République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel
Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....

№ de séries : ....

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse Fonctionnelle.

Thème

Sur le processus de la rafle dépendant du temps et de l'état

Présenté par :

– Bouhachek Sabah
– Bounneche Ahlam

devant le jury :

Président :	N. ARADA	M.C.A Université de Jijel
Encadreur :	F. SELAMNIA	M.A.A Université de Jijel
Examinateur :	I. BOUTANA	M.A.A Université de Jijel

Promotion **2017/2018**

Remerciements

Nous commençons par remercier Dieu le tout puissant, de nous avoir à donné courage, volonté et patience pour mener bon terme ce travail.
Nous remercions également nos familles de nous avoir soutenu en tout temps.
On tient particulièrement à témoigner nos profonds et vifs remerciements à Mme F. Selamnia, d'avoir accepté de nous encadrer sur le thème, de nous avoir conseillé judicieusement, orienté, encouragé et de nous avoir apporté une attention tout au long de ce travail. C'est avec un grand plaisir que nous adressons nos remerciements à Mr N. Arada, pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant de présider le jury.
Mme I. Boutana, pour l'honneur qu'elle fait en acceptant d'examiner ce travail.
Nous remercions tous les enseignants de département du Mathématiques qui nous ont enseigné tout au long de ces années.

Sabah et Ahlam

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le processus de la rafle a été introduit pour la première fois par J. J. Moreau qui a exprimé d'un point mathématique le processus sous la forme de l'inclusion différentielle

$$-\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) \text{ p.p. dans } [0,T], \; u(0) = u_0 \in C(0), \tag{1}$$

où $u(t)$ est la fonction de l'état à l'instant t, u_0 la donnée initiale exprimant la position à l'instant $t_0 = 0$ et $N(C(t), u(t))$ désigne le cône normal extérieur de l'ensemble dépendant du temps $C(t)$. J. J. Moreau a expliqué dans une série de travaux [15–18] que ce problème modélise des phénomènes d'élasto-plasticité et de dynamique.

C'est donc, le premier résultat d'existence de solution pour le processus de la rafle. Depuis, divers autres travaux ont été développés afin d'obtenir des résultats d'existence de solution dans divers autres contextes. Une première direction consiste à ajouter une perturbation comme suit :

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) + F(t, u(t)), p.p. \; t \in [0,T] \\ u(t) \in C(t) \;\; \forall t \in [0,T] \\ u(0) = u_0 \in C(0), \end{cases} \tag{2}$$

où $F : I \times E \rightrightarrows E$ est une multi-application à valeurs non vides convexes compactes.

L'équation (1) est le cas le plus simple du processus de la rafle introduit par J. J. Moreau vers les années 70 (voir [15]).

L'objectif de ce mémoire est de présenter le théorème d'existence de solution pour une inclusion différentielle.

Notre travail est partagé en trois chapitres.

Dans le premier, on donne toutes les définitions et les notions de base ayant été utilisées tout au long de ce travail.

Le deuxième chapitre vise à comprendre le concept de cône et ses propriété, et de donner quelques définitions des ensembles prox-réguliers.

Dans le troisième chapitre nous nous intéressons à l'étude de l'existence et l'unicité de solution pour une inclusion différentielle du premier ordre dépendant du temps et de l'état, gouvernée par un cône normal proximal dans un espace de Hilbert, de la forme

$$(P)\begin{cases}-\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)), \text{p.p. t} \in \text{I},\\ u(t) \in C(t,u(t)),\ \forall t \in I,\\ u(0) = u_0,\end{cases}$$

où $N_{C(t,u(t))}(u(t))$ désigne le cône normal proximal à $C(t,u(t))$ au point $u(t)$ avec $C : I \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides, boule compacte et r-prox-réguliers et $u_0 \in C(0,u_0)$. D'autre part nous montrons l'existence de solution d'une généralisation d'inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par le cône normal proximal avec une perturbation multivoque, de la forme suivante

$$(P_F)\begin{cases}-\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t) + F(t,u(t)),\ p.p.\, t \in I,\\ u(t) \in C(t,u(t)), \forall t \in I,\\ u(0) = u_0,\end{cases}$$

où il a les mêmes conditions que l'inclusion différentielle (P) avec $F : I \times H \rightrightarrows H$ une multifonction semi continue supérieurement à valeurs non vides, convexes et fermées.

CHAPITRE 1

NOTATIONS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Nous commençons par introduire les outils et les notions de base nécessaires. Ce chapitre comprend les notations, des rappels d'analyse fonctionnelle, des rappels sur la topologie faible et faible* et en finalement quelques notions des multi-applications.

1.1 Notations générales

Tout au long de ce travail, nous utilisons les notations suivantes

— $\mathbb{K}$ corps commutatif ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

— $\mathbb{R}^n$ l'espace Euclidien réel de dimension n.

— $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

E espace de Banach, E' son dual topologique, $\langle ., . \rangle$ leur produit de dualité et $\|.\|$ la norme de E.

— $\sigma(E, E')$ la topologie faible sur E.

— $\sigma(E', E)$ la topologie faible* sur E'.

— $\overline{\mathbf{B}}_E(0, r)$ la boule fermée de E de centre 0 et de rayon r, $\overline{\mathbf{B}}_E$ la boule unité fermée de E et $\mathbf{S}_E$ la sphère unité de E.

— Si A est un sous ensemble de E alors $\overline{A}$ est la fermeture de A.

Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. On note par

— $\mathbf{C}(I, E) = \mathbf{C}_E(I)$ l'espace de Banach des applications continues $u : I \to E$, muni de la norme sup, i.e., $\|u(\cdot)\|_{\mathbf{C}} = \sup_{t\in I}\|u(t)\|$, et $\mathbf{C}^1(I,E) = \mathbf{C}^1_E(I)$ l'espace de Banach des applications continues $u : I \to E$ ayant une dérivé continue, muni de la norme

$$\|u(\cdot)\|_{\mathbf{C}^1} = \max\{\max_{t\in I}\|u(t)\|, \max_{t\in I}\|\dot{u}(t)\|\}.$$

— $p.p$ presque partout.

— $\mathbf{L}^p(I,E) = \mathbf{L}^p_E(I)$ $\big(p \in [1,+\infty[\big)$ l'espace quotient de Banach des applications $u : I \to E$ mesurables et telles que $\int_I \|u(t)\|^p dt < +\infty$, muni de la norme

$$\|u(.)\|_p = \|u(.)\|_{\mathbf{L}^p} = \left(\int_I \|u(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

— $\mathbf{L}^\infty(I,E) = \mathbf{L}^\infty_E(I)$ l'espace quotient de Banach des applications $u : I \to E$ essentiellement bornées sur E, muni de la norme

$$\|u(.)\|_\infty = \|u(.)\|_{\mathbf{L}^\infty} = \inf\Big\{c \geq 0 :\ \|u(t)\| \leq c,\ p.p.\text{ sur } I\Big\}.$$

— Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$ est l'espace de Sobolev muni de la norme $\|.\|_{m,p}$ définie par

$$\|u(.)\|_{m,p} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m}\|D^\alpha u\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}\ si\ 1 \leq p < \infty$$

$$\|u(.)\|_{m,\infty} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m}\|D^\alpha u\|_\infty\ si\ p = \infty.$$

— $\rightharpoonup$ convergence faible.

— $\rightharpoonup^*$ convergence faible*.

— $D(f)$ domaine (effectif) de la fonction f.

— $dom(F)$ domaine (effectif) de multi-application F.

Dans le cas où X est un espace topologique, la plus petite tribu contenant la topologie de X, autrement dit, la tribu engendrée par la topologie de X est appelée tribu Borélienne sur X et est notée $\mathcal{B}(X)$.

— $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble de voisinage de x.

— $P(X)$ l'ensemble de partie de X.

Soit H un espace de Hilbert et soit A un sous ensemble fermé pas nécessairement convexe de H. On note par

— $N(C(t),u(t)) = N_{C(t)}(u(t))$ cône normal proximal à $C(t)$ au point $u(t)$.

— $P_A(x)$ la projection de $x \in H$ sur A.

— $N_A(y)$ le cône normal au point y à A.
— $int(A)$ l'intérieur de l'ensemble A.
— $co(A)$ l'enveloppe convexe de A.
— $\overline{co}(A)$ l'enveloppe convexe fermé de A.

1.2 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

Pour plus de détails se référer à [6, 9, 19, 20]

1.2.1 Espace topologique

Définition 1.2.1. *On appelle espace topologique un couple $(X, \mathcal{T})$ où X est un ensemble et $\mathcal{T}$ est une famille de parties de X, appelées ouverts, vérifiant les propriétés suivantes*

- *$\emptyset, X$ sont des ouverts.*
- *Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

C'est à dire

$\forall\, (\mathcal{T}_i)_{i=\overline{1,n}} \in \mathcal{T},\, \underset{i=1}{\cap} \mathcal{T}_i \in \mathcal{T}.$

- *Toute réunion (quelconque) d'ouverts est un ouvert.*

C'est à dire

$\forall\, (\mathcal{T}_i)_{i=\overline{1,n}} \in \mathcal{T},\, \underset{i=1}{\cup} \mathcal{T}_i \in \mathcal{T}.$

Exemple 1.2.1.

1) *L'ensemble $\mathcal{T}_d = P(X)$ formé par l'ensemble des parties de X définit une topologie appelée la topologie discrète. Un espace muni de la topologie discrète est appelé un espace discret.*
2) *L'ensemble $\mathcal{T}_g = \{\emptyset, X\}$ définit une topologie appelée la topologie grossière.*
3) *Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des parties constituées d'unions d'intervalles ouverts et de l'ensemble vide définit une topologie appelée la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.*

Définition 1.2.2. *On appelle complémentaire de A dans X et on note A^c lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté l'ensemble $\left\{x \in X,\ x \notin A\right\}$.*

Définition 1.2.3. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. On dit qu'une partie V de X est un voisinage de x si elle contient un ouvert qui contient x, c'est à dire*

$$V \text{ voisinage de } x \Leftrightarrow \exists\, U \in \mathcal{T},\ x \in U \subset V.$$

Définition 1.2.4. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et A un sous-ensemble de X.*

- *On dit que A est un ensemble ouvert si et seulement s'il est voisinage de chacun de ses points.*
- *On dit que A est un ensemble fermé de X, si son complémentaire est un ouvert.*

Définition 1.2.5. *Soient $(X,\mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B}$ une famille d'ouverts.*
On dit que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de $(X,\mathcal{T})$ si tout ouvert non vide de X est réunion d'ouverts appartenant à $\mathcal{B}$.
En général, il n'y a pas unicité de la base d'ouverts.

Définition 1.2.6. *Soient $(X,\mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. On appelle base de voisinages de x toute famille $\mathcal{B}(x)$ de voisinages de x telle que pour tout voisinage V de x, il existe $W \in \mathcal{B}(x)$ tel que $W \subset V$.*
Notez que si $\mathcal{B}(x)$ est une base de voisinages de x alors on a

$$\mathcal{V}(x) = \Big\{V \subset X \text{ il existe } W \in \mathcal{B}(x) \text{ avec } W \subset V\Big\}.$$

Définition 1.2.7.

- *On dit que x est un point d'accumulation de A si tout voisinage de x dans X contient un point de A distinct de x lui même.*
- *On dit qu'un point $a \in A$ est un point isolé dans A s'il existe un voisinage V de a dans X tel que $V \cap A = a$.*

Définition 1.2.8.

- *On dit que x est adhérent à A lorsque tout voisinage de x rencontre A.*
- *L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'adhérence de A et se note $\overline{A}$, est le plus petit fermé qui contient A.*

Corollaire 1.2.1. *Une partie A de X est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.*

Définition 1.2.9. *On dit que x est intérieur à A si A est un voisinage de x, l'ensemble des points intérieurs à A s'appelle l'intérieur de A et se note $\overset{\circ}{A}$, est le plus grand ouvert inclue dans A.*

Définition 1.2.10.

- *On dit que x est un point frontière de A si $x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{A^c}$.*
- *L'ensemble des points frontière de A s'appelle la frontière de A et se note $F_r(A)$.*

Proposition 1.2.1. *On a $F_r(A) = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$.*

Définition 1.2.11. *On dit que X est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. C'est à dire, si on peut énumérer ses points en une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ce qui implique notamment que $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$) c'est le cas de $\mathbb{N}$ lui-même ou de $\mathbb{N}^*$, de $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Q}$, ou encore des entiers pairs, ou de toute suite strictement croissante d'entiers.*

Définition 1.2.12. *On dit qu'une partie A est dense dans X si $\overline{A} = X$.*

Définition 1.2.13. *On dit qu'un espace topologique est séparable s'il admet une partie dénombrable et dense.*

Définition 1.2.14. *On dit qu'un point l de X est limite de la suite $(x_n)_{n>0}$ si pour tout voisinage V de l dans X, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$ on ait, $x_n \in V$.*

Définition 1.2.15. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit que X est séparé, si quelque soient deux éléments distincts $x, y \in X$, il existe V_x voisinage de x et V_y voisinage de y tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$.*

Définition 1.2.16. *On appelle espace de Hausdorff tout espace vectoriel topologique séparé.*

Proposition 1.2.2. *Soit X un espace topologique séparé. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite l, cette limite est unique. On dit alors que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l quand n tend vers $+\infty$, et on note : $\underset{n\longrightarrow+\infty}{lim} x_n = l$.*

Définition 1.2.17. *Soient $(X, \mathcal{T}_1), (Y, \mathcal{T}_2)$ deux espaces topologiques et $f : X \to Y$*

- *On dit que f est continue au point $x_0 \in X$ si et seulement si*

$$\forall\, W \in \mathcal{V}(f(x_0)), \exists\, V \in \mathcal{V}(x_0) \;/\; f(V) \subset W \Leftrightarrow \forall\, W \in \mathcal{V}(f(x_0)),\; f^{-1}(W) \in \mathcal{V}(x_0).$$

- *On dit que f est séquentiellement continue au point $x_0 \in X$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ de point de X convergeant vers x_0, la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x_0)$. Dans un espace métrique la continuité est équivalent à la continuité séquentielle.*
- *On dit que f est continue sur X si elle est continue en chaque point de X.*

Définition 1.2.18. *Une distance sur un ensemble X est une application d définie sur $X \times X$ à valeurs dans $[0, +\infty[$ vérifiant, pour tous x, y et z dans X*

1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $d(x, y) = d(y, x)$

3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Définition 1.2.19. *Un espace métrique est un ensemble muni d'une distance.*

Exemple 1.2.2. *Sur $\mathbb{R}$, la distance usuelle est définie par $d(x, y) = |x - y|$.*

Définition 1.2.20. *Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une suite (x_n) d'éléments de X est une suite de Cauchy si*
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Définition 1.2.21. *Soient* (X, d) *et* (T, d') *des espaces métriques, et soit* $f : X \to T$ *une application.* f *est dite Lipschitzienne de constante (ou : de rapport)* λ *s'il existe* λ *réel* ≥ 0 *tel que :*

$$\forall\, x \in X, \forall\, y \in X : d'(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y).$$

Définition 1.2.22. *Soit* E *un espace de Banach. Une fonction* $f : [a, b] \to E$ *est dit absolument continue si* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ *tels que pour tout partitions dénombrable de l'intervalle* $[a, b]$ *par des intervalles disjoints* $[a_k, b_k]$ *vérifiant*

$$\sum_{k \geq 0} (b_k - a_k) < \delta,$$

on a

$$\sum_{k \geq 0} \| f(b_k) - f(a_k) \| < \varepsilon.$$

Proposition 1.2.3. *Soient* E *un espace de Banach et* $f \in \mathbf{L}^1(I, E)$. *Alors* f *est absolument continue si et seulement si il existe une fonction* $g \in \mathbf{L}^1(I, E)$ *telle que*

$$f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)ds, \forall t \in I.$$

Définition 1.2.23. *Soit* E *un espace de Banach. Une fonction* $f : [a, b] \to E$ *est absolument continue si et seulement si*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \dot{f}(t)dt.$$

Remarque 1.2.1.

- *Toute fonction absolument continue est continue et à variation bornée.*
- *Toute fonction Lipschitzienne est absolument continue.*
- *Toute fonction absolument continue est uniformément continue.*

Définition 1.2.24. ***(Équicontinuité)*** *Soient* (X, d) *et* (Y, d') *deux espace métrique. Soit* $\mathcal{F}(X, Y)$ *l'ensembles des toutes les applications* $f : X \to Y$. *Une partie* A *de* $\mathcal{F}(X, Y)$ *est dite équicontinue en* $x \in A$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in X, \forall f \in A, \text{ tel que d(x, y)} \leq \eta \Rightarrow \text{d}'(\text{f(x)}, \text{f(y)}) \leq \varepsilon.$$

A est dite équicontinue sur X *si elle est équicontinue pour tout* $x \in A$.

Définition 1.2.25. *Un sous ensemble A de X est dit*

- *Compact si de tout recouvrement ouvert de A on peut extraire un sous recouvrement finie.*
- *Séquentielement compact si toute suite de point de A admet une sous-suite qui converge vers un point de A.*
- *Relativement compact si son adhérence est compacte.*
- *Relativement séquentiellement compact si tout suite de A admet une sous suite qui converge vers un point de X.*

Définition 1.2.26. *Soit X un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une norme sur X est une application $\|.\| : X \to \mathbb{R}_+$ vérifiant pour x et y dans X et λ dans $\mathbb{K}$:*

1) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(l'inégalité triangulaire)*

Définition 1.2.27. *Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé un espace vectoriel normé.*

Exemple 1.2.3.

1) L'application $x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{R}$.

2) L'application $z \mapsto |z|$ est une norme sur $\mathbb{C}$.

