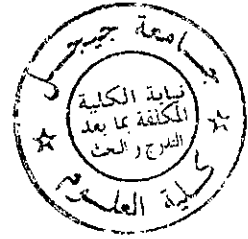


جامعة جيجل
المكتبة المركزية
رقم الجرد: J.H/332

525/6
UNIVERSITE DE JIJEL
Faculté des sciences
Département de Mathématiques



N° d'ordre :
Série :

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de

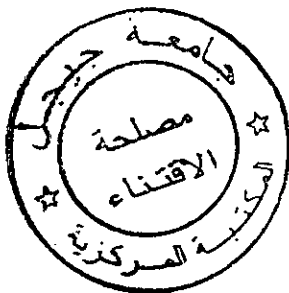
MAGISTER

Spécialité Mathématiques

Option Analyse

Thème

*Application de
L'Analyse Asymptotique*



Par

AMOURA HAFIDA

Soutenu le : 07... / 05... / 2009 devant le Jury :

Président : A.AIBECHÉ

Rapporteur : H. MEKIAS

Examineurs : S.DREBLA

M.YAROU

A.BENDJEDOU

Prof. U.F.A.S

Prof. U.F.A.S

Prof. U.F.A.S

Prof. U. Jijel

M.C. U.F.A.S

ملخص

الهدف من هذا البحث هو تقديم بعض تطبيقات التحليل الثقاربي و لهنر بصفة خاصة بنظرية الإرتيابات المنظمة و الغير منظمة مدعمة بأمثلة مشوعة.

تقدم مدخل إلى ميكانيكة الأجسام المائعة، مع كتابة المعادلات الأساسية ثم تقوم بالنطيق على سيلان جسم مائع غير قابل للضبط على صفيحة تمثل نصف مسنوى مفتوح.

Résumé

Dans ce travail on s'intéresse à quelques applications de l'analyse asymptotique.

On expose une synthèse des perturbations régulières et singulières avec des exemples.

On présente les notions générales sur les fluides, on établit les équations fondamentales.

Une application d'un écoulement d'un fluide incompressible sur une plaque plane semi-infinie est donnée.

Abstract

This work is devoted to some applications of asymptotic analysis.

We do a synthesis of the singular and regular perturbation with various examples.

We present an introduction to fluid mechanics and establish the fundamental equations.

An application of flow incompressible fluid past on a semi-infinite flat plate is given.



Dédicaces



A mes chers parents : ALI & MASOUDA

Sources de mes joies, secrets de ma force

*Merci pour tous vos sacrifices,
Merci de trimer sans relâche, malgré les péripéties de la vie.*

Merci d'être tout simplement mes parents

*C'est à vous que je dois cette réussite
et je suis fière de vous l'offrir*

*A mes frères et mes sœurs, SAÏD, HALIM, FOUZIA, RADIA, SIHEM, SAMIA,
ILHEM, SABRINA, SADJIA, TEMA, et leurs enfants sans oublier les enfants de
ma sœur SOUAD et spécialement SAMIRA*

A mes belles sœurs SOUAD et NABILA

Merci pour votre encouragement et votre aide

Au bijou de la maison MDATAZ



Remerciements

Je tiens avant tout, de remercier Dieu tout puissant qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce mémoire.

Je remercie tout d'abord mon directeur de recherche : Monsieur MEKIAS HOCINE, professeur à l'université de Sétif, qui m'a encadré durant la réalisation de mon projet.

Je vous suis reconnaissante pour votre appui, disponibilité, vos critiques et du respect que vous m'avez témoigné durant tout ce temps.

A Monsieur A. AIBECHE, professeur à l'université de Sétif, qu'il me soit permis de le remercier d'avoir bien voulu présider le jury de cette thèse.

Je tiens également à remercier les membres du jury, pour l'attention et le temps consacré à la lecture et le jugement de ce mémoire ; le professeur : S. DREBLA, professeur à l'université de Sétif, M. YAROO, professeur à l'université de jijel, A. BENDJEDOU, maître de conférence à l'université de Sétif, mes enseignants auxquels j'aimerais dire que leur compétence et leur sérieux m'ont toujours influencée.

Mes parents, mes frères et mes sœurs, merci du fond du cœur pour votre présence, votre amour, votre soutien dans les moments où j'en avais le plus besoin. Merci infiniment « SAMIA et ILHEM ».

« I maintained my edge by always being a student. You will always have ideas, have something new to learn ».

