous ensemble de* Y *défini par*

$$Im(F) = \{y \in Y;\ \exists x \in X, y \in F(x)\}.$$

- *Si* $A \subset X$*, on appelle* **image** *de* A *par* F *qu'on note* $F(A)$ *le sous ensemble de* Y *défini par* $F(A) = \underset{x \in A}{\cup} F(x)$*, et on peut écrire*

$$F(A) = \{y \in Y\ ;\ \exists\, x \in A, y \in F(x)\}.$$

- *On définit la multi-applicationinverse* $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ *définie par*

$$x \in F^{-1}(y)\ \Leftrightarrow\ y \in F(x).$$

- *Pour tout* $V \subset X$*, on appelle* **image réciproque large** *de* F*, le sous ensemble défini par*

$$F^{-1}(V) = \{x \in X;\ F(x) \cap V \neq \emptyset\}.$$

- *Pour tout* $V \subset X$*, on appelle* **image réciproque étroite** *de* F*, le sous ensemble défini par*

$$F_{+}^{-1}(V) = \{x \in X;\ F(x) \subseteq V\}.$$

Définition 2.1. *Soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application. On appelle* ***sélection*** de F *toute application* $f : dom(F) \to Y$ *vérifiant*

$$f(x) \in F(x), \forall\, x \in dom(F).$$

2.2 Continuité des multi-applications

Définition 2.2. *Soient* X, Y *deux espaces topologique, et* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application.*

1. *On dit que* F *est* ***semi-continue supérieurement au sens de Vietoris*** *au point* $x_0 \in X$ *si pour tout ouvert* U *tel que* $F(x_0) \subset U$*, il existe un voisinage* Ω *de* x_0 *tel que* $F(z) \subset U$*,* $\forall z \in \Omega$*. Autrement dit* $F_{+}^{-1}(U)$ *est un voisinage de* x_0*.*
   - *On dit que* F *est semi-continue supérieurement au sens de Vietoris sur* X *si elle l'est en tout point* $x_0 \in X$*.*
2. *On dit que* F *est* ***semi-continue inférieurement au sens de Vietoris*** *au point* $x_0 \in X$ *si pour tout ouvert* U *de* X *vérifiant* $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$*, il existe un voisinage* Ω *de* x_0 *tel que* $F(z) \cap U \neq \emptyset$*,* $\forall z \in \Omega$*. Autrement dit* $F^{-1}(U)$ *est un voisinage de* $x_0 \in X$*.*
   - *On dit que* F *est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris sur* X *si elle l'est en tout point* $x_0 \in X$*.*

3. *On dit que F est* ***continue*** *au point x_0 si elle est semi-continue supérieurement au sens de Vietoris et semi-continue inférieurement au sens de Vietoris au point x_0, et on dit qu'elle est continue sue X si elle l'est en tout point $x_0 \in X$.*

Proposition 2.1. *Soient X, Y deux espaces topologiques. Considérons la multi-application $F : X \rightrightarrows Y$, alors*

(i) F est semi-continue supérieurement au sens de Vietoris si et seulement si $F^{-1}(U)$ est un fermé de X pour tout U fermé de Y.

(ii) F est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris si et seulement si $F^{-1}(U)$ est un ouvert de X pour tout U ouvert de Y.

Lemme 2.1. *La multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris si et seulement si la fonction $d(y, F(.))$ est semi-continue supérieurement pour tout $y \in Y$.*

Théorème 2.1. *Soit X, Y deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors, F est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris au point $x_0 \in X$ si et seulement si pour tout suite (x_n) de point de X, telle que $x_n \longrightarrow x_0$ et pour tout $y_0 \in F(x)$, il existe une suite (y_n) telle que $y_n \in F(x_n)$ et $y_n \longrightarrow y_0$.*

Proposition 2.2. *Soient X un espace topologique et E un espace de Banach séparable, et soit $F : X \rightrightarrows E$ une multi-application semi-continue inférieurement au sens de Vietoris. Alors, les multi-applications $\overline{F}, \overline{co}F : X \rightrightarrows E$ définies par $\overline{F}(x) = \overline{F(x)}$ et $(\overline{co}F)(x) = \overline{co}(F(x))$, $x \in X$, sont semi continues inférieurement.*

Définitions 2.2 (**Continuité par rapport à la distance de Hausdorff**).
Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques, et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application, alors

- *F est dite H-semi-continue supérieurement au point $x_0 \in X$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$F(B(x_0, \delta)) \subset V(F(x_0), \varepsilon) = \{y \in Y;\ d(y, F(x_0) \leq \varepsilon\}.$$

- *On dit que F est H-semi-continue supérieurement sur X si elle l'est en tout point de X.*

- *F est dite H-semi-continue inférieurement au point $x_0 \in X$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$F(x_0) \subset [V(F(x), \varepsilon)]^{\circ}; \quad \forall x \in B(x_0, \delta).$$

- *On dit que F est H-semi-continue inférieurement sur X si elle l'est en tout point de X.*
- *On dit que F est H-continue si elle H-semi-continue supérieurement et H-semi-continue inférieurement.*

Proposition 2.3. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs fermées. Alors,*

- *F est H-semi-continue supérieurement au point $x_0 \in X$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n) \subset X$ convergente vers x_0, on a,*

$$\lim_{n\to\infty} e(F(x_n), F(x_0)) = 0.$$

- *F est H-semi-continue inférieurement au point $x_0 \in X$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n) \subset X$ convergente vers x_0, on a,*

$$\lim_{n\to\infty} e(F(x_0), F(x_n)) = 0.$$

- *F est H-continue au point $x_0 \in X$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n) \subset X$ convergente vers x_0, on a,*

$$\lim_{n\to\infty} haus(F(x_n), F(x_0)) = 0.$$

Proposition 2.4. *Si $F(x_0)$ est compact alors*

- *F est H-semi-continue supérieurement au point x_0 si et seulement si F est semi-continue supérieurement au sens de Vietoris au point x_0.*
- *F est H-semi-continue inférieurement au point x_0 si et seulement si F est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris au point x_0.*

Théorème 2.2 (Théorème d'existence de sélections continues de Michael). *Soit X un espace métrique, E un espace de Banach et $F : X \rightrightarrows E$ une multi-application semi-continue inférieurement au sens de Vietoris à valeurs non vides fermées et convexes. Alors F admet une sélection continue.*

2.3 Mesurabilité des multi-applications

Définition 2.3. *Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application .*

1. *On dit que F est Σ-mesurable où mesurable, si pour tout ouvert V de Y*

$$F^{-1}(V) = \{x \in X : F(x) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

2. *On dit que F est fortement mesurable, si pour tout fermé W de Y*

$$F^{-1}(W) = \{x \in X : F(x) \cap W \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Proposition 2.5. *Si $F : X \rightrightarrows Y$ est fortement mesurable, alors F est mesurable.*

Proposition 2.6. *Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique séparable et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) F est Σ-mesurable.

(ii) Pour chaque $y \in Y$, la fonction $d_y : X \to \mathbb{R}$ définie par $d_y(x) = d(y, F(x))$ est Σ-mesurable.

Proposition 2.7. *Si $F : X \rightrightarrows Y$ est mesurable ou fortement mesurable, alors dom(F) est mesurable.*

Proposition 2.8. *Soient X un espace topologique et Y un espace métrique séparable, alors la multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ est mesurable si et seulement si $\overline{F} : X \rightrightarrows Y$ est mesurable.*

Théorème 2.3. *Soient (X, Σ) un espace mesurable et E un espace de Banach et soient $F : X \times E \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable et $u : X \to E$ une application Σ-mesurable. Alors, la multi-application $x \mapsto F(x, u(x))$ est mesurable.*

Définition 2.4. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, X et Y deux espace métrique et soit $f : T \times X \longrightarrow Y$ une application.*
On dit que f est de ***Carathéodory*** *si elle est mesurable par rapport à t et continue par rapport à x, c'est à dire pour tout $x \in X$ fixé l'application*

$$\begin{aligned} f_x :&T \longrightarrow Y \\ &t \longmapsto f_x(t) = f(t, x) \end{aligned}$$

est Σ-mesurable, et pour tout $t \in T$ fixé l'application

$$\begin{aligned} f_t :&X \longrightarrow Y \\ &t \longmapsto f_t(x) = f(t, x) \end{aligned}$$

est continue.
On dit aussi que f est séparément mesurable, séparément continue.

Proposition 2.9. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique séparable et Y un espace métrique et soit $f : T \times X \longrightarrow Y$ une application de Carathéodory. Alors f est mesurable.*

Théorème 2.4 (**Théorème de Lusin**). *Soit X un espace métrique compact (X, Σ, μ) un espace mesuré de Radon et soit Y un espace métrique .*
Soit $\varphi : X \longrightarrow Y$, une application mesurable, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un fermé $X_\varepsilon \subset X$ tel que $\mu(X \backslash X_\varepsilon) < \varepsilon$ et $\varphi_{|X_\varepsilon}$ est continue.

Théorème 2.5 (**Théorème de Lusin cas multivoque**).
Soit X un espace métrique compact et (X, Σ, μ) un espace mesuré de Radon et soit Y un espace métrique séparable et localement compact. Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs fermées. Alors F est mesurable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un sous ensemble fermé $X_\varepsilon \subset X$ tel que $\mu(X \backslash X_\varepsilon) < \varepsilon$ et $F_{|X_\varepsilon}$ est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris.

Lemme 2.2. *Soit (X, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique séparable et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application mesurable à valeurs fermées. Alors le graphe de F appartient à $\Sigma \otimes \mathcal{B}(Y)$.*

Théorème 2.6. *Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique séparable complet et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs fermées. Alors, F est Σ-mesurable si et seulement si $dom(F) \in \Sigma$ et il existe une suite $(f_n)_{n\geq}$ d'applications Σ-mesurables telle que pour chaque $x \in dom(F)$ on ait $F(x) = \{f_n(x), n \geq 1\}$.*
On dit que $(f_n)_{n\geq 1}$ est une représentation de Castaing.

Lemme 2.3. *Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré avec $\mu \geq 0$, σ-finie et Σ est μ-complète. Soient Y un espace métrique séparable et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs fermées, alors, les assertions suivantes sont équivalentes*

(a) F est Σ-mesurable.

(b) $gphF \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$.

(c) F est fortement mesurable.

Théorème 2.7 (**Théorème d'existence de sélections mesurables**).
Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique complet séparable et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application mesurable à valeurs fermées non vides. Alors, F admet au moins une sélection mesurable.

Théorème 2.8. *Soient (X, Σ, μ) un espace mesuré avec Σ μ-complète et $\mu\,\sigma$-finie. Soit E un espace de Banach séparable et soient $f : X \to E$ une application mesurable et $\rho : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Alors, $x \mapsto \overline{B}_E(f(x), \rho(x))$ est une multi-application mesurable.*

Preuve. Soit (y_n) une suite fixée, dense dans la boule unité de E (le choix d'une telle suite est possible grâce à la séparabilité de l'espace E).
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}, \sigma_n(x) = f(x) + \rho(x)y_n$.
L'application $\sigma_n(\cdot)$ est mesurable (grâce à la mesurabilité de $f(\cdot)$ et $\rho(\cdot)$) et $\overline{B}_E(f(x), \rho(x)) = \overline{f(x) + \rho(x)B_E(0,1)} = \{\overline{f(x) + \rho(x)y_n}\} = \{\overline{\sigma_n(x)\,;\, n \in \mathbb{N}}\}$. Par suite $\{\sigma_n(x)\}_n$ est une représentation de Castaing de $\overline{B}_E(f(x), \rho(x))$. Par conséquent, l'application $x \mapsto \overline{B}_E(f(x), \rho(x))$ est mesurable. □

Théorème 2.9. *Soit $F : I \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multi-application mesurable à valeurs fermées non vides. Alors pour tous $f,\, g : I \to \mathbb{R}^n$ deux applications mesurables, il existe une application mesurable $h : I \to \mathbb{R}^n$ tel que*

$$h(t) \in F(t, f(t)),$$

et

$$\|g(t) - h(t)\| = d(g(t), F(t, f(t))), \text{ pour tout } t \in I.$$

Preuve. Soient $f,\, g : I \to \mathbb{R}^n$ deux applications mesurables. On définit la multi-application $H : I \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ par

$$H(t) = \{v \in F(t, f(t))\ ;\ \|g(t) - v\| \ =\ d(g(t), F(t, f(t)))\}.$$

- Montrons que $H(\cdot)$ est à valeurs non vides.
  Soit $t \in I$. On a

  $$d(g(t), F(t, f(t))) = \inf_{v \in F(t,f(t))} \|g(t) - v\|, \ (F \text{ est à valeurs non vides})$$

  ce qui est équivalent à

  $$\forall\, n > 0, \exists\, v_n \in F(t, f(t))\,,\ \|g(t) - v_n\| \ <\ d(g(t), F(t, f(t))) + \frac{1}{n}. \tag{2.1}$$

  Cela implique que

  $$\|v_n\| - \|g(t)\| \ \leq\ \|g(t) - v_n\| < d(g(t), F(t, f(t))) + \frac{1}{n},$$

  d'où

  $$\|v_n\| \ <\ d(g(t), F(t, f(t))) + \|g(t)\| + \frac{1}{n}.$$

  Donc (v_n) est bornée dans $\mathbb{R}^n$ alors (v_n) est relativement compacte, alors, on peut lui extraire une sous suite qui converge vers $v \in \mathbb{R}^n$, en passant à la limite quand $n \to \infty$ dans (2.1), on trouve

  $$\|g(t) - v\| \ \leq\ d(g(t), F(t, f(t))),$$

mais $F(t, f(t))$ est fermé, donc $v \in F(t, f(t))$, d'où

$$\|g(t) - v\| \; = \; d(g(t), F(t, f(t))).$$

Ce qui implique que $v \in H(t)$, c'est à dire, $H(t) \neq \emptyset$.

- Montrons que $H(\cdot)$ est à valeurs fermées.

  Soient $t \in I$ et soit $(v_n)_n$ une suite de $H(t)$ tel que $(v_n)_n$ converge vers v quand $n \to \infty$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_n \in F(t, f(t)),$$

  et

$$\|g(t) - v_n\| = d(g(t), F(t, f(t))).$$

  Par passage à la limite quand $n \to \infty$ on aura,

$$v = \lim_{n\to\infty} v_n \in \overline{F(t, f(t))} \; = \; F(t, f(t)) \text{ (car } F \text{ est à valeurs fermées)}$$

  et

$$\|g(t) - v\| = \|g(t) - \lim_{n\to\infty} v_n\| = \lim_{n\to\infty} \|g(t) - v_n\| = d(g(t), F(t, f(t))),$$

  (car $\|\cdot\|$ est une application continue). Par conséquent

$$v \in F(t, f(t)),$$

  et

$$\|g(t) - v\| = d(g(t), F(t, f(t))).$$

  D'où, $H(\cdot)$ est à valeurs fermées.

- Montrons que $H(\cdot)$ est mesurable.

$$\begin{aligned} gph(H) &= \{(t,x) \in I \times \mathbb{R}^n \; ; \; x \in H(t)\} \\ &= \{(t,x) \in I \times \mathbb{R}^n \; ; \; x \in F(t, f(t)) \,\text{et}\, \|g(t) - x\| \; = \; d(g(t), F(t, f(t)))\} \\ &= \{(t,x) \in I \times \mathbb{R}^n \; ; \; x \in F(t, f(t))\} \\ &\bigcap \{(t,x) \in I \times \mathbb{R}^n \; ; \; \|g(t) - x\| \; = \; d(g(t), F(t, f(t)))\} \\ &= \{(t,x) \in I \times \mathbb{R}^n \; ; \; x \in F(t, f(t))\} \; \cap \; \{(t,x) \in I \times \mathbb{R}^n \; ; \; x \in S(g(t), d(g(t), F(t, f(t))) \\ &= \{(t,x) \in I \times \mathbb{R}^n \; ; \; x \in F(t, f(t))\} \; \cap \; gph(\overline{B}(g(\cdot), \rho(\cdot))), \end{aligned}$$

  où $\rho(t) = d(g(t), F(t, f(t)))$.

  Soit $A = \{(t,x) \in I \times \mathbb{R}^n \; ; \; x \in F(t, f(t))\}$ Puisque F et f mesurables donc A est mesurable, de plus $g(\cdot)$ est mesurable, ainsi que $\rho(\cdot)$, donc $gph(\overline{B}(g(\cdot), \rho(\cdot)))$ est mesurable (voir le Théorème 2.8), alors $gph(H)$ est mesurable.

  Par conséquent $H(\cdot)$ est mesurable.

Par le théorème d'existence de sélections mesurables (voir Théorème 2.7), il existe $h: I \to \mathbb{R}^n$ mesurable tel que $h(t) \in H(t)$, c'est à dire, $h(t) \in F(t, f(t))$, et

$$\|g(t) - h(t)\| = d(g(t), F(t, f(t))).$$

□

Dans l'espace $L^1(I, E)$ on considère la norme "faible"

$$\|x\|_\omega = \max_{0 \leq a \leq b \leq 1} \| \int_a^b x(s)ds\|, \tag{2.2}$$

cette norme est équivalente à la norme

$$|||x||| = \max_{0 \leq t \leq 1} \| \int_0^t x(s)ds\|. \tag{2.3}$$

En effet, pour tout $t \in I$, et en prenant $a = 0$ et $b = t$,

$$\| \int_0^t x(s)ds\| \leq \max_{0 \leq a \leq b \leq b} \| \int_a^b x(s)ds\| = \|x\|_\omega.$$

D'où,

$$|||x||| \leq \|x\|_\omega. \tag{2.4}$$

D'autre part, pour tout $a, b \in I$, $a \leq b$,

$$\begin{aligned}
\| \int_a^b x(s)ds\| &= \| \int_0^b x(s)ds - \int_0^a x(s)ds\| \\
&\leq \| \int_0^b x(s)ds\| + \| \int_0^a x(s)ds\| \\
&\leq 2|||x|||.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\|x\|_\omega \leq 2|||x|||. \tag{2.5}$$

De (2.4) et (2.5), on déduit que $\|.\|_\omega$ et $|||.|||$ sont équivalentes.
On note par $L^1_\omega(I, \mathbb{R}^n)$ l'espace $L^1(I, \mathbb{R}^n)$ muni de la norme faible.

Théorème 2.10. *Soit l'ensemble $G \subset L^1(I, \mathbb{R}^n)$ vérifiant les propriétés suivantes*

1. *G est borné et uniformément intégrable ;*
2. *pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $f \in G$ il existe un ensemble mesurable $I_{f,\varepsilon} \subset I$ avec $\mu(I \backslash I_{f,\varepsilon}) < \varepsilon$ et $f(t) \in K_\varepsilon$ pour tout $t \in I_{f,\varepsilon}$.*

Alors, les topologies des ensembles $\omega - L^1(I, \mathbb{R}^n)$ et $L^1_\omega(I, \mathbb{R}^n)$ coïncident sur G. De plus G est relativement compact dans $L^1_w(I, \mathbb{R}^n)$.

Proposition 2.10. *Soit $E = \mathbb{R}^n$, $m \in L^1(I, \mathbb{R}^+)$, et*

$$G = \{f \in L^1(I, \mathbb{R}^n); \|f(t)\| \leqslant m(t) \quad p.p \quad sur \quad I\} \tag{2.6}$$

alors, les topologies de l'espace $\omega - L^1(I, \mathbb{R}^n)$ et de l'espace $L^1_\omega(I, \mathbb{R}^n)$ coïncident sur l'ensemble G et, par conséquente, l'ensemble G est convexe, métrisable, et compact dans $L^1_\omega(I, \mathbb{R}^n)$.