3) Dans $\mathbb{R}^n$, on définit les trois normes suivantes : si $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ est dans $\mathbb{R}^n$

$$\|x\|_1 = |x_1| + ... + |x_n|$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|_\infty = max(|x_1|, ...|x_n|) .$$

Définition 1.2.28. *On appelle espace préhilbertien réel le couple constitué par un espace vectoriel réel X et par un produit scalaire $\langle ., . \rangle$ sur X. On le notera $\langle ., . \rangle$.*
Les espaces de dimension finie sont, c'est de beaucoup préférable, appelés espaces euclidiens.

Définition 1.2.29.

- *Un espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy de X converge dans X.*
- *Un espace vectoriel normé complet est appelé un espace de Banach.*

Définition 1.2.30. *On dit qu'un espace métrique est séparable s'il existe un sous-ensemble dénombrable et dense.*

Définition 1.2.31. *Un espace vectoriel topologique X est dit localement convexe si 0_X admet un système de voisinage convexes.*

Définition 1.2.32. *Soient E un espace de Banach, E' son dual topologique. On note par E'' le bidual de E, i.e. l'espace des fonctions linéaires continues définies sur E'.*

Définition 1.2.33. *Soit X un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Un produit scalaire sur X est une application $\psi : X \times X \to \mathbb{K}$ tel que $\forall x, x', y \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a*

(i) $\psi(x,y) = \overline{\psi(y,x)}$ *(ou $\psi(x,y) = \psi(y,x)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).*

(ii) $\psi(x + x', y) = \psi(x,y) + \psi(x', y)$.

(iii) $\psi(\lambda x, y) = \lambda\psi(x,y)$.

(iv) $\psi(x,x) \geq 0$ *et* $\psi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$ *(définie positive).*

On note $\psi(x,y)$ par $\langle x, y\rangle$.

Définition 1.2.34. *Soit X un espace vectoriel et $\langle .,. \rangle$ un produit scalaire sur X, on appelle espace préhilbertien tout espace vectoriel muni d'un produit scalaire.*

Définition 1.2.35. *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet.*

1.2.2 Ensembles convexes

Pour plus de détails se référer à [25]

Définition 1.2.36. *Soit X un espace vectoriel, $x, y \in X$.*

- *On appelle segment fermé ou simplement segment d'extrémités x, y qu'on note $\Big[x, y\Big]$ l'ensemble*

$$\Big\{\lambda x + (1-\lambda)\,y,\ 0 \leq \lambda \leq 1\Big\}$$

.

- *Le segment ouvert est l'ensemble $\Big\{\lambda x + (1-\lambda)\,y,\ 0 < \lambda < 1\Big\}$ noté $]x, y[$.*

Définition 1.2.37. *Une partie A d'un espace vectoriel X est dite convexe si toutes les fois que deux points x, y appartiennent à A, le segment $[x, y]$ est continu dans A, c'est à dire*

$$\forall\, x, y \in A,\ \forall\, \lambda \in [0,1]\,, \lambda x + (1-\lambda)\,y \in A.$$

On pose

$$T_n = \left\{ (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n / \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leq 1 \right\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Et

$$T_n^{'} = \left\{ (\lambda_1, ..., \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

et remarquons $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in T_n$ *si* $(\lambda_1, ..., \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in T_n^{'}$ *et que*

$$\left(\lambda_1, ..., \lambda_n, 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) \in T_n^{'} \; si \; (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in T_n.$$

On dit que A *est convexe si et seulement si*

$$\forall \, (x_1, x_2, ...x_n) \in A, \, \forall \, (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in T_n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in A.$$

Propriétés 1.2.1. *Soit* X *un espace vectoriel.*

1) Les parties convexes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ *sont des intervalles.*

2) Tout sous espace vectoriel de X *est convexe.*

3) Soit A *une partie convexe de* X, $\mathring{A}$ *et* $\bar{A}$ *sont des parties convexes de* X.

4) Une intersection des parties convexes de X *est convexe.*

Définition 1.2.38. *Soit* A *un sous-ensemble d'un espace vectoriel* X.
• *On appelle enveloppe convexe de* A *que l'on note* $co\,(A)$ *l'intersection de tous les sous ensembles convexes de* X *contenant* A.

• $co\,(A)$ *est le plus petit convexe de* X *qui contient* A.

• *On appelle enveloppe convexe fermé de* A, *que l'on note* $\overline{co}\,(A)$ *l'intersection de tous les sous-ensembles convexes fermés de* X *contenant* A.

Théorème 1.2.1. *Soit* X *un espace vectoriel et* $A \subset X$, *alors*

$$co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i \, / k \in 0, 1, ...(\lambda_1....\lambda_{k+1}) \in T_k^{\prime}, x_1, ..., x_{k+1} \in A \right\}.$$

1.2.3 Fonctions convexes

Définition 1.2.39. *([10]) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que I un intervalle de $\mathbb{R}$.*

• *On dit que f est convexe si :* $\forall\, x, y \in I,\ \forall\, \lambda \in [0,1]$

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

.

• *On dit que f est strictement convexe si :* $\forall\, x, y \in I,\ \forall \lambda \in [0,1]$

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

.

• *On dit que f est concave si $-f$ est convexe.*

Définition 1.2.40. *Soient X un espace topologique, $f : X \to [-\infty, +\infty]$.*

• *On appelle domaine effectif de f qu'on note par $D\,(f)$ l'ensemble défini par*

$$D(f) = \Big\{x \in X / f\,(x) < +\infty\Big\}.$$

Définition 1.2.41. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.*

• *On appelle graphe de f qu'on note par $gph\,(f)$ l'ensemble défini par*

$$gph\,(f) = \Big\{\,(x,r) \in I \times \mathbb{R}\,/ f\,(x) = r\Big\}.$$

• *On dit que f est convexe si et seulement si son épigraphe*

$$epi(f) = \Big\{\,(x,r) \in I \times \mathbb{R}\,/ f\,(x) \leq r\Big\}$$

est un ensemble convexe.

Corollaire 1.2.2. *Soit f une fonction continue et dérivable sur $]a,b[$ tel que f' est croissante, alors f est convexe.*

Proposition 1.2.4.

• *Soit f une fonction convexe sur l'intervalle $[a,b]$ alors f est convexe sur $]a,b[$.*

• *Si f est convexe sur un intervalle I, elle est lipschitzienne sur tout segment inclus dans l'intérieur de I.*

Définition 1.2.42. *([2]) Soient (X, d) un espace métrique. On appelle fonction* ***polaire*** *associée à la fonction $f : X \to \overline{R}$, qu'on note f^*, la fonction définie sur le dual de X par*

$$\begin{aligned} f^* : & X' \to \mathbb{R} \\ & x' \mapsto f^*(x') = \sup_{x \in X}[\langle x', x\rangle - f(x)]. \end{aligned}$$

Définition 1.2.43. *([2]) Soient (X, d) un espace métrique et A un sous ensemble de X. On appelle fonction* ***indicatrice*** *de A, qu'on note $\delta(., A)$, la fonction définie par*

$$\begin{aligned} \delta(., A) : & X \to \overline{\mathbb{R}} \\ & x \mapsto \delta(x, A) = \begin{cases} 0 & x \in A \\ +\infty & x \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

Définition 1.2.44. *([2]) Soient (X, d) un espace métrique et A un sous ensemble de X. On appelle fonction* ***support*** *de A, qu'on note $\delta^*(., A)$, la fonction définie sur X' par*

$$\begin{aligned} \delta^*(., A) : & X' \to \overline{\mathbb{R}} \\ & x' \mapsto \delta^*(x', A) = \sup_{x \in A} \langle x', x\rangle . \end{aligned}$$

C'est la fonction polaire associée à $\delta(., A)$.

Preuve. Montrons que $\delta^*(x', A) = \sup\limits_{x \in A} \langle x', x\rangle$.
En effet

$$\begin{aligned} \delta^*(x', A) &= \sup_{x \in X}[\langle x', x\rangle - \delta(x, A)] \\ &= \sup[\sup_{x \in A}(\langle x', x\rangle - \delta(x, A)), \sup_{x \in X \setminus A}(\langle x', x\rangle - \delta(x, A))] \\ &= \sup[\sup_{x \in A} \langle x', x\rangle , \sup_{x \in X \setminus A}(\langle x', x\rangle - \infty)] \\ &= \sup[\sup_{x \in A}(\langle x', x\rangle , -\infty)] \\ &= \sup_{x \in A} \langle x', x\rangle . \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\delta^*(x', A) = \sup_{x \in A} \langle x', x\rangle .$$

□

Corollaire 1.2.3. *([2]) Soient X un espace vectoriel, A un sous ensemble convexe fermée de X, alors*

$$d(x,A) = \sup_{x' \in \overline{\boldsymbol{B}}_{X'}} [\langle x', x\rangle - \delta^*(x', A)].$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
d(x,A) &= \inf_{y\in A} \|x-y\| \\
&= \inf_{y\in A} (\sup_{x'\in \overline{B}_{X'}} \langle x', x-y\rangle) \\
&= \sup_{x'\in \overline{B}_{X'}} (\inf_{y\in A} \langle x', x-y\rangle) \\
&= \sup_{x'\in \overline{B}_{X'}} \inf_{y\in A} (\langle x', x\rangle - \langle x', y\rangle) \\
&= \sup_{x'\in \overline{B}_{X'}} (\langle x', x\rangle + \inf_{y\in A} (- \langle x', y\rangle) \\
&= \sup_{x'\in \overline{B}_{X'}} (\langle x', x\rangle - \sup_{y\in A} \langle x', y\rangle) \\
&= \sup_{x'\in \overline{B}_{X'}} (\langle x', x\rangle - \delta^*(x', A)).
\end{aligned}$$

□

Théorème 1.2.2. *([2]) Soient E un espace de Banach, A un sous ensemble de E et E' le dual de E, alors*

$$\overline{co}(A) = \left\{x \in E / \forall x' \in E', \langle x', x\rangle \le \delta^*(x', A)\right\},$$

où $\delta^*(., A)$ est la fonction support de A au point x'.

1.2.4 Fonctions semi continues

Soit (X, d) un espace métrique et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Définition 1.2.45. *f est semi continue inférieurement (s.c.i) au point $a \in X$ si et seulement si, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $h < f(a)$, il existe un voisinage V_a de a*
tel que $h < f(x)$, pour tout $x \in V_a$.
f est semi continue inférieurement sur X si et seulement si elle est semi continue inférieurement en tout point de X.

Définition 1.2.46. *f est semi continue supérieurement (s.c.s) au point $a \in X$ si et seulement si, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $h > f(a)$, il existe un voisinage V_a de a*

tel que $h > f(x)$, *pour tout* $x \in V_a$.
f *est semi continue supérieurement sur* X *si et seulement si elle est semi continue supérieurement en tout point de* X.

Définition 1.2.47. f *est continue au point* a *si et seulement si* f *est s.c.i et s.c.s au point* $a \in X$.

Remarque 1.2.2. *Si* f *est à valeurs réelles alors*

i) f *est semi continue inférieure au point* a *si et seulement si*

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, V_a \in \mathcal{V}(a),\; \forall\, x \in V_a \Rightarrow f(x) - f(a) > -\varepsilon.$$

ii) f *est semi continue supérieure au point* a *si et seulement si*

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, V_a \in \mathcal{V}(a),\; \forall\, x \in V_a \Rightarrow f(x) - f(a) < \varepsilon.$$

iii) f *est continue au point* a *si et seulement si*

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, V_a \in \mathcal{V}(a),\; \forall\, x \in V_a \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Définition 1.2.48. *Soit* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, *soit* $a \in X$. *Alors*

$$\underset{x \longrightarrow a}{lim \sup}\, f(x) = \inf_{w \in \mathcal{V}(a)} \left\{ \sup_{x \in w} f(x) \right\}$$

$$\underset{x \longrightarrow a}{lim \inf}\, f(x) = \sup_{w \in \mathcal{V}(a)} \left\{ \inf_{x \in w} f(x) \right\}.$$

Proposition 1.2.5. *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. *Alors*

$$f\, est\ s.c.i\ au\ point\ a \Leftrightarrow \underset{x \longrightarrow a}{lim \inf}\, f(x) \geq f(a)$$

$$f\, est\ s.c.s\ au\ point\ a \Leftrightarrow \underset{x \longrightarrow a}{lim \sup}\, f(x) \leq f(a).$$

Proposition 1.2.6. *Soient* (X, d) *un espace métrique et* $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. *Alors*

$$f \text{ est s.c.i} \Leftrightarrow \mathit{epi}(f) \text{ est fermé.}$$

1.2.5 Quelques notions de mesurabilité

Les résultats suivants sont pris de la référence [3, 8].

Définition 1.2.49. *Soit X un ensemble quelconque, une tribu (ou σ algèbre) sur X est une famille Σ de parties de X telle que*

1) $X \in \Sigma$

2) $A \in \Sigma,\ A^c \in \Sigma$

3) $A_n \in \Sigma, \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$

Le couple (X, Σ) est appelé espace mesurable et les éléments de Σ sont appelés ensembles mesurables.

Définition 1.2.50. *Soit (X, Σ) un espace mesurable, alors la fonction $\mu : \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une mesure sur X si*

1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) $\mu(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum\limits_{n} \mu(A_n)$ *pour toute famille dénombrable d'éléments de Σ deux à deux disjoints.*

- *Le triplet (X, Σ, μ) est appelé espace mesuré.*
- *Si $\mu(A) \geq 0$ pour tout $A \in \Sigma$, on dit que μ est une mesure positive ou que l'espace (X, Σ, μ) est positif.*
- *Si $\mu(A) < +\infty$ pour tout $A \in \Sigma$, on dit que μ est une mesure finie ou que l'espace (X, Σ, μ) est fini.*
- *Si X est un espace topologique, la mesure $\mu : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est appelée mesure Borélienne.*

Définition 1.2.51. *Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré positif et soit Z un sous ensemble de X, on dit que Z est μ-négligeable s'il existe $A \in \Sigma$ tel que $Z \subset A$ et $\mu(A) = 0$.*
On dit qu'une propriété sur X est vraie μ-presque partout (μ.p.p), si l'ensemble où elle n'est pas vérifiée est μ-négligeable.

Définition 1.2.52. *Soient X un espace topologique séparé et μ une mesure Borélienne, alors μ est dit régulière si pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert U et un fermé V de X tels que $V \subset A \subset U$ et $\mu(U/V) \leq \varepsilon$.*
Une mesure Borélienne finie et régulière est appelés mesure de Radon.

Définition 1.2.53. *La tribu μ-complétée de Σ notée Σ_μ est la tribu engendrée par Σ et les ensembles μ-négligeables, i.e*

$$\Sigma_\mu = \Big\{ A \cup Z \ / \ A \in \Sigma \text{ et } Z \text{ ensemble } \mu \text{ -négligeable} \Big\}.$$

La tribu Σ est dit complète si $\Sigma = \Sigma_\mu$, c'est-à-dire, si tout les ensemble μ-négligeable appartient à Σ.

Définition 1.2.54. *Soient (X, Σ, μ) un espace mesuré, T un ensemble et $f, g : X \to T$. On dit que $f = g$ μ-**presque partout** (et on note μ-p.p), si l'ensemble $\{x \in X/\ f(x) \neq g(x)\}$ est négligeable. C'est à dire*

$$\exists\, A \in \Sigma,\ \mu(A) = 0\ \wedge\ f(x) = g(x),\ \forall\, x \in \Sigma \backslash A.$$

Définition 1.2.55. *Soit (X, Σ) un espace mesurable. On dit que f est μ-intégrable, si $\int\limits_X |f|\, d\mu < +\infty$.*

Définition 1.2.56. *On dit que l'espace (X, Σ, μ) est un espace mesuré complet avec une mesure σ-finie si μ est positive et σ-finie et Σ est complète.*

1.3 Rappels sur la topologie faible et faible*

1.3.1 Topologie faible

Définition 1.3.1. *Soit E un espace de Banach et E' son dual topologique, i.e.*
$E' = \Big\{f : E \longrightarrow \mathbb{R},\ f\, linéaire\ continue\Big\} = \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = \mathcal{L}(E)$.

$$\begin{array}{rcl} f : E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle f, x \rangle \end{array}$$

(On note l'image de x par f, $\langle f, x \rangle$ au lieu de $f(x)$) avec

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in \overline{B}_E} |\langle f, x \rangle|$$

tel que, $\overline{B}_E$ est la boule unité fermée de E.
Soit $f \in E'$, et considérons la fonction

$$\begin{array}{rcl} \varphi_f : E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \varphi_f(x) = \langle f, x \rangle. \end{array}$$

Lorsque f décrit E' nous obtenons une famille d'applications $(\varphi_f)_{f \in E'}$ définies sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On appelle topologie faible sur E qu'on note $\sigma(E, E')$ la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f \in E'}$. Cette topologie est séparé.

Proposition 1.3.1. *Soit $x_0 \in E$, alors si on considère tous les ensembles de la forme*

$$V = \Big\{x \in E, |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon, \forall\, i \in I\Big\}$$

òu I est fini, $f_i \in E'$ et $\varepsilon > 0$. Ces ensembles constituent une base de voisinage de x_0 pour la topologie $\sigma(E, E')$.

Notation 1.3.1. *$x_n \rightharpoonup x$ veut dire $(x_n)_n$ converge faiblement ou $\sigma(E, E')$ vers x*
$x_n \to x$ veut dire $(x_n)_n$ converge fortement vers x, i.e. $\|x_n - x\| \to 0$.

Proposition 1.3.2. *Soit $(x_n)_n$ une suite de points de E. Alors*

1) $x_n \rightharpoonup x \Longleftrightarrow \langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall\, f \in E'$.

2) $x_n \to x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$.

3) Si $x_n \rightharpoonup x$ alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf\limits_{n\to\infty}\|x_n\|$.