Jackie Joyner-Kersey



Table des matières

0.1	Introduction Générale	2
1	Notion de L'analyse Asymptotique	5
1.1	Outils de comparaison	5
1.2	Suites asymptotiques (fonctions de gauges) (s.a)	6
1.3	Les séries asymptotiques :	7
1.4	Notions sur les perturbations et illustration par des exemples	9
1.4.1	Commentaire :	10
2	Mécanique des fluides	34
2.1	Les Fluides et le Modèle de Milieu Continu	34
2.1.1	Le Modèle de Milieu Continu	35
2.1.2	Notion de Particule	35
2.2	Description d'un fluide en mouvement	36
2.2.1	Description Lagrangienne	36
2.2.2	Description Eulerienne	38
2.2.3	Lien entre les deux descriptions	38
2.3	Les principes fondamentaux de la mécanique	42
2.4	Etablissement des équations d'un mouvement d'un fluide	42
2.4.1	Equation de continuité ou de la conservation de la masse	42
2.4.2	Conservation de la quantité de mouvement :	44
2.4.3	Equation de quantité de mouvement :	46
2.5	Les équations de Navier-Stokes et d'Euler	47
2.5.1	Cas d'un fluide parfait : équation d'Euler	48
2.5.2	Remarque préliminaire sur les notations utilisées :	48
2.5.3	Cas d'un fluide incompressible : Les équations de Navier-Stokes	50
2.5.4	Ordres de grandeur- <i>Nombre de Reynolds</i>	52
2.6	Le nombre de Reynolds comme paramètre de base en mécanique des fluides à ρ constant	53
2.7	Ecoulement sur une plaque plane semi-infinie	54
2.7.1	Les équations de prandtl	54
2.7.2	Les échelles du problème	55
2.7.3	Simplification des équations	56
2.8	Cas de la plaque plane sans gradient extérieur de pression	57
2.8.1	Invariance du problème selon certaines affinités	58

0.1 Introduction Générale

Dans ce mémoire, on donne quelques applications de l'analyse asymptotique en mécanique des fluides.

Ce travail se divise en deux grands chapitres,

Dans le chapitre premier on fait une synthèse de l'analyse asymptotique et en particulier les perturbations.

L'analyse asymptotique est une des théories d'approximation locale d'une fonction donnée ou bien solution d'un problème donné.

La théorie des perturbations est une méthode mathématique générale qui permet de trouver une solution approchée d'une équation mathématique (E_λ) dépendante d'un paramètre λ lorsque la solution de l'équation (E_0) correspondant à la valeur $\lambda = 0$, est connue exactement. L'équation mathématique (E_λ) peut être équation algébrique, une équation différentielle, une équation aux valeurs propres ..., la méthode consiste à chercher la solution approchée de l'équation (E_λ) sous la forme d'un développement en série de puissances du paramètre λ , cette solution approchée étant supposé être une approximation d'autant meilleure de la solution exacte, mais inconnue, que la valeur absolue du paramètre λ est plus "petite".

On donne une introduction générale sur l'analyse asymptotique comme un outil d'approximation analytique locale au voisinage d'un point x_0 donné. Pour cela, on donne les ordres de comparaisons entre les fonctions au voisinage d'un point x_0 . Les relations \mathcal{O} , \mathcal{o} , \sim seront définis en donnant quelques unes de leur propriétés puis la notion de suite asymptotique et développement asymptotique seront définis et illustrés par des exemples.

En particulier on donne une comparaison entre une série asymptotique et une série convergente, tout en émergeant les avantages d'un développement asymptotique. Après cela, on donne des notions sur les perturbations, son cadre général, les étapes à suivre et l'objectif final. Tout en illustrant ces notions par des exemples.

On traite d'abord un problème de perturbation algébrique, en donnant une distinction entre un problème de perturbation régulier et un problème de perturbation singulier. Comme le problème de perturbation et la théorie de perturbation visent surtout les problèmes d'équations différentielles et les équations aux dérivées partielles, on donne quelques exemples d'équations différentielles et d'équations aux dérivées partielles avec des perturbations régulières et singulières.

Comme problème de perturbation singulière pour les équations différentielles ordinaires on a donné un problème de couche limite avec la notion de "matching" ou raccordement des solutions.

Pour les problèmes réguliers on a donné les divers modes de perturbations qui puissent exister. La perturbation peut être dans l'équation elle-même, comme le montre l'exemple d'équation différentielles, et le deuxième exemple d'équation aux dérivées partielles, la perturbation peut être artificielle (introduite juste pour résoudre le problème originale), comme elle peut être dans le domaine de validité lui-même comme le montre le dernier exemple. De plus la perturbation peut apparaître dans les conditions aux limites ou bien dans les conditions initiales. Le problème peut être en cors plus compliquer s'il admet deux ou plusieurs modes de perturbations cités plus haut.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à la mécanique des fluides qu'on peut définir comme étant la branche de la mécanique qui traite l'écoulement des fluides et des effets mécaniques, thermiques.. qu'il engendre ou qui lui sont associés. En premier lieu on définit le fluide comme un corps qui peut prendre une forme quelconque, lorsqu'il est soumis à un système de forces convenables, ces forces peuvent être aussi faibles que l'on veut, à condition que l'on attende un temps suffisant.