Preuve. On a G est un sous ensemble de $L^1(I, \mathbb{R}^n)$, borné car $G \subset \overline{B}_{L^1}(0, \|m\|_1)$.
De plus, pour tout $f \in G$ et $J \subset \mathcal{L}(I)$ tel que $\mu(J)$ est assez petit, on a

$$\int_J \|f(t)\| dt \leq \int_J m(t) dt.$$

Comme $m \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$, $\lim\limits_{\mu(J) \to 0} \int_J m(t) dt = 0$, donc

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall J \in \mathcal{L}, \ \mu(J) < \delta &\Rightarrow \int_J m(t) dt < \varepsilon \\ &\Rightarrow \int_J \|f(t)\| dt < \varepsilon, \quad \forall f \in G. \end{aligned}$$

D'où G est uniformément intégrable.
D'autre part, comme m est mesurable, par le théorème de Lusin, il existe un compact $I_\varepsilon \subset I$ tel que $\mu(I_\varepsilon \backslash I) < \varepsilon$ et $m_{|I_\varepsilon}$ et continue, donc $m(I_\varepsilon)$ est compact dans $\mathbb{R}$, d'où borné. Alors, il existe $M_\varepsilon > 0$ tel que $m(t) \leq M_\varepsilon$ pour tout $t \in I_\varepsilon$.
Or, pour tout $f \in G$ et tout $t \in I_\varepsilon$, on a

$$\|f(t)\| \leq m(t) \leq M_\varepsilon.$$

On pose $K_\varepsilon = M_\varepsilon \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0, 1)$ qui est compact dans $\mathbb{R}^n$. Alors, on obtient $f(t) \in K_\varepsilon$, pour tout $t \in I_\varepsilon$.
Donc, les conditions du Théorème 2.10 sont vérifiées, d'où les topologies des espaces $\omega - L^1(I, \mathbb{R}^n)$ et $L^1_\omega(I, \mathbb{R}^n)$ coïncident sur G. De plus G est relativement compact dans $L^1_w(I, \mathbb{R}^n)$.
Montrons que G est convexe.
Soit $f, g \in G$ et $\lambda \in [0, 1]$. Alors, $\lambda f + (1 - \lambda) g \in L^1(I, \mathbb{R}^n)$, car $L^1(I, \mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel. De plus, pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$\|\lambda f(t) + (1 - \lambda) g(t)\| \leq \lambda \|f(t)\| + (1 - \lambda) \|g(t)\| \leq m(t).$$

D'où $\lambda f + (1 - \lambda) g \in G$. Donc G est convexe.
Il reste à montrer que G est fermé dans $\omega - L^1(I, \mathbb{R}^n)$. Puisque G est convexe, il suffit

de montrer que G est fermé dans $L^1(I,\mathbb{R}^n)$. Soit $(f_n)_{n\geq 1} \subset G$ tel que $f_n \longrightarrow f$ dans $L^1(I,\mathbb{R}^n)$.

Par la Proposition 1.3, il existe une sous suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ qui converge presque partout vers $f \in L^1(I,\mathbb{R}^n)$.

Comme, pour tout $k \geq 1$,

$$\|f_{n_k}(t)\| \leq m(t) \quad \forall t \in I \backslash I_k,$$

où I_k est négligeable, en posant $I' = \bigcup\limits_{k\geq 1} I_k$, on aura

$$\|f_{n_k}(t)\| \leq m(t) \quad \forall t \in I \backslash I' \,, k \geq 1$$

où I' est négligeable.

D'autre part,

$$f_{n_k}(t) \longrightarrow f(t) \quad \forall t \in I \backslash I'',$$

où I'' est négligeable, donc, en passant à la limite,

$$\|f(t)\| = \lim_{k\to\infty} \|f_{n_k}(t)\| \leq m(t), \quad \forall t \in I \backslash (I' \cup I'').$$

c'est à dire, $\|f(t)\| \leq m(t)$ p.p sur I.

D'où $f \in G$. Donc G est fermé dans $\omega - L^1(I,\mathbb{R}^n)$. Par conséquent G est compact dans $\omega - L^1(I,\mathbb{R}^n)$. □

2.4 Ensembles décomposables et l'ensemble des L¹-sélections

Définition 2.5. *Soit E un espace de Banach. Un ensemble $K \subseteq L^1(I,E)$ est dit **décomposable** si, pour tout triplet $(A, f_1, f_2) \in \mathcal{L}(I) \times K \times K$, on a*

$$1\!\!1_A f_1 + 1\!\!1_{A^C} f_2 = 1\!\!1_A f_1 + (1 - 1\!\!1_A) f_2 \in K.$$

Théorème 2.11. *Soit X un espace métrique séparable, E un espace de Banach et $F : X \rightrightarrows L^1(I,E)$ une multi-application semi-continue inférieurement au sens de Vietoris à valeurs non vides fermées et décomposables. Alors F admet une sélection continue.*

Proposition 2.11. *Soient E un espace de Banach et $F : I \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable à valeurs fermées non vides, alors $S_F^1 = \{f \in L^1(I,E), f(t) \in F(t) \text{ p.p sur } I\}$ est décomposable et fermé.*

Proposition 2.12. *Si $F : I \rightrightarrows E$ est une multi-application mesurable à valeurs fermées non vides, alors $S^1_F \neq \emptyset$ si et seulement si* $\inf\{\|v\|, v \in F(t)\} \leq h(t)$ *p.p pour une certaine application $h \in L^1(I, E)$.*

Lemme 2.4. *Soit K un espace métrique compact et E un espace de Banach séparable. Supposons que $F : K \rightrightarrows L^1(I, E)$ est une multi-application semi-continue inférieurement au sens de Vietoris à valeurs fermées non vides et décomposables. Alors la multi-application $\overline{co}F$ est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris à valeurs décomposables.*

Théorème 2.12. *Soit $F : I \rightrightarrows X$ une multi-application mesurable à valeurs non vides fermées, On définit la multi-application $coF : I \rightrightarrows X$ par $coF(t) = co(F(t))$ pour tout $t \in I$. Alors, coF est une multi-application mesurable à valeurs non vides et $\overline{co}F$ est une multi-application mesurable à valeurs non vides fermées.*
De plus, si $S^1_F \neq \emptyset$, alors $S^1_{\overline{co}F} = \overline{co}S^1_F$.

Théorème 2.13. *Soit K un espace métrique compact et soit $F : K \rightrightarrows L^1(I, E)$ une multi-application a valeurs fermées non vides, semi-continue inférieurement au sens de Vietoris. Alors, l'ensemble des sélections continues $S^1_{\overline{co}F}$ est non vide, et pour tout $g \in S^1_{\overline{co}F}$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une sélection continue f de F telle que,*

$$\| \int_0^t (g(x)(s) - f(x)(s))ds\| < \varepsilon; \quad \forall (t, x) \in (I \times K).$$

Proposition 2.13. *Soit $K \subset C(I, \mathbb{R}^n)$ un ensemble compact, et soit $F : I \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multi-application à valeurs fermées non vides. Supposons que*

a. la multi-application $x \longrightarrow F(t, x)$ est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris p.p sur I ;

b. pour tout $x(.) \in K$, la multi-application $t \longrightarrow F(t, x(t))$ est mesurable ;

c. il existe une fonction $m \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$ tel que pour tout $x(.) \in K$

$$\sup\{\|v\|;\ v \in F(t, x(t))\} \leqslant m(t), \quad p.p \quad sur \quad I. \tag{2.7}$$

Alors il existe une fonction continue $g : K \longrightarrow L^1(I, E)$ tel que pour tout $x(.) \in K$

$$g(x)(t) \in \overline{co}F(t, x(t)), \quad x(.) \in K \quad p.p.$$

et pour une telle fonction g et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue $g_\varepsilon : K \to L^1(I, E)$ tel que

$$g_\varepsilon(x)(t) \in F(t, x(t)) \quad p.p.$$

et

$$\|g(x) - g_\varepsilon(x)\|_w < \varepsilon. \tag{2.8}$$

Preuve. D'après (b), pour tout $x \in K$, la multi-application $t \longrightarrow F(t, x(t))$ est mesurable alors, d'après les Propositions 2.11 et 2.12 et la condition (c), l'ensemble

$$\mathcal{K}(x) = S^1_{F(.,x(.))} = \{f \in L^1(I, \mathbb{R}^n) : f(t) \in F(t, x(t)) \quad p.p \quad sur \quad I\}$$

est non vide fermé et décomposable.
Maintenant on va montrer que $\mathcal{K}$ est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris.
Soit C un ensemble non vide fermé quelconque de $L^1(I, \mathbb{R}^n)$ on va montrer que si $x_n \to x_0$ uniformément, $\mathcal{K}(x_n) \subset C$, alors $\mathcal{K}(x_0) \subset C$. Soit $f_0 \in \mathcal{K}(x_0)$, par le Théorème 2.9 et la condition (b), pour tout $n \geq 1$, il existe $f_n \in \mathcal{K}(x_n)$ mesurable telle que,

$$\|f_n(t) - f_0(t)\| = d(f_0(t), F(t, x_n(t))) \quad p.p \quad sur \quad I, \tag{2.9}$$

et de (c), f_n est intégrable. Il existe $I' \subset I$ un ensemble mesurable tel que (2.9) est vérifiée sur I'.
Comme $x_n \longrightarrow x_0$ uniformément, pour tout $t \in I$, $x_n(t) \longrightarrow x_0(t)$. Alors, pour tout $t \in I'$, la relation (2.9) et la condition (a) impliquent que (en utilisant Lemme 2.1) $f_n(t) \longrightarrow f_0(t)$, c'est à dire que $f_n \longrightarrow f_0$ p.p.
Par la condition (c) et (2.9), on a

$$\|f_n(t)\| \leq 2\|f_0(t)\| + m(t) \; p.p \; sur \; I,$$

donc, par le Théorème de convergence dominée, $f_n \longrightarrow f_0$ dans $L^1(I, \mathbb{R}^n)$ et puisque $(f_n)_{n\geq 1} \subset C$ et C fermé, $f_0 \in C$.
Comme f_0 est un point arbitraire de $\mathcal{K}(x_0)$, $\mathcal{K}(x_0) \subset C$, d'où $\mathcal{K}$ est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris.
Par le Théorème 2.12, on a

$$S^1_{\overline{co}F(.,x(.))} = \overline{co} S^1_{F(.,x(.))}$$

et d'après le Lemme 2.4, $\overline{co}\mathcal{K}$ est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris à valeurs décomposables, non vides et fermées, donc, par le Théorème 2.11, il existe une fonction continue $g : K \longrightarrow L^1(I, E)$ tel que $g(x) \in \overline{co}\mathcal{K}(x) = S^1_{\overline{co}F(.,x(.))}$, c'est à dire , $g(x)(t) \in \overline{co}F(t, x(t))$ p.p sur I.
Par le Théorème 2.13, il existe une sélection continue telle que $g_\varepsilon(x) \in \mathcal{K}(x)$ $\forall x(.) \in K$, i.e,

$$g_\varepsilon(x)(t) \in F(t, x(t)), \quad p.p \; sur \; I,$$

et

$$|||g_\varepsilon - g||| \leq \| \int_0^t g_\varepsilon(x)(s) - g(x)(s)\| < \varepsilon/2 \quad \forall t \in \; I.$$

Donc,

$$\|g_\varepsilon(x) - g(x)\|_\omega < \varepsilon,$$

d'où le résultat. $\square$

CHAPITRE 3

EXISTENCE DE SOLUTIONS GLOBALES ET LOCALES

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'existence de solutions de l'inclusion différentielle suivante

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad p.p \quad sur \quad \text{I}, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

où $F : I \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multi-application à valeurs fermées non vides et $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction absolument continue. Ce chapitre est composé de deux sections, la première section sera consacrée à l'étude de l'existence de solutions globales et la deuxième à l'étude de l'existence de solutions locales.

3.1 Existence de solutions globales

Dans cette section, on étudie l'existence de solutions globales de l'inclusion $(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$.

Définition 3.1. *Soit $F : I \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multi-application à valeurs fermées non vides. On définit une solution globale du problème $(\mathcal{P}_F)$ comme étant une fonction absolument continue $x(.)$, avec $x(0) = x_0$, vérifiant l'inclusion $(\mathcal{P}_F)$ pour presque tout $t \in I$.*

Faisons des hypothèses relatives à l'existence de solutions globales.

Hypothèses ($\mathbf{H_G(F)}$). *La multi-application $F : I \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, à valeurs fermées non vides, vérifie les propriétés suivantes.*

1. *La multi-application $x \longmapsto F(t,x)$ est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris presque partout sur I.*
2. *La multi-application $t \longmapsto F(t,x(t))$ est fortement mesurable pour toute fonction $x(.) \in C(I,\mathbb{R}^n)$.*

On commence par donner un lemme qui nous sera utile dans la démonstration des théorèmes principaux de ce chapitre.

Lemme 3.1. *Supposons que les Hypothèses ($\mathbf{H_G(F)}$) sont vérifiées et soit*

$$d(0,F(t,x)) < m(t) + n(t)\|x\|, \tag{3.1}$$

avec $m, n \in L^1(I,\mathbb{R}_+)$ et $m(t) > 0$, pour tout $t \in I$. Alors la multi-application

$$\Phi(t,x) = F(t,x) \cap (m(t) + n(t)\|x\|)B, \tag{3.2}$$

est définie de $I \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, à valeurs non vides et vérifie les propriétés suivantes.

1. *La multi-application $x \longmapsto \Phi(t,x)$ est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris presque partout sur I.*
2. *La multi-application $t \longmapsto \Phi(t,x(t))$ est mesurable pour toute fonction $x(.) \in C(I,\mathbb{R}^n)$.*
3. *La multi-application $\overline{\Phi}$ définie sur $I \times \mathbb{R}^n$ par*

$$\overline{\Phi}(t,x) = \overline{F(t,x(t)) \cap (m(t) + n(t)\|x\|)B} \quad (t,x) \in I \times \mathbb{R}^n,$$

vérifie aussi les propriétés 1. et 2.

Preuve. 1. D'abord on va montrer que $\Phi(t,x)$ est non vide, pour tout $(t,x) \in I \times \mathbb{R}^n$.
De (3.1) on a $d(0,F(t,x)) = \inf_{v \in F(t,x)} \|v\| < m(t) + n(t)\|x\|$,
cela implique que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $v_\varepsilon \in F(t,x)$ tel que

$$\|v_\varepsilon\| < \inf_{v \in F(t,x)} \|v\| + \varepsilon < m(t) + n(t)\|x\| + \varepsilon,$$

et pour tout $n \geq 1$, en prenant $\varepsilon = \frac{1}{n}$, il existe $v_n \in F(t,x)$ tel que

$$\|v_n\| < \inf_{v \in F(t,x)} \|v\| + \frac{1}{n} < m(t) + n(t)\|x\| + \frac{1}{n}.$$

D'où $(v_n)_{n\geq 1}$ est bornée dans $\mathbb{R}^n$, alors on peut lui extraire une sous suite, notée $(v_{n_k})_{k\geq 1}$ qui converge vers un certain $v \in \mathbb{R}^n$. Puisque $(v_{n_k}) \subset F(t,x)$ et $F(t,x)$ est fermé, $v \in F(t,x)$. De plus, comme pour tout $k \geq 1$, $\|v_{n_k}\| < d(0, F(t,x)) + \frac{1}{n_k}$, par passage à la limite quand $k \to \infty$, on trouve

$$\|v\| = d(0, F(t,x)) < m(t) + n(t)\|x\|.$$

D'où

$$v \in F(t,x) \cap (m(t) + n(t)\|x\|)B = \phi(t,x)$$

et $\Phi(t,x)$ est donc non vide.

Soit $t \in I$ et soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $v \in \Phi(t,x)$ arbitraires. On prend une suite $(x_k)_{k\geq 1} \subset \mathbb{R}^n$, convergent vers x. Comme $v \in (m(t) + n(t)\|x\|)B$, on a

$$\|v\| < m(t) + n(t)\|x\|,$$

cela implique qu'il existe $0 < \varepsilon < m(t) + n(t)\|x\| - \|v\|$ tel que

$$\|v\| < m(t) + n(t)\|x\| - \varepsilon. \tag{3.3}$$

Puisque la multi-application $x \longmapsto F(t,x)$ est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris, il existe une suite $(v_k)_k$ telle que $v_k \longrightarrow v$ et

$$v_k \in F(t, x_k), \quad k \geq 1. \tag{3.4}$$

Par les convergences $x_k \longrightarrow x$ et $v_k \longrightarrow v$, $k \geq 1$, il existe un indice k_0 tel que

$$\|v_k - v\| < \varepsilon/2, \quad n(t)\|x_k - x\| < \varepsilon/2, \quad \forall k \geq k_0.$$

D'après ces inégalités et (3.3) on a,

$$\begin{aligned}
\|v_k\| &= \|v_k - v + v\| \\
&< \|v_k - v\| + \|v\| \\
&< \varepsilon/2 + m(t) + n(t)\|x\| - \varepsilon \\
&= m(t) + n(t)\|x - x_k + x_k\| - \varepsilon/2 \\
&\leq m(t) + n(t)\|x_k - x\| + n(t)\|x_k\| - \varepsilon/2 \\
&< m(t) + \varepsilon/2 + n(t)\|x_k\| - \varepsilon/2 \\
&= m(t) + n(t)\|x_k\|,
\end{aligned}$$

d'où

$$\|v_k\| < m(t) + n(t)\|x_k\|, \quad k \geq k_0. \tag{3.5}$$

En utilisant (3.4) et (3.5), on obtient

$$v_k \in \phi(t, x_k), \quad k \geq k_0.$$

Cela implique que la multi-application $x \longmapsto \Phi(t,x)$ est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris.

2. Soient $x(.) \in C(I, \mathbb{R}^n)$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $f(t) = m(t) + n(t)\|x(t)\|$, et $U : I \rightrightarrows R^n$ une multi-application définie par $U(t) = f(t)B$. Par les Théorèmes 2.4 et 2.5, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $I_\varepsilon \subset I$ tel que $\mu(I \backslash I_\varepsilon) < \varepsilon$, la restriction de $F(., x(.))$ sur I_ε est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris et la restriction de f sur I_ε est continue.
   Comme dans la preuve de (1), on trouve que la restriction de la multi-application $t \longmapsto F(t, x(t)) \cap U(t) = \Phi(t, x(t))$ sur I_ε est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris. Donc par le Théorème 2.5 la multi-application $t \longmapsto \Phi(t, x(t))$ est mesurable.
3. De (1) et de la proposition 2.2, on a que la multi-application $x \longmapsto \overline{\Phi}(t,x)$ est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris, et on a de (2) et de la Proposition 2.8 que la multi-application $x \longmapsto \overline{\Phi}(t, x(t))$, $x(.) \in C(I, \mathbb{R}^n)$ est fortement mesurable.