4) Si $x_n \rightharpoonup x$ et si $f_n \to f$ fortement dans E', alors $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Proposition 1.3.3. *Lorsque E est de dimension finie, la topologie forte de E et la topologie faible $\sigma(E, E')$ coïncident.*

Théorème 1.3.1. ***(Théorème de Krein-Smŭlian)***
Soit E un espace de Banach et $A \subset E$. Si A est faiblement compact, alors $\overline{co}(A)$ l'est aussi.

Corollaire 1.3.1. *Si E est localement convexe alors E' séparé les points de E.*

1.3.2 Topologie faible*

Définition 1.3.2. *Soit E un espace de Banach, E' son dual topologique, muni de la norme $\|f\| = \sup\limits_{x\in\overline{B}_E(0,1)} |\langle f, x\rangle|)$, et soit E'' le dual de E' (bidual de E) muni de la norme $\|\zeta\| = \sup\limits_{f\in\overline{B}_{E'}(0,1)} |\langle \zeta, f\rangle|$.*
Nous avons une injection canonique $J : E \to E''$ entre E et E'', définie comme suite pour tout $x \in E$ fixé l'application

$$\begin{aligned} J_x : E' &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto J_x(f) = \langle J_x, f\rangle = \langle f, x\rangle \end{aligned}$$

est une forme linéaire continue sur E', c'est à dire, c'est un élément de E'',i.e. $J_x \in E''$, et

$$\begin{aligned} J : E &\to E'' \\ x &\mapsto J_x(f) = J(x) \end{aligned}$$

et nous avons

$$\langle J_x, f\rangle_{E'',E'} = \langle f, x\rangle_{E',E}, \ \forall x \in E, \ \forall\, f \in E'.$$

Il est clair que J *est linéaire continue (de plus c'est une isométrie). c'est à dire, qu'on peut toujours identifier* E *à un sous ensemble de* E''*(*J *bijection isométrique entre* E *et* $J(E)$*).*

• *Sur l'espace* E' *on connait déjà deux topologies, la topologie forte induite par la norme de* E' ($\|f\| = \sup\limits_{x\in \overline{B}_{E'}(0,1)} |\langle f, x\rangle|$) *et la topologie faible* $\sigma(E', E'')$ *(la topologie la moins fine rendant les applications* $(\varphi_\zeta)_{\zeta\in E''}$ *continues, avec pour tout* $\zeta \in E''$,

$$\begin{array}{rcl} \varphi_\zeta : E' & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \varphi_\zeta(f) = \langle \zeta, f\rangle_{E'',E'} \end{array}$$

On définit une troisième topologie sur E' *comme suit*
pour chaque $x \in E$, *on considère l'application*

$$\begin{array}{rcl} \Psi_x : E' & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \Psi_x(f) = \langle \Psi_x, f\rangle = \langle f, x\rangle_{E',E} \end{array}$$

Ψ_x *est une forme linéaire continue. Quand* x *parcourt* E *on obtient une famille de l'application* $(\Psi_x)_{x\in E}$ *définies sur* E' *à valeurs dans* $\mathbb{R}$.
La topologie la moins fine sur E' *rendant ces applications continues est appelée topologie faible* et notée* $\sigma(E', E)$.

Proposition 1.3.4. *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de points de* E'. *Nous avons*

1) $f_n \rightharpoonup^* f$ *((*f_n*) converge* $\sigma(E', E)$ *vers* f*)* $\Longleftrightarrow \langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, *pour tout* $x \in E$.

2) $f_n \to f \Rightarrow f_n \rightharpoonup^* f$.

3) $f_n \rightharpoonup f$ *((*f_n*) converge* $\sigma(E', E'')$*)* $\Rightarrow f_n \rightharpoonup^* f$.

4) Si $f_n \rightharpoonup^* f$ *alors* $(\|f_n\|)$ *est bornée et* $\|f\| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|f_n\|$.

5) $f_n \rightharpoonup^* f$ *et* $x_n \to x$ *fortement, alors* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$ *dans* $\mathbb{R}$.

Remarque 1.3.1. *La topologie faible** $\sigma(E', E)$ *est séparé.*

Proposition 1.3.5. *Si* E *est de dimension finie, les topologies forte* $\mathcal{T}_{E'}$, *faible* $\sigma(E', E'')$ *et faible** $\sigma(E', E)$*) coïncident sur* E'.

Théorème 1.3.2. ***(Banach-Aloaglu-Bourbaki)*** *Soit* E *un espace de Banach. Alors la boule unité fermée de* E' *est compact pour la topologie faible** $\sigma(E', E)$.

Théorème 1.3.3. ***(Aloaglu)*** *Soit E un espace de Banach séparable et soit $B \subset E'$, si B est borné pour la norme de E' et fermé pour la topologie $\sigma(E', E)$. Alors B est compact pour cette topologie.*

1.4 Multi-applications

Dans cette section, nous rappelons des notions de base, ainsi que certains résultats concernant les multi-applications. Pour plus ce détails [1–3, 23].

Définition 1.4.1. *Soient T, X deux ensembles non vide. On appelle multi-application (fonction multivoque ou multi-fonction) définie sur T à valeur dans X, toute application F définie sur T à valeurs dans $\mathcal{P}(X)$ (ensemble des parties de X), et on note*

$$F : T \longrightarrow \mathcal{P}(X) \text{ ou } F : T \rightrightarrows X.$$

Donc, $\forall\, t \in T$, $F(t)$ est un sous ensemble de X.

Définition 1.4.2. *Soit $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application.*

- *On appelle domaine (effectif) de la multi-application F qu'on note $dom\,(F)$, l'ensemble défini par*

$$dom(F) = \Big\{t \in T/\ F(t) \neq \emptyset\Big\}.$$

- *On appelle image de F qu'on note $Im(F)$, l'ensemble défini par*

$$Im(F) = \Big\{x \in X/\ \exists\, t \in T : x \in F(t)\Big\}.$$

Si $A \subset I$, on appelle image de A par F qu'on note $F(A)$, l'ensemble défini par

$$F(A) = \underset{t\in A}{\cup} F(t),$$

ce qui revient à écrire

$$F(A) = \Big\{x \in X/\ \exists\, t \in A : x \in F(t)\Big\}.$$

Ainsi

$$Im(F) = F(T).$$

- *On appelle graphe de F qu'on note $gph(F)$, le sous ensemble de $T \times X$ définie par*

$$gph(F) = \Big\{\,(t, x) \in T \times X/\ x \in F(t)\Big\}.$$

Proposition 1.4.1. *Soit $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application.*

- *Soit $F^{-1} : X \rightrightarrows T$ la multi-application définie par*

$$t \in F^{-1}(x) \Leftrightarrow x \in F(t) \Leftrightarrow (t,x) \in gph(F)\,.$$

Alors $(F^{-1})^{-1} = F$.

- *on a*

1) $dom(F^{-1}) = Im(F)$.

2) $Im(F^{-1}) = dom(F)$.

Corollaire 1.4.1. *Soit $F : T \rightrightarrows X$, pour tout $V \subset X$. On définit l'image réciproque large de V par la multi-application F par*

$$F^{-1}(V) = \Big\{t \in T : F(t) \cap V \neq \emptyset\Big\}.$$

1.4.1 Continuité des multi-applications

Définition 1.4.3. *Soit $A \subset X$, la distance d'un point $x \in X$ à A est donnée par*

$$d(x,A) = \inf_{a \in A} d(x,a).$$

- *Soient A, B deux sous ensembles de X. On appelle écart entre A et B et on le note $e(A,B)$, la quantité définie par*

$$e(A,B) = \sup_{x \in A} d(x,B) = \sup_{x \in A}(\inf_{y \in B} d(x,y))$$

avec la convention $\sup \emptyset = 0$ et $\inf \emptyset = \infty$.

- *On appelle distance de Hausdorff entre A et B et on la note $h(A,B)$ ou $\mathcal{H}(A,B)$, la quantité définie par*

$$h(A,B) = \max(e(A,B), e(B,A)).$$

Propriétés 1.4.1. *Soient A, B et C des sous-ensembles de X alors*

1) $e(A,\emptyset) = \infty$ si $A \neq \emptyset$.

2) $e(\emptyset,B) = 0$.

3) $e(A,B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$.

4) $h(A,B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$.

5) $e(A,C) \leq e(A,B) + e(B,C)$.

6) $h(A,C) \leq h(A,B) + h(B,C)$.

Définition 1.4.4. *Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de sous ensembles de* (X,d).
On appelle limite supérieure de la suite $(A_n)_n$, *le sous ensemble de* X *défini par*

$$\lim_{n\to\infty} sup\, A_n = \Big\{x \in X : \liminf_{n\to\infty} d(x,A_n) = 0\Big\}.$$

Et on appelle limite inférieure de la suite $(A_n)_n$, *le sous ensemble de* X *défini par*

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \Big\{x \in X : \lim_{n\to\infty} sup\, d(x,A_n) = 0\Big\}.$$

On dit que A *est limite de la suite* (A_n)*si*

$$A = \lim_{n\to\infty} sup\, A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Proposition 1.4.2. *Soit* $(A_n)_n$ *une suite de sous ensemble d'un espace métrique* (X,d). *Alors,* $\liminf_{n\to\infty} A_n$ *est l'ensemble des limites des suites* $(x_n)_n$ *tel que* $x_n \in A_n$, *et* $\limsup_{n\to\infty} A_n$ *est l'ensemble des points d'accumulation des suites* (x_n) *tel que* $x_n \in A_n$, *c'est à dire, l'ensemble des limites des sous suites* $(x_{n'})$ *tel que* $x_{n'} \in A_{n'}$.

Théorème 1.4.1. *Soit* $(A_n)_n$ *une suite de sous ensemble de* (X,d). *Alors*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 0} \overline{\bigcup_{m\geq n} A_m}\,.$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 0} \overline{\bigcap_{m\geq n} A_m}\,.$$

1.4.2 Semi continuité des multi-applications

Définition 1.4.5. *Soient* T *et* X *deux espaces topologiques et* $F : T \rightrightarrows X$ *une multi-application. On dit que* F *est semi continue supérieurement (s.c.s) au point* $t_0 \in T$, *si pour tout ouvert* U *de* X *contenant* $F(t_0)$ $(F(t_0) \subset U)$, *il existe un voisinage* Ω *de* t_0 *tel que* $F(\Omega) \subset U$, *c'est à dire* $F(z) \subset U$, $\forall\, z \in \Omega$.
On dit que F *est semi continue supérieurement sur* T *si elle est semi continue supérieurement en tout point* $t \in T$.

Définition 1.4.6. *On dit que* F *est semi continue inférieurement (s.c.i) au point* $t_0 \in T$, *si pour tout ouvert* U *de* X *vérifiant* $F(t_0) \cap U \neq \emptyset$, *il existe un voisinage* Ω *de* t_0 *tel que* $F(z) \cap U \neq \emptyset$, $\forall\, z \in \Omega$ *(i.e.,* $F^{-1}(U)$ *est un voisinage de* t_0*).*

On dit que F est semi continue inférieurement sur T si elle est semi continue inférieurement en tout point $t \in T$.

Définition 1.4.7. *On dit que F est continue au point $t_0 \in T$ si et seulement si elle est s.c.s et s.c.i. au point t_0, et F continue si et seulement si elle est s.c.s et s.c.i.*

Théorème 1.4.2. *Soit $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application semi continue supérieure à valeurs fermées. Alors le graphe de F est fermé.*

Corollaire 1.4.2. *Soit $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs non vides, avec X un espace compacte. Si le graphe de F est fermé alors F est s.c.s.*

1.4.3 Mesurabilité des multi-applications

Définition 1.4.8. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique.*
Soit $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application. On dit que F est Σ-mesurable si pour tout ouvert V de X, $F^{-1}(V) \in \Sigma$, avec

$$F^{-1}(V) = \left\{ t \in T \;/\; F(t) \cap V \neq \emptyset \right\}.$$

Il est intéressant d'avoir une caractérisation scalaire de la mesurabilité des multi-applications, c'est à dire peut on caractériser la mesurabilité d'une multi-application à partir de la mesurabilité de certaines fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. On s'intéresse essentiellement à deux types de fonctions, la fonction distance et la fonction support.

Proposition 1.4.3. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique séparable et soit $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application. Alors les assertions suivantes sont équivalent*

i) F est Σ-mesurable.

ii) Pour chaque $x \in X$, la fonction

$$\begin{array}{rcl} g_x : T & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & d(x, F(t)) \end{array}$$

est Σ-mesurable.

Corollaire 1.4.3. *Soient (T, Σ, μ) un espace mesuré avec Σ une tribu μ-complète et μ une mesure σ-finie et soit X un espace métrique séparable. Alors, pour toute multi-application $F : T \rightrightarrows X$ Σ-mesurable à valeurs fermées, il existe une μ-p.p plus grande multi-application $F_0 : T \rightrightarrows X$ Σ-mesurable à valeurs fermées et à images contenues μ-p.p. dans celles de F au sens suivant*

1) $F_0(t) \subset F(t)$ *μ-p.p. sur* T.

2) Pour toute autre multi-application $\widetilde{F} : T \rightrightarrows X$ *Σ-mesurable à valeurs fermées vérifiant* $\widetilde{F}(t) \subset F(t)$ *μ-p.p sur T, nous avons* $\widetilde{F}(t) \subset F_0(t)$ *μ-p.p. sur T. En particulier pour toute sélection Σ-mesurable f de F nous avons,* $f(t) \in F_0(t)$ *μ-p.p. sur T.*

Théorème 1.4.3. ***Théorème de Scorza Dragoni (Version multivoque)***
Soit T un espace métrique compact, (T, Σ, μ) un espace mesuré de Radon tel que $\mu \geq 0$, X un espace métrique séparable complet et Y un espace métrique compact. Soit $F : T \times X \rightrightarrows Y$ une multi-application de Carathéodory à valeurs fermées non vides, i.e.,

i) Pour chaque $t \in T$, $gph(F(t, .))$ est fermé dans $X \times Y$ ($F(t, .)$ est s.c.s).

ii) Pour chaque $x \in X$, $F(., x)$ est mesurable (admet une sélection mesurable).

Alors, il existe une multi-application $F_0 : T \times X \rightrightarrows Y$ telle que

1) $gph(F_0) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$.

2) Il existe une ensemble μ-négligeable N indépendant de (t, x) vérifiant $F_0(t, x) \neq \emptyset$ et $F_0(t, x) \subset F(t, x)$, $\forall\, t \in T \backslash N$ et $\forall\, x \in X$.

3) Pour toutes applications mesurables $u : T \to X$ et $v : T \to Y$ vérifiant $v(t) \in F(t, u(t))$ μ-p.p., nous avons $v(t) \in F_0(t, u(t))$ μ-p.p.

4) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $T_\varepsilon \subset T$ tel que $\mu(T \backslash T_\varepsilon) < \varepsilon$ et tel que le graphe de la restriction de F_0 à $T_\varepsilon \times X$ soit fermé (i.e., $F_{0 \backslash T_\varepsilon \times X}$ est semi continue supérieure).

Définition 1.4.9. ***(Multi-applications à graphes mesurables).***
Soient (T, Σ) un espace mesurable, Y et X deux espaces métriques.
Soit $f : T \times Y \to X$. On dit que f est une application de Carathéodory si

$$\begin{array}{rcl} f_y : T & \to & X \\ t & \mapsto & f_y(t) = f(t, y) \end{array}$$

est Σ-mesurable pour chaque $y \in Y$ fixé et

$$\begin{array}{rcl} f_t : Y & \to & X \\ y & \mapsto & f_t(y) = f(t, y) \end{array}$$

est continue sur Y pour chaque $t \in T$ fixé.
On dit aussi que f est séparément mesurable séparément continue.

Proposition 1.4.4. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique séparable et X un espace métrique. Soit $f : T \times Y \to X$ une application de Carathéodory, alors f est $(\Sigma \otimes \mathcal{B}(Y), \mathcal{B}(X))$-mesurable.*

Proposition 1.4.5. *Soit X un espace métrique séparable, $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs fermées. Alors, si F est Σ-mesurable le graphe de F appartient à $\Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$*

$$gph(F) = \Big\{(t,x) \in T \times X /\ x \in F(t)\Big\}.$$

Définition 1.4.10. *Soit $G \subset T \times X$. On appelle projection de G sur T l'ensemble $Proj_T(G)$ définie par*

$$Proj_T(G) = \Big\{t \in T : \exists\, x \in X,\ (t,x) \in G\Big\}.$$

Théorème 1.4.4. ***(Projection d'ensembles mesurables)***
Soient (T, Σ, μ) un espace mesuré, X un espace métrique. Alors, pour tout $G \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$ nous avons

$$Proj_T(G) \in \Sigma_\mu.$$

Σ_μ est la tribu complétée de Σ par rapport à la mesure μ.

Théorème 1.4.5. *Soient (T, Σ, μ) un espace mesuré avec μ σ-finie. On suppose que la tribu Σ est μ-complète. Soit $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs fermées. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

i) F *est* Σ*-mesurable.*

ii) $gph(F) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$.

iii) $F^{-1}(B) \in \Sigma$, *pour tout borélien* B *de* X.

iv) $F^{-1}(C) \in \Sigma$, *pour tout fermé* C *de* X.

Remarque 1.4.1. *Quand Σ est μ-complète, l'implication **ii)** $\Longrightarrow$ **i)** est vraie même si F n'est pas à valeurs fermées.*

Proposition 1.4.6. *Soient $(F_j)_{j \in J}$ une famille dénombrable de multi-applications définies sur T à valeurs dans X et soit $F, G : T \rightrightarrows X$ deux multi-applications telles que*

$$F(t) = \bigcap_{j \in J} F_j(t),\ \ G(t) = \bigcup_{j \in J} F_j(t)\ .$$

Alors,

1) Si les multi-applications F_j sont de graphes mesurables, F et G sont aussi de graphes mesurables.