Nous allons étudier le fluide, et son écoulement indépendamment des forces responsables de cet écoulement. D'abord on va définir nos hypothèses de travail et en particulier présenter le modèle de milieu continu.

Après, nous allons voir ce qu'est la cinématique des fluides, c'est à dire nous intéressons aux différentes manières qui s'offrent à nous pour décrire un système fluide en mouvement. Il existe en mécanique des fluides deux modes principaux de description : les descriptions lagrangienne et eulérienne.

Nous les étudierons successivement, en déterminant également les formules qui existent pour passer de l'une à l'autre.

L'objectif de la dynamique est de relier l'écoulement aux actions qui lui donne naissance. L'approche est de type mécanique : on fait un bilan des forces s'exercent sur la particule de fluide puis on applique les principes et théorèmes généraux de mécanique et thermodynamique : Principe de la conservation de la masse, principe de la conservation de la quantité de mouvement et Principe de la conservation de l'énergie.

L'expérience montre que, lors d'un écoulement d'un fluide, la pression (force normale) ne suffit pas pour expliquer quelques phénomènes et qu'il convient d'introduire des forces tangentielles qui s'opposent au mouvement du fluide. Ces forces, de type frottement, dues aux interactions entre molécules du fluide, sont appelées forces de viscosité.

On étudie les équations qui régissent le mouvement des fluides, le modèle de Navier-Stokes avec des cas particuliers. La complexité provient essentiellement de la présence, dans l'équation de Navier-Stokes, d'un terme non linéaire " le terme convectif " et d'un terme du second ordre " le terme de viscosité ". Dans de nombreux cas, on peut négliger l'un de deux termes devant l'autre. On définit alors un facteur sans dimension, qui estime l'importance du terme convectif devant le terme de viscosité, ce nombre s'appelle le nombre de Reynolds qui est très important en mécanique des fluides car il permet de classifier les écoulements.

Enfin, nous nous intéressons particulièrement au cas de la couche limite d'un écoulement stationnaire, incompressible et plan d'une plaque plane semi-infinie.

Chapitre 1

Notion de L'analyse Asymptotique

L'analyse asymptotique est une des théories d'approximation locale d'une fonction donnée ou bien solution d'un problème donné.

(Le lecteur souhaitant obtenir un développement plus approfondi, peut consulter [13], [20], [22])

1.1 Outils de comparaison

Les symboles \mathcal{O} , o , \sim sont utilisée pour la première fois par :E. Landau et D Bois-Reymond et sont définis comme suit : Soit $x_0 \in \overline{\mathcal{D}}$, \mathcal{D} est un domaine de \mathbb{R}

Définition 1.1.1 Grand "O" : on dit que $f(x)$ est grand \mathcal{O} de $g(x)$ quand $x \rightarrow x_0$ dans \mathcal{D} si et seulement si :

$$\exists k > 0 \text{ et } \delta > 0 \text{ tel que : } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq k|g(x)|$$

Remarque 1.1.2 si $\frac{f(x)}{g(x)}$ est définie au voisinage de x_0 alors : $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$, $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ est borné au voisinage de x_0 .

Définition 1.1.3 Grand "O" global : on dit que $f(x)$ est globalement grand de $g(x)$ dans \mathcal{D} si et seulement si :

$$\exists k > 0, \text{ tel que : } |f(x)| \leq k|g(x)|, \forall x \in \mathcal{D}.$$

Définition 1.1.4 Petit "o" : on dit que $f(x)$ est petit "o" de $g(x)$ quand $x \rightarrow x_0$ si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que : } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq \epsilon|g(x)|$$

on écrit alors : $f(x) = o(g(x))$ $x \in \mathcal{D}$ quand $x \rightarrow x_0$

Remarque 1.1.5 : 1) si $\frac{f(x)}{g(x)}$ est définie dans le voisinage de x_0 , et :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ existe alors : } f(x) = o(g(x)), x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

2) $f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ au voisinage de x_0 .