$\square$

Théorème 3.1. *Soit $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $y(0) = y_0$, une fonction absolument continue, et soit $F : I \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multi-application à valeurs fermées non vides vérifiant les Hypothèses $(\mathbf{H_G(F)})$. Alors pour tout $m(.), n(.) \in L^1(I, \mathbb{R}_+^*)$, tels que ,*

$$d(\dot{y}(t), F(t,x)) < m(t) + n(t)\|y(t) - x\|, \quad p.p \quad sur\ I,\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.6}$$

il existe une solution globale $x(.)$ avec $x(0) = x_0$ de l'inclusion $(\mathcal{P}_F)$ telle que

$$\|x(t) - y(t)\| \leq r(t), \quad \|\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\| \leq n(t)r(t) + m(t), \tag{3.7}$$

$$r(t) = \|x_0 - y_0\| \exp l(t) + \int_0^t exp(l(t) - l(s))m(s)ds, \tag{3.8}$$

et

$$l(t) = \int_0^t n(s)ds. \tag{3.9}$$

Preuve. Soit la multi-application $\Phi : I \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ définie par

$$\Phi(t,z) = -\dot{y}(t) + F(t, z + y(t)), \quad (t,z) \in I \times \mathbb{R}^n. \tag{3.10}$$

On a, $d(0,\Phi(t,z)) = \underset{v\in\phi(t,z)}{inf} \|v\|$ et de (3.10), pour tout $v\in\Phi(t,z)$, il existe $u\in F(t,z+y(t))$, telle que $v=u-\dot{y}(t)$, donc

$$\begin{aligned} d(0,\Phi(t,z)) &= \inf_{u\in F(t,z+y(t))} \|u-\dot{y}(t)\| \\ &= d(\dot{y}(t),F(t,z+y(t))) \\ &< m(t)+n(t)\|y(t)-z-y(t)\| \\ &= m(t)+n(t)\|z\|. \end{aligned}$$

D'où

$$d(0,\Phi(t,z)) < m(t)+n(t)\|z\|, \quad (t,z)\in I\times\mathbb{R}^n.$$

Cette inégalité et les propriétés des fonctions $m(.)$ et $n(.)$, impliquent que

$$\Phi(t,z)\cap(m(t)+n(t)\|z\|)B \neq \emptyset. \tag{3.11}$$

On considère la multi-application $\Gamma : I\times\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ définie par

$$\Gamma(t,z) = \overline{\Phi(t,z)\cap(m(t)+n(t)\|z\|)B}. \tag{3.12}$$

Suit des hypothèses ($\mathbf{H_G(F)}$), et les relations (3.10) et (3.11), la multi-application $z\longmapsto\Gamma(t,z)$ est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris, et la multi-application $t\longmapsto\Gamma(t,z(t))$ est mesurable pour toute fonction $z(.)\in C(I,\mathbb{R}^n)$.
On considère l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \dot{z}(t)\in\Gamma(t,z), \\ z(0)=z_0=x_0-y_0, \end{cases} \tag{3.13}$$

et l'équation

$$\begin{cases} \dot{r}(t)=m(t)+n(t)r(t), \\ r(0)=r_0=\|x_0-y_0\|. \end{cases} \tag{3.14}$$

On résoudre ce système pour trouver la solution $r(\cdot)$ qui est représentée par (3.8) et (3.9).
On commence par résoudre l'équation homogène

$$\dot{r}(t)-n(t)r(t)=0,$$

cela implique que

$$r(t)=c\exp(\int_0^t n(s)ds) \quad c\in\mathbb{R}.$$

En utilisant la méthode de variation des constantes, cherchons une solution particulière de la forme

$$r(t)=c(t)\exp(\int_0^t n(s)ds),$$

avec c une fonction dérivable. En dérivant r on obtient

$$\dot{r}(t) = \dot{c}(t)\exp(\int_0^t n(s)ds) + c(t)n(t)\exp(\int_0^t n(s)ds).$$

En remplaçant dans l'équation (3.14) on obtient

$$\dot{c}(t)\exp(\int_0^t n(s)ds) = m(t).$$

D'où

$$\dot{c}(t) = m(t)\exp(-\int_0^t n(s)ds).$$

En intégrant $\dot{c}(t)$, on trouve

$$c(t) = \int_0^t m(s)\exp(-\int_0^s n(z)dz)ds + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$r(t) = c_1 \exp l(t) + \int_0^t \exp(l(t) - l(s))m(s)ds,$$

avec, $l(t) = \int_0^t n(s)ds$, et par la condition initiale, $r(0) = \|x_0 - y_0\| = c_1$.
D'où

$$r(t) = \|x_0 - x_1\| \exp l(t) + \int_0^t \exp(l(t) - l(s))m(s)ds.$$

Soit

$$S = \{v \in L^1(I, \mathbb{R}^n);\ \|v(t)\| \leq \dot{r}(t) \quad p.p\ sur\ I\}. \tag{3.15}$$

On note par S_ω l'ensemble S engendré par la topologie de l'espace $L^1_\omega(I, \mathbb{R}^n)$.
Par la forme (3.15), l'équivalence des normes (2.2) , (2.3) et la Proposition 2.10 on a S_ω est un ensemble convexe métrisable compact dans $L^1_\omega(I, \mathbb{R}^n)$.
On définit l'opérateur $\mathcal{T} : S_\omega \longrightarrow C(I, \mathbb{R}^n)$ par l'égalité

$$\mathcal{T}(v)(t) = z_0 + \int_0^t v(s)ds, \quad t \in I, \quad v \in S. \tag{3.16}$$

On va montrer que $\mathcal{T}$ est continue. En effet, soit $v, w \in S$, on a

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}(v) - \mathcal{T}(w)\|_C &= \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\|\mathcal{T}(v)(t) - \mathcal{T}(w)(t)\| \\
&= \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\|\int_0^t (v(s) - w(s))ds\| \\
&= |\|v - w\|| \\
&\leqslant \|v - w\|_\omega,
\end{aligned}$$

donc, $\mathcal{T}$ est continue.

Par conséquent, l'ensemble

$$\mathcal{K} = \{z \in C(I, \mathbb{R}^n);\ z = \mathcal{T}(v), \quad v \in S_\omega\}, \tag{3.17}$$

est convexe, compact dans $C(I, \mathbb{R}^n)$.

En effet, soit $z_1, z_2 \in \mathcal{K}$ et $\lambda \in [0.1]$. Alors, il existe $v, w \in S_\omega$ tels que $z_1 = \mathcal{T}(v)$ et $z_2 = \mathcal{T}(w)$. Donc, pour tout $t \in [0,1]$

$$\lambda z_1(t)+(1-\lambda)z_2(t) = \lambda\mathcal{T}(v)(t)+(1-\lambda)\mathcal{T}(w)(t) = \int_0^t (\lambda v(s)+(1-\lambda)w(s))ds = \int_0^t (\lambda v+(1-\lambda)w)(s)ds.$$

Comme S est convexe, $\lambda v+(1-\lambda)w \in S$ et $\lambda z_1(t)+(1-\lambda)z_2(t) = \mathcal{T}(\lambda v(t)+(1-\lambda)w(t))$, donc, $\lambda z_1 + (1 - \lambda z_2) \in \mathcal{K}$ d'oú $\mathcal{K}$ est convexe.

D'autre part on a $\mathcal{K} = \mathcal{T}(S_w)$ et S_w est compact d'où, $\mathcal{K}$ est compact dans $C(I, \mathbb{R}^n)$ (car, $\mathcal{T}$ est continue).

Soit $z(.) \in \mathcal{K}$, alors il existe $v \in S$ tel que $z = \mathcal{T}(v)$. Donc, pour tout $t \in I$, on a

$$\begin{aligned}
\|z(t)\| &= \|\mathcal{T}(v)(t)\| \\
&= \|z_0 + \int_0^t v(s)ds\| \\
&\leqslant \|z_0\| + \|\int_0^t v(s)ds\| \\
&\leqslant \|z_0\| + \int_0^t \|v(s)\|ds \\
&\leqslant \|z_0\| + \int_0^t \dot{r}(t)ds \\
&= r(0) + r(t) - r(0) = r(t),
\end{aligned}$$

d'où $\|z(t)\| \leq r(t)$. Par conséquent,

$$\sup\{\|v\|; v \in \Gamma(t, z(t))\} \leq m(t) + n(t)\|z(t)\| \leq \dot{r}(t). \tag{3.18}$$

En vue de cette inégalité, les propriétés de la multi-application Γ, et la Proposition 2.13, il existe une multi-application $g : \mathcal{K} \rightrightarrows L^1(I, \mathbb{R}^n)$ continue tel que

$$g(z)(t) \in \Gamma(t, z(t)) \quad p.p \ sur \ I. \tag{3.19}$$

D'après (3.15), (3.17) et (3.19) l'opérateur $g(\mathcal{T}(v))$ est continue de S_ω dans S_ω.

Donc, par le théorème du point fixe de Schauder, il existe un point $v_* \in S_w$ tel que

$$v_* = g(\mathcal{T}(v_*)). \tag{3.20}$$

Posons $z_* = \mathcal{T}v_*$, alors de (3.16), (3.19), et (3.20) on obtient

$$z_*(t) = z_0 + \int_0^t v_*(s)ds,$$

$$v_*(t) \in \Gamma(t, z_*(t)) \quad p.p \ sur \ I. \tag{3.21}$$

Puisque $\dot{z}_*(t) = v_*(t)$ p.p sur I, alors (3.21) implique que $z_*(.), z_*(0) = z_0$ est une solution de l'inclusion (3.13), et satisfait

$$\|z_*(t)\| \leq r(t), t \in I, \|\dot{z}_*(t)\| \leq \dot{r}(t), \quad p.p. \tag{3.22}$$

On définit $x_* : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$x_*(t) = z_*(t) + y(t), \quad t \in I. \tag{3.23}$$

On montre que $x_*(.), x_*(0) = x_0$ est une solution de l'inclusion $(\mathcal{P}_F)$, et vérifie l'inégalité (3.7). On a

$$\begin{aligned} x_*(0) &= z_*(0) + y(0) \\ &= z_0 + y_0 \\ &= x_0 - y_0 + y_0 \\ &= x_0. \end{aligned}$$

De plus, de (3.23) pour tout $t \in I$, $x_*(t) = z_*(t) + y(t)$, cela implique que $z_*(t) = x_*(t) - y(t)$, et comme z_* est une solution de l'inclusion (3.13) alors

$$\begin{aligned} \dot{x}_*(t) - \dot{y}(t) &\in \Gamma(t, z_*(t)) \\ &= \overline{\Phi(t, z_*(t)) \cap (m(t) + n(t)\|z_*(t)\|)B} \\ &\subset \Phi(t, z_*(t)) \cap (m(t) + n(t)\|z_*(t)\|)\overline{B}, \end{aligned}$$

C'est à dire, $\dot{x}_*(t) - \dot{y}(t) \in \Phi(t, z_*(t))$, et $\dot{x}_*(t) - \dot{y}(t) \in (m(t) + n(t)\|z_*(t)\|)\overline{B},$.
$\dot{x}_*(t) - \dot{y}(t) \in \Phi(t, z_*(t))$, implique que $x_*(t) - \dot{y}(t) \in -\dot{y}(t) + F(t, x_*(t))$, d'où $x_*(t) \in F(t, x_*(t))$. Donc x est une solution de l'inclusion $(\mathcal{P}_F)$, vérifiant $\|x_*(t) - \dot{y}(t)\| = \|z_*(t)\| \leq r(t)$ et

$$\begin{aligned} \|\dot{x}_*(t) - \dot{y}(t)\| &\leq m(t) + n(t)\|z_*(t)\| \\ &\leq m(t) + n(t)r(t), \end{aligned}$$

pour tout $t \in I$. □

3.2 Existence de solutions locales

On commence par donner un lemme qui nous sera utile dans la suite.
On note par $Q(y)(\alpha) = \{(t, x) \in I \times \mathbb{R}^n;\ \|y(t) - x\| \leq \alpha\}$, avec $\alpha > 0$ et $y : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue.

Lemme 3.2. *Soit $F : Q(y)(\alpha) \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multi-application à valeurs fermées non vides. Considérons les assertions suivantes,*

a. pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, la fonction $x \longmapsto d(z, F(t,x))$, $x \in y(t) + \alpha\overline{B}$, est continue et la fonction $t \longmapsto d(z, F(t, x(t)))$ est fortement mesurable pour tout $x(.) \in C(I, \mathbb{R}^n)$, $x(t) \in y(t) + \alpha\overline{B}$, $t \in I$;

b. pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, la fonction $(t,x) \longmapsto d(z, F(t,x))$ est fortement $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-mesurable sur $Q(y)(\alpha)$;

c. la multi-application $(t,x) \longmapsto F(t,x)$ est $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-mesurable sur $Q(y)(\alpha)$;

d. la multi-application $(t,x) \longmapsto F(t,x)$ est fortement $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-mesurable sur $Q(y)(\alpha)$;

e. pour tout $x(.) \in C(I, \mathbb{R}^n)$, $x(t) \in y(t)+\alpha\overline{B}$, $t \in I$ la multi-application $t \longmapsto F(t, x(t))$ est fortement mesurable ;

f. pour tout $x(.) \in C(I, \mathbb{R}^n)$, $x(t) \in y(t)+\alpha\overline{B}$, $t \in I$ la multi-application $t \longmapsto F(t, x(t))$ est mesurable ;

g. la multi-application F est localement intégrablement $(\rho - H)$-lipschitzienne en tout point $(t^*, x^*) \in Q(y)(\alpha)$;

h. la multi-application $x \longmapsto F(t,x)$, $x \in y(t)+\alpha\overline{B}$, est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris.

Alors les implications suivantes sont vérifiées

$$(a) \Longrightarrow (b) \Longleftrightarrow (c) \Longleftrightarrow (d) \Longrightarrow (e) \Longleftrightarrow (f),$$

$$(a) \Longrightarrow (h), (g) \Longrightarrow (h)$$

Preuve. • Supposons que (a) est vérifiée et montrons (b).
On note par $pr(x, y(t) + \alpha\overline{B})$ la projection d'un point $x \in \mathbb{R}^n$ sur l'ensemble $y(t) + \alpha\overline{B}$. Commençons par montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $t \longmapsto pr(x, y(t) + \alpha\overline{B})$ est continue, et la fonction $x \longmapsto pr(x, y(t) + \alpha\overline{B})$ est lipschitzienne pour tout $t \in I$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et soit $t_n, t_0 \in I$ tels que $t_n \to t_0$. On a, $pr(x, y(t_n) + \alpha\overline{B}) \in y(t_n) + \alpha\overline{B}$, avec $d(x, y(t_n) + \alpha\overline{B}) = \|x - pr(x, y(t_n) + \alpha\overline{B})\|$ et $pr(x, y(t_0) + \alpha\overline{B}) \in y(t_0) + \alpha\overline{B}$, avec $d(x, y(t_0) + \alpha\overline{B}) = \|x - pr(x, y(t_0) + \alpha\overline{B})\|$.
Or, pour tout $y \in y(t_n) + \alpha\overline{B}$ et tout $\forall z \in y(t_0) + \alpha\overline{B}$

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y),$$

alors
$$d(x, y(t_n) + \alpha\overline{B}) \leq d(x, y(t_0) + \alpha\overline{B}) + d(y(t_0) + \alpha\overline{B}, y(t_n) + \alpha\overline{B}),$$
ce implique que
$$d(x, y(t_n) + \alpha\overline{B}) - d(x, y(t_0) + \alpha\overline{B}) \leq d(y(t_0) + \alpha\overline{B}, y(t_n) + \alpha\overline{B}).$$
De même, en échangeant les rôles de $y(t_n) + \alpha\overline{B}$ et $y(t_0) + \alpha\overline{B}$, on obtient
$$d(x, y(t_0) + \alpha\overline{B}) - d(x, y(t_n) + \alpha\overline{B}) \leq d(y(t_0) + \alpha\overline{B}, y(t_n) + \alpha\overline{B}).$$
Donc, on obtient
$$|\|x - pr(x, y(t_n) + \alpha\overline{B})\| - \|x - pr(x, y(t_0) + \alpha\overline{B})\|| \leq d(y(t_0) + \alpha\overline{B}, y(t_n) + \alpha\overline{B}).$$
D'autre part pour $a \in \overline{B}$ fixé, on a
$$\begin{aligned} d(y(t_0) + \alpha\overline{B}, y(t_n) + \alpha\overline{B}) &= \inf_{\substack{y \in y(t_0)+\alpha\overline{B} \\ z \in y(t)+\alpha\overline{B}}} \|y - z\| \\ &\leq \|y(t_0) + \alpha a - y(t_n) - \alpha a\| \\ &= \|y(t_0) - y(t)\|, \end{aligned}$$
et puisque $y(.)$ est continue, $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \|y(t_0) - y(t_n)\| = 0$. Donc
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|x - pr(x, y(t_n) + \alpha\overline{B})\| = \|x - pr(x, y(t_0) + \alpha\overline{B})\|.$$
et $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} pr(x, y(t_n)+\alpha\overline{B}) \in y(t_0)+\alpha\overline{B}$, et comme $y(t_0)+\alpha\overline{B}$ est convexe fermé la projection est unique, donc
$$z = pr(x, y(t_0) + \alpha\overline{B}).$$
D'où $x \longmapsto pr(x, y(t) + \alpha\overline{B})$ est continue.

Soit $t \in I$, on a
$$\begin{aligned} \|x - z\|^2 &= \|pr(x, y(t) + \alpha\overline{B}) - pr(z, y(t) + \alpha\overline{B}) + r\|^2, \ avec\ r = x - z - pr(x, y(t) + \alpha\overline{B}) + pr(z, y(t \\ &= \|pr(x, y(t) + \alpha\overline{B}) - pr(z, y(t) + \alpha\overline{B})\|^2 + \|r\|^2 + 2 < r, pr(x, y(t) + \alpha\overline{B}) - pr(z, y(t) + \alpha\overline{B} \\ &\geq \|pr(x, y(t) + \alpha\overline{B}) - pr(z, y(t) + \alpha\overline{B})\|^2 + 2 < r, pr(x, y(t) + \alpha\overline{B}) - pr(z, y(t) + \alpha\overline{B}) > \end{aligned}$$
mais,
$$\begin{aligned} < r, pr(x, y(t) + \alpha\overline{B}) - pr(z, y(t) + \alpha\overline{B}) > &=< x - pr(x, y(t) + \alpha\overline{B}), pr(x, y(t) + \alpha\overline{B}) - pr(z, y(t) + \alpha \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

On obtient donc que

$$\|x-z\|^2 \geq \|pr(x, y(t)+\alpha\overline{B}) - pr(z, y(t)+\alpha\overline{B})\|^2,$$

d'où

$$\|pr(x, y(t)+\alpha\overline{B}) - pr(z, y(t)+\alpha\overline{B})\| \leq \|x-z\|.$$

Donc la fonction $x \longmapsto pr(x, y(t)+\alpha\overline{B})$ est lipschitzienne.