2) Si Σ est complète et si les F_j sont Σ-mesurables à valeurs fermées alors F est Σ-mesurable.

Théorème 1.4.6. ***(Représentation de Castaing)*** *Soient (T, Σ) un espace mesurable et (X, d) un espace métrique séparable complet. Soit $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs fermées. Alors, F est $\Sigma-$mesurable si et seulement si dom$(F) \in \Sigma$ et il existe une suite $(f_n)_n$ d'applications $\Sigma-$mesurable (f_n : dom$(F) \to X$) telle que pour chaque $t \in$ dom(F) on a $F(t) = \overline{(f_n(t))_n}$.*
On dit que $(f_n)_n$ est une Représentation de Castaing de F.

Proposition 1.4.7. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, E un espace de Banach séparable et $F : E \rightrightarrows E$ une multi-application **s.c.s** à valeurs convexes fermées. Soit $(u_n(.))$ une suite d'applications continues définies sur T à valeurs dans E et $(v_n(.))$ une suite d'applications de $\mathbf{L}^1(T, E)$ converge faiblement vers $v(.)$ et que*

$$v_n(t) \in F(u_n(t)), \text{ p.p.}$$

Alors

$$v(t) \in F(u(t)), \text{ p.p.}$$

CHAPITRE 2

QUELQUES NOTIONS D'ANALYSE NON LINÉAIRE

Dans ce chapitre, nous présentons le concept de cône et ces types (cône polaire et cône normaux), quelques notions et propriété des ensembles r-prox réguliers, les définitions sur les dérivées directionnelles et classiques, ainsi que les propriété de l'espace convexe et uniformément lisse. En fin les théorèmes fondamentaux de la compacité et de la convergence dans un espace de Banach.

2.1 Généralité sur le cône

Les définitions et les résultats que nous allons énoncer sont pris des références [2, 11–13].

Définition 2.1.1. *Soient X un espace vectoriel, et A un sous ensemble de X. On dit que A est un cône si*

$$\forall x \in A,\ \forall \lambda \geq 0, \quad \lambda x \in A,$$

de plus si A est convexe on dit que A est un cône convexe.

Proposition 2.1.1. *Soient X un espace vectoriel, A un cône dans X. Alors*

$$A \textit{ est } \text{convexe} \Leftrightarrow \forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{A},\ \mathrm{x} + \mathrm{y} \in \mathrm{A}.$$

Preuve. **1.** Supposons que A est un cône convexe. Soit $x, y \in A$, on a

$$A \text{ convexe} \Rightarrow \lambda \mathrm{x} + (1-\lambda)\mathrm{y} \in \mathrm{A},\ \forall \lambda \in [0,1].$$

Pour $\lambda = \frac{1}{2}$ on obtient

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in A.$$

Puisque A est un cône convexe, alors

$$2(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) \in A \Rightarrow x + y \in A.$$

2. Supposons que A est un cône vérifiant $\forall x, y \in A$, $x + y \in A$. Soient $x, y \in A$, et $\lambda \in [0,1]$, on a

$$x \in A \ et \ \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda x \in A, \tag{2.1}$$

et

$$y \in A \ et \ (1-\lambda) \geq 0 \Rightarrow (1-\lambda)y \in A. \tag{2.2}$$

D'après(2.1) et(2.2) on obtient

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in A.$$

Autrement dit, A est un cône convexe.

□

Définition 2.1.2. *(**Conjugué et biconjugué**) Soient X un espace vectoriel normé, X' son dual topologique et A un cône de X.*
1) On appelle conjugué de A qu'on note A°, le sous ensemble de X' définie par

$$A^{\circ} = \{x' \in X' / \langle x', x\rangle \leq 0, \forall x \in A\}.$$

2) On appelle biconjugué de A qu'on note $A^{\circ\circ}$, le sous ensemble de X définie par

$$A^{\circ\circ} = \{x \in X / \langle x', x\rangle \leq 0, \quad \forall x' \in A^{\circ}\}.$$

Proposition 2.1.2. *Soient X un espace vectoriel normé, X' son dual topologique, A un cône de X.*
1) A° et $A^{\circ\circ}$ sont des cônes convexes.
2) $A^{\circ\circ}$ est fermé.

Proposition 2.1.3. *Soient X_1, X_2 deux espaces vectoriels normés, A_1 et A_2 des cônes dans X_1 et X_2 respectivement. Alors*

$$(A_1 \times A_2)^\circ = A_1^\circ \times A_2^\circ.$$

Les cônes normaux

Définition 2.1.3. *Soient X un espace vectoriel normé, A un sous ensemble de X et soit $x \in A$. On appelle le cône normal à A au point x l'ensemble noté $N_A(x)$ défini par*

$$N_A(x) = \{x' \in X', \langle x', v \rangle \leq 0, \forall v \in T_A(X)\}.$$

Proposition 2.1.4. *Soient X un espace vectoriel normé, A un sous ensemble de X. Alors*

$$x \in int(A) \Rightarrow N_A(x) = \{0\}$$

Preuve. Soit $x \in int(A)$

1. Montrons que $\{0\} \subset N_A(x)$.

Nous avons

$$x' \in N_A(x) \Leftrightarrow \langle x', y - x \rangle \leq 0, \forall y \in A.$$

Pour $x' = 0$, on a

$$0 = \langle x', y - x \rangle \leq 0, \forall y \in A.$$

Donc $\{0\} \subset N_A(x)$.

2. Montrons que $N_A(x) \subset \{0\}$. Nous avons

$$x \in int(A) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \mathbf{B}(x, \varepsilon) \subset A.$$

Soit $z \in \mathbf{S}(0, 1)$ alors $\|z\| = 1$.

On pose $y = x + \sigma z$ tel que $0 < \sigma < \varepsilon$, on obtient

$$\|y - x\| = \|\sigma z\| = \sigma \|z\| = \sigma < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Par conséquence $y \in \mathbf{B}(x, \varepsilon) \subset A$ c'est à dire $y \in A$. Soit $x' \in N_A(x)$, donc

$$\begin{aligned} \langle x', y - x \rangle \leq 0 &\Rightarrow \langle x', x + \sigma z - x \rangle \leq 0, \\ &\Rightarrow \sigma \langle x', z \rangle \leq 0 \\ &\langle x', z \rangle \leq 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

D'autre part, soit $y = x - \sigma z$, alors

$$\|y - x\| = \| - \sigma z\| = \sigma \|z\| = \sigma < \varepsilon.$$

Par conséquence $y \in \mathbf{B}(x, \varepsilon) \subset A$ c'est à dire $y \in A$.
Donc

$$\begin{aligned} \langle x', y - x \rangle \leq 0 &\Rightarrow \langle x', x - \sigma z - x \rangle \leq 0, \\ &\Rightarrow -\sigma \langle x', z \rangle \leq 0, \\ &\Rightarrow \langle x', z \rangle \geq 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

De (2.4) et (2.5), on obtient

$$\begin{aligned} \langle x', z \rangle = 0 &\Rightarrow \sup_{z \in s(0,1)} \langle x', z \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \|x'\| = 0 \\ &x' = 0. \end{aligned}$$

D'où, $N_A(x) \subset \{0\}$. De 1. et 2. on trouve que $N_A(x) = 0$.

□

Proposition 2.1.5. *Soient X un espace vectoriel normé, A un sous ensemble convexe fermée de X tel que $int(A) \neq \emptyset$. Si $x \in F_r(A)$ alors $N_A(x) \neq \{0\}$.*

Définition 2.1.4. ***(Projection sur un ensemble fermé)*** *Soient E un espace de Banach, et A un sous ensemble fermé de E. L'opérateur de projection de x sur A, qu'on note P_A, est défini par*

$$\forall x \in E, \;\; P_A(x) = \{y \in E, \;\; \|x - y\| = d(x, A)\}.$$

Définition 2.1.5. ***(Cône Normal Proximal)*** *Soient E un espace de Banach, A un sous ensemble fermé de E et $x \in A$. Le cône normal proximal de A en x qu'on note $N_A^p(x)$ est l'ensemble défini par*

$$N_A^p(x) = \{v \in E,\ \exists s > 0,\ x \in P_A(x + sv)\}.$$

Définition 2.1.6. *Soient E un espace de Banach, A un sous ensemble fermé de E. Pour tout $x \in A$ et $r > 0$, nous définissons $\Gamma^r(x, A)$ l'ensemble des "bonnes direction và projeter à l'échelle r " de $x + rv$ à x, comme suit*

$$\Gamma^r(x, A) = \{v \in E,\ x \in P_A(x + rv)\}.$$

Remarque 2.1.1. *Pour tout $x \in A$, par la définition du cône normal proximal nous avons*

$$N_A^p(x) = \underset{r>0}{\cup} \Gamma^r(x, A).$$

Lemme 2.1.1. *Soient E un espace de Banach et A un sous ensemble fermé de E. Pour tous $x \in A$ et $v \in \Gamma^r(x, A)$, on a $\lambda v \in \Gamma^r(x, A)$ pour tout $\lambda \in]0, 1[$. De plus, si E est uniformément convexe alors pour tout $\lambda \in]0, 1[$, nous avons $x \in P_A(x + \lambda rv)$.*

2.2 Ensembles uniformément r-prox-réguliers

Définition 2.2.1. *([4, 5]) Soient E un espace de Banach, A un sous ensemble fermé de E. On dit que l'ensemble A est r-prox-réguliers si pour tous $x \in A$ et $v \in N_A^p(x) \setminus \{0\}$ on a*

$$\boldsymbol{B}\Big(x + r\frac{v}{\|v\|}, r\Big) \cap A = \emptyset.$$

Définition 2.2.2. *([4, 5]) Soient E un espace de Banach, A un sous ensemble fermé de E et $r \in (0, \infty]$. On dit que A est uniformément r-prox-réguliers si pour tous $y \in A$ et $\xi \in N_A^p(y)(\xi \neq 0)$ on a*

$$\langle \frac{\xi}{\|\xi\|}, x - y \rangle = \frac{1}{2r}\|x - y\|^2,\ \forall x \in A.$$

Si $r = +\infty$ alors $\frac{1}{r} = 0$, dans ce cas le r-prox-régularité uniforme est équivalent à la convexité de A.

2.3 Espace strictement convexe et uniformément convexe

Pour plus résultat sur l'espace strictement convexe et uniformément convexe voir [5].

Définition 2.3.1. *Soit E un espace de Banach. On dit que E est strictement convexe si*

$$x, y \in S, \text{ avec } (\mathrm{x} \neq \mathrm{y}) \Rightarrow \|(1-\lambda)\mathrm{x} + \lambda \mathrm{y}\| < 1, \text{ pour } \lambda \in (0,1).$$

S cela signifier la sphère unité ne contient aucun segment de droit.

Définition 2.3.2. *Soit E un espace de Banach muni de la norme $\|.\|_E$. On dit que E est uniformément convexe, si pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et pour $x, y \in E$ avec $\|x\|_E \leq 1$ et $\|y\|_E \leq 1$ on a*

$$\|x+y\|_E > 2 \Rightarrow \|x-y\|_E \leq \varepsilon.$$

Théorème 2.3.1. *Soit E un espace de Banach. Si E est uniformément convexe alors il est réflexif.*

Théorème 2.3.2. *Soit E un espace de Banach, E' le duale de E.*

- *Si E' est uniformément convexe alors E est uniformément lisse et réflexif.*
- *Si E' est séparable alors E est séparable.*

2.4 Dérivée directionnelle et dérivée classique

Les résultats de cette section sont pris de [21, 25].

Définition 2.4.1. *Soient X un espace vectoriel, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction et soient $x_0, v \in X$. On appelle la dérivée directionnelle de f au point x_0 dans la direction v qu'on note par $f'(x_0, v)$ la limite définie par*

$$f'(x_0, v) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t},$$

dans $\overline{\mathbb{R}}$ quand elle existe.

Théorème 2.4.1. *Soient X un espace vectoriel normé, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre et convexe et $x_0 \in D(f)$. Alors,*

(i) *$f'(x_0, v)$ existe, pour tout $v \in X$.*

(ii) *La fonction* $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *définie par* $g(v) = f'(x_0, v), \forall v \in X$*, est positivement homogène, sous additive et convexe.*

Définition 2.4.2. *Soient* X *un espace vectoriel normé,* X' *son dual topologique. Soit* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *et* $x_0 \in D(f)$*.*
1) On dit que f *est différentiable au sens de Gâteaux au point* x_0 *s'il existe* $x' \in X'$*, tel que*

$$f'(x_0, v) = \langle x', v\rangle \ \forall v \in X,$$

x' *est défini d'une façons unique par la relation précédente et est appelée la différentielle de* f *au sens de Gâteaux au point* x_0*, on le note souvent par* $x' = \nabla f(x_0)$*, appelée aussi le gradient de* f *au point* x_0*.*
2) On dit que f *est différentiable aux sens de Fréchet au point* x_0 *s'il existe* $x' \in X'$*, tel que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle x', x - x_0\rangle}{\|x - x_0\|} = 0,$$

x' *est défini d'une façons unique par la relation précédent et est appelée la différentielle de* f *au sens de Fréchet au point* x_0*, et on la note* $x' = df(x_0)$*.*

Notation 2.4.1. *On écrit* f *est G-différentiable (resp.F-différentiable) au point* x_0 *au lieu de* f *est différentiable au sens de Gâteaux (resp.au sens de Fréchet) au point* x_0*.*

Proposition 2.4.1. *Soient* X *un espace vectoriel normé,* $f : x \to \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction et* $x_0 \in D(f)$*. Si* f *est F-différentiable au point* x_0*, alors*

1) f *est G-différentiable au point* x_0*, et* $df(x_0) = \nabla f(x_0)$*.*

2) f *est continue au point* x_0*.*

2.5 Espaces uniformément lisses

Le résultats de cette section est pris de [5]

Définition 2.5.1. *(**Espace uniformément lisse**) Soit* E *un espace de Banach muni de la norme* $\|.\|_E$*. On dit que* E *est uniformément lisse si sa norme est uniformément Fréchet différentiable loin de zéro, Alors*

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x_0 + th\|_E - \|x_0\|_E}{t},$$

la limite existe pour $x_0, h \in \boldsymbol{S}(0, 1)$*.*

Remarque 2.5.1. *Soit E un espace de Banach. Si E est uniformément lisse, alors $x \mapsto \|x\|_E$ est $\boldsymbol{C}^1$ sur $E \setminus \{0\}$.*

Proposition 2.5.1. *Soit E un espace de Banach muni de la norme $\|.\|_E$. Si E est uniformément lisse, alors pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on a*

$$\langle (\nabla \|.\|_E)(x), x \rangle = \|x\|_E.$$

Par l'inégalité de triangle, on a $\|(\nabla\|.\|_E)(x)\|_{E'} = 1$.

Maintenant, sachant que la norme pourrait être non différentiable à l'origine 0, nous étudions la fonction $x \mapsto \|x\|^p$ pour un exposant $p > 1$.

Proposition 2.5.2. *Soit E un espace de Banach uniformément lisse, $p \in (1, \infty)$ un exposant. Alors la fonction $x \mapsto \|x\|_E^P$ est $\boldsymbol{C}^1$ sur E.*

Définition 2.5.2. *Soient E un espace de Banach uniformément lisse et $p \in (1, \infty)$, alors*

$$J_p(x) := \frac{1}{p}(\nabla \|.\|_E^p)(x) \in E'.$$

Définition 2.5.3. *Pour un nombre réel $p > 1$, considérons la multi-application $J_p : E \rightrightarrows E'$ définie par*

$$J_p(x) = \left\{ x' \in E', \langle x', x \rangle = \|x\| \|x'\| \text{ et } \|x'\| = \|x\|^{p-1} \right\}.$$

2.6 Ensemble I-lisse faiblement compact

Définition 2.6.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit E un espace de Banach séparable, réflexif et uniformément lisse. On dit que E est "I-lisse faiblement compact" pour un exposant $p \in (1, \infty)$ si pour tout suite bornée $(x_n)_{n \geq n_0}$ de $\boldsymbol{L}_E^\infty(I)$, on peut extraire une sous suite $(y_n)_{n \geq n_0}$ converge faiblement vers $y \in \boldsymbol{L}_E^\infty(I)$, tels que pour tout $z \in \boldsymbol{L}_E^\infty(I)$ et $\phi \in \boldsymbol{L}_{\mathbb{R}}^1(I)$,*

$$\begin{aligned} &\lim_{n \to \infty} \int_I \langle J_p(z(t) + y_n(t)) - J_p(y_n(t)), y_n(t) \rangle \, \phi(t) dt \\ &= \int_I \langle J_p(z(t) + y(t)) - J_p(y(t)), y(t) \rangle \, \phi(t) dt. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Remarque 2.6.1. *La notion de I-lisse faiblement compact ne dépend pas de l'intervalle de temps I.*

Remarque 2.6.2. *Puisque E est réflexif et séparable, $\boldsymbol{L}_E^\infty(I) = (\boldsymbol{L}_{E'}^1(I))'$ et par le* ***Théorème de Banach-Aloaglu-Bourbaki****, on sait qu'on peut extraire de la suite $(x_n)_n$ une sous suite $(y_n)_n$ qui converge faiblement. Par contre cette convergence n'est pas suffisant pour assurer*(2.6) *en général.*

Proposition 2.6.1. *Tout espace de Hilbert H est I-lisse faiblement compact pour $p = 2$.*

Preuve.
Il est bien connu que dans un espace de Hilbert, J_2 est donnée par $J_2(x) = x$. Donc la relation (2.6) correspond à

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \langle z(t), y_n(t)\rangle \phi(t)dt = \int_I \langle z(t), y(t)\rangle \phi(t)dt. \tag{2.7}$$