Définition 1.1.6 *Équivalent " \sim " : on dit que $f(x)$ est asymptotiquement " équivalent " ou "égale" à $g(x)$ au voisinage de x_0 si et seulement si :*

$$(a) : f(x) - g(x) = o(f(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

Ou bien

$$(b) : g(x) - f(x) = o(g(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

On écrit alors $f(x) \sim g(x) \quad x \rightarrow x_0$.

Remarque 1.1.7 *si $\frac{f(x)}{g(x)}$ est défini au voisinage de x_0 et si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe alors :*

$$f(x) \sim (g(x)) \quad x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Exemples :

1) $f(t) = O(1)$ quand $t \rightarrow t_0 \Leftrightarrow f(t)$ est borné lorsque $t \in V(t_0)$

2) $f(t) = o(1)$ quand $t \rightarrow t_0 \Leftrightarrow f(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow t_0$

soit : $f(t) = 5t^2 + t + 3$.

$f(t) = o(t^3)$, $f(t) = O(t^2)$, $f(t) \sim 5t^2$ quand $t \rightarrow \infty$ mais $f(t) \sim 3$ quand $t \rightarrow 0$

3) lorsque $t \rightarrow 0$: $\sin(\frac{1}{t}) = O(1)$, $\cos t \sim 1 - \frac{1}{2}t^2$, $\sin t \sim t$

Remarque 1.1.8 *La notation $f(x) \ll g(x)$ quand $x \rightarrow x_0$ est utilisée à la place de : $f(x) = o(g(x))$ quand $x \rightarrow x_0$.*

1.2 Suites asymptotiques (fonctions de gauges) (s.a)

Définition 1.2.1 *Soit $(\delta_n(x))_{n \geq 1}$ une suite de fonctions définies dans \mathcal{D} et $x_0 \in \overline{\mathcal{D}}$*

$(\delta_n(x))_{n \geq 1}$ est dite une suite asymptotique ou bien une suite de fonctions gauges, au voisinage de x_0 si :

$$\delta_{n+1}(x) = o(\delta_n(x)) \quad x \rightarrow x_0 , \quad \forall n = 1, 2, \dots, n$$

Exemples :

1) $\delta_n(x) = (x - x_0)^n$ $(\delta_n(x))_{n \geq 1}$ est une suite asymptotique quand $x \rightarrow x_0$

2) $\delta_n(x) = \frac{1}{x^n}$ est une suite asymptotique quand $x \rightarrow +\infty$

généralement : $g(x)$ est une fonction tel que : $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$
alors : $\delta_n(x) = [g(x)]^n$ est une suite asymptotique quand

1.3 Les séries asymptotiques :

L'étude des perturbations régulières d'équations différentielles conduit souvent à une série divergente qui approxime, dans un sens que nous allons voir, une " vraie " solution. On se propose de présenter une introduction à la théorie des séries asymptotiques essentiellement tirée de [8],[28],[29] pour les exemples.

Définition 1.3.1 : On appelle développement asymptotique de la fonction $f(x)$ au voisinage d'un point $x_0 \in \overline{D}$ par rapport à une suite asymptotique $(\delta_n(x)) \quad x \rightarrow x_0$ à l'ordre N

$$\text{Si : } f(x) = \sum_{i=0}^m a_i \delta_i(x) + o(\delta_{m+1}(x)) \quad x \rightarrow x_0 \quad (1)$$

$\forall m = 0, 1, 2, \dots, N.$

La relation est vraie $\forall m \geq 0$, alors la série $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \delta_i(x)$ est dite une série asymptotique de la fonction $f(x)$ au voisinage de x_0 et on écrit alors :

$$f(x) \sim \sum_{i=0}^{\infty} a_i \delta_i(x) \quad x \rightarrow x_0$$

Exemples :

1) Si \mathcal{D} est un intervalle non triviale de \mathcal{R} et $f \in C^\infty(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ avec $0 \in \mathcal{D}$, on a, d'après la formule de Taylor-Young :

$$f(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(r)}(0)}{r!} x^r \quad x \rightarrow 0$$

2) Si $\mathcal{D} =]-\infty, 0[$, Considérons la fonction f définie sur \mathcal{D} par $f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \int_{-\infty}^{\frac{1}{x}} \frac{e^t}{t} dt.$