Soit $\Phi : Q(y)(\alpha) \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ définie par $\Phi(t,x) = F(t, pr(x, y(t)+\alpha\overline{B}))$. De l'assertion (a) et des propriétés de la fonction $(t,x) \longmapsto pr(x, y(t)+\alpha\overline{B})$, on a $\forall z \in \mathbb{R}^n$ $(t,x) \longmapsto d(z, \Phi(t,x))$, $(t,x) \in I \times \mathbb{R}^n$ est une fonction de Carathéodory. En effet, on a d'après (a), le fait que la fonction $t \longmapsto pr(x, y(t)+\alpha\overline{B})$ est continue et que la fonction $x \longmapsto pr(x, y(t)+\alpha\overline{B})$ est lipschitzienne, que la fonction $x \longmapsto d(z, \Phi(t,x))$ est continue, et la fonction $t \longmapsto d(z, \Phi(t,x))$ est mesurable, donc $(t,x) \longmapsto d(z, \Phi(t,x))$ est de Carathéodory.
D'après la Proposition 2.9, la fonction $(t,x) \longmapsto d(z, \Phi(t,x))$ est mesurable pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, de plus l'ensemble $Q(y)(\alpha)$ est mesurable. En effet, soient les deux fonctions

$$\begin{aligned} g : &\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ &(x,y) \longmapsto x-y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h : &I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ &(t,x) \longmapsto (y(t), x). \end{aligned}$$

Puisque h, g, y et $\|.\|$ sont continues, et $Q(y)(\alpha) = (\|.\| \circ g \circ h)^{-1}(]-\infty, \alpha])$ est fermé, alors $Q(y)(\alpha)$ est mesurable. Donc la restriction de la fonction $(t,x) \longmapsto d(z, \Phi(t,x))$ sur $Q(y)(\alpha)$ est mesurable, et comme cette restriction coïncide avec la fonction $(t,x) \longmapsto d(z, F(t,x))$, alors on obtient (b).

- Les implications $(b) \Longleftrightarrow (c) \Longleftrightarrow (d)$ suivent du Lemme 2.3 et de la Proposition 2.6.
- Montrons que $(d) \Longrightarrow (e)$.

Soit $x(.) \in C(I, \mathbb{R}^n)$, $x(t) \in y(t)+\alpha\overline{B}$, $\forall t \in I$, et soit $V \in \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé. On définit

$$\Lambda = \{t \in I;\ F(t, x(t)) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Puisque $W = \{(t,x) \in Q(y,\alpha);\ F(t,x) \cap V \neq \emptyset\}$ est un élément de $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, alors $W \cap gphx(.) \in \mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
Considérons la multi-application $\varphi : I \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ définie par

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \{x \in \mathbb{R}^n;\ (t,x) \in W \cap gphx(.)\} \\ &= \begin{cases} \{x(t)\}, & si\ F(t,x(t)) \cap V \neq \emptyset \\ \emptyset, & sinon. \end{cases} \end{aligned}$$

φ est à valeurs fermées. Puisque

$$\begin{aligned} gph(\varphi(.)) &= \{(t,x) \in I \times \mathbb{R}^n;\ x \in \varphi(t)\} \\ &= \{(t,x) \in I \times \mathbb{R}^n;\ x \in W \cap gphx(.)\} \\ &= W \cap gphx(.) \in \mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

alors d'après Lemme 2.3 $t \longmapsto \varphi(t)$ est mesurable. Ainsi, de la Proposition 2.7 $dom\varphi(.) = \{t \in I, \varphi(t) \neq \varnothing\}$ est mesurable, et comme $\Lambda = dom\varphi(\cdot)$, alors la multi-application $t \longmapsto F(t, x(t))$ est mesurable. • L'équivalence $(e) \Longleftrightarrow (f)$ suit du Lemme 2.3. • Montrons l'implication $(a) \Longrightarrow (l)$.

On a, d'après l'assertion (a), la fonction $x \longmapsto d(z, F(t,x))$, $x \in y(t) + \alpha\overline{B}$, est continue alors semi-continue supérieurement, donc le Lemme 2.1 donne que la multi-application $x \longmapsto F(t,x)$, $x \in y(t) + \alpha\overline{B}$, est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris. • Montrons l'implication $(k) \Longrightarrow (l)$.

Soit $(t^*, x^*) \in Q(y)(\alpha)$. Alors d'après la Définition 1.23, il existe $\varepsilon > 0$ et $\beta \geq 0$ et une fonction $k(\cdot)$ positive et intégrable sur $]t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon[$ tels que l'inégalité (1.1) est vérifiée, i.e,

$$haus_\rho(F(t,x), F(t,y)) \leq (k(t) + \beta\rho)\|x - y\|$$

$\forall (t,x), (t,y) \in []t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon[\times(x^* + B)] \cap Q(y)(\alpha)$, $\forall \rho \geq 0$.

Soit $v \in F(t^*, x^*)$, et $x_k \longrightarrow x^*$, $(x_k)_{k\geq 1} \subset y(t^*) + \alpha\overline{B}$, alors il existe $k_0 > 0$ telle que $\|x_k - x^*\| < \varepsilon$, $\forall k \geq k_0$. Donc, pour $\rho = \|v\|$, $v \in F(t^*, x^*) \cap \rho\overline{B}$, et on obtient

$$\begin{aligned} d(v, F(t^*, x_k)) &\leq e(F(t^*, x^*)_\rho, F(t^*, x_k)) \\ &\leq haus_\rho(F(t^*, x^*), F(t^*, x_k)) \\ &\leq (k(t) + \beta\|v\|)\|x^* - x_k\|. \end{aligned}$$

D'autre part, on a $d(v, F(t^*, x_k)) = \inf\limits_{y \in F(t^*, x_k)} \|v - y\|$, cela implique que pour tout $k \geq k_0$ il existe $v_k \in F(t^*, x_k)$ telle que

$$\begin{aligned} \|v - v_k\| &< d(v, F(t^*, x_k)) + \frac{1}{k} \\ &\leq (k(t) + \|v\|\rho)\|x^* - x_k\| + \frac{1}{k} \\ &\longrightarrow 0 \ \ quand\ k \to \infty. \end{aligned}$$

Donc il existe une suite $v_k \in F(t^*, x_k)$ qui converge vers v, d'où la multi-application $x \longmapsto F(t,x)$ est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris. □

Remarque 3.1. *Si dans le Lemme 3.2, on prend l'espace $I \times \mathbb{R}^n$ au lieu de l'ensemble $Q(y)(\alpha)$, alors toutes les implications sont obtenues si on suppose dans l'assertion (a) que la fonction $(t,x) \longmapsto d(y, F(t,x))$ est une fonction de Carathéodory pour tout $y \in \mathbb{R}^n$.*

Lemme 3.3. *Soit* $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une fonction continue. Soient* $\delta > 0$, *et* $F : Q(y)(\delta) \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *une multi-application à valeurs fermées. supposons que* F *est une multi-application localement intégrablement* $(\rho - H)$*-lipschitzienne en tout point* $(t^*, y^*) \in gphy(\cdot)$. *Alors, il existe* $\alpha > 0$ *telle que la multi-application* $F : Q(y)(\alpha) \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *est intégrablement* $(\rho - H)$*-lipschitzienne ; i.e, il existe* $\beta \geq 0$ *et une fonction* $k(\cdot) \in L^1(I, \mathbb{R}^n)$ *telle que, pour tout* $(t, x), (t, z) \in Q(y)(\alpha)$ *et* $\rho \geq 0$, *on a*

$$haus_\rho(F(t,x), F(t,z)) \leq (k(t) + \beta\rho)\|x - z\|. \tag{3.24}$$

Preuve. D'après la Définition 1.23, pour tout point $(t^*, y^*) \in gphy(\cdot)$, il existe $0 < \varepsilon(t^*, y^*) \leq \delta$, $\beta(t^*, y^*) \geq 0$ et une fonction $k(t^*, y^*)(\cdot)$ positive et intégrable sur $]t^* - \varepsilon(t^*, y^*), t^* + \varepsilon(t^*, y^*)[\cap I$ telle que l'inégalité

$$haus_\rho(F(t,x), F(t,z)) \leq (k(t^*, y^*)(t) + \beta(t^*, y^*)\rho)\|x - z\|, \tag{3.25}$$

est vérifiés pour tout

$$(t,x), (t,z) \in [(t^*, y^*) + \varepsilon(t^*, y^*)B_*^{n+1}] \cap Q(y)(\delta), \quad \rho \geq 0 \tag{3.26}$$

On définit $V(t^*, y^*, \varepsilon(t^*, y^*)) = (t^*, y^*) + \varepsilon(t^*, y^*)B_*^{n+1}$, alors la famille des ensembles $V(t^*, y^*, \varepsilon(t^*, y^*))$, $(t^*, y^*) \in gphy(\cdot)$ forme un recouvrement ouvert de l'ensemble $gphy(\cdot)$ sur $\mathbb{R}_*^{n+1}$.
Montrons que $gphy(\cdot)$ est compact dans $\mathbb{R}_*^{n+1}$. On a $gphy(\cdot) = \{(t,x) \in I \times \mathbb{R}^n, x = y(t)\}$. Alors, soit $(t_n, x_n)_n \in gphy(\cdot)$. Donc $(t_n) \subset I$ et comme I est compact on peut lui extraire une sous suite $(t_{\varphi(n)})_n \subset I$ qui converge vers $t \in I$, et comme $y(\cdot)$ est continue alors

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} x_{\varphi(n)} = \lim_{n \longrightarrow \infty} y(t_{\varphi(n)}) = y(t) \in \mathbb{R}^n,$$

donc $(t_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n)})$ est une sous suite de (t_n, x_n) qui converge dans $\mathbb{R}_*^{n+1}$ vers $(t,x) \in gphy(\cdot)$. D'où $gphy(.)$ est compact. Soit alors $V(t_i^*, y_i^*, \varepsilon(t_i^*, y_i^*))$, $1 \leq i \leq l$ un sous recouvrement de l'ensemble compact $gphy(\cdot)$. On définit la fonction $k_i(\cdot) \in L^1(I, \mathbb{R}^+)$, $1 \leq i \leq l$, par

$$k_i(t) = \begin{cases} k(t_i^*, y_i^*)(t), & si\ t \in]t_i^* - \varepsilon(t_i^*, y_i^*), t_i^* + \varepsilon(t_i^*, y_i^*)[\cap I \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

Soit

$$k(t) = \max_{1 \leq i \leq l}\{k_i(t)\}, \quad t \in I, \tag{3.27}$$

et

$$\beta = \max_{1 \leq i \leq l}\{\beta(t_i^*, y_i^*)\}. \tag{3.28}$$

Il est clair que $k(.) \in L^1(I, \mathbb{R}^+)$ (car $k_i(.) \in L^1(I, \mathbb{R}_+), 1 \leq i \leq l$).

Comme $gphy(\cdot)$ est un compact de $\mathbb{R}^{n+1}$ (par équivalence des normes), et l'ensemble $V(t_i^*, y_i^*, \varepsilon(t_i^*, y_i^*))$, $1 \leq i \leq l$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$, alors par la Proposition 1.9 il existe $\alpha \in]0, \delta[$ telle que

$$Q(y)(\alpha) = gphy(.) + \alpha \overline{B}^{n+1} \subset \bigcup_{i=1}^{l} V(t_i^*, y_i^*, \varepsilon(t_i^*, y_i^*)). \tag{3.29}$$

Par (3.25), (3.29) on obtient (3.24). □

Définition 3.2. *Soient $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction absolument continue, $\alpha > 0$, et $F : Q(y)(\alpha) \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multi-application à valeurs fermées non vides. On définit une solution locale pour le problème $(\mathcal{P}_F)$ comme étant une fonction absolument continue $x(\cdot)$, avec $x(0) = x_0 \in y_0 + \alpha\overline{B}$, vérifiant les inclusions $x(t) \in y(t) + \alpha\overline{B}$ et $(\mathcal{P}_F)$ pour tout $t \in [0, \tau]$, $0 < \tau \leq 1$.*

Donnons des Hypothèses relatives à l'existence de solutions locales.

Hypothèses $(\mathbf{H_L(F)})$. *Soit la multi-application $F : Q(y)(\alpha) \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ à valeurs fermées non vides, vérifiant les propriétés suivantes*

1. *la multi-application $x \longmapsto F(t, x)$, $x \in y(t) + \alpha\overline{B}$, est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris presque partout ;*
2. *la multi-application $t \longmapsto F(t, x(t))$ est fortement mesurable pour toute fonction $x(.) \in C(I, \mathbb{R}^n)$.*

Théorème 3.2. *Soient $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction absolument continue, $\alpha > 0$, et $F : Q(y)(\alpha) \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multi-application. Supposons que les Hypothèses $(\mathbf{H_L(F)})$ sont vérifiées, alors pour tout $m(\cdot), n(\cdot) \in L^1(I, \mathbb{R}_+^*)$, $(t, x) \in Q(y)(\alpha)$ vérifiant l'inégalité* (3.6)*, il existe une solution locale $x(\cdot)$, avec $x(0) = x_0 \in y_0 + \alpha\overline{B}$, telle que les inégalités* (3.7) *sont vérifiées avec $r(.)$ et $l(\cdot)$ définies par les égalités* (3.8) *et* (3.9) *pour $t \in [0, \tau]$, où τ est défini par l'égalité $r(\tau) = \alpha$.*

Preuve. Soit la multi-application $\Phi : I \times \alpha\overline{B} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ définie par (3.10), alors (3.6) et (3.10) impliquent que

$$d(0, \Phi(t, z)) < m(t) + n(t)\|z\|, \quad (t, z) \in I \times \alpha\overline{B}. \tag{3.30}$$

On note par $pr(z, \alpha\overline{B})$ la projection d'un point $z \in \mathbb{R}^n$ sur l'ensemble $\alpha\overline{B}$. Soit $\Phi^* : I \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multi-application définie par

$$\Phi^*(t, z) = \Phi(t, pr(z, \alpha\overline{B})), \quad (t, z) \in I \times \mathbb{R}^n. \tag{3.31}$$

Puisque la fonction $z \longmapsto pr(z, \alpha\overline{B})$ est 1-lipschitzienne et $0 \in \alpha\overline{B}$, $pr(0) = 0$, pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, $\|pr(z, \alpha\overline{B})\| \leq \|z\|$. De (3.30) et (3.31) on trouve que

$$\begin{aligned} d(0, \Phi^*(t,z)) &= d(0, \Phi(t, pr(z, \alpha\overline{B}))) \\ &< m(t) + n(t)\|pr(z, \alpha\overline{B})\| \\ &\leq m(t) + n(t)\|z\|. \end{aligned}$$

La fonction $z \longmapsto pr(z, \alpha\overline{B})$ est continue et l'hypothèse $(\mathbf{H_L(F)})$ (1) donne que $z \longmapsto \Phi(t,z) = F(t, pr(z, \alpha\overline{B}))$ est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris presque partout alors $\Phi^*(t,.) = \Phi(t,.) \circ pr(.)$ est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris. De plus, par l'hypothèse $(\mathbf{H_L(F)})$ (2), $t \longmapsto \Phi^*(t, z(t))$ est fortement mesurable pour toute fonction $z(.) \in C(I, \mathbb{R}^n)$.
On considère la multi-application $\Gamma : I \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ définie par (3.12) en remplaçant Φ par Φ^*, alors Γ est à valeurs fermées non vides. En répétant les étapes de la preuve du Théorème 3.1, on trouve que l'inclusion (3.13) admet une solution $z_*(.)$, avec $z_*(0) = z_0 = x_0 - y_0$ définie sur I et vérifier les inégalités (3.22). Ces inégalités implique l'inclusion $z_*(t) \in \alpha\overline{B}$, $t \in [0, \tau]$ pour τ défini par l'égalité $r(\tau) = \alpha$. Donc de (3.31), (3.12) et (3.10) on trouve, pour tout $t \in [0, \tau]$, nous avons

$$\begin{aligned} z_*(t) &\in \Gamma(t,z) \\ &= \overline{\Phi^*(t,z) \cap (m(t) + n(t)\|z\|)B} \\ &\subset \overline{\Phi^*(t,z)} \cap (m(t) + n(t)\|z\|)\overline{B} \\ &= \Phi^*(t,z) \cap (m(t) + n(t)\|z\|)\overline{B}, \end{aligned}$$

et puisque $z_*(t) \in \Phi^*(t,z)$ on aura

$$\begin{cases} \dot{z}_*(t) \in -\dot{y}(t) + F(t, z_* + y(t)), \quad t \in [0, \tau] \\ z_*(0) = x_0 - y_0. \end{cases} \tag{3.32}$$

pour tout $t \in [0, \tau]$, posons $x_*(t) = z_*(t) + y(t)$. De (3.32) on trouve que $x_*(.)$ avec $x(0) = x_0$ est une solution locale de l'inclusion $(\mathcal{P}_F)$ sur $[0, \tau]$, et d'après (3.22), $x_*(.)$ vérifie les inégalités (3.7), avec $r(.)$ et $l(.)$ sont définies par (3.8) et (3.9) pour $t \in [0, \tau]$. $\square$

Corollaire 3.1. *Soient $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction absolument continue, $\delta > 0$ et $F : Q(y)(\delta) \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multi-application à valeurs fermées non vides. Supposons que*

1. *la multi-application $(t,x) \longmapsto F(t,x)$ est localement intégrablement $(\rho{-}H)$-lipschitzienne en chaque $(t,x) \in gphy(.)$;*

2. *il existe une fonction strictement positive* $\gamma(\cdot) \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$, *telle que*

$$d(\dot{y}(t), F(t, y(t))) < \gamma(t), \quad \textit{pour tout } t \in I; \tag{3.33}$$

3. *la multi-application* $(t, x) \longmapsto F(t, x)$ *est* $\mathcal{L}(I) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$*-mesurable sur l'ensemble* $Q(y)(\delta)$.

Alors, il existe un $\alpha > 0$ *tels que les les hypothèses du Théorème 3.2 sont vérifiées sur l'ensemble* $Q(y)(\alpha)$*, et par conséquent, toutes les affirmations de ce théorème sont valables.*

Preuve. Il résulte de l'hypothèse (1) et du Lemme 3.3 qu'il existe $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, et $k(.) \in L^1(I, \mathbb{R}^+)$ tels que l'inégalité (3.24) est vérifié pour tout $(t, x), (t, z) \in Q(y)(\alpha)$, alors la multi-application $x \longmapsto F(t, x)$, $x \in y(t) + \alpha\overline{B}$ est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris p.p sur I.
D'après le Théorème 2.9, il existe une application mesurable $z : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que pour tout $t \in I$, $z(t) \in F(t, y(t))$ et

$$\|\dot{y}(t) - z(t)\| = d(\dot{y}(t), F(t, y(t))). \tag{3.34}$$

D'après (3.24) on obtient

$$d(z(t), F(t, x)) \leq (k(t) + \beta\|z(t)\|)\|x - y(t)\|.$$

Cette inégalité avec (3.33) et (3.34) donnent

$$\begin{aligned} d(\dot{y}(t), F(t, x)) &\leq d(z(t), F(t, x)) + \|\dot{y}(t) - z(t)\| \\ &\leq (k(t) + \beta\|z(t)\|)\|x - y(t)\| + \gamma(t) \\ &= (k(t) + \beta\|z(t) + \dot{y}(t) - \dot{y}(t)\|)\|x - y(t)\| + \gamma(t) \\ &\leq (k(t) + \beta(\|z(t) - \dot{y}(t)\| + \|\dot{y}(t)\|))\|x - y(t)\| + \gamma(t) \\ &\leq (k(t) + \beta(\gamma(t) + \|\dot{y}(t)\|))\|x - y(t)\| + \gamma(t). \end{aligned}$$

Alors, pour tout $(t, x) \in I \times (y(t) + \alpha\overline{B})$, on a

$$d(\dot{y}(t), F(t, x)) \leq d(z(t), F(t, x)) + \|\dot{y}(t) - z(t)\| < \gamma(t) + (k(t) + \beta\|\dot{y}(t)\| + \beta\gamma(t))\|x - y(t)\|. \tag{3.35}$$

Posons $m(t) = \gamma(t)$ et $n(t) = k(t) + \beta(\|\dot{y}(t)\| + \gamma(t))$ dans (3.35), on obtient l'inégalité (3.6) mentionnée dans l'énoncé du Théorème 3.2. Puisque $Q(y)(\alpha) \in \mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, l'hypothèse (3) implique que la multi-application $(t, x) \longmapsto F(t, x)$ est $\mathcal{L}(I) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-mesurable sur l'ensemble $Q(y)(\alpha)$. Donc pour tout $x(.) \in C(I, \mathbb{R}^n)$, $x(t) \in y(t) + \alpha\overline{B}, t \in I$ la multi-application $t \longmapsto F(t, x(t))$ est fortement mesurable.
Ainsi toutes les hypothèses du Théorème 3.2 sont vérifiées sur l'ensemble $Q(y)(\alpha)$. Donc toutes les affirmations de ce théorème sont valables. $\square$

Remarque 3.2. *Comme la solution de* $(\mathcal{P}_F)$ *est aussi solution de* $(\mathcal{P}_{\overline{co}F})$*, les Théorèmes 3.1 et 3.2, et le Corollaire 3.1 impliquent l'existence de la solution globale et la solution locale de l'inclusion* $(\mathcal{P}_{\overline{co}F})$*.*

CHAPITRE 4

RELAXATION

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'approximation des solutions de l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_{\overline{co}F}) \begin{cases} \dot{x}(t) \in \overline{co}F(t, x(t)), \ p.p \ sur \ I \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

par les solutions de l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_F)$, avec F est à valeurs fermées et non bornées .