Sachant que $\mathbf{L}_H^\infty(I) = (\mathbf{L}_H^1(I))'$ et comme $(y_n)_n$ est bornée dans $\mathbf{L}_H^\infty(I)$, on peut extraire une sous suite qui converge faiblement vers $y \in \mathbf{L}_H^\infty(I)$. Pour tout $z \in \mathbf{L}_H^\infty(I)$ et tout $\phi \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^1(I)$, on a $z(.)\phi(.) \in \mathbf{L}_H^1(I)$, on conclut que

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \langle z(t)\phi(t), y_n(t)\rangle dt = \int_I \langle z(t)\phi(t), y(t)\rangle dt.$$

D'où la relation (2.7). Ce termine le preuve. □

Proposition 2.6.2. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach réflexif séparable uniformément lisse. Soit $A \subset E$ un sous ensemble fermé. Supposons que pour un exposant $p \in [2, \infty)$ et une suite bornée $(v_n)_{n\geq 0}$ de $\boldsymbol{L}_E^\infty(I)$, on peut extraire une sous suite $(v_{k(n)})_{n\geq 0}$ qui converge faiblement vers $v \in \boldsymbol{L}_E^\infty(I)$ telle que pour tout $z \in \boldsymbol{L}_E^\infty(I)$ et $\phi \in \boldsymbol{L}_{\mathbb{R}}^1(I)$,*

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty} \int_I \Big\langle J_p(z(t) + v_{k(n)}(t)) - J_p(v_{k(n)(t)}), v_{k(n)}(t)\Big\rangle \phi(t)dt \\ &= \int \langle J_p(z(t) + v(t)) - J_p(v(t)), v(t)\rangle \phi(t)dt.\end{aligned}$$

Alors, la projection P_A est faiblement continue dans $\boldsymbol{L}_E^\infty(I)$ (relativement aux direction données par la suite $(v_n)_n$) dans le sens suivante : pour tout $r > 0$ et tout suite bornée $(u_n)_n$ de $\boldsymbol{L}_E^\infty(I)$ satisfaisant

$$\begin{cases} u_n \longrightarrow u \text{ dans } \boldsymbol{L}_{\mathrm{E}}^\infty(\mathrm{I}), \\ u_n(t) \in P_A(u_n(t) + rv_n(t)) \text{ p.p. t} \in \mathrm{I}, \end{cases}$$

on a pour presque tout $t \in I$

$$u(t) \in P_A(u(t) + rv(t)).$$

L'assertion ci-dessus est satisfait si l'espace de Banach E est supposé "I-lisse faiblement compact" pour un exposant $p \in [2, \infty)$. On peut réecrire la conclusion comme suite. Si pour tout $t \in I, v_n(t) \in \Gamma^r(u_n(t), A)$, à la limite on trouve que $v(t) \in \Gamma^r(u(t), A)$, pour presque tout $t \in I$.

Proposition 2.6.3. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach réflexif, séparable et uniformément lisse. Soit C_n et $C : I \rightrightarrows E$ deux multi-applications à valeurs non vides et fermées, satisfaisant*

$$\sup_{t\in I}\mathcal{H}(C_n(t), C(t)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \,.$$

Supposons que pour un exposant $p \in [2, \infty)$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et une suite barnée de $\boldsymbol{L}_E^\infty(I)$, on peut extraire une sous suite $(v_{k(n)})_{n\geq 0}$ qui converge faiblement vers $v \in \boldsymbol{L}_E^\infty(I)$ tels que pour $z \in \boldsymbol{L}_E^\infty(I)$ et $\phi \in \boldsymbol{L}_{\mathbb{R}}^1(I)$,

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty} \int_I \left\langle J_p(z(t) + v_{k(n)}(t)) - J_p(v_{k(n)}(t)), v_{k(n)}(t)\right\rangle \phi(t)dt \\ &= \int_I \langle J_p(z(t) + v(t)) - J_p(v(t)), v(t)\rangle \, \phi(t)dt.\end{aligned}$$

Alors, la projection $P_{C(.)}$ est faiblement continue dans $\boldsymbol{L}_E^\infty(I)$ (relativement aux direction donées par la suite $(v_n(n))$)dans le sense suivant : Pour tout r>0 et tout suite bornée u_n de $\boldsymbol{L}_E^\infty(I)$ satisfaisant

$$\begin{cases} u_n \longrightarrow u, \text{ dans } \boldsymbol{L}_{\mathrm{E}}^\infty(\mathrm{I}) \\ u_n(t) \in P_{C_n(t)}(u_n(t) + rv_n(t)) \text{ p.p. t} \in \mathrm{I} \end{cases}$$

on a pour presque tout $t \in I$

$$u(t) \in P_{C(t)}(u(t) + rv(t)).$$

2.7 Quelques théorèmes de compacité

Les résultats de cette section sont pris de [2].

Définition 2.7.1. *Soient E un espace de Banach et A un sous ensemble de E. On dit que A de boule compact si tout boule fermé $\overline{\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{B}}(x, r)$ de E, l'ensemble $\overline{\boldsymbol{B}} \cap A$ est compact. Evident que toute boule-compact A est fermé.*

Théorème 2.7.1. *(**Théorème de Banach-Mazur**) Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach, et soit (x_n) une suite d'élément de E converge faiblement vers x. Alors il existe une suite $(z_i)_i$ dans E telle que chaque z_i est une combinaisons convexe des éléments de la suite $(x_n)_n$ et (z_i) converge fortement vers x.*

Théorème 2.7.2. *(**Théorème de Mazur**) soient E un espace de Banach et A un sous ensemble compact de E. Alors $\overline{co}(A)$ est compact.*

Théorème 2.7.3. *(**Théorème de Krein-Smulian**) Soit E un espace de Banach et A un sous ensemble de E. Si A est faiblement compact, alors $\overline{co}(A)$ est faiblement compact.*

Théorème 2.7.4. *(**Théorème d'Ascoli-Arzelà**) Soient (X, d) un espace métrique compacte, (Y, d) un espace métrique complet, et K un sous ensmble de $\boldsymbol{C}(X, Y)$, l'espace des applications continues définies sur X à valeur dans Y, muni de la topologie de la convergence uniforme. Alors K est relativement compact si et seulement si K est équicontinu et $K(x)$ est relativement compact pour tout $x \in X$, avec*

$$K(x) = \{f(x)/\ f \in K\}.$$

CHAPITRE 3

ÉTUDE D'UNE INCLUSION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE GOUVERNÉE PAR UN CÔNE NORMAL PROXIMAL

Ce chapitre présente le résultat principal de ce mémoire, et étudie l'existence et l'unicité de la solution pour une inclusion différentielle du premier ordre dépendant du temps et de l'état, gouvernée par le cône normal proximal de la forme

$$(P)\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)), \text{ p.p. t} \in \text{I}, \\ u(t) \in C(t,u(t)),\ \forall t \in I \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

où pour tout $t \in I(I = [0,T],\ T > 0)$, $N_{C(t,u(t))}(u(t))$ est le cône normal proximal à $C(t,u(t))$ au point $u(t)$, $C : I \times H \rightrightarrows H$ étant une multi-application à valeurs non vides, boule compact et r-prox-réguliers. De plus on donne l'existence de solution pour le même problème (P) avec une perturbation F où $F : I \times H \rightrightarrows H$ est une multi-application semi continue supérieure, à valeurs non vides fermés et convexes.

3.1 Résultats préliminaires

Proposition 3.1.1. *[5, 13] Soient H un espace de Hilbert, $r \in (0, +\infty]$. A un sous ensemble de H non vide et uniformément r-prox-réguliers. Alors nous avons*

- *Pour tout $x \in H$, $d(x, A) < r$, la projection de x sur A est bien définie et continue, c'est-à-dire que $P_A(x)$ est à valeur unique ($P_A(x) \neq \emptyset$) ;*
- *Pour tout $r' \in (0, r)$, $d(x, A) < r'$, l'opérateur de projection est Lipschitzienne sur l'ensemble des points $x \in H$ avec une constante Lipschitzienne $\dfrac{r}{r - r'}$.*
- *Si $u = P_A(x)$ alors, $u = P_A(u + r\frac{x-u}{\|x-u\|})$.*

Lemme 3.1.1. *[14] Soit $I = [0, T](T > 0)$, H un espace de Hilbert séparable. Soit $C : [0, T] \times H \rightrightarrows H$ une multifonction à valeurs non vides, fermées et convexes. Nous supposons qu'il existe $l_1 \geq 0$, $0 \leq l_2 < 1$ tel que*

$$\mathcal{H}(C(t, u), C(s, v)) \leq l_1 \, |t - s| + l_2 \|u - v\|, \ \forall s, t \in I \text{ et v, u} \in \text{H}.$$

Soit A un sous ensemble bornée de H. Il existe $r > 0$, tel que $C(t, A) \cap \overline{\boldsymbol{B}}(0, r) \subset H$ est relativement compact. Si $t \in I$ et $u \in C(s, u) \, \forall s \in I$. Alors il existe $v \in H$ tel que

$$v = P_{C(t,v)}(u) \text{ et } \|u - v\| \leq \frac{l_1 \, |t - s|}{1 - l_2}.$$

3.2 Étude d'une inclusion différentielle non perturbée

Nous sommes maintenant en mesure de décrire notre résultat d'existence de solutions pour le problème considéré dans un espace de Hilbert. La démonstration et le résultats sont pris dans [5, 14, 24].

Théorème 3.2.1. *Soit $I = [0, T]$ $(T > 0)$, H un espace de Hilbert séparable. Soit $r > 0$ et*
$C : I \times H \rightrightarrows H$ une multifonction à valeurs non vides, boule compactes et uniformément r-prox-régulières. Et il existe $l_1 \geq 0$, $0 \leq l_2 < 1$ tels que

$$\mathcal{H}(C(t, u), C(s, v)) \leq l_1 \, |t - s| + l_2 \|u - v\|, \forall s, t \in I \text{ et } v, u \in H.$$

Alors pour tout $u_0 \in C(0, u_0)$ l'inclusion différentielle

$$(P)\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)), \text{ p.p. t} \in \text{I}, \\ u(t) \in C(t, u(t)), \forall t \in I, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

admet une solution unique lipschitzienne $u : I \longrightarrow H$.

Preuve.

Étape 1.

Soit $n_0 \in N^*$ tel que

$$\frac{T}{n_0}\Big(\frac{l_1}{1 - l_2}\Big) \leq \frac{r}{2}. \tag{3.1}$$

Considérons une partition de l'intervalle I définie par $t_{n,i} = ih$ pour $0 \leq i \leq n$ et $h = \frac{T}{n}$. Soit $I_{n,0} = \{t_{n,0}\} = \{0\}$, $I_{n,i} =]t_{n,i}, t_{n,i+1}]$ pour $0 \leq i \leq n-1$. Pour tout $n \geq n_0$ on définit les approximations des applications sur chaque intervalle $I_{n,0}$ comme suit

$$\begin{cases} u_{n,0} = u_0 \in C(0, u_0); \\ u_{n,1} = P_{C(t_{n,1}, u_{n,1})}(u_{n,0}); \\ u_n(t) = \frac{t_{n,1} - t}{h} u_{n,0} + \frac{t - t_{n,0}}{h} u_{n,1}; \\ u_{n,i} = u_n(t_{n,i}). \end{cases} \tag{3.2}$$

Montrons que cette projection est bien défini, on a $u_{n,0} \in C(0, u_0)$

$$\begin{aligned} d(u_{n,0}, C(t_{n,1}, u_{n,1})) &\leq d(u_{n,0}, C(t_{n,0}, u_{n,0})) + \mathcal{H}(C(t_{n,1}, u_{n,1}), C(t_{n,0}, u_{n,0})) \\ &\leq \|u_{n,0} - u_{n,0}\| + l_1 \,|t_{n,1} - t_{n,0}| + l_2 \|u_{n,1} - u_{n,0}\| \\ &= l_1 h + l_2 \|u_{n,1} - u_{n,0}\|. \end{aligned}$$

Utilisant le fait que $u_{n,0} \in C(0, u_0)$ et grâce au le **Lemme 3.1.1**, on trouve

$$u_{n,1} = P_{C(t_{n,1}, u_{n,1})}(u_{n,0}),$$

et

$$\|u_{n,1} - u_{n,0}\| \leq \frac{l_1 \,|t_{n,1} - t_{n,0}|}{1 - l_2}.$$

Il vient alors que

$$\begin{aligned} d(u_{n,0}, C(t_{n,1}, u_{n,1})) &\leq l_1 h + l_2 \|u_{n,1} - u_{n,0}\| \\ &\leq l_1 h + l_2 \frac{l_1 h}{1 - l_2} \\ &\leq h\Big(l_1 + \frac{l_2 l_1}{1 - l_2}\Big) \\ &\leq \frac{T}{n_0} \frac{l_1}{1 - l_2} \\ &\leq \frac{r}{2} < r, \end{aligned}$$

et par la **Proposition 3.1.1**, nous avons que $P_{C(t_{n,1}, u_{n,1})}(u_{n,0})$ est bien définie. Nous définissons le point $u_{n,1} \in C(t_{n,1}, u_{n,1})$ par

$$u_{n,1} = P_{C(t_{n,1}, u_{n,1})}(u_{n,0}),$$

et appliquant à nouveau le **Lemme 3.1.1** nous obtenons le point $u_{n,2}$

$$u_{n,2} = P_{C(t_{n,2}, u_{n,2})}(u_{n,1}),$$

et tel que

$$\|u_{n,2} - u_{n,1}\| \leq \frac{l_1 \left|t_{n,2} - t_{n,1}\right|}{1 - l_2}.$$

Pour $i = 1, ..., n-1$ on définit les approximations des applications sur chaque intervalle $I_{n,i}$ par

$$\begin{cases} u_{n,i} \in C(t_{n,i}, u_{n,i}); \\ u_{n,i} = P_{C(t_{n,i}, u_{n,i})}(u_{n,i-1}); \\ u_n(t) = \frac{t_{n,i+1} - t}{h} u_{n,i} + \frac{t - t_{n,i}}{h} u_{n,i+1}; \\ u_{n,i} = u_n(t_{n,i}), \end{cases} \tag{3.3}$$

et telles que

$$\|u_{n,i} - u_{n,i-1}\| \leq \frac{l_1 \left|t_{n,i} - t_{n,i-1}\right|}{1 - l_2}.$$

De même, nous définissons $u_{n,i+1}$, $0 \leq i \leq n-1$ par

$$u_{n,i+1} = P_{C(t_{n,i+1}, u_{n,i+1})}(u_{n,i}). \tag{3.4}$$

Et

$$\|u_{n,i+1} - u_{n,i}\| \leq \frac{l_1 \left|t_{n,i+1} - t_{n,i}\right|}{1 - l_2}.$$

Alors, $u_{n,i+1} \in C(t_{n,i+1}, u_{n,i+1})$ pour $1 \leq i \leq n-1$.
D'après la relation (3.4) et la **Proposition 3.1.1** on trouve

$$u_{n,i+1} = P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}\Big(u_{n,i+1} + r\frac{u_{n,i} - u_{n,i+1}}{\|u_{n,i} - u_{n,i+1}\|}\Big). \tag{3.5}$$

Donc

$$\frac{u_{n,i} - u_{n,i+1}}{\|u_{n,i} - u_{n,i+1}\|} \in \Gamma^r\Big(u_{n,i+1}, C(t_{n,i+1}, u_{n,i+1})\Big).$$

D'autre part, on a pour tout $t \in I_{n,i} =]t_{n,i}, t_{n,i+1}]$

$$u_n(t) = \frac{t_{n,i+1} - t}{h} u_{n,i} + \frac{t - t_{n,i}}{h} u_{n,i+1},$$

et pour $t \in I_{n,i-1} =]t_{n,i-1}, t_{n,i}]$

$$u_n(t) = \frac{t_{n,i} - t}{h} u_{n,i-1} + \frac{t - t_{n,i-1}}{h} u_{n,i}.$$

Alors

$$\begin{aligned} u_n(t_{n,i}) &= \frac{t_{n,i} - t_{n,i}}{h} u_{n,i-1} + \frac{t_{n,i} - t_{n,i-1}}{h} u_{n,i} \\ &= \frac{h}{h} u_{n,i} \\ &= u_{n,i}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{t \to > t_{n,i}} u_n(t) &= \frac{t_{n,i+1} - t_{n,i}}{h} u_{n,i} + \frac{t_{n,i} - t_{n,i}}{h} u_{n,i+1} \\ &= u_{n,i}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la suite (u_n) est continue.

Étape 2.

$\forall t \in I_{n,i}$, par (3.3) on obtient

$$\dot{u}_n(t) = \frac{1}{h}(u_{n,i+1} - u_{n,i}).$$

Posons

$$\Delta_n(t) = \dot{u}_n(t) = \frac{1}{h}(u_{n,i+1} - u_{n,i}).$$

On a

$$\begin{aligned}
\|\Delta_n(t)\| &= \|\frac{1}{h}u_{n,i+1} - u_{n,i}\| \\
&= \frac{1}{h}\|P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}(u_{n,i}) - u_{n,i}\| \\
&= \frac{1}{h}d(u_{n,i}, C(t_{n,i+1}, u_{n,i+1})) \\
&\le \frac{1}{h}\Big(d(u_{n,i}, C(t_{n,i}, u_{n,i})) + \mathcal{H}(C(t_{n,i}, u_{n,i}), C(t_{n,i+1}, u_{n,i+1}))\Big) \\
&\le \frac{1}{h}\Big(\|u_{n,i} - u_{n,i}\| + l_1\,|t_{n,i+1} - t_{n,i}| + l_2\|u_{n,i+1} - u_{n,i}\|\Big) \\
&\le \frac{1}{h}\Big(l_1 h + l_2\|u_{n,i+1} - u_{n,i}\|\Big) \\
&\le \frac{1}{h}\Big(l_1 h + l_2\frac{l_1 h}{1-l_2}\Big) \\
&\le \frac{1}{h}\frac{l_1 h}{1-l_2} \\
&\le \frac{l_1}{1-l_2}\,.
\end{aligned}$$

C'est à dire pour tout $t \in I_{n,i}$,

$$\|\Delta_n(t)\| \le \frac{l_1}{1-l_2}. \tag{3.6}$$

Donc, Δ_n est un vecteur borné. Ensuite nous supposons que le vecteur $v = u_{n,i}$, et puisque C est à valeurs r-prox-régulières, et grâce à la relation (3.5), on obtient

$$u_{n,i+1} = P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}\Big(P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}(v) - r\frac{P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}(v) - v}{\|P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}(v) - v\|}\Big). \tag{3.7}$$

Observons, que par la relation (3.6), on trouve $\frac{(1-l_2)\|P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}(v)-v\|}{hl_1} \le 1$. Donc appliquant le **Lemme 2.1.1** à la relation (3.6), avec $\lambda = \frac{(1-l_2)\|P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}(v)-v\|}{hl_1} \le 1$, nous avons

$$\begin{aligned}
u_{n,i+1} = P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}\Big(&P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}(v) - \\
&\frac{r}{h}\frac{(1-l_2)\|P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}(v) - v\|}{l_1}\frac{P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}(v) - v}{\|P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}(v) - v\|}\Big) \\
&= P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}\Big(P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}(v) - \frac{r(1-l_2)}{hl_1}(P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}(v) - v)\Big) \\
&= P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}\Big(P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}(v) - \frac{r(1-l_2)}{l_1}\Delta_n(t)\Big).
\end{aligned}$$

Alors

$$-\Delta_n(t) \in \Gamma^{\frac{r(1-l_2)}{l_1}}\Big(u_{n,i+1}, C(t_{n,i+1}, u_{n,i+1})\Big).$$

Ou équivalent

$$u_{n,i+1} \in P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}\Big(u_{n,i+1} - \frac{r(1-l_2)}{l_1}\Delta_n(t)\Big),\ \forall t \in I_{n,i}\,. \tag{3.8}$$

Étape 03.

On a pour presque tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}\|\dot{u}_n(t)\| &= \|\Delta_n(t)\| \\ &\leq \frac{l_1}{1-l_2}\end{aligned}$$

i.e.,

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq \frac{l_1}{1-l_2} = L. \tag{3.9}$$

Alors $(\dot{u}_n(.))_n$ est uniformément bornée par L. Pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}\|u_n(t)\| &= \|u(0) + \int_0^t \dot{u}_n(\tau)d\tau\| \\ &\leq \|u_0\| + \int_0^t \|\dot{u}_n(\tau)\|d\tau \\ &\leq \|u_0\| + TL = M_1.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Alors $(u_n(.))$ est bornée dans $\mathbf{C}_H(I)$. Nous avons pour tous $t, s \in I\ \ (t > s)$

$$\begin{aligned}\|u_n(t) - u_n(s)\| &= \|u_0 + \int_0^t \dot{u}_n(\tau)d\tau - u_0 - \int_0^s \dot{u}_n(\tau)d\tau\| \\ &\leq \int_s^t \|\dot{u}_n(\tau)\|d\tau \\ &\leq L\,|t-s|\,.\end{aligned}$$

Alors $(u_n(.))_n$ est équicontinue. $\forall t \in I_{n,i}$ et $u_{n,i} \in C(t_{n,i}, u_{n,i})$, nous avons

$$\begin{aligned}
d(u_n(t), C(t, u_n(t))) &\leq d(u_n(t), C(t_{n,i}, u_{n,i})) + \mathcal{H}(C(t_{n,i}, u_{n,i}), C(t, u_n(t))) \\
&\leq \|u_n - u_{n,i}\| + l_1 \, |t - t_{n,i}| + l_2 \|u_n - u_{n,i}\| \\
&\leq (1 + l_2)\|u_n(t) - u_{n,i}\| + l_1 h \\
&\leq (1 + l_2)\| \frac{t_{n,i+1} - t}{h} u_{n,i} + \frac{t - t_{n,i}}{h} u_{n,i+1} - u_{n,i}\| + l_1 h \\
&\leq (1 + l_2)\|u_{n,i+1} - u_{n,i}\| + l_1 h \\
&= (1 + l_2)h\|\Delta_n(t)\| + l_1 h \\
&= (1 + l_2)(h \frac{l_1}{1 - l_2}) + l_1 h \\
&= 2h(\frac{l_1}{1 - l_2}) \\
&= 2\frac{T}{n} L = \frac{T}{n} M_2.
\end{aligned}$$

Alors, pour $n \geq n_0$ il existe $y_n(t) \in C(t, u_n(t))$ tel que

$$\begin{aligned}
d(u_n(t), C(t, u_n(t)) &= \inf_{y_n(t) \in C(t, u_n(t))} \|y_n(t) - u_n(t)\| \\
&\leq \|y_n(t) - u_n(t)\| \\
&\leq \frac{T}{n} M_2 < \frac{T}{n} M_2 + \frac{T}{n} M_2 = 2\frac{T}{n} M_2.
\end{aligned}$$

Posons $e_n(t) = u_n(t) - y_n(t)$, et observons que

$$\|e_n(t)\| \leq 2\frac{T}{n} M_2, \ et \ u_n(t) - e_n(t) \in C(t, u_n(t)).$$

Par la relation (3.10) on obtient

$$\begin{aligned}
\|u_n(t) - e_n(t)\| &= \|y_n(t) - u_n(t) + u_n(t)\| \\
&\leq \|y_n(t) - u_n(t)\| + \|u_n(t)\| \\
&\leq 2\frac{T}{n} M_2 + M_1 = M_3,
\end{aligned}$$

i.e.,

$$(u_n(t) - e_n(t)) \in C(t, u_n(t)) \cap \overline{\mathbf{B}}(0, M_3),$$

ou équivalente

$$u_n(t) \in C(t, u_n(t)) \cap \overline{\mathbf{B}}(0, M_3) + (\{0\} \cup \{e_k(t)/k \geq 0\}) = \widetilde{K}_n(t). \tag{3.11}$$

Remarquons que l'ensemble $\widetilde{K}_n(t)$ est compact puisque $(C(t, u_n(t)) \cap \overline{\mathbf{B}}(0, M_3))$ est compacte et $\lim\limits_{n\to\infty} e_n(t) = 0$ alors $(\{0\} + \{e_k/k \geq 0\})$ compact. Par conséquent $(u_n(t))_{n \geq n_0}$ est relativement compact. Par le **Théorème d'Ascoli- Arzelà** la suite $(u_n(.))_n$ est relativement compact dans $\mathbf{C}_H(I)$, on peut extraire une sous suite de $(u_n(.))$ qu'on notée $(u_n(.))$ converge uniformément vers une application $u(.) \in \mathbf{C}_H(I)$. i.e.

$$u_n(t) \to u(t)\,,\ \forall t \in I. \tag{3.12}$$

Évident que $u(0) = u_0$, $u(.)$ est une fonction Lipschitzienne. En effet, pour tous $t, s \in I$, nous avons

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(s)\| &\leq \|u(t) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u_n(s)\| + \|u_n(s) - u(s)\| \\ &\leq \|u(t) - u_n(t)\| + L\,|t - s| + \|u_n(s) - u(s)\| \end{aligned}$$

passant à la limite $n \longrightarrow +\infty$ on trouve

$$\|u(t) - u(s)\| \leq L\,|t - s|\,.$$

i.e., u est Lipschitzienne continue. Et pour tout $t \in I$, ensuite nous allons vérifier que

$$u(t) \in C(t, u(t)). \tag{3.13}$$

D'après la relation (3.3) et la définition de u_n, on trouve

$$u_n(t_{n,i}) = u_{n,i} = P_{C(t_{n,i}, u_{n,i})}(u_{n,i-1}) \in C(t_{n,i}, u_{n,i}) = C(t_{n,i}, u_n(t_{n,i})), \forall t \in I_{n,i}.$$

Par la distance de Hausdorff on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(C(t, u_n(t)), C(t, u(t))) &\leq l_1\,|t - t| + l_2\|u_n(t) - u(t)\| \\ &\leq l_2\|u_n(t) - u(t)\|, \end{aligned}$$

alors

$$C(t, u_n(t)) \subset C(t, u(t)) \cap \overline{\mathbf{B}}(0, l_2\|u_n(t) - u(t)\|). \tag{3.14}$$

Par (3.11) et (3.14), on déduit

$$\begin{aligned} u_n(t) &\in C(t, u_n(t)) \cap \overline{\mathbf{B}}(0, M_3) + (\{0\} \cup \{e_k/k \geq 0\}) \\ &\subset C(t, u(t)) \cap \overline{\mathbf{B}}(0, M_3 + l_2\|u_n(t) - u(t)\|) + (\{0\} \cup \{e_k/k \geq 0\}). \end{aligned} \tag{3.15}$$

On conclure de(3.12) et la deuxième inclusion dans (3.15)

$$d(u_n(t), C(t, u(t)) \longrightarrow 0 \; quand \; n \longrightarrow +\infty,$$

c'est à dire,

$$d(u(t), C(t, u(t)) = 0.$$

Alors

$$u(t) \in C(t, u(t)). \tag{3.16}$$

En fin, montrons la convergence de suite $(\dot{u}_n(.))$. Prenant la fonction θ_n pour chaque $t \in I_{n,i}$, $\theta_n(t) = t_{n,i+1}$, et observons que

$$\begin{aligned} \lim_{n \longrightarrow +\infty} (\theta_n(t) - t) &= \lim_{n \to +\infty} (t_{n,i+1} - t) \\ &\leq \lim_{n \to +\infty} (t_{n,i+1} - t_{n,i}) \\ &= \lim_{n \to +\infty} \frac{T}{n} = 0, \end{aligned}$$

c'est à dire $\lim\limits_{n \to \infty} \theta_n(t) = t$. Donc, pour tout $t \in I$ nous avons

$$\begin{aligned} \|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| &\leq \|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u(t)\| \\ &\leq L\,|\theta_n(t) - t| + \|u_n(t) - u(t)\| \\ &\leq L\frac{T}{n} + \|u_n(t) - u(t)\|. \end{aligned}$$

i,e.,

$$\lim_{n \to +\infty} \|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| = 0.$$

Maintenant, d'après la relation (3.9), $(\dot{u}_n(.))$ est bornée dans $\mathbf{L}^{\infty}_H(I)$. Alors $(\dot{u}_n(.))_n$ converge faiblement* dans $\mathbf{L}^{\infty}_H(I)$, supposons que $(\dot{u}_n(.))$ converge faiblement* dans $\mathbf{L}^{\infty}_H(I)$ vers une application $w(.)$ et que $w(.) = \dot{u}(.)$. En effet pour tout $y \in \mathbf{L}^1_H(I)$,

$$\lim_{n \to +\infty} \langle \dot{u}_n(.), y(.)\rangle = \langle w(.), y(.)\rangle,$$

i.e.

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^t \langle \dot{u}_n(s), y(s)\rangle ds = \int_0^t \langle w(s), y(s)\rangle ds,$$

en particulier pour $y(.) = \mathbf{1}_{[0,t]}(.)e_j$, tels que $t \in I, \mathbf{1}_{[0,t]}$ la fonction caractéristique sur l'intervalle $[0,t]$, et (e_j) une suite de l'espace H qui séparé les points de H (la suite (e_j) existe puisque H séparable), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^t \langle \dot{u}_n(s), \mathbf{1}_{[0,t]}(s)e_j\rangle ds = \int_0^t \langle w(s), \mathbf{1}_{[0,t]}(s)e_j\rangle ds, \forall s \in [0,t].$$

Alors $\mathbf{1}_{[0,t]}(s) = 1$

$$\langle \lim_{n\to+\infty}\int_0^t \dot{u}_n(s)ds, e_j\rangle = \langle \int_0^t w(s)ds, e_j\rangle, \forall j$$

ce qui assure

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^t \dot{u}(s)ds = \lim_{n\to+\infty}\int_0^t w(s)ds.$$

Puisque $(u_n(.))$ est une suite absolument continue, on a l'égalité suivant

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n(t) - u_n(0)) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^t \dot{u}_n(s)ds = \int_0^t w(s)ds,$$

alors

$$u(t) = u(0) + \int_0^t w(s)ds,$$

donc, $(u(.))$ est absolument continue et $w(.) = \dot{u}(.)$.
Observons que pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(C(t_{n,i+1}, u_{n,i+1}), C(t, u(t)) &= \mathcal{H}(C(\theta_n(t), u_n(\theta_n)(t)), C(t, u(t)) \\ &\le l_1 \,|\theta_n(t) - t| + l_2\|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| \overset{n\to\infty}{\to} 0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Montrons maintenant pour presque tout $t \in I$

$$-\dot{u}(t) \in \Gamma^{\frac{r}{L}}(u(t), C(t, u(t))),$$

ou équivalent

$$u(t) \in P_{C(t,u(t))}\Big(u(t) - \frac{r}{L}\dot{u}(t))$$

On pose $r' = \frac{r}{L}$. On a $\Delta_n(t) = \dot{u}_n(t)$, et par les argument cites dessus on sait que $(\Delta_n(.))$ est converge faiblement* dans $\mathbf{L}^\infty_H(I)$ à $\dot{u} = \Delta(.)$. Utilisant la propriété "I-lisse faiblement compact" supposée sur l'espace H à la suite $(r'\Delta_n(.))_n$, nous obtenons pour tout $y \in \mathbf{L}^\infty_H(I)$

et $\phi \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(I)$,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I \langle J_p(y(t)-r'\Delta_n(t)) - J_p(-r'\Delta_n(t)), \Delta_n(t)\rangle\phi(t)dt$$
$$= \int_I \langle J_p(y(t)-r'\Delta(t)) - J_p(-r'\Delta(t)), \Delta(t)\rangle\phi(t)dt.$$

Par (3.8), on sait que pour presque tout $t \in I$

$$u_n(\theta_n(t)) \in P_{C(\theta_n(t),u_n(\theta_n(t)))}(u_n(\theta_n(t) - r'\Delta_n(t))),$$

et puisque la suite $(u_n(\theta_n(.)))$ converge fortement vers $u(.)$ dans $\mathbf{L}^\infty_H(I)$, par la relation (3.17) on conclut par la **Proposition 2.6.3**, que pour presque tout $t \in I$

$$u(t) \in P_{C(t,u(t))}(u(t) - r'\Delta(t)).$$

D'après la **Définition 2.1.6** on trouve

$$-\Delta(t) \in \Gamma^{r'}(u(t), C(t, u(t)).$$

En vertu la **Remarque 2.1.1**, on trouve

$$-\dot{u}(t) \in P_{C(t,u(t))}(u(t)), \text{ p.p. t} \in \text{I},$$

d'où

$$-\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)),\ p.p.t \in I.$$

□

Alors $u(.)$ est une solution lipschitzienne.

Pour démontrer l'unicité de cette solution, on va prouver le **Lemme** suivant

Lemme 3.2.1. *[7] Soient $I = [0, T](T > 0)$, et $u(.) \in w^{1.1}(I, H)$ alors*

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 = 2\langle u(t), \frac{d}{dt}u(t)\rangle,\ \forall t \in I$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 &= \lim_{h\to 0}\frac{\|u(t+h)\|^2-\|u(t)\|^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(\langle u(t+h),u(t+h)\rangle-\|u(t)\|^2\Big)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(\langle u(t+h)-u(t)+u(t),u(t+h)-u(t)+u(t)\rangle-\|u(t)\|^2\Big)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(\|u(t+h)-u(t)\|^2+2\langle u(t+h)-u(t),u(t)\rangle+\|u(t)\|^2-\|u(t)\|^2\Big)\\
&= 2\langle \dot{u}(t),u(t)\rangle.
\end{aligned}$$

□

Preuve. (l'unicité)

Soit u_1 et u_2 deux solution de (P). Alors

$$(P_1)\begin{cases} u_1(0)=u_0;\\ u_1(t)\in C(t,u_1(t)),\ \forall t\in I;\\ -\dot{u}_1(t)\in N_{C(t,u_1(t))}(u_1(t)),\forall t\in I.\end{cases}$$

Et

$$\begin{cases} u_2(0)=u_0;\\ u_2(t)\in C(t,u_2(t)),\ \forall t\in I;\\ -\dot{u}_2(t)\in N_{C(t,u_2(t))}(u_2(t)),\forall t\in I.\end{cases}\tag{3.18}$$

Par la définition du cône

$$\begin{cases} \langle -\dot{u}_1(t),y-u_1(t)\rangle\le 0\ \forall y\in C(t,u_1(t)),\\ \langle -\dot{u}_2(t),y-u_2(t)\rangle\le 0\ \forall y\in C(t,u_2(t)).\end{cases}$$

Alors

$$\langle -\dot{u}_1(t),u_2(t)-u_1(t)\rangle\le 0\tag{3.19}$$

$$\langle -\dot{u}_2(t),u_1(t)-u_2(t)\rangle\le 0,\tag{3.20}$$

de plus(3.20) est équivalente

$$\langle \dot{u}_2(t),u_2(t)-u_1(t)\rangle\le 0.\tag{3.21}$$

Nous collectons (3.21) et (3.19) on trouve

$$\langle \dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t), u_2(t) - u_1(t)\rangle \leq 0. \tag{3.22}$$

D'après le **lemme 3.2.1** appliqué à $u = u_1 - u_2$ on obtient

$$\frac{d}{dt}\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 = 2\langle \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t), u_1(t) - u_2(t)\rangle \leq 0,$$

alors

$$\frac{d}{dt}\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 \leq 0,$$

où

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\|u_1(s) - u_2(s)\|^2 dt \leq 0 \int_O^t dt = 0,$$

alors

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 - \|u_1(0) - u_2(0)\|^2 \leq 0,$$

c'est-à-dire

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 \leq 0,$$

implique que

$$u_1(t) = u_2(t).$$

Donc u est une solution unique du problème (P). □

3.3 Étude d'une inclusion différentielle avec perturbation multivoque

Théorème 3.3.1. *[5, 14] Soit $I = [0, T]$ $(T > 0)$, H un espace de Hilbert séparable. Soit $F : I \times H \rightrightarrows H$ une multifonction semi continue supérieurement à valeurs non vides, convexes et fermées. On suppose qu'il existe une constante $m > 0$ telle que*

$$F(t, u) \subset m\overline{\boldsymbol{B}}_H, \forall (t, u) \in I \times H.$$

Soient $r > 0$, $C : I \times H \rightrightarrows H$ une multifonction à valeurs non vides, boule compacte et uniformément r-prox-régulières. Supposons qu'il existe $l_1 \geq 0, 0 \leq l_2 < 1$ tel que

$$\mathcal{H}(C(t, u,), C(s, v)) \leq l_1 \,|t - s| + l_2\|u - v\| \,\forall s, t \in I \, u, v \in H.$$

Alors pour tout $u_0 \in C(0, u_0)$ l'inclusion différentielle

$$(P_F)\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) + F(t, u(t)),\ p.p.\ t \in I, \\ u(t) \in C(t, u(t)), \forall t \in I, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

admet une solution lipschitzienne $u : I \longrightarrow H$.