Soient $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction absolument continue, et $F : Q(y)(2\alpha) \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multi-applicationà valeurs fermées non vides.

Tout d'abord on donne des hypothèses pour lesquelles le théorème de relaxation est vérifié.

Hypothèses $(\mathbf{H_R(F)})$.

1. *La multi-application F vérifie les Hypothèses $(\mathbf{H_L(F)})$ du chapitre précédent ;*
2. *La multi-application $(t, x) \longmapsto \overline{co}F(t, x)$ est intégrablement (ρ-H)-lipschitzienne ; i.e., il existe $\beta \geq 0$ et une fonction intégrable $k(.) \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$ telle que (3.24) est vérifiée pour tout $(t, x), (t, z) \in Q(y)(2\alpha)$ et $\rho \geq 0$.*

Soit

$$\rho(t) = (1 + 2\alpha\beta)\|\dot{y}(t)\| + 2\alpha k(t). \tag{4.1}$$

$$\rho_0(t) = (1 + \alpha\beta)\|\dot{y}(t)\| + \alpha k(t). \tag{4.2}$$

Remarque 4.1. *Sans perdre de généralités, on peut supposer que* $k(t) > 0$, $t \in I$, *car sinon (c.à.d* $k(t) \geq 0$*), il suffit d'ajouter un nombre positive à* $k(t)$*, par exemple 1 et la relation (3.24) reste vérifiée. Dans ce cas,* ρ *et* ρ_0 *sont des fonctions intégrables et strictement positives.*

Théorème 4.1 (Théorème de relaxation).
Supposons que les Hypothèses $(\mathbf{H_R}(\mathbf{F}))$ *sont vérifiées, et soient* $\beta_1 > 0$ *et* $k_1(.) \in L^1(I, \mathbb{R}_+^*)$*, tels que*

$$e(\overline{co}F(t,x) \cap \rho(t)\overline{B}, \overline{co}F(t,x) \cap m(t)B) = 0, \tag{4.3}$$

$(t,x) \in Q(y)(2\alpha)$*, où*

$$m(t) = k_1(t) + \beta_1\rho(t),\ t \in I. \tag{4.4}$$

Supposons que $y(.)$ *avec* $y(0) = y_0$*, est une solution globale de l'inclusion* $(\mathcal{P}_{\overline{co}F})$*. Alors il existe une suite* $(x_k(.))_{k\geq 1}$ *avec* $x_k(0) = y_0$*, de solutions globales de l'inclusion* $(\mathcal{P}_F)$ *qui converge vers* $y(.)$ *dans* $C(I, \mathbb{R}^n)$ *telle que la suite* $(\dot{x}_k(.))_{k\geq 1}$ *converge vers* $\dot{y}(.)$ *dans* ω-$L^1(I, \mathbb{R}^n)$*.*

Preuve. D'après l'assertion (2) dans Hypothèses $(\mathbf{H_R}(\mathbf{F}))$ et l'inégalité (3.24), on a, pour tout $t \in I$

$$d(\dot{y}(t), \overline{co}F(t,x)) \leq (k(t) + \beta\|\dot{y}(t)\|)\|x - y(t)\|,$$

cela implique que

$$\dot{y}(t) \in \overline{co}F(t,x) + (k(t) + \beta\|\dot{y}(t))\|x - y(t)\|\overline{B}.$$

Alors, il existe $z \in \overline{co}F(t,x)$ et $b \in \overline{B}$ tels que

$$\dot{y}(t) = z + (k(t) + \beta\|\dot{y}(t))\|x - y(t)\|b,$$

cela implique que

$$\|z\| - \|\dot{y}(t)\| \leq \|\dot{y}(t) - z\| \leq (k(t) + \beta\|\dot{y}(t))\|x - y(t)\|.$$

D'où

$$\|z\| \leq \|\dot{y}(t)\| + (k(t) + \beta\|\dot{y}(t))\|x - y(t)\|,$$

ce qui donne, pour tout $(t,x) \in Q(y)(2\alpha)$

$$\overline{co}F(t,x) \cap (\|\dot{y}(t)\| + (k(t) + \beta\|\dot{y}(t)\|)\|y(t) - x\|)\overline{B} \neq \emptyset. \tag{4.5}$$

De (4.5) il existe $z \in \overline{co}F(t,x)$ et $z \in (\|\dot{y}(t)\| + (k(t) + \beta\|\dot{y}(t)\|)\|y(t) - x\|)\overline{B}$, alors

$$\begin{aligned}\|z\| &\leq (1 + \beta\|y(t) - x\|)\|\dot{y}(t)\| + k(t)\|y(t) - x\| \\ &\leq (1 + \alpha\beta)\|\dot{y}(t)\| + \alpha k(t),\end{aligned}$$

d'où $z \in \rho_0(t)\overline{B}$, et donc

$$\overline{co}F(t,x) \cap \rho(t)B \neq \emptyset, \quad (t,x) \in Q(y)(\alpha), \tag{4.6}$$

et

$$\|z\| < (1 + 2\alpha\beta)\|\dot{y}(t)\| + 2\alpha k(t),$$

d'où $z \in \rho(t)B$, et donc

$$\overline{co}F(t,x) \cap \rho_0(t)\overline{B} \neq \emptyset, \quad (t,x) \in Q(y)(\alpha). \tag{4.7}$$

On a, $\dot{y}(t) \in \overline{co}F(t, y(t))$ et comme $\alpha > 0$, $k(.) > 0$ et $\beta \geq 0$, on a

$$\|\dot{y}(t)\| \leq (1 + \alpha\beta)\|\dot{y}(t)\| + \alpha k(t), \ alors \ \|\dot{y}(t)\| \in \rho_0(t)\overline{B},$$

d'où

$$\dot{y}(t) \in \overline{co}F(t, y(t)) \cap \rho_0(t)\overline{B}. \tag{4.8}$$

D'après (4.3), (4.6) et la Proposition 1.24 on a

$$\overline{co}F(t,x) \cap \rho(t)\overline{B} \subset \overline{co}(F(t,x) \cap m(t)B) \neq \emptyset, \quad (t,x) \in Q(y)(\alpha).$$

D'où

$$F(t,x) \cap m(t)B \neq \emptyset, \tag{4.9}$$

et par la Proposition 1.6, on a

$$\overline{co}F(t,x) \cap \rho(t)\overline{B} \subset co(\overline{F(t,x) \cap m(t)B}), \quad (t,x) \in Q(y)(\alpha), \tag{4.10}$$

On sait que

$$\overline{co}F(t,x)_{\rho(t)} = \overline{co}F(t,x) \cap \rho(t)\overline{B}. \tag{4.11}$$

En Utilisant (4.1), (4.2), (4.6) et (4.7), avec l'inégalité (1.2) on trouve, pour tout $(t,x), (t,z) \in Q(y)(\alpha)$,

$$\begin{aligned}haus(\overline{co}F(t,x)_{\rho(t)}, \overline{co}F(t,z)_{\rho(t)}) &\leq \frac{2\rho(t)}{\rho(t) - \rho_0(t)} haus_{\rho(t)}(\overline{co}F(t,x), \overline{co}F(t,z)) \\ &\leq \frac{2\rho(t)}{\rho(t) - \rho_0(t)}(k(t) + \beta\rho(t))\|x - z\|,\end{aligned}$$

D'après (4.1) et (4.2) on a

$$\begin{aligned}\frac{2\rho(t)}{\rho(t)-\rho_0(t)} &= \frac{2(1+2\alpha\beta)\|\dot{y}(t)\|+4\alpha k(t)}{\alpha\beta\|\dot{y}(t)\|+\alpha k(t)}\\ &\leq \frac{2(1+2\alpha\beta)\|\dot{y}(t)\|}{\alpha\beta\|\dot{y}(t)\|}+4\frac{\alpha k(t)}{\alpha k(t)}\\ &= \frac{2(1+2\alpha\beta)}{\alpha\beta}+4,\end{aligned}$$

cela implique que

$$\frac{2\rho(t)}{\rho(t)-\rho_0(t)} \leq \frac{2(1+2\beta\alpha)}{\beta\alpha}+4.$$

On pose $L=\dfrac{2(1+2\beta\alpha)}{\beta\alpha}+4$ et $l(t)=k(t)+\beta\rho(t)$. Alors, on obtient

$$haus(\overline{co}F(t,x)_{\rho(t)},\overline{co}F(t,z)_{\rho(t)}) \leq Ll(t)\|x-z\|, \quad (t,x),(t,z)\in Q(y)(\alpha), \tag{4.12}$$

Considérons la multi-application $\Phi : I\times\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ à valeurs fermées non vides définie par

$$\Phi(t,x)=F(t,pr(x,y(t)+\alpha\overline{B})), \quad (t,x)\in I\times\mathbb{R}^n, \tag{4.13}$$

Comme on a mentionné dans le Lemme 3.2, la fonction $t\longmapsto pr(x,y(t)+\alpha\overline{B})$ est continue pour tout $x\in\mathbb{R}^n$ et

$$\|pr(x,y(t)+\alpha\overline{B})-pr(y,y(t)+\alpha\overline{B})\| \leq \|x-y\|. \tag{4.14}$$

Donc il suit des Hypothèses $(\mathbf{H_L}(\mathbf{F}))$ que,

1. la multi-application $x\longmapsto F(t,x)$, $x\in y(t)+\alpha\overline{B}$, est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris presque partout alors la multi-application $x\longmapsto\Phi(t,x)=F(t,pr(x,y(t)+\alpha\overline{B}))$ est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris presque partout.
2. la multi-application $t\longmapsto F(t,x(t))$ est fortement mesurable pour toute fonction $x(.)\in C(I,\mathbb{R}^n)$, alors la multi-application $t\longmapsto\Phi(t,x(t))=F(t,pr(x,y(t)+\alpha\overline{B}))$ est fortement mesurable pour toute fonction $x(.)\in C(I,\mathbb{R}^n)$.

Cela donne que la multi-application Φ vérifie les propriétés spécifiées dans les Hypothèses $(\mathbf{H_G}(\mathbf{F}))$.
Donc par le Théorème 2.12 et la Proposition 2.2, la multi-application $(t,x)\longmapsto\overline{co}\Phi(t,x)$ vérifie les mêmes hypothèses que Φ.

Il suit de (4.6) et (4.9) que pour tout $(t,x)\in I\times\mathbb{R}^n$

$$\overline{co}\Phi(t,x)\cap\rho(t)B\neq\emptyset; \quad \Phi(t,x)\cap m(t)B\neq\emptyset.$$

Donc, il existe $v \in \overline{co}\Phi(t,x) \cap \rho(t)B$ et $w \in \Phi(t,x) \cap m(t)B$.
D'où,

$$d(0,\Phi(t,x)) \leq \|w\| < m(t),$$

et

$$d(0,\overline{co}\Phi(t,x)) \leq \|v\| < \rho(t).$$

Alors le Lemme 3.1 implique que les multi-applications $x \longmapsto \overline{\Phi(t,x) \cap m(t)B}$ et $x \longmapsto \overline{\overline{co}\Phi(t,x) \cap \rho(t)B}$ sont semi-continues-inférieurement au sens de Vietoris sur $\mathbb{R}^n$ et les multi-applications $t \longmapsto \overline{\Phi(t,x(t)) \cap m(t)B}$ et $t \longmapsto \overline{\overline{co}\Phi(t,x(t)) \cap \rho(t)B}$ sont mesurables pour tout $x(.) \in C(I,\mathbb{R}^n)$. En utilisant l'égalité

$$\overline{co}\Phi(t,x) \cap \rho(t)\overline{B} = \overline{\overline{co}\Phi(t,x(t)) \cap \rho(t)B},$$

(voir Proposition 1.7), on trouve que la multi-application $t \longmapsto \overline{co}\Phi(t,x(t)) \cap \rho(t)\overline{B}$ est mesurable pour tout $x(.) \in C(I,\mathbb{R}^n)$.
De (4.12) et (4.14) on a

$$\begin{aligned} haus(\overline{co}\Phi(t,x)_{\rho(t)},\overline{co}\Phi(t,z)_{\rho(t)}) &= haus(\overline{co}F(t,pr(x,y(t)+\alpha\overline{B}))_{\rho(t)},\overline{co}F(t,pr(z,y(t)+\alpha\overline{B}))_{\rho(t)}) \\ &\leq Ll(t)\|pr(x,y(t)+\alpha\overline{B}) - pr(z,y(t)+\alpha\overline{B})\,| \end{aligned}$$

et de (4.14) on a

$$haus(\overline{co}\Phi(t,x)_{\rho(t)},\overline{co}\Phi(t,z)_{\rho(t)}) \leq Ll(t)\|x-z\|.$$

D'où

$$haus(\overline{co}\Phi(t,x)_{\rho(t)},\overline{co}\Phi(t,z)_{\rho(t)}) \leq Ll(t)\|x-z\|, \quad (t,x),(t,z) \in I \times \mathbb{R}^n, \tag{4.15}$$

où

$$\overline{co}\Phi(t,x)_{\rho(t)} = \overline{co}\Phi(t,x) \cap \rho(t)\overline{B}. \tag{4.16}$$

La relation (4.10) implique que

$$\overline{co}\Phi(t,x)_{\rho(t)} \subset co(\overline{\Phi(t,x) \cap m(t)B}), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.17}$$

De (4.8), (4.13) et (4.16) on a,

$$\dot{y}(t) \in \overline{co}\Phi(t,y(t))_{\rho(t)}. \tag{4.18}$$

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $t \longmapsto \overline{co}\Phi(t,x)_{\rho(t)}$ est une multi-application à valeurs fermées non vides et mesurable de I dans $\mathbb{R}^n$, et $\dot{y}(t)$ est mesurable alors d'après le

Théorème 2.9 il existe une application mesurable $f_x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que pour tout $t \in I$, $f_x(t) \in \overline{co}\Phi(t, y(t))_{\rho(t)}$ et

$$\|\dot{y}(t) - f_x(t)\| = d(\dot{y}(t), \overline{co}\Phi(t, x)_{\rho(t)}).$$

On pose

$$\begin{aligned} f : & I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & (t, x) \longmapsto f(t, x) = f_x(t) \end{aligned}$$

De (4.15) pour tout $t \in I$,

$$haus(\overline{co}\Phi(t, x)_{\rho(t)}, \overline{co}\Phi(t, z)_{\rho(t)}) \leq Ll(t)\|x - z\| \underset{x \longrightarrow z}{\longrightarrow} 0,$$

alors $x \longmapsto \overline{co}\Phi(t, x)_{\rho(t)}$ est H-continue.
Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et soit $(x_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^n$ telle que $x_n \longrightarrow x$. Alors

$$\lim_{n \to \infty} haus(\overline{co}\phi(t, x_n)_{\rho(t)}, \overline{co}\phi(t, x)_{\rho(t)}) = 0,$$

et comme $f(t, x)$ est la projection de $\dot{y}(t)$ sur $\overline{co}\phi(t, x)_{\rho(t)}$ et pour tout $n \geq 1$, $f(t, x_n)$ est la projection de $\dot{y}(t)$ sur $\overline{co}\phi(t, x_n)_{\rho(t)}$, par la proposition 1.28 , $\lim_{n \to \infty} f(t, x_n) = f(t, x)$.
Donc f est continue par rapport à x.
D'où, il existe une fonction de Carathéodory $f : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

$$\|\dot{y}(t) - f(t, x)\| = d(\dot{y}(t), \overline{co}\Phi(t, x)_{\rho(t)}), \quad \forall (t, x) \in I \times \mathbb{R}^n, \tag{4.19}$$

et

$$\begin{aligned} \|f(t, y(t)) - f(t, x)\| &\leq \|f(t, y(t)) - \dot{y}(t)\| + \|\dot{y}(t) - f(t, x)\| \\ &= d(\dot{y}(t), \overline{co}\Phi(t, y(t))_{\rho(t)}) + d(\dot{y}(t), \overline{co}\Phi(t, x)_{\rho(t)}) \\ &= d(\dot{y}(t), \overline{co}\Phi(t, x)_{\rho(t)}) \\ &\leq Ll(t)\|y(t) - x\|, x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Donc

$$\|f(t, y(t)) - f(t, x)\| \leq Ll(t)\|y(t) - x\|, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.20}$$

De (4.17) on obtient

$$\|\dot{y}(t) - f(t, y(t))\| = d(\dot{y}(t), \overline{co}\Phi(t, y(t))_{\rho(t)}) = 0$$

(puisque $\dot{y}(t) \in \overline{co}\Phi(t, y(t))_{\rho(t)})$, cela implique que

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \tag{4.21}$$

et de (4.19) on obtient

$$f(t,x) \in co(\overline{\Phi(t,x) \cap m(t)B}),\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.22}$$

Considérons l'inclusion suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in \overline{\Phi(t, x(t)) \cap m(t)B} \\ x(0) = y(0). \end{cases} \tag{4.23}$$

Soit

$$S = \{v \in L^1(I, \mathbb{R}^n); \|v(t)\| \leq m(t)\ p.p\ sur\ I\}, \tag{4.24}$$

et soit $\mathcal{T} : S \longrightarrow C(I, \mathbb{R}^n)$ l'opérateur défini par l'égalité (3.16) en remplaçant z_0 par $y(0)$. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{K} = \{x(.) \in C(I, \mathbb{R}^n); x = \mathcal{T}(v);\ v \in S_\omega\}, \tag{4.25}$$

où S_ω est l'ensemble S muni de la topologie de l'espace $L^1_\omega(I, \mathbb{R}^n)$. Comme dans la preuve du Théorème 3.1, on trouve que S_ω est un ensemble convexe métrisable compact dans $L^1_\omega(I, \mathbb{R}^n)$, l'opérateur $\mathcal{T}$ est continu de S_ω dans $C(I, \mathbb{R}^n)$, et l'ensemble $\mathcal{K}$ est convexe compact dans $C(I, \mathbb{R}^n)$.
De (4.22) on obtient,

$$\begin{aligned} f(t,x) &\in co(\overline{\Phi(t,x) \cap m(t)B}) \\ &\subset m(t)\overline{B}, \end{aligned}$$

d'où,

$$\|f(t,x)\| \leq m(t), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.26}$$

Considérons l'application $g : \mathcal{K} \longrightarrow L^1(I, \mathbb{R}^n)$ définie par

$$g(x)(t) = f(t, x(t)), \quad x(.) \in \mathcal{K}, t \in I. \tag{4.27}$$

Montrons que g est continue.
Soit $(x_n)_n \subset \mathcal{K}$ telle que $x_n \longrightarrow x$ dans $C(I, \mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned} \|g(x_n) - g(x)\|_1 &= \int_0^1 \|g(x_n)(t) - g(x)(t)\| dt \\ &= \int_0^1 \|f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))\| dt. \end{aligned}$$

De (4.26), $\|f(t,x_n(t))-f(t,x(t))\| \leq 2m(t)$. De plus, comme $x_n \longrightarrow x$ dans $C(I,\mathbb{R}^n)$ alors $\forall t \in I$, $x_n(t) \longrightarrow x(t)$, et puisque f est une fonction de Carathéodory, elle est continue par rapport à la deuxième variable. D'où $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \|f(t,x_n(t)) - f(t,x(t))\| = 0$.
Par le Théorème de convergence dominée de Lebesgue on obtient

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|g(x_n) - g(x)\|_1 = \int_0^1 \lim_{n\longrightarrow\infty} \|f(t,x_n(t)) - f(t,x(t))\|dt = 0$$

D'où, $g(.)$ est une application continue de $\mathcal{K}$ dans $L^1(I,\mathbb{R}^n)$.

De (4.21), (4.22) et (4.27), on obtient

$$\dot{y}(t) = g(y)(t), \quad t \in I \tag{4.28}$$

$$g(x)(t) \in co(\overline{\Phi(t,x(t)) \cap m(t)B}); \quad x \in \mathcal{K}. \tag{4.29}$$

En utilisant (4.29) et la Proposition 2.13 on trouve qu'il existe une suite de fonctions $(g_k)_{k\geq 1}$ de $\mathcal{K}$ dans $L^1(I,\mathbb{R}^n)$, telle que

$$g_k(x)(t) \in \overline{\Phi(t,x(t)) \cap m(t)B} \tag{4.30}$$

et

$$\|g_k(x) - g(x)\|_\omega \leq \frac{1}{k}, \quad x \in \mathcal{K},\ k \geq 1. \tag{4.31}$$

Considérons, pour tout $k \geq 1$ l'application $g_k(\mathcal{T}v) : S_\omega \longrightarrow L^1(I,\mathbb{R}^n)$. Comme dans la preuve du Théorème 3.1 l'application $v \longmapsto g_k(\mathcal{T}v)$ est continue de S_ω dans S_ω. Donc par le théorème du point fixe de Schauder, pour tout $k \geq 1$ il existe un point $v_k^* \in S_\omega$ tel que

$$v_k^* = g_k(\mathcal{T}v_k^*), \quad k \geq 1. \tag{4.32}$$

Comme $(v_k^*)_{k\geq 1} \in S_\omega$, et S_ω est un ensemble métrisable et compact dans $L^1_\omega(I,\mathbb{R}^n)$, par extraction d'une sous suite, on peut supposer que $v_k^* \longrightarrow v^* \in S_\omega$ dans $L^1_\omega(I,\mathbb{R}^n)$. Soit $x_k = \mathcal{T}v_k^*$ et $z = \mathcal{T}v^*$, alors, par la continuité de $\mathcal{T}$, $x_k \longrightarrow z$ dans $C(I,\mathbb{R}^n)$.
De (4.31) et (4.32) on a

$$\|v_k^* - g(\mathcal{T}v_k^*)\|_\omega \leq \frac{1}{k},\ k \geq 1.$$

Quand $k \longrightarrow \infty$, on trouve

$$\|v^* - g(\mathcal{T}v^*)\|_\omega = 0$$

Donc

$$v^* = g(\mathcal{T}v^*) = g(z), \tag{4.33}$$

Comme $\dot{x}_k = v_k^*,\ k \geq 1$, et $\dot{z} = v^*$ on obtient de (4.29), (4.32), et (4.33), pour tout $t \in I$,

$$\dot{x}_k(t) \in \Phi(t,x_k(t)), \tag{4.34}$$

$$\dot{z}(.) = g(z). \tag{4.35}$$

En utilisant (4.20), (4.21), (4.27), (4.28) et (4.35), on trouve

$$\|\dot{y}(t) - \dot{z}(t)\| = \|f(t, y(t)) - f(t, z(t))\| \leq Ll(t)\|y(t) - z(t)\|.$$

De cette inégalité on a,

$$\begin{aligned}\| \int_0^t (\dot{y}(s) - \dot{z}(s))ds\| &\leq \int_0^t \|\dot{y}(s) - \dot{z}(s)\|ds \\ &\leq \int_0^t Ll(s)\|y(s) - z(s)\|ds,\end{aligned}$$

donc, puisque $y(0) = z_0$,

$$\begin{aligned}\|y(t) - z(t)\| &= \| \int_0^t (\dot{y}(s) - \dot{z}(s))ds\| \\ &\leq \int_0^t Ll(s)\|y(s) - z(s)\|ds.\end{aligned}$$

Le Lemme de Bellman–Gronwall donne, $\|y(t) - z(t)\| = \| \int_0^t (\dot{y}(s) - \dot{z}(s))ds\| = 0$, alors $y(t) = z(t)$. Donc la suite $(x_k(.))_k$ de solution de l'inclusion (4.34) converge vers $y(.)$ la solution de l'inclusion $(\mathcal{P}_{\overline{co}F})$ dans $C(I, \mathbb{R}^n)$. Alors il existe un $k_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $k \geq k_0$;

$$\|x_k(t) - y(t)\| < \alpha, \quad \forall t \in I,$$

et de (4.13) on obtient pour tout $k \geq k_0$, $\Phi(t, x_k(t)) = F(t, x_k(t))$, (car $x_k(t) \in y(t) + \alpha\overline{B}$). D'où $(x_k(.))_{k \geq k_0}$ sont des solutions de l'inclusion $(\mathcal{P}_F)$.
D'autre part on a, $v_k^* \longrightarrow v^*$ dans $L^1_\omega(I, \mathbb{R}^n)$ et comme $\dot{x}_k = v_k^*,\ k \geq 1$, et $\dot{z} = v^*$ alors $\dot{x}_k(.) \longrightarrow \dot{y}(.)$ dans $L^1_\omega(I, \mathbb{R}^n)$, et d'après la Proposition 2.10 la suite $(\dot{x}_k(.))_{k \geq 1}$ converge vers $\dot{y}(.)$ dans $\omega - L^1(I, \mathbb{R}^n)$.
D'où le résultat. $\square$

Maintenant on donne une version du Théorème 4.1 mais on change quelques hypothèses.

Hypothèses ($\mathbf{H_C(F)}$). *Considérons la multi-application F vérifiant les propriétés suivantes*

1. *$F(t, x)$ est $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-fortement mesurable sur $Q(y)(2\alpha)$.*
2. *$F(t, x)$ est $(\rho - H)$ lipschitzienne sur $Q(y)(2\alpha)$, c'est à dire il existe $\beta \geq 0$ et une fonction $k(.) \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$, $k(t) > 0$, $t \in I$, tels que (3.24) est vérifiée pour tout $(t, x), (t, z) \in Q(y)(2\alpha)$ et $\rho \geq 0$.*

3. La fonction $t \longrightarrow \delta(t) = d(\dot{y}(t), F(t, y(t)))$ est intégrable.

On a de la propriété (1) *de* $(\mathbf{H_C(F)})$*, que la fonction $t \longrightarrow F(t, y(t))$ est mesurable. Par conséquent, la fonction $t \longrightarrow d(\dot{y}(t), F(t, y(t)))$ est mesurable. Alors, la propriété* (3) *de $c((\mathbf{H_C(F)})$ est correcte.*
Soit

$$\rho^*(t) = (1 + 2\alpha\beta)(\|\dot{y}(t)\| + \delta(t)) + 2\alpha k(t). \tag{4.36}$$

$$\rho_0^*(t) = (1 + \alpha\beta)(\|\dot{y}(t)\| + \delta(t)) + \alpha k(t). \tag{4.37}$$

Théorème 4.2. *Supposons que les Hypothèses $(\mathbf{H_C(F)})$ sont vérifiées et il existe une fonction $k_1(.) \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$, $k.(t) > 0$ et $\beta_1 > 0$ tel que*

$$e(\overline{co}F(t, x) \cap \rho^*(t)\overline{B}, \overline{co}(F(t, x) \cap m^*(t)B)) = 0, \tag{4.38}$$

$(t, x) \in Q(y)(2\alpha)$, avec $m^*(t) = k_1(t) + \beta_1\rho^*(t)$. Suppose que $y(\cdot)$, avec $y(0) = y_0$, est une solution de l'inclusion $(\mathcal{P}_{\overline{co}F})$. Alors il existe une suite de $(x_k)_{k\geq 1}$, $x_k(0) = y_0$, de solutions globales de l'inclusion $(\mathcal{P}_F)$ qui converge vers $y(\cdot)$ dans $C(I, \mathbb{R}^n)$ telle que la suite $(\dot{x}_k(\cdot))_{k\geq 1}$ converge vers $\dot{y}(\cdot)$ dans ω-$L^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Preuve. On commence par montrer que les supposition (1) et (2) dans Hypothèses $(\mathbf{H_C(F)})$ et le Lemme 3.2 impliquent que les Hypothèses $((\mathbf{H_L(F)}))$ sont vérifiées pour la multi-application F.
De (1) dans $(\mathbf{H_C(F)})$ et par le Lemme 3.2, la multi-application$t \longmapsto F(t, x(t))$ est fortement mesurable pour tout fonction $x(.) \in C(I, \mathbb{R}^n)$ et d'après (2) dans $(\mathbf{H_C(F)})$ et le Lemme 3.2 on obtient que la multi-application $x \longmapsto F(t, x)$, $x \in y(t) + \alpha\overline{B}$, est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris presque partout.

Soit $(t, x) \in Q(y)(\alpha)$. On sait que $d(\dot{y}(t), \overline{co}F(t, x)) \leq d(\dot{y}(t), F(t, x))$ et comme $\dot{y}(t) \in \overline{co}F(t, y(t))$ et pour tout $v \in F(t, y(t))$, on a

$$d(\dot{y}(t), F(t, x)) \leq d(\dot{y}(t), v) + d(v, F(t, x)),$$

de (3.24)(avec $\rho = \|\dot{y}(t)\|$) on obtient,

$$\begin{aligned} d(\dot{y}(t), F(t, x)) &\leq d(\dot{y}(t), v) + (k(t) + \beta\|\dot{y}(t)\|)\|x - y(t)\| \\ &\leq d(\dot{y}(t), v) + \alpha(k(t) + \beta\|\dot{y}(t)\|), \end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned} d(\dot{y}(t), F(t, x)) &\leq d(\dot{y}(t), F(t, y(t)) + \alpha(k(t) + \beta\|\dot{y}(t)\|) \\ &= \delta(t) + \alpha(k(t) + \beta\|\dot{y}(t)\|). \end{aligned}$$

Donc, $d(\dot{y}(t), \overline{co}F(t,x)) \leq \delta(t) + \alpha(k(t) + \beta\|\dot{y}(t)\|)$, cela implique que, $\dot{y}(t) \in \overline{co}F(t,x) + (\delta(t) + \alpha(k(t) + \beta\|\dot{y}(t)\|))\overline{B}$,
d'où,

$$\overline{co}F(t,x) \cap (\|\dot{y}(t)\| + \delta(t) + \alpha(k(t) + \beta\|\dot{y}(t)\|))\overline{B} \neq \emptyset. \tag{4.39}$$

Or,

$$\begin{aligned}\|\dot{y}(t)\| + \delta(t) + \alpha(k(t) + \beta\|\dot{y}(t)\|) &\leq (1 + \alpha\beta)(\|\dot{y}(t)\| + \delta(t)) + \alpha k(t) \\ &< (1 + 2\alpha\beta)(\|\dot{y}(t)\| + \delta(t)) + \alpha k(t).\end{aligned}$$

De (4.39), il existe $z \in \overline{co}F(t,x)$ et $z \in (\|\dot{y}(t)\| + \delta(t) + \alpha(k(t) + \beta\|\dot{y}(t)\|))\overline{B}$, alors,

$$\begin{aligned}\|z\| &\leq \|\dot{y}(t) + \|\delta(t) + \alpha(k(t) + \beta\|\dot{y}(t)\|) \\ &= (1 + \alpha\beta)(\|\dot{y}(t)\| + \delta(t)) + \alpha k(t) \\ &< (1 + 2\alpha\beta)(\|\dot{y}(t)\| + \delta(t)) + \alpha k(t),\end{aligned}$$

d'où $z \in \rho^*(t)B$, donc

$$\overline{co}F(t,x) \cap \rho^*(t)B \neq \emptyset, \qquad (t,x) \in Q(y)(\alpha), \tag{4.40}$$

et $z \in \rho_0^*(t)\overline{B}$, donc

$$\overline{co}F(t,x) \cap \rho_0^*(t)\overline{B} \neq \emptyset, \qquad (t,x) \in Q(y)(\alpha). \tag{4.41}$$

On a, $\dot{y}(t) \in \overline{co}F(t, y(t))$ et

$$\|\dot{y}(t)\| \leq (1 + \alpha\beta)(\|\dot{y}(t)\| + \delta(t)) + \alpha k(t),\ alors\ \|\dot{y}(t)\| \in \rho_0^*(t)\overline{B},$$

d'où

$$\dot{y}(t) \in \overline{co}F(t, y(t)) \cap \rho_0^*(t)\overline{B}. \tag{4.42}$$

De (4.38) on a $\overline{co}F(t,x) \cap \rho^*(t)\overline{B} \subset \overline{\overline{co}(F(t,x) \cap m^*(t)B)}$ et comme $\overline{co}(F(t,x) \cap m^*(t)B)$ est un fermé alors, $\overline{co}F(t,x) \cap \rho^*(t)\overline{B} \subset \overline{co}(F(t,x) \cap m^*(t)B)$ et de (4.40) on a $\overline{co}F(t,x) \cap \rho^*(t)B \neq \emptyset$, alors,

$$\overline{co}F(t,x) \cap \rho^*(t)\overline{B} \subset \overline{co}(F(t,x) \cap m^*(t)B) \neq \emptyset \qquad (t,x) \in Q(\alpha).$$

Il est claire que pour tout $v \in F(t,x) \cap m^*(t)B$ on a $v \in F(t,x)$ et $\|v\| < m^*(t)$.
Soit $(t,z) \in Q(y)(\alpha)$, de (3.24) on trouve $d(v, F(t,z)) \leq (k(t) + \beta m^*(t))\|x - z\|$, cela implique que $v \in F(t,z) + (k(t) + \beta m^*(t))\|x - z\|\overline{B}$ donc,

$$F(t,x) \cap m^*(t)B \subset F(t,z) + (k(t) + \beta m^*(t))\|x - z\|\overline{B},$$

alors,

$$\begin{aligned}\overline{co}(F(t,z)\cap m^*(t)B) &\subset \overline{co}(F(t,z)+(k(t)+\beta m^*(t))\|x-z\|\overline{B})\\ &= \overline{co}F(t,z)+(k(t)+\beta m^*(t))\|x-z\|\overline{B}.\end{aligned}$$

D'où,

$$\overline{co}F(t,x)\cap \rho^*(t)\overline{B} \subset \overline{co}(F(t,z)+(k(t)+\beta m^*(t))\|x-z\|\overline{B}.$$

De cette inclusion on a, pour tout $v\in \overline{co}F(t,x)\cap\rho^*(t)\overline{B}$,

$$d(v,\overline{co}F(t,x)) \leqslant (k(t)+\beta m^*(t))\|x-z\|,$$

cela implique que $\sup\limits_{v\in\overline{co}F(t,x)\cap\rho^*(t)\overline{B}} d(v,\overline{co}F(t,z)) \leqslant (k(t)+\beta m^*(t))\|x-z\|$. Alors,

$$e(\overline{co}F(t,x)_{\rho^*(t)},\overline{co}F(t,z)) \leq (k(t)+\beta m^*(t))\|x-z\|. \tag{4.43}$$

De même en échangeant les rôles de x et z on trouve,

$$e(\overline{co}F(t,z)_{\rho^*(t)},\overline{co}F(t,x)) \leq (k(t)+\beta m^*(t))\|x-z\|. \tag{4.44}$$

D'où, de (4.43) et (4.44) on obtient,

$$haus_{\rho^*(t)}(\overline{co}F(t,x),\overline{co}F(t,z)) \leq (k(t)+\beta m^*(t))\|x-z\|, \qquad (t,x),(t,z)\in Q(y)(\alpha). \tag{4.45}$$

De la Proposition 1.26 et par (4.45) on aura,

$$\begin{aligned}haus(\overline{co}F(t,x)_{\rho^*(t)},\overline{co}F(t,z)_{\rho^*(t)}) &\leq (2\rho^*(t)/(\rho^*(t)-\rho_0^*(t))haus_{\rho^*(t)}(\overline{co}F(t,x),\overline{co}F(t,z))\\ &\leq (2\rho^*(t)/(\rho^*(t)-\rho_0^*(t))(k(t)+\beta m^*(t))\|x-z\|,\end{aligned}$$

d'où

$$haus(\overline{co}F(t,x)_{\rho^*(t)},\overline{co}F(t,z)_{\rho^*(t)}) \leq (2\rho^*(t)/(\rho^*(t)-\rho_0^*(t))(k(t)+\beta m^*(t))\|x-z\|, \tag{4.46}$$

avec $(t,x)(t,z)\in Q(y)(\alpha)$. On remplace $\rho^*(t)$ et $\rho_0^*(t)$ par leurs formules données dans (4.36) et (4.37), on obtient

$$\frac{2\rho^*(t)}{\rho^*(t)-\rho_0^*(t)} \leq \frac{2(1+2\alpha\beta)}{\alpha\beta}+4.$$

Alors,

$$haus(\overline{co}F(t,x)_{\rho^*(t)},\overline{co}F(t,z)_{\rho^*(t)}) \leq Ll^*(t)\|x-z\|. \quad (t,x)(t,z)\in Q(y)(\alpha), \tag{4.47}$$

avec $l^*(t)=k(t)+\beta m^*(t)$ et $L=\frac{2(1+2\alpha\beta)}{\alpha\beta}+4$.
Cette inégalité est la même que (4.12) alors par le même raisonnement du Théorème 4.1 et d'après (4.12), en utilisant (4.40), (4.41) et (4.42), le théorème est prouvé. $\square$

Corollaire 4.1. *Supposons que les Hypothèses* ($\mathbf{H_C(F)}$) *sont vérifiées, et qu'il existe* $k_1(\cdot) \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$, $k_1(\cdot) > 0$, $t \in I$, *et* $\beta_1 > 0$ *tel que*

$$\overline{co}F(t,x) \cap \rho\overline{B} \subset co(F(t,x) \cap (k_1(t) + \beta_1\rho)\overline{B}) \tag{4.48}$$

pour tout $(t,x) \in Q(2\alpha)$ *et* $\rho \geq 0$. *Supposons que* $y(.)$, $y(0) = y_0$, *est la solution de l'inclusion* $(\mathcal{P}_{\overline{co}F})$. *Alors il existe une suite* $(x_k)_{k\geq 1}$, $x_k(\cdot)(0) = y_0$, *de solutions globales de l'inclusion* $(\mathcal{P}_F)$ *qui converge vers* $y(.)$ *dans* $C(I, \mathbb{R}^n)$ *telle que la suite* $(\dot{x}_k(.))_{k\geq 1}$ *converge vers* $\dot{y}(.)$ *dans* ω-$L^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Preuve. Avec le même raisonnement que dans le théorème précédent on trouve que,

$$\overline{co}F(t,x) \cap \rho B \neq \emptyset, \qquad (t,x) \in Q(y)(\alpha), \tag{4.49}$$

$$\dot{y}(t) \in \overline{co}F(t, y(t)) \cap \rho_0\overline{B}. \tag{4.50}$$

De (4.48) on a

$$\overline{co}F(t,x) \cap \rho\overline{B} \subset co(F(t,x) \cap (k_1(t) + \beta_1\rho)\overline{B}).$$

Il est claire que pour tout $v \in F(t,x) \cap m^*(t)\overline{B}$, avec $m^*(t) = k_1(t) + \beta_1\rho$ on a $v \in F(t,x)$ et $\|v\| \leq m^*(t)$.
Soit $(t,z) \in Q(y)(\alpha)$, de (3.24) on trouve $d(v, F(t,z)) \leq (k(t) + \beta m^*(t))\|x - z\|$, cela implique que $v \in F(t,z) + (k(t) + \beta m^*(t))\|x - z\|\overline{B}$ donc,

$$\begin{aligned} co(F(t,x) \cap m^*(t)\overline{B}) &\subset co(F(t,z) + (k(t) + \beta m^*(t))\|x - z\|\overline{B}) \\ &\subset \overline{co}(F(t,z) + (k(t) + \beta m^*(t))\|x - z\|\overline{B}) \\ &= \overline{co}F(t,z) + (k(t) + \beta m^*(t))\|x - z\|\overline{B}. \end{aligned}$$

d'où,

$$\overline{co}F(t,x) \cap \rho\overline{B} \subset \overline{co}F(t,z) + (k(t) + \beta m^*(t))\|x - z\|\overline{B}.$$

Alors, avec les mêmes étapes que dans la preuve des deux théorèmes précédents on trouve le résultat.