Preuve.

Étape 1.

Soit $n_0 \in N^*$ tel que

$$\frac{T}{n_0}\Big(\frac{l_1 + (1 + l_2)m}{1 - l_2}\Big) \leq \frac{r}{2}. \tag{3.23}$$

Considérons une partition de l'intervalle I définie par $t_{n,i} = ih$ pour $0 \leq i \leq n$ et $h = \frac{T}{n}$. Soit $I_{n,0} = \{t_{n,0}\} = \{0\}$, $I_{n,i} =]t_{n,i}, t_{n,i+1}]$ pour $0 \leq i \leq n-1$. Pour tout $n \geq n_0$ on définit les approximations des applications sur chaque intervalle $I_{n,0}$ comme suit

$$\begin{cases} u_{n,0} = u_0 \in C(0, u_0), \\ z_{n,0} \in F(t_{n,0}, u_{n,0}), \\ z_n(0) = z_{n,0}, \\ u_{n,1} = P_{C(t_{n,1},u_{n,1})}(u_{n,0} - hz_{n,0}), \\ u_n(t) = \frac{t_{n,1}-t}{h}u_{n,0} + \frac{t-t_{n,0}}{h}u_{n,1}, \\ u_{n,i} = u_n(t_{n,i}). \end{cases} \tag{3.24}$$

Montrons que $P_{C(t_{n,1},u_{n,1})}(u_{n,0} - hz_{n,0})$ est bien définie, on a $u_{n,0} \in C(0, u_0)$

$$\begin{aligned} d(u_{n,0} - hz_{n,0}, C(t_{n,1}, u_{n,1})) &\leq d(u_{n,0} - hz_{n,0}, C(t_{n,0}, u_{n,0})) + \mathcal{H}(C(t_{n,1}, u_{n,1}), C(t_{n,0}, u_{n,0})) \\ &\leq \|u_{n,0} - hz_{n,0} - u_{n,0}\| + l_1\,|t_{n,1} - t_{n,0}| + l_2\|u_{n,1} - v_{n,0}\| \\ &= hm + l_1h + l_2\|u_{n,1} - u_{n,0} + hz_{n,0} - hz_{n,0}\| \\ &\leq hm + l_1h + l_2(\|u_{n,1} - u_{n,0} + hz_{n,0}\| + \|hz_{n,0}\|). \end{aligned}$$

Utilisant le fait que $u_{n,0} \in C(0, u_0)$, et grâce au le **Lemme 3.1.1**, on trouve

$$u_{n,1} = P_{C(t_{n,1},u_{n,1})}(u_{n,0} - hz_{n,0}),$$

et

$$\|u_{n,1} - (u_{n,0} - hz_{n,0})\| \leq \frac{l_1 \, |t_{n,1} - t_{n,0}| + (1 + l_2)\|hz_{n,0}\|}{1 - l_2}.$$

Il vient alors que

$$\begin{aligned} d(u_{n,0} - hz_{n,0}, C(t_{n,1}, u_{n,1})) &\leq hm + l_1 h + l_2(\|u_{n,1} - u_{n,0} + hz_{n,0}\| + \|hz_{n,0}\|) \\ &\leq hm + l_1 h + l_2\Big(\frac{l_1 h + (1 + l_2)hm}{1 - l_2} + hm\Big) \\ &\leq h\frac{l_1 + (1 + l_2)m}{1 - l_2} \\ &\leq \frac{r}{2} < r, \end{aligned}$$

et par la **Proposition 3.1.1**, nous avons que $P_{C(t_{n,1},u_{n,1})}(u_{n,0} - hz_{n,0})$ est bien définie, et $u_{n,1} \in C(t_{n,1}, u_{n,1})$, appliquant à nouveau **Lemme 3.1.1** nous obtenons le point $u_{n,2}$

$$u_{n,2} = P_{C(t_{n,2},u_{n,2})}(u_{n,1} - hz_{n,1}),$$

tel que

$$\|u_{n,2} - (u_{n,1} - hz_{n,1})\| \leq \frac{l_1 \, |t_{n,2} - t_{n,1}| + (1 + l_2)\|hz_{n,1}\|}{1 - l_2}.$$

Pour $i = 1, ..., n-1$ nous définissons les approximation des application sur chaque intervalle $I_{n,i}$ par

$$\begin{cases} u_{n,i} \in C(t_{n,i}, u_{n,i}); \\ z_{n,i} \in F(t_{n,i}, u_{n,i}); \\ u_{n,i} = P_{C(t_{n,i},u_{n,i})}(u_{n,i-1} - hz_{n,i-1}); \\ u_n(t) = \frac{t_{n,i+1} - t}{h} u_{n,i} + \frac{t - t_{n,i}}{h} u_{n,i+1}; \\ u_{n,i} = u_n(t_{n,i}); \\ z_n(t) = z_{n,i}, \end{cases} \tag{3.25}$$

et telle que

$$\|u_{n,i} - (u_{n,i-1} - hz_{n,i-1})\| \leq \frac{l_1 \, |t_{n,i} - t_{n,i-1}| + (1 + l_2)\|hz_{n,i-1}\|}{1 - l_2}.$$

De même, nous avons définissons $u_{n,i+1}$, $0 \leq i \leq n-1$, par

$$u_{n,i+1} = P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}(u_{n,i} - hz_{n,i}). \tag{3.26}$$

Alors $u_{n,i+1} \in C(t_{n,i+1}, u_{n,i+1})$, pour $0 \leq i \leq n-1$. D'après la relation (3.26) et la

Proposition 3.1.1 on obtenons

$$u_{n,i+1} = P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}\Big(u_{n,i+1} + r\frac{u_{n,i} - hz_{n,i} - u_{n,i+1}}{\|u_{n,i} - hz_{n,i} - u_{n,i+1}\|}\Big), \tag{3.27}$$

et

$$\|u_{n,i+1} - (u_{n,i} - hz_{n,i})\| \leq \frac{l_1\,|t_{n,i+1} - t_{n,i}| + (1+l_2)\|hz_{n,i}\|}{1-l_2},$$

donc

$$\frac{u_{n,i} - hz_{n,i} - u_{n,i+1}}{\|u_{n,i} - hz_{n,i} - u_{n,i+1}\|} \in \Gamma^r(u_{n,i+1}, C(t_{n,i+1}, u_{n,i+1})).$$

D'autre part, pour tout $t \in I_{n,i} =]t_{n,i}, t_{n,i+1}]$

$$u_n(t) = \frac{t_{n,i+1} - t}{h}u_{n,i} + \frac{t - t_{n,i}}{h}u_{n,i+1},$$

et pour $t \in I_{n,i-1} =]t_{n,i-1}, t_{n,i}]$

$$u_n(t) = \frac{t_{n,i} - t}{h}u_{n,i-1} + \frac{t - t_{n,i-1}}{h}u_{n,i}.$$

Alors

$$\begin{aligned} u_n(t_{n,i}) &= \frac{t_{n,i} - t_{n,i}}{h}u_{n,i-1} + \frac{t_{n,i} - t_{n,i-1}}{h}u_{n,i} \\ &= \frac{h}{h}u_{n,i} \\ &= u_{n,i}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{t \to^> t_{n,i}} u_n(t) &= \frac{t_{n,i+1} - t_{n,i}}{h}u_{n,i} + \frac{t_{n,i} - t_{n,i}}{h}u_{n,i+1} \\ &= u_{n,i}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la suite u_n est continue .

Étape 2.

$\forall t \in I_{n,i}$, d'après (3.25) on trouve

$$\dot{u}_n(t) = \frac{1}{h}(u_{n,i+1} - u_{n,i}) = \frac{1}{h}(u_{n,i+1} - u_{n,i} + hz_{n,i}) - z_{n,i}\,.$$

Posons

$$\Delta_n(t) = \dot{u}_n(t) + z_n(t) = \frac{1}{h}(u_{n,i+1} - u_{n,i} + hz_{n,i}).$$

On a

$$\begin{aligned}
\|\Delta_n(t)\| &= \|\frac{1}{h}(u_{n,i+1} - u_{n,i} + hz_{n,i})\| \\
&= \frac{1}{h}\|P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}(u_{n,i} - hz_{n,i}) - (u_{n,i} - hz_{n,i}\|) \\
&= \frac{1}{h}d(u_{n,i} - hz_{n,i}, C(t_{n,i+1}, u_{n,i+1})) \\
&\leq \frac{1}{h}\Big(d(u_{n,i} - hz_{n,i}, C(t_{n,i}, u_{n,i})) + \mathcal{H}(C(t_{n,i}, u_{n,i}), C(t_{n,i+1}, u_{n,i+1}))\Big) \\
&\leq \frac{1}{h}\Big(\|u_{n,i} - hz_{n,i} - u_{n,i}\| + l_1\,|t_{n,i+1} - t_{n,i}| + l_2\|u_{n,i+1} - u_{n,i}\|\Big) \\
&\leq \frac{1}{h}\Big(hm + l_1h + l_2(\|u_{n,i+1} - u_{n,i} + hz_{n,i}\| + \|hz_{n,i}\|)\Big) \\
&\leq \frac{1}{h}\Big(hm + l_1h + l_2\Big(\frac{l_1h + (1+l_2)hm}{1-l_2} + hm\Big)\Big) \\
&\leq \frac{1}{h}\Big(hm + l_1h + \frac{l_1l_2h + 2l_2hm}{1-l_2}\Big) \\
&\leq \frac{1}{h}\Big(\frac{hm + l_2hm + l_1h}{1-l_2}\Big) \\
&\leq \frac{l_1 + (1+l_2)m}{1-l_2}.
\end{aligned}$$

C'est à dire pour presque tout $t \in I_{n,i}$,

$$\|\Delta_n(t)\| \leq \frac{l_1 + (1+l_2)m}{1-l_2}. \tag{3.28}$$

En considérant le vecteur $v = u_{n,i} - hz_{n,i}$, et puisque C est à valeurs r-prox-réguliers, et grâce à la relation (3.27), on obtient

$$u_{n,i+1} = P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}\Big(P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}(v) - r\frac{P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}(v) - v}{\|P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}(v) - v\|}\Big). \tag{3.29}$$

De plus, on a

$$\|\Delta_n(t)\| = \frac{1}{h}\|P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}(v) - v\|.$$

Par la relation (3.28) on trouve

$$\|\Delta_n(t)\| = \frac{1}{h}\|P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}(v) - v\| \leq \frac{l_1 + (1+l_2)m}{1-l_2}.$$

Alors

$$\frac{(1-l_2)\|P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}(v)-v\|}{h(l_1+(1+l_2)m)}) \leq 1.$$

On pose

$$\lambda = \frac{(1-l_2)\|P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}(v)-v\|}{h(l_1+(1+l_2)m)}.$$

D'après le **Lemme 2.1.1** nous obtenons

$$\begin{aligned} u_{n,i+1} &= P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}\Big(P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}(v) - \\ &\quad \frac{r}{h}\frac{(1-l_2)\|P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}(v)-v\|}{l_1+(1+l_2)m}\frac{P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}(v)-v}{\|P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}(v)-v\|}\Big) \\ &= P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}\Big(P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}(v) - \frac{r(1-l_2)}{h(l_1+(1+l_2)m)}(P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}(v)-v)\Big) \\ &= P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}\Big(P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}(v) - \frac{r(1-l_2)}{l_1+(1+l_2)m}\Delta_n(t)\Big). \end{aligned}$$

Alors

$$-\Delta_n(t) \in \Gamma^{\frac{r(1-l_2)}{l_1+(1+l_2)m}}\Big(u_{n,i+1}, C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})\Big).$$

Ou équivalent

$$u_{n,i+1} \in P_{C(t_{n,i+1},u_{n,i+1})}(u_{n,i+1} - \frac{r(1-l_2)}{l_1+(1+l_2)m}\Delta_n(t)),\ \forall t \in I_{n,i}. \tag{3.30}$$

Étape 3.

On a pour tout $t \in I_{n,i}$

$$\begin{aligned} \|\dot{u}_n(t)\| &= \|\dot{u}_n(t) - z_n(t) + z_n(t)\| \\ &\leq \|\dot{u}_n(t) + z_n(t)\| + \|z_n(t)\| \\ &= \|\Delta_n(t)\| + \|z_n(t)\| \\ &\leq \frac{l_1+(1+l_2)m}{1-l_2} + m, \end{aligned}$$

i.e.,

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq \frac{l_1+(1+l_2)m}{1-l_2} + m. \tag{3.31}$$

Où

$$L' = \frac{l_1+(1+l_2)m}{1-l_2}.$$

Donc $(\dot{u}_n(.))$ est uniformément bornée par $L' + m$. Pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}
\|u_n(t)\| &= \|u(0) + \int_0^t \dot{u}(\tau)d\tau\|, \\
&\leq \|u_0\| + \int_0^t \|\dot{u}(\tau)\|d\tau, \\
&\leq \|u_0\| + \int_0^t (L' + m)d\tau, \\
&\leq \|u_0\| + (L' + m)T = M_1'.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Alors $(u_n(.))$ est bornée dans $\mathbf{C}_H(I)$. En effet pour tous $t,\ s \in I$ $(t > s)$

$$\begin{aligned}
\|u_n(t) - u_n(s)\| &= \|u_0 + \int_0^t \dot{u}_n(\tau)d\tau - u_0 - \int_0^s \dot{u_n}(\tau)d\tau\| \\
&\leq \int_s^t \|\dot{u}_n(\tau)\|d\tau \\
&\leq (L' + m)\left|t - s\right|.
\end{aligned}$$

Alors $(u_n(.))_n$ est équicontinue. $\forall t \in I_{n,i},\ u_{n,i} \in C(t_{n,i}, u_{n,i})$ nous avons

$$\begin{aligned}
d(u_n(t), C(t, u_n(t))) &\leq d(u_n(t), C(t_{n,i}, u_{n,i})) + \mathcal{H}(C(t_{n,i}, u_{n,i}), C(t, u_n(t))) \\
&\leq \|u_n - u_{n,i}\| + l_1\left|t - t_{n,i}\right| + l_2\|u_n - u_{n,i}\| \\
&\leq (1 + l_2)\|u_n(t) - u_{n,i}\| + l_1 h \\
&\leq (1 + l_2)\|u_{n,i+1} - u_{n,i}\| + l_1 h \\
&\leq (1 + l_2)h\|\Delta_n(t)\| + h\|z_{n,i}\| + l_1 h \\
&\leq (1 + l_2)\Big(h\frac{l_1 + (1 + l_2)m}{1 - l_2}\Big) + hm + l_1 h \\
&\leq h\Big((1 + l_2)\Big(\frac{l_1 + (1 + l_2)m}{1 - l_2}\Big) + m + l_1\Big) \\
&= \frac{T}{n}M_2'.
\end{aligned}$$

Ensuite, pour $n \geq n_0$, il existe $y_n(t) \in C(t, u_n(t))$ telle que

$$\begin{aligned}
d(u_n(t), C(t, u_n(t))) &= \inf_{y_n(t) \in C(t, u_n(t))} \|y_n(t) - u_n(t)\| \\
&\leq \|y_n(t) - u_n(t)\| \\
&\leq \frac{T}{n}M_2' \\
&< \frac{T}{n}M_2' + \frac{T}{n}M_2' = 2\frac{T}{n}M_2'.
\end{aligned}$$

Soit $e_n(t) = u_n(t) - y_n(t)$, et observons que

$$\|e_n(t)\| < 2\frac{T}{n}M_2' \; et \; u_n(t) - e_n(t) \in C(t, u_n(t)).$$

D'après la relation (3.32) on obtient

$$\|u_n(t) - e_n(t)\| \leq M_1' + 2\frac{T}{n}M_2' = M_3',$$

alors

$$(u_n(t) - e_n(t)) \in C(t, u_n(t)) \cap \overline{\mathbf{B}}(0, M_3').$$

Ou équivalent

$$u_n(t) \in C(t, u_n(t)) \cap \overline{\mathbf{B}}(0, M_3') + (\{0\} + \{e_k(t)/k \geq 0\}) = K_n(t). \tag{3.33}$$