□

Remarque 4.2. *La différence entre le Théorème 4.1 et le Théorème 4.2 est que dans le Théorème 4.1 nous avons besoin de la condition intégrale* $(\rho - H)$ *lipschitzienne sur* $Q(y)(2\alpha)$ *de la multi-application* $\overline{co}F(t,x)$, *tandis que dans le Théorème 4.2, les même propriétés sont exigées pour la multi-application* F.

CHAPITRE 5

EXISTENCE DE SOLUTIONS POUR UNE INCLUSION DU SECONDE ORDRE

Le but de chapitre est de montrer l'existence de solutions globales pour une inclusion différentielle de seconde ordre avec des conditions aux limites, le problème est donné comme suit

$$(\mathcal{P}'_F)\begin{cases}\ddot{x}(t) \in F(t, x(t), \dot{x}(t)), \ p.p \ sur \ I, \\ \dot{x}(0) = 0, \ x(1) = 0,\end{cases}$$

où $F : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une multi-application a valeurs fermées non vides et possiblement non bornées.

On commence ce chapitre par donner des théorèmes sur la fonction de type Green où nous montrons quelques propriétés de ces dernières qui vont nous aider à prouver le théorème principale de ce chapitre.

Théorème 5.1. *Soient $n(.), m(.) \in L^1(I, \mathbb{R}_+^*)$ et soit $G'(t,s)$ la fonction de Green du problème*

$$(\mathcal{P}_r)\begin{cases}\ddot{r}(t) - n(t)\dot{r}(t) = m(t) \quad p.p \ surI, \\ \dot{r}(0) = 0, \ r(1) = 0.\end{cases}$$

Alors

$$G'(t,s) = \begin{cases} -\int_t^1 \exp(\int_s^r n(\tau)d\tau)dr, & si \ 0 \leq t \leq s \leq 1, \\ -\int_s^1 \exp(\int_s^r n(\tau)d\tau)dr, & si \ 0 \leq s < t \leq 1.\end{cases}$$

et $r(t) = \int_0^1 G^{'}(t,s)m(s)ds$ *est la solution du problème* $(\mathcal{P}_r)$, *et on a*

$$\frac{dG'}{dt}(t,s) = \begin{cases} 0, & si\ 0 \leq t < s \leq 1, \\ \exp(\int_s^t n(\tau)d\tau), & si\ 0 \leq s < t \leq 1. \end{cases}$$

et

$$\dot{r}(t) = \int_0^1 \frac{dG'}{dt}(t,s)m(s)ds = \int_0^t \exp(\int_s^t n(\tau)d\tau)ds.$$

Preuve. En posant $\dot{r}(t) = x(t)$ on trouve

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - n(t)x(t) = m(t), \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

On commence par résoudre l'équation homogène suivante $\dot{x}(t) - n(t)x(t) = 0$, on a

$$\dot{x}(t) = n(t)x(t) \Longleftrightarrow \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = n(t),$$

et par intégration

$$\ln|x(t)| = \int_0^t n(s)ds + cte.\ D'o\text{ù},\ x(t) = k\exp\int_0^t n(s)ds.$$

En utilisant la méthode de variation des constantes, cherchons une solution particulière de la forme

$$x(t) = k(t)\exp\int_0^t n(s)ds, \tag{5.2}$$

où k est une fonction dérivable. En dérivant, on obtient

$$\dot{x}(t) = \dot{k}(t)\exp\int_0^t n(s)ds + k(t)n(t)\exp\int_0^t n(s)ds$$

En remplaçant dans l'équation (5.1) on trouve $\dot{k}(t) = m(t)\exp(-\int_0^t n(s)ds)$ et en intégrant, on trouve $k(t) = \int_0^t m(s)\exp(-\int_0^s n(\tau)d\tau) + cte$. On remplace $k(t)$ dans (5.2) pour avoir

$$x(t) = \int_0^t m(s)\exp(\int_s^t n(\tau)d\tau)ds + cte\exp(\int_0^t n(\tau)d\tau),$$

et comme $x(0) = 0$, on aura $cte = 0$ d'où

$$x(t) = \int_0^t m(s)\exp(\int_s^t n(\tau)d\tau)ds = \dot{r}(t).$$

Cela implique que

$$r(t) = -\int_t^1 \int_0^r m(s)\exp(\int_s^r n(\tau)d\tau)dsdr + cte,$$

et comme $r(1) = 0, cte = 0$. Alors on a,

$$\begin{aligned} r(t) &= -\int_t^1 \int_0^r m(s) \exp(\int_s^r n(\tau)d\tau)dsdr \\ &= -\int_0^1 \int_t^1 \exp(\int_s^r n(\tau)d\tau)drm(s)ds \\ &= -\int_0^t (\int_t^1 \exp(\int_s^r n(\tau)ds)d\tau)m(s)ds - \int_t^1 (\int_s^1 \exp(\int_s^r n(\tau)d\tau)m(s)ds \\ &= \int_0^t (-\int_t^1 \exp(\int_s^r n(\tau)d\tau)dr)m(s)ds + \int_t^1 (-\int_s^1 \exp(\int_s^r n(\tau)d\tau)dr)m(s)ds. \end{aligned}$$

Donc, la solution du problème $(\mathcal{P}_r)$ s'écrit sous la forme $r(t) = \int_0^1 G'(t,s)m(s)ds$ avec

$$G'(t,s) = \begin{cases} -\int_t^1 \exp(\int_s^r n(\tau)d\tau)dr, & si\ 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\ -\int_s^1 \exp(\int_s^r n(\tau)d\tau)dr, & si\ 0 \leqslant s < t \leqslant 1. \end{cases}$$

De plus, on a,

$$\frac{dG'}{dt}(t,s) = \begin{cases} 0, & si\ 0 \leq t < s \leq 1, \\ \exp(\int_s^t n(\tau)d\tau), & si\ 0 \leq s < t \leq 1. \end{cases}$$

et

$$\dot{r}(t) = \int_0^1 \frac{dG'}{dt}(t,s)m(s)ds.$$

□

Théorème 5.2. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction intégrable et soit $G(t,s)$ la fonction de Green du problème*

$$(\mathcal{P}_f) \begin{cases} \ddot{x}(t) = f(t) & p.p\ sur\ I, \\ \dot{x}(0) = 0,\ x(1) = 0. \end{cases}$$

Alors, on a

1. $G(t,s) = \begin{cases} s-1, & si\ 0 \leq t < s \leqslant 1 \\ t-1, & si\ 0 \leqslant s \leq t \leqslant 1 \end{cases}$ *et $x_f(t) = \int_0^t G(t,s)f(s)ds$ est une solution du problème $(\mathcal{P}_f)$,*
2. *G est continue sur $I \times I$,*
3. *$G(.,s)$ est dérivable sur $[0,1]$ pour tout $s \in [0,1]$ et*

$$\frac{dG}{dt}(t,s) = \begin{cases} 0, & si\ 0 \leqslant t < s \leqslant 1, \\ 1, & si\ 0 \leqslant s \leq t \leqslant 1. \end{cases}$$

4. *$G(.,.)$ et $\frac{dG}{dt}(.,.)$ vérifient $\sup_{t,s\in[0.1]} |G(t,s)| \leq 1$, $\sup_{t,s\in[0.1]} |\frac{dG}{dt}(t,s)| \leq 1$.*

Preuve. 1. On a $\ddot{x}(t) = f(t)$ implique que $\dot{x}(t) = \int_0^t f(s)ds + c$.

En utilisant la condition $\dot{x}(0) = 0$ on a $c = 0$, donc,

$$x(t) = -\int_t^1 \int_0^r f(s)dsdr + c',$$

et en utilisant la condition $x(1) = 0$ on obtient $c' = 0$. Donc,

$$\begin{aligned} x(t) &= -\int_t^1 \int_0^r f(s)dsdr \\ &= -\int_0^t \int_t^1 drf(s)ds - \int_t^1 \int_s^1 drf(s)ds \\ &= \int_0^t (-\int_t^1 dr)f(s)ds + \int_t^1 (-\int_s^1 dr)f(s)ds \\ &= \int_0^t (t-1)f(s)ds + \int_t^1 (s-1)f(s)ds \\ &= \int_0^1 G(t,s)f(s)ds \end{aligned}$$

D'où, la solution du problème $(\mathcal{P}_f)$ s'écrit sous la forme $x(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds$, avec

$$G(t,s) = \begin{cases} s-1, & si\ 0 \le t < s \le 1, \\ t-1, & si\ 0 \le s \le t \le 1. \end{cases}$$

On montre que $G(.,s)$ est dérivable sur $[0,1]$ pour tout $s \in I$.

Soit $t \in [0,1[$. Pour tout $s \in [0,1]$ fixé et pour tout $h > 0$ assez petit, avec $t < t+h < 1$, on a

$$\frac{G(t+h,s) - G(t,s)}{h} = \begin{cases} \dfrac{1-s+1-s}{h} = 0, & si\ 0 \le t \le t+h < s \le 1, \\ \dfrac{1-t-h-1+t}{h} = 1, & si\ 0 \le s < t \le t+h < 1, \end{cases}$$

d'où

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{G(t+h,s) - G(t,s)}{h} = \begin{cases} 0, & si\ 0 \le t < s \le 1 \\ 1, & si\ 0 \le s \le t \le 1. \end{cases}$$

alors, $G(.,s)$ est dérivable à droite sur $[0,1[$.

De la même façon on démontre que $G(.,s)$ est dérivable à gauche et sa valeur est donnée par

$$\frac{dG}{dt}(t,s) = \begin{cases} 0 & 0 < t < s \le 1 \\ 1 & 0 \le s \le t \le 1. \end{cases}$$

$\square$

Lemme 5.1. *Soit $f \in L^1(I, \mathbb{R}^n)$ et soit $x_f : I \longleftrightarrow \mathbb{R}^n$ la fonction définie par*

$$x_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds, \quad \forall t \in I,$$

Alors $\dot{x}_f(1) = 0$, x_f est continument dérivable et sa dérivée est absolument continue et vérifie $\dot{x}_f(0) = 0$. De plus x_f est la solution du problème $(\mathcal{P}_f)$.

Preuve. Comme $G(1,s) = 0$, on a $x_f(1) = 0$.
par la preuve du Théorème 5.2, on a

$$|G(t+\Delta t, s) - G(t,s)| \leq |\Delta t|, \quad \textit{pour tout } t, s, \Delta t \in I.$$

Il suit que

$$\|\frac{G(t+\Delta t, s) - G(t,s)}{\Delta t} f(s)\| \leq \|f(s)\|,$$

et on utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_f(t) &= \lim_{\Delta \to 0} \int_0^1 \frac{G(t+\Delta t, s) - G(t,s)}{\Delta t} f(s) ds \\
&= \int_0^1 \frac{dG}{dt}(t,s) f(s) ds \\
&= \int_0^t f(s) ds.
\end{aligned}$$

Donc $\dot{x}_f$ est absolument continue, $\dot{x}_f(0) = 0$ et $\ddot{x}_f = f$ p.p sur I. D'où x_f est solution du problème $(\mathcal{P}_f)$. □

Proposition 5.1. *Soit $\mathcal{K} \subset C^1(I, \mathbb{R}^n)$ un compact et $F : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ à valeurs fermées non vides. Supposons que*

1. *$(x,y) \longrightarrow F(t,x,y)$ est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris p.p sur I ;*
2. *pour tout $x \in \mathcal{K}$, $t \longmapsto F(t, x(t), \dot{x}(t))$ est mesurable ;*
3. *Il existe une fonction $m \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$ telle que pour tout $x \in \mathcal{K}$*

$$\sup\{\|v\|; v \in F(t, x(t), \dot{x}(t))\} \leqslant m(t), \ \textit{p.p sur } I.$$

Alors, il existe une fonction continue $g : \mathcal{K} \longrightarrow L^1(I, \mathbb{R}^n)$ telle que

$$g(x)(t) \in F(t, x(t), \dot{x}(t)), \ x(.) \in \mathcal{K} \textit{ p.p sur } I.$$

Preuve. Soit $\mathcal{K}_*(x) = \{(x, \dot{x});\ x \in \mathcal{K}\} \subset C(I, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, alors $\mathcal{K}_*$ est un compact de $C(I, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. En effet, soit $(X_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{K}_*$. Alors pour tout $n \geq 1$, il existe $x_n \in \mathcal{K}$ telle que $X_n = (x_n, \dot{x}_n)$.
Puisque $\mathcal{K}$ est compact, on peut extraire à (x_n) une sous suite noté $(x_{n_k})_{n \geq 1}$ qui converge dans $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ vers $x \in \mathcal{K}$, donc

$$x_{n_k} \longrightarrow x \textit{ dans } C(I, \mathbb{R}^n)$$

et

$$\dot{x}_{n_k} \longrightarrow \dot{x} \; dans \; C(I, \mathbb{R}^n)$$

On pose $X = (x, \dot{x}) \in \mathcal{K}_*$. On a,

$$\begin{aligned}
\|X_{n_k} - X\|_c &= \sup_{t \in I} \|(x_{n_k}(t), \dot{x}_{n_k}(t)) - (x(t), \dot{x}(t))\| \\
&\leq c \sup_{t \in I} (\|x_{n_k}(t) - x(t)\| + \|\dot{x}_{n_k}(t) - \dot{x}(t)\|) \\
&\leq c(\|x_{n_k}(t) - x(t)\|_C + \|\dot{x}_{n_k}(t) - \dot{x}(t)\|_C).
\end{aligned}$$

Où c une constante déduite des équivalences des normes sur les espaces de dimension fini. Donc, quand $k \longrightarrow \infty$, (X_{n_k}) converge vers X dans $C(I, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, d'où $\mathcal{K}_*$ est compact. De plus on a,

1. $X \longrightarrow F(t, X)$ est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris p.p sur I ;
2. pour tout $X \in \mathcal{K}_*$, $t \longmapsto F(t, X(t))$ est mesurable ;
3. Il existe une fonction $m(.) \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\sup\{\|v\|; v \in F(t, X(t))\} \leqslant m(t), X \in \mathcal{K}_* \; p.p \; sur \; I.$$

Alors, par la proposition 2.13 il existe une application continue $h : \mathcal{K} \longrightarrow L^1(I, \mathbb{R}^n)$ telle que

$$h(X)(t) \in F(t, X(t)), \; X(.) \in \mathcal{K}_* \; p.p.$$

Considérons l'application $\sigma : x \longmapsto (x, \dot{x})$ définie de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}_*$.
De ce qui procède, il existe une constante $c' > 0$ telles que $\|(x, \dot{x})\|_C \leq c'\|x\|_{C^1}$. Donc cette application est linéaire continue. Alors, on définit une application $g = h \circ \sigma : \mathcal{K} \longrightarrow L^1(I, \mathbb{R}^n)$, qui est continue comme composition d'applications continues et qui vérifie

$$g(x)(t) \in F(t, x(t), \dot{x}(t)), \; x \in \mathcal{K} \; p.p \; sur \; I.$$

$\square$

Lemme 5.2. *Soit $F : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multi-application à valeurs fermés non vides vérifiant les hypothèses (1) et (2) de la proposition 5.1. Supposons que*

$$d(0, F(t, x, y)) \leq m(t) + n(t)\|x\|,$$

où, $m(.), n(.) \in L^1(I, \mathbb{R}_+^*)$ alors la multi-application

$$\Phi(t, x, y) = F(t, x, y) \cap (m(t) + n(t)\|y\|)B,$$

est définie de $I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ ayant les propriétés suivantes

1. $(x,y) \mapsto \Phi(t,x,y)$ *est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris p.p sur* I *;*
2. $t \mapsto \Phi(t,x(t),\dot{x}(t))$ *est faiblement mesurable pour tout* $x \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$ *;*
3. *Les propriétés* (1) *et* (2) *sont vérifiées pour la multi-application*

$$\overline{\Phi(t,x,y)} = \overline{F(t,x,y) \cap (m(t)+n(t)\|y\|)B}.$$

Preuve. Avec les mêmes étapes que dans la preuve du Lemme 3.1, pour la multi-application $(t,X) \longmapsto F(t,X)$, avec $X=(x,y)$, on trouve le résultat. □

Définition 5.1. *Soit* $F: I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \times\mathbb{R}^n$ *une multi-applicationà valeurs non vides fermées. On définit une solution globale du problème* $(\mathcal{P}'_f)$ *comme étant une fonctions continument dérivable* $x(\cdot)$ *est absolument continue, avec* $\dot{x}(0)=0$, $x(1)=0$ *vérifiant l'inclusion* $(\mathcal{P}'_f)$ *pour tout* $t \in I$.

Théorème 5.3. *Soit* $g: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une application intégrable et soit* $F: I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *une multi-application à valeurs non vides fermées vérifiant*

1. $(x,y) \longmapsto F(t,x,y)$ *est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris p.p sur* I *;*
2. $t \longmapsto F(t,x(t),y(t))$ *est mesurable pour tout* $x,y \in C(I,\mathbb{R}^n)$ *;*
3. *Il existe* $m(.),\ n(.) \in L^1(I,\mathbb{R}_+^*)$ *telles que*

$$d(g(t),F(t,x,y)) \leqslant m(t)+n(t)\|\dot{x}_g(t)-y\| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n \ p.p,$$

avec

$$\dot{x}_g(t) = \int_0^1 \frac{dG}{dt}(t,s)g(s)ds.$$

Alors, il existe une solution globale x *du problème*

$$(\mathcal{P}'(F)) \begin{cases} \ddot{x}(t) \in F(t,x(t),\dot{x}(t)) \ p.p \ sur \ I, \\ \dot{x}(0)=0,\ x(1)=0. \end{cases}$$

Preuve. Soit la multi-application $\Phi: I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ définie par,

$$\Phi(t,y,z) = -g(t) + F(t,y+x_g(t),z+\dot{x}_g(t)),\ y,z \in \mathbb{R}^n. \tag{5.3}$$

Où $x_g(t) = \int_0^1 G(t,s)g(s)ds$, donc $\dot{x}_g(t) = \int_0^1 \frac{dG}{dt}(t,s)g(s)ds$. On a,

$$\begin{aligned} d(0,\Phi(t,y,z)) &= \inf_{u \in F(t,y+x_g(t),z+\dot{x}_g(t))} \|u-\dot{y}(t)\| \\ &= d(\dot{g}(t),F(t,y+x_g(t),z+\dot{x}_g(t))) \\ &< m(t)+n(t)\|\dot{x}_g(t)-z-\dot{x}_g(t)\| \\ &= m(t)+n(t)\|z\|. \end{aligned}$$

Donc,

$$d(0, \Phi(t, y, z)) < m(t) + n(t)\|z\|,$$

d'où,

$$\Phi(t, y, z) \cap (m(t) + n(t)\|z\|)B \neq \emptyset. \tag{5.4}$$

On considère la multi-application $\Gamma : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ définie par

$$\Gamma(t, y, z) = \overline{\Phi(t, y, z) \cap (m(t) + n(t)\|z\|)B}. \tag{5.5}$$

Alors, d'après le Lemme 5.2, la multi-application $(y, z) \longmapsto \Gamma(t, y, z)$ est semi-continue inférieurement au sens de Vietoris, et la multi-application $t \longmapsto \Gamma(t, y(t), \dot{y}(t))$ est mesurable pour tout fonction $y(.) \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$.
On considère l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \ddot{z}(t) \in \Gamma(t, z(t), \dot{z}(t)), \ p.p \\ \dot{z}(0) = 0, \ z(1) = 0, \end{cases} \tag{5.6}$$

et l'équation

$$\begin{cases} \ddot{r}(t) = m(t) + n(t)\dot{r}(t), \\ \dot{r}(0) = 0, \ r(1) = 0, \end{cases} \tag{5.7}$$

qui a une solution $r(.)$ définie dans le Théorème 5.1. Soient les ensembles

$$S = \{f \in L^1(I, \mathbb{R}^n); \ \|f(t)\| \leq \ddot{r}(t) \quad p.p\} \tag{5.8}$$

et

$$\mathcal{K} = \{x_f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n; \ x_f(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s) ds, \ \forall t \in I, \ f \in S\}. \tag{5.9}$$

Soient $x_f \in \mathcal{K}$ et $t_1, t_2 \in [0, 1]$, avec $t_1 < t_2$. On a

$$\begin{aligned} \|x_f(t_1) - x_f(t_2)\| &\leq \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)| \|f(s)\| ds \\ &\leq \int_0^1 |G(t_1, s), G(t_2, s)| \ddot{r}(s) ds, \end{aligned}$$

et de même,

$$\begin{aligned} \|\dot{x}_f(t_1) - \dot{x}_f(t_2)\| &\leq \int_0^1 |\frac{dG}{dt}(t_1, s) - \frac{dG}{dt}(t_2, s)| \|f(s)\| ds \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} \ddot{r}(s) ds. \end{aligned}$$

On a G est continue sur le compact I, alors d'après le Théorème de Heine G est uniformément continue et $\ddot{r}(t) \in L^1(I, \mathbb{R}^n)$, donc, $\mathcal{K}$ est équicontinu dans $C(I, \mathbb{R}^n)$, de plus, comme $\ddot{r}(t) \in L^1(I, \mathbb{R}^n)$, l'ensemble $\dot{\mathcal{K}} = \{\dot{x}_f, f \in S\}$ est équicontinu dans $C(I, \mathbb{R}^n)$.

D'autre part, pour tout $t \in I$, on pose $\mathcal{K}(t) = \{x_f(t);\ x_f \in \mathcal{K}\}$, donc, pour tout $v \in \mathcal{K}(t)$ il existe $f \in S$ telle que $v = x_f$ et

$$\begin{aligned}
\|v(t)\| &\leq \int_0^1 |G(t,s)|\|f(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 \|f(s)\|ds \\
&= \|f\|_1 \\
&\leq \|\ddot{r}\|_1,
\end{aligned}$$

de même, en posant $\dot{\mathcal{K}} = \{\dot{x}_f(t),\ x_f \in \mathcal{K}\}$, $t \in I$, on a pour tout $v \in \dot{\mathcal{K}}$, il existe $f \in S$ tel que $v = \dot{x}_f$ et donc

$$\begin{aligned}
\|v(t)\| &\leq \int_0^1 |\frac{dG}{dt}(t,s)|\|f(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 \|f(s)\|ds \\
&= \|f\|_1 \\
&\leq \|\ddot{r}\|_1.
\end{aligned}$$

Cela implique que $\mathcal{K}(t), \dot{\mathcal{K}}(t) \subset \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0, \|\ddot{r}\|_1)$ qu'il un ensemble compact, alors, ils sont relativement compacts dans $\mathbb{R}^n$

Donc d'après le Théorème d'Ascoli-Arzelà, $\mathcal{K}(.), \dot{\mathcal{K}}(.)$ sont relativement compacts dans $C(I, \mathbb{R}^n)$.

D'où $\mathcal{K}$ est relativement compact dans $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Montrons que $\mathcal{K}$ est fermé dans $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Soit $(u_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{K}$ telle que $u_n \longrightarrow u$ dans $C^1(I, \mathbb{R}^n)$, alors pour tout $n \geq 1$, il existe $f_n \in S$ telle que $u_n(t) = \int_0^1 G(t,s)f_n(s)ds,\ \forall t \in I$.

Puisque S est faiblement compact, on peut extraire à (f_n) une sous suite, notée aussi $(f_n)_{n\geq 1}$, qui converge faiblement vers $f \in S$.

On pose $w(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds$, $t \in I$ alors $w \in K$, de plus pour tout $t \in I$, en considérant

$(e_j)_{1\leq j\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\langle u_n(t), e_j\rangle &= \lim_{n\to\infty}\langle\int_0^1 G(t,s)f_n(s)ds, e_j\rangle\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \langle G(t,s)f_n(s), e_j\rangle ds\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \langle f_n(s), G(t,s)e_j\rangle ds\\
&= \lim_{n\to\infty}\langle f_n(.), G(t,.)e_j\rangle\\
&= \langle f(.), G(t,.)e_j\rangle \ (car\ G(t,.)e_j \in L^\infty(I,\mathbb{R}^n)\ et\ f_n \rightharpoonup f)\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \langle f(s)ds, G(t,s)e_j\rangle ds\\
&= \lim_{n\to\infty}\langle\int_0^1 G(t,s)f(s)ds, e_j\rangle.
\end{aligned}$$

D'où, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds = w(t)$.
Par l'unicité de la limite, $u = w$. Donc $\mathcal{K}$ est compact dans $C^1(I,\mathbb{R}^n)$.
Soit $x(.) \in \mathcal{K}$ on a, pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}
\|\dot{z}(t)\| &= \|\int_0^1 \frac{dG}{dt}(t,s)f(s)ds\|\\
&\leq \int_0^1 |\frac{dG}{dt}(t,s)|\|f(s)\|ds\\
&\leq \int_0^t \ddot{r}(s)ds\\
&= \dot{r}(t) - \dot{r}(0)\\
&= \dot{r}(t).
\end{aligned}$$

Donc, pour presque tout $t \in I$

$$\begin{aligned}
\sup\{v, v\in\Gamma(t,z(t),\dot{z}(t))\} &\leq m(t) + n(t)\|\dot{z}(t)\|\\
&\leq m(t) + n(t)\dot{r}(t)\\
&= \ddot{r}(t).
\end{aligned}$$

Alors, de la Proposition 5.1, il existe une application continue $g : \mathcal{K} \longrightarrow L^1(I,\mathbb{R}^n)$ telle que $g(z)(t) \in \Gamma(t,z(t),\dot{z}(t))$, *p.p.*
On défini la multi-application $\psi : \mathcal{K} \rightrightarrows C^1(I,\mathbb{R}^n)$ par

$$\psi(x) = \int_0^1 G(t,s)g(x)(s)ds. \tag{5.10}$$

ψ est continue. En effet, soit $(x_n) \subset \mathcal{K}$ telle que $x_n \longrightarrow x$ dans $C^1(I,\mathbb{R})$ et puisque

$\sup_{t,s\in[0,1]} |G(t,s)| \leq 1$ on a,

$$\begin{aligned}\|\psi(x_n)(t) - \psi(x)(t)\| &= \| \int_0^1 G(t,s)g(x_n)(s)ds - \int_0^1 G(t,s)g(x)(s)ds\| \\ &\leq \int_0^1 |G(t,s)|\|g(x_n)(s) - g(x)(s)\|ds \\ &\leq \int_0^1 \|g(x_n)(s) - g(x)(s)\|ds.\end{aligned}$$

D'où, $\|\psi(x_k) - \psi(x)\|_C \leq \|g(x_k) - g(x)\|_1$.

D'autre part on a,

$$\begin{aligned}\|\dot{\psi}(x_n)(t) - \dot{\psi}(x)(t)\| &\leq \int_0^1 |\frac{dG}{dt}(t,s)|\|g(x_n)(s) - g(x)(s)\|ds \\ &\leq \int_0^1 \|g(x_k)(s) - g(x)(s)\|ds.\end{aligned}$$

D'où $\|\dot{\psi}(x_k) - \dot{\psi}(x)\|_C \leq \|g(x_k) - g(x)\|_1$. donc, $\|\psi(x_n) - \psi(x)\|_{C^1} \leq \|g(x_n) - g(x)\|_1$, et puisque g continue, $\lim_{n\to\infty} \|g(x_n) - g(x)\|_1 = 0$.

D'où $\psi(x_k) \longrightarrow \psi(x)$ dans $C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Par conséquent, ψ est continue.

Maintenant on va montrer que $\psi(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$.

Pour tout $x(.) \in \mathcal{K}$ on a $g(x)(t) \in \Gamma(t, x(t), \dot{x}(t))$ p.p cela implique que

$$\begin{aligned}\|g(x)(t)\| &\leq m(t) + n(t)\|\dot{x}(t)\| \\ &\leq \|\ddot{r}(t)\|,\ p.p,\end{aligned}$$

alors, $g(x) \in S$, d'où, $\psi(x) \in \mathcal{K}$. Par conséquent, d'après le théorème de point fixe de Schauder Théorème 1.10, il existe un point fixe $v_* \in \mathcal{K}$ tel que, $v_* = \psi(v_*)$. Alors, on obtient

$$v_*(t) = \int_0^1 G(t,s)g(v_*)(s)ds,$$

et

$$\begin{aligned}\dot{v}_*(t) &= \int_0^1 \frac{dG}{dt}(t,s)g(v_*)(s)ds \\ &= \int_0^t g(v_*)(s)ds.\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}\ddot{v}_*(t) &= \frac{d}{dt}\int_0^t g(v_*)(s)ds \\ &= g(v_*)(t).\end{aligned}$$

De plus $v_*(1) = 0,\ \dot{v}_*(0) = 0$.

Comme $g(v_*)(t) \in \Gamma(t, v_*(t), \dot{v}_*(t))$, on aura , $\ddot{v}_*(t) \in \Gamma(t, v_*(t), \dot{v}_*(t))$ p.p sur I, c'est à dire que v_* est une solution du problème (5.6). Cela implique que,

$$\begin{aligned} \ddot{v}_*(t) &\in \Phi(t, v_*(t), \dot{v}_*(t)) \\ &= -g(t) + F(t, v_*(t) + x_g, \dot{v}_*(t) + x_g),\ p.p\ sur\ I. \end{aligned}$$

On définit $x_*(t) = v_*(t) + x_g(t)$, $t \in I$.

On a $\dot{x}_*(t) = \dot{v}_*(t) + \dot{x}_g(t),\ t \in I$, $x_*(1) = v_*(1) + x_g(1) = 0$ et $\dot{x}_*(0) = \dot{v}_*(0) + \dot{x}_g(0) = 0$.

Donc,

$$\begin{aligned} \ddot{x}_*(t) &= \ddot{v}_*(t) + g(t) \\ &\in F(t, v_*(t) + x_g, \dot{v}_*(t) + x_g) \\ &= F(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)). \end{aligned}$$

Alors, on trouve que $x_*(.)$ avec $\dot{x}_*(0) = 0$ et $x_*(1) = 0$ est une solution de l'inclusion $(\mathcal{P}'(F))$.

$\square$

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Le travail présenté dans ce mémoire est étudié dans un espace de dimension finie. Il est réparti en deux parties.

Dans la première, nous montrons des théorèmes d'existence de solutions globales et locales pour les inclusions différentielles du premier ordre, avec une perturbation à valeurs non vides fermées possiblement non bornées. Des théorèmes de relaxation sont aussi donnés, où, dans la preuve, nous utilisons le concept de $(\rho - H)$-lipschitzien. Ces résultats sont pris du travail de Tolstonogov [31], qui est généralisé aux cas d'un espace de Banach de dimension infinie dans [32], avec un changement des hypothèses ainsi que dans les techniques utilisées dans les démonstrations.

Dans le dernier chapitre nous avons essayé de généraliser le théorème d'existence des solutions globales au cas des inclusions différentielles du second ordre avec des conditions aux limites spécifiques.

Les perspectives sont

- de démontrer l'existence de solutions locales pour les inclusions différentielles du second ordre mentionnées dans ce mémoire.
- de démonter le théorème de relaxation pour les inclusions différentielles du seconde ordre.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Attouch and B. R. J. Wets, *Quantitative stability of variational systems : I. The epigraphical distance*, Trans. Amer. Math. Soc. 328 (2), 695–729 (1991).

[2] J. P. Aubin, A. Cellina, *Differnetial inclusions set-valued maps and viability theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New york Tokyo (1984).

[3] J. P. Aubin, H. Frankawska, *Set-valued Analysis*, Birkhauser Bosten, MA. (1990).

[4] D. Azzam-Laouir, F. Bounama, *Second order differential inclusions with Lipschitz right-hand sides*, soumis.

[5] D. Azzam-Laouir, S. Lounis, *Existence of solutions for a class of second order differential inclusions*, J. Nonlinear Convex Anal., 6. (2), 339-346 (2005).

[6] D. Azzam-Laouir, A. Makhlouf, A. Thibault, *Existence and relaxation theorem for a second ordre differential inclusion.* Numer. Funct. Anal. Optim. 31, 1103-1119(2010).

[7] D. Azzam-Laouir, *Cours d'analyse convexe*, Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées, Université de Jijel (2014).

[8] D. Azzam-Laouir, *Polycopié, cours d'analyse multivoque*, Laboratoire de Mathématiques Pure et Appliquées, Université de Jijel (2009).

[9] D. Azzam-Laouir, *Policopié, cours de mesure et intégration*, Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées, Université de Jijel (2009).

[10] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, (1983).

[11] W. Boukrouk et N. Haddad, *Etude d'une inclusion différentielle du premier ordre*, mémoire de Master, Université Med Seddik Ben Yahia-Jijel (2011-2012).

[12] N. Bourbaki, *General Topology*, Hermann, Paris, 1940 ; Nauka, Moscow, (1968).

[13] F. H. Clarck, *Optimisation and Nonsmooth Analysis*, Nework, John Wily (1983).

[14] A. Filippov, *Classical solutions of differential equations with multivalued right-hand side*, Vestn. Mosk.Univ., Ser. Mat. Mekh. 3, 16–26 (1967).

[15] L. Gasinski et N. S. Papageorgiou, *Series in Mathematical Analysis and Applications, Volume 9 :Nonlinear analysis*, National University of Ireland, (2005).

[16] L. Gasiński et N. S. Papageorgiou, *Nonlinear analysis*, Ghapman and Hall/ CRC Taylor and Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore (2005).

[17] V. V. Goncharov and A. A. Tolstonogov, *Joint continuous selections of multivalued mappings with nonconvex values, and their applications*, Math. USSR-Sb. 73 (2), 319–339 (1992).

[18] S. Gutman, *Topological equavalence in the space of integral vector-valued functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 93 (1), 40–42 (1985).

[19] N.H. Hassan, *Topologé générale et espaces normés*, Dunod, (2011).

[20] C.J. Himmelberg, *Measurable relations*, Fund. Math. 87, 53–72 (1975).

[21] S. Hu et N. S. Papagorgiou, *Handbook of multivalued Analysis*,(I : theory), Kilwer, Dofrecht, the Netherfonds(1997).

[22] A. Ioffe, *Existence and relaxation theorems for unbounded differential inclusions*, J. Convex Anal. 13 (2), 353–362 (2006).

[23] M.Q. Jacobs, *Measurable multivalued and Lusin's Theorem*, Transactions of American Mathematical society. 134. (3), 471-481 (1968).

[24] A. Makhlouf, *Etude d'une classe d'inclusions différentielles avec second membre pseudo-Lipschitzien*, mémoire de Magister, Université Med Seddik Ben Yahia-Jijel (2010).

[25] S. A. Marano, *A remark on a second-order three-point boundary value problem*, J. Math. Anal. Appl. 183(3), 518-522 (1994).

[26] E. Michael, *Continuous selections avoiding a set*, Topology and its Applications, North-Holland 28, 195-213 (1988).

[27] J. A. Oguntuase, *On an inequality of Gronwall*, journal of inequalities in pure and applied Mathematics, 2 (1), Article 9 (2001).

[28] K. S. Papageorgiou et S. T. Kiritsy-Yaillourou, *Handbook of Applied Analysis*, Volume 19 (2008).

[29] A. Petuçel, *Operatorial inclusion*, House of the Book Science. Cluj-Napoca (2002).

[30] H. J. Sussmann, *Nonlinear controllabolity and optimal control*, Marcel Dekker, INC. Newyork(1990).

[31] A. A. Tolstonogov. *Differential inclusions with unbounded right, Haud side :Existance and relaxation theorems*, Proc. SteklovInst. Math. 291(1),190-207(2015).

[32] A .A. Tolstonogov. *Existance and relaxation of solutions to differential inclusion with unbounded right, Haud side Iin a Banach space*, Siberian Mathematical Journal, 58 (4), pp. 727–742, (2017).

[33] A. A. Tolstonogov, Scorza-Dragoni's *theorem for multi-valued mappings with variable domain of definition*, Math. Notes 48 (5), 1151–1158 (1990)

[34] J. Warga, *Optimal control of differential and Functional Equations*, Academic press.New York and London (1972).

[35] T. Wazewski, *Sur une généralisation de la notion des solutions d'une équation au contingent*, Bull. Acad.Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 10 (1), 11–15 (1962).

[36] E. Zeidler, *Non linear Fonctional Analysis and its Applications*, (I : Fixed point theorems), Springer-Verlag New York(1986).