Remarquons que l'ensemble $K_n(t)$ est compact. Puisque $(C(t, u_n(t)) \cap \overline{\mathbf{B}}(0, M_3'))$compact et $\lim_{n\to+\infty} e_n(t) = 0$ alors $(\{0\} + \{e_k/k \geq 0\})$ compact. Par conséquent $(u_n(t))_{n\geq n_0}$est relativement compact. Par le **Théorème d'Ascoli-Arzelà** la suite $(u_n(.))_n$ est relativement compact dans $\mathbf{C}_H(I)$. On peut alors extraire de $(u_n(.))$ une sous suite qu'on notée $(u_n(.))$ converge uniformément vers $u(.) \in \mathbf{C}_H(I)$.

$$u_n(t) \to u(t), \, \forall t \in I. \tag{3.34}$$

Évident que $u(0) = u_0$, $u(.)$ est une application Lipschitzienne, en effet pour tous $t, s \in I$, on a

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(s)\| &\leq \|u(t) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u_n(s)\| + \|u_n(s) - u(s)\| \\ &\leq \|u(t) - u_n(t)\| + (L' + m)\,|t - s| + \|u_n(s) - u(s)\|, \end{aligned}$$

passant à la limite $n \longrightarrow +\infty$ on obtient

$$\|u(t) - u(s)\| \leq (L' + m)\,|t - s|\,.$$

Vérifient que

$$u(t) \in C(t, u(t)). \tag{3.35}$$

Par la relation (3.25) et la définition de u_n, on trouve

$$u(t_{n,i}) = u_{n,i} = P_{C(t_{n,i},u_{n,i})}(u_{n,i-1} - hz_{n,i-1}) \in C(t_{n,i}, u_{n,i}) = C(t_{n,i}, u_n(t_{n,i})), \forall t \in I_{n,i}.$$

D'après la distance de Hausdorff on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(C(t,u_n(t)),C(t,u(t))) &\leq l_1\,|t-t| + l_2\|u_n(t)-u(t)\|,\\ &= l_2\|u_n(t)-u(t)\|.\end{aligned}$$

Alors

$$C(t,u_n(t)) \subset C(t,u(t)) \cap \overline{\mathbf{B}}(0,l_2\|u_n(t)-u(t)\|). \tag{3.36}$$

De (3.33) et (3.36), on déduit

$$\begin{aligned}u_n(t) &\in C(t,u_n(t)) \cap \overline{\mathbf{B}}(0,M_3) + (\{0\} \cup \{e_k/k \geq 0\})\\ &\subset C(t,u(t)) \cap \overline{\mathbf{B}}(0,M_3 + l_2\|u_n(t)-u(t)\|) + (\{0\} \cup \{e_k(t)/k \geq 0\}).\end{aligned} \tag{3.37}$$

On conclure de (3.34) et la deuxième inclusion dans (3.37)

$$d(u_n(t),C(t,u(t)) \longrightarrow 0\, quand\, n \longrightarrow +\infty,$$

implique que

$$d(u(t),C(t,u(t)) = 0.$$

Alors

$$u(t) \in C(t,u(t)).$$

Enfin, montrons la convergence des suites $(z_n(.))$ et $(\dot{u}_n(.))$.
Posons pour chaque $t \in I_{n,i}$, $\theta_n(t) = t_{n,i+1}$, $\delta_n(t) = t_{n,i}$, et observons que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}(\theta_n(t)-t) &= \lim_{n\to+\infty}(t_{n,i+1}-t)\\ &\leq \lim_{n\to+\infty}(t_{n,i+1}-t_{n,i})\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{T}{n} = 0.\end{aligned}$$

C'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty}\theta_n(t) = t$. Par le même calcule on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta_n(t) = t$. Donc pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}\|u_n(\delta_n(t)) - u(t)\| &\leq \|u_n(\delta_n(t)) - u_n(t)\| + \|u_n(t)-u(t)\|\\ &\leq (L'+m)\,|\delta_n(t)-t| + \|u_n(t)-u(t)\|\\ &\leq (L'+m)\frac{T}{n} + \|u_n(t)-u(t)\|.\end{aligned}$$

D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n(\delta_n(t)) - u(t)\| = 0$. La convergence de la suite $(u_n(\theta_n(.)))_n$ vers $u(.)$ est obtenue par le même manière.

Maintenant, par la relation (3.25) ($z_{n,i} \in F(t_{n,i}, u_{n,i})$), et la construction de u_n et z_n, on a pour tout t fixé

$$z_n(t) \in F(\delta_n(t), u_n(\delta_n(t))). \tag{3.38}$$

Puisque $F(t,u) \subset m\overline{\mathbf{B}}_H$, on déduit que $(z_n(.))_n$ est bornée dans $\mathbf{L}^\infty_H(I)$, donc on peut extraire une sous suite notée $(z_n(.))$ qui converge $\sigma(\mathbf{L}^\infty_H, \mathbf{L}^1_H)$ vers une fonction $z(.)$ dans $\mathbf{L}^\infty_H = (\mathbf{L}^1_H(I))'$ car H est réflexif, i.e., pour tout $\xi(.) \in \mathbf{L}^1_H(I)$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \langle z_n(.), \xi(.)\rangle = \langle z(.), \xi(.)\rangle, \tag{3.39}$$

puisque $\mathbf{L}^\infty_H(I) \subset \mathbf{L}^1_H(I)$, par la relation(3.39) on déduit que pour tout $\xi(.) \in \mathbf{L}^\infty_H(I)$,

$$\lim_{n\to+\infty} \langle z_n(.), \xi(.)\rangle = \langle z(.), \xi(.)\rangle.$$

C'est à dire, $(z_n(.))$ converge $\sigma(\mathbf{L}^1_H, \mathbf{L}^\infty_H)$ vers $z(.)$ dans $\mathbf{L}^1_H(I)$. Par le **Théorème de Banche Mazur**, il existe une sous suite $(\zeta_n(.))$(où $\zeta_n(.)$ est une combinaisons convexe de $\{z_k(.), k \geq n\}$) qui converge vers $z(.)$ dans $\mathbf{L}^1_H(I)$. La convergence forte dans $\mathbf{L}^1_H(I)$ de $(\zeta_n)_n$ vers z(.) nous permet d'extraire de la suite $(\zeta_n(.))$une sous suite qui converge p.p. vers $z(.)$. Par suite,

$$z(t) \in \left\{\overline{\zeta_n(t), n \in \mathbb{N}}\right\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{\overline{\zeta_n(t)}\right\}, \text{ p.p. t} \in \text{I},$$

et d'où,

$$z(t) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{co}\left\{z_k(t), k \geq n\right\}, \text{ p.p. t} \in \text{I}.$$

Posons

$$A_n = \left\{z_k(t), k \geq n\right\}.$$

Alors, par le **Théorème 1.2.2**, on obtient pour tout $x' \in H$,

$$\begin{aligned}\langle x', z(t)\rangle &\leq \delta^*(x', A_n), \ \forall n \in \mathbb{N} \\ &= \sup_{k\geq n} \langle x', z_k(t)\rangle, \forall n \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

c'est à dire,

$$\begin{aligned}\langle x', z(t)\rangle &\leq \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geq n}\langle x', z_k(t)\rangle \\ &= \lim_{n\to+\infty}\sup\langle x', z_n(t)\rangle,\end{aligned}$$

de la relation (3.38), découle l'inégalité suivante

$$\langle x', z(t)\rangle \leq \lim_{n\to+\infty}\sup \delta^*\Big(x', F(\delta_n(t), u_n(\delta_n(t)))\Big).$$

On définit pour tout $x' \in H$ l'application

$$\begin{aligned} h_{x'} : I \times H &\longrightarrow H \\ (t,u) &\longrightarrow h_{x'}(t,u) = \delta^*(x', F(t,u)),\end{aligned}$$

qui h semi continue supérieure grâce à la semi continue supérieure de F, et donc

$$\limsup_{(t,u)\to(t_0,u_0)} h_{x'}(t,u) \leq h_{x'}(t_0,u_0).$$

Par conséquent, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta_n(t) = t$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(\delta_n(t)) = u(t)$, on conclut que,

$$\limsup_{n\to+\infty}\delta^*(x', F(\delta_n(t), u_n(\delta_n(t))) \leq \delta^*(x', F(t, u(t))),$$

d'où,

$$\langle x', z(t)\rangle \leq \delta^*(x', F(t,u(t))),\ \forall x' \in H,$$

ou bien,

$$\sup_{x'\in H}\Big(\langle x', z(t)\rangle - \delta^*(x', F(t,u(t)))\Big) \leq 0.$$

Comme F est à valeurs non vides fermées, par le **Corollaire 1.2.3** on obtient

$$d(z(t), F(t,u(t)) \leq 0.$$

Ce qui prouve que

$$z(t) \in F(t,u(t)),\ \text{p.p. t} \in \text{I}. \tag{3.40}$$

Maintenant, par la relation (3.31), on a $(\dot{u}_n(.))_n$ est bornée dans $\mathbf{L}^\infty_H(I)$. Alors $(\dot{u}_n(.))_n$ converge faiblement* dans $\mathbf{L}^\infty_H(I)$, supposons que $(\dot{u_n}(.))$ converge faiblement* dans $\mathbf{L}^\infty_H(I)$

vers une application $w(.)$ et que $w(.) = \dot{u}(.)$. En effet pour tout $y \in \mathbf{L}^1_H(I)$,

$$\lim_{n \to +\infty} \langle \dot{u}_n(.), y(.) \rangle = \langle w(.), y(.) \rangle,$$

i.e.,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^t \langle \dot{u}_n(s), y(s) \rangle ds = \int_0^t \langle w(s), y(s) \rangle ds.$$

En particulier pour $y(.) = \mathbf{1}_{[0,t]}(.)e_j$ avec $t \in I$, $\mathbf{1}_{[0,t]}$ la fonction caractéristique sur l'intervalle $[0, t]$ et (e_j) une suite de l'espace H qui séparé les points de H (une telle suite existe puisque H séparable) on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^t \langle \dot{u}_n(s), \mathbf{1}_{[0,t]}(s)e_j \rangle ds = \int_0^t \langle w(s), \mathbf{1}_{[0,t]}(s)e_j \rangle ds, \forall s \in [0, t].$$

Alors $\mathbf{1}_{[0,t]}(s) = 1$

$$\langle \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \dot{u}_n(s)ds, e_j \rangle = \langle \int_0^t w(s)ds, e_j \rangle, \ \forall j,$$

ce qui assure

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^t \dot{u}(s)ds = \lim_{n \to +\infty} \int_0^t w(s)ds.$$

Puisque $(u_n(.))$ est une application absolument continue, on a l'égalité suivante

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n(t) - u_n(0)) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^t \dot{u}_n(s)ds = \int_0^t w(s)ds.$$

Alors

$$u(t) = u(0) + \int_0^t w(s)ds,$$

donc $u(.)$ est absolument continue et $w(.) = \dot{u}(.)$.
Observons de plus, que pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\Big(C(t_{n,i+1}, u_{n,i+1}), C(t, u(t))\Big) &= \mathcal{H}\Big(C(\theta_n(t), u_n(\theta_n(t))), C(t, u(t))\Big) \\ &\leq l_1 \, |\theta_n(t) - t| + l_2 \|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| \underset{n \to +\infty}{\to} 0. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Montrons maintenant que pour presque tout $t \in I$

$$-\dot{u}(t) - z(t) \in \Gamma^{\frac{r}{L'}}(u(t), C(t, u(t))),$$

ou équivalent

$$u(t) \in P_{C(t,u(t))}(u(t) - \frac{r}{L'}(\dot{u}(t) + z(t)).$$

Posons $r' = \frac{r}{L'}$. On a $\Delta_n(t) = \dot{u}_n(t) + z_n(t)$ et par les argument cités dessus on sait que

$(\Delta_n(.))_n$ converge faiblement* dans $\mathbf{L}^{\infty}_H(I)$ vers $\dot{u}(.) + z(.) = \Delta(.)$. Utilisant la propriété "I-lisse faiblement compact" supposée sur l'espace H à la suite $(r'\Delta_n(.))_n$, nous obtenons pour tous $y \in \mathbf{L}^{\infty}_H(I)$ et $\phi \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(I)$,

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty} \int_I \langle J_p(y(t) - r'\Delta_n(t)) - J_p(-r'\Delta_n(t)), \Delta_n(t)\rangle \phi(t)dt \\ &= \int_I \langle J_p(y(t) - r'\Delta(t)) - J_p(-r'\Delta(t)), \Delta(t)\rangle \phi(t)dt.\end{aligned}$$

Par (3.30) on sait que pour presque tout $t \in I$

$$u_n(\theta_n(t)) \in P_{C(\theta_n(t), u_n(\theta_n(t)))}(u_n(\theta_n(t)) - r'\Delta_n(t)),$$

et puisque la suite $(u_n(\theta_n(.)))_n$ converge fortement vers $u(.)$ dans $\mathbf{L}^{\infty}_H(I)$, par la relation (3.41) on conclut par la **Proposition 2.6.3** et pour $t \in I$

$$u(t) \in P_{C(t,u(t))}(u(t) - r'\Delta(t)).$$

D'après la **Définition 2.1.6** on trouve

$$-\Delta(t) \in \Gamma^{r'}(u(t), C(t, u(t)).$$

En vertu de la **Remarque 2.1.1** on trouve

$$-\dot{u}(t) - z(t) \in P_{C(t,u(t))}(u(t)), \text{ p.p. t} \in \text{I}.$$

Par (3.40) on obtient

$$-\dot{u}(t) \in P_{C(t,u(t))}(u(t) + F(t, u(t)).$$

d'où

$$-\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) + F(t, u(t)), \text{ p.p. t} \in \text{I}.$$

Le problème (P_F) admet une solution Lipschitzienne $u \in \mathbf{C}^1_H(I)$.
Ceci déterminer la démonstration. □

CONCLUSION GÉNÉRALE

Ce mémoire a pour objectif d'étudier l'existence et l'unicité de solution pour un processus de la rafle du premier ordre dépendant du temps et de l'état, dans un espace de Hilbert, le premier gouvernée par un cône normal proximal, le second gouvernée par un cône normal proximal, avec une perturbation multivoque semicontinue supérieurement à valeurs non vides convexes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.P. Aubin et A. Cellina, Differential Inclusions, Set valued maps ans viability theory, Spring-Verlag, Berlin MR 91d : 49001 (1984).

[2] D. Azzam-Laouir, *Polycopié, cours d'analyse multivoque*, Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées, Université de Jijel 2008.

[3] D. Azzam-Laouir,*Contribution à l'etude de problèmes d'evolution du second ordre, Thèse du doctorat d'etat,* Université de constantine (2003).

[4] F. Bernard, L. Thibault and N. Zlateva, *Characterization of Prox-Regular Sets in Uniformly Convex Banach Space*. J. Convex Anal. 13 (2006), 525–560.

[5] F. Bernicot, J. Venel, *Existence of sweeping process in Banach space under directional prox-regularity*. J. Convex Anal. 17 (2010), 451–484.

[6] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications. Masson, 1983.

[7] H. Brezis, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contraction dans les espaces de Hilbert. Lecture notes in Math. North-Amsterdam 1973.

[8] A.Bouzid, J. Galbux, Théorié de la mesure et de l'intégration.

[9] N. Bourbaki, topologie générale,Masson, 1990

[10] C. Castaing, M. Valadier, convexe analysis and mesurable multi-fonction. Lectures Notes in mathematics, Vol. 580, springer-verlag, Berlin(1977)

[11] F. H. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis.* John Wiley and Sons, New York 1983.

[12] F. H. Clarke, R. J. Stern and P. R. Wolenski, Proximal smoothness and the lower-C^2 property. J. Convex Anal. 2 (1995), 117-144.

[13] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, R. J. Stern and P. R. Wolenski, Nonsmooth Analysis and Control Theory, Springer-Verlag, New-York, inc 1998.

[14] M. Kunze and M.D.P Monteiro Marques, *On parabolic quasi-variational inequalities and state-dependent sweeping processes.* Topol. Methods Nonlinear Anal. **12** (1998) 179-191.

[15] J. J. Moreau, *Evolution problem associated with a moving convex set in Hilbert space,* J. Differential Equations, 26, no. 3 (1977), 347-374.

[16] J.J. Moreau, *Rafle par un convexe variable I.* Sém. Anal. Convexe Montpellier (1971), Exposé 15.

[17] J.J. Moreau, *Rafle par un convexe variable II.* Sém. Anal. Convexe Montpellier (1972), Exposé 3.

[18] J. J. Moreau, Sur l'évolution d'un système élasto-viscoplastique, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 273 (1971), 118-121.

[19] W. Rudin, Analyse fonctionnelle, Ediscience internqtional. Paris(1995)

[20] L. Schwartz, Analyse, Topologie générale et analyse fonctionnelle. Hermann, Paris (1970).

[21] L. Schwartz, Analyse III. Hermann, Paris, 1998.

[22] "Symposium-School on Ordinary Differential Equations", TIPAZA, May 13-18, 2006.

[23] Jean-Pierre Aubin and Hélène Frankowska, sel-valude Analysis, 1990

[24] L. Thibault, *Sweeping process with regular and nonregular sets,* J. Diff. Equations, 193 no. 1 (2003), 1-26.

[25] J. V. Tiel, *Convex Analysis, an introductory text,* Winey, 1984.

Résumé

On s'intéresse dans ce mémoire à l'étude de l'existence et de l'unicité de solution pour un processus de la rafle du premier ordre dépendant du temps et de l'état, dans un espace de Hilbert. Dans le premier cas, il est gouverné par un cône normal proximal, dans le cas second gouverné par un cône normal proximal, avec une perturbation multivoque semi continue supérieurement à valeurs non vides convexes.

Abstract

In this we are interested in studying the existence and uniqueness for a first order sweeping process to a moving set depending on the time and on the state in Hilbert space, one the governed by a proximal cone and the second one governed by a proximal cone, with multivalued pertturbation, upper semicontinuous, with non-empty convex values.