Par intégrations par parties successives, il vient :

$$\forall n \in \mathcal{N} : f(x) = \sum_{r=0}^n r! x^r + (n+1)! \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \int_{-\infty}^{\frac{1}{x}} \frac{e^t}{t^{n+2}} dt$$

$$\text{On a alors en posant : } \mathcal{R}_n(x) = (n+1)! \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \int_{-\infty}^{\frac{1}{x}} \frac{e^t}{t^{n+2}} dt$$

$$|\mathcal{R}_n(x)| \leq (n+1)! \frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{|x|} \int_{-\infty}^{\frac{1}{|x|}} \frac{e^t}{|t^{n+2}|} dt$$

$$\leq (n+1)! \frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{|x|} |x|^{n+2} \int_{-\infty}^{\frac{1}{|x|}} e^t dt$$

$$\leq (n+1)! |x|^{n+1} e^{-\frac{1}{|x|}} e^{\frac{1}{|x|}} = (n+1)! |x|^{n+1}$$

d'où :

$\mathcal{R}_n(x) = o(x^n) \quad x \rightarrow 0$ et $\sum_{r=0}^{\infty} r! x^r$ est une série asymptotique associée à f (qui de plus est divergente).

3) considérons la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt.$

Remarquons que l'on a :

$\forall x \in \mathcal{R}_+^*$, $\forall t \in \mathcal{R}_+$, $\forall n \in \mathcal{N}$, $\frac{1}{1+xt} = \sum_{r=0}^n (-xt)^r + \frac{(-xt)^{n+1}}{1+xt}$
d'où :
 $f(x) = \mathcal{S}_n(x) + \mathcal{R}_n(x)$ avec : $\mathcal{S}_n(x) = \sum_{r=0}^n \int_0^{+\infty} (-xt)^r e^{-t} dt = \sum_{r=0}^n (-1)^r \left(\int_0^{+\infty} t^r e^{-t} dt \right) x^r$

soit, $\mathcal{S}_n(x) = \sum_{r=0}^n (-1)^r r! x^r$

et $\mathcal{R}_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-xt)^{n+1}}{1+xt} e^{-t} dt = (-1)^{n+1} x^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} t^{n+1}}{1+xt} dt$

Déterminons l'ordre de grandeur de $\mathcal{R}_n(x)$
on a :

$\frac{1}{1+|xt|} \leq 1$ de sorte que :

$|\mathcal{R}_n(x)| \leq |x|^{n+1} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{n+1} dt = (n+1)! |x|^{n+1}$

d'où :

$\mathcal{R}_n(x) = o(x^n)$ $x \rightarrow 0$ et $\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r r! x^r$ est une série asymptotique associée à f .

Théorème 1.3.2 (unicité) :

Une fonction f définie dans \mathcal{D} admet au plus une série asymptotique

$f(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ $x \rightarrow 0$, $x \in \mathcal{D}$

Démonstration : soit $\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ une série asymptotique associée à f s'il en existe une.
La définition de série asymptotique conduit à :

$\forall n \in \mathcal{N}$: $f(x) - \sum_{r=0}^{n-1} a_r x^r - a_n x^n = o(x^n)$ $x \rightarrow 0$, $x \in \mathcal{D}$

soit $\forall n \in \mathcal{N}$: $x^{-n} (f(x) - \sum_{r=0}^{n-1} a_r x^r) - a_n = o(1)$ $x \rightarrow 0$, $x \in \mathcal{D}$

C'est à dire $\forall n \in \mathcal{N}$, $a_n = \lim_{x \rightarrow 0, x \in \mathcal{D}} x^{-n} (f(x) - \sum_{r=0}^{n-1} a_r x^r)$

Par récurrence immédiate, il suit que $\sum_{r=0}^{+\infty} a_r x^r$ est entièrement déterminée, ce qui prouve le théorème.

Remarque 1.3.3 Naturellement, une telle série peut être une série asymptotique de plusieurs fonctions comme le montrent $x \rightarrow 0$ et $x \rightarrow e^{-\frac{1}{x^2}}$ qui sont associées à la série nulle (dont tous les termes sont nuls). Par contre, si f et g admettent la même série asymptotique, on a

$\forall n \in \mathcal{N}$: $f(x) - g(x) = o(x^n)$ $x \rightarrow 0$, $x \in \mathcal{D}$

C'est-à-dire que la fonction $f - g$ tend vers 0 plus rapidement que toute puissance de x .

1.4 Notions sur les perturbations et illustration par des exemples

(voir [1], [2], [6], [7])

La théorie des perturbation est une collection des méthodes itératives pour obtenir des solutions analytiques approximatives aux problèmes contenant un petit paramètre ϵ .

Ces méthodes sont assez puissantes que des fois on introduit un petit paramètre ϵ dans un problème difficile pour qu'on puisse le traiter par une des méthodes de la théorie des perturbations .

Soit à chercher une solution $u(x)$, fonction d'une variable x qui appartient à un domaine \mathcal{D} , à un problème $\mathcal{P}(u, \epsilon)$ dépendant d'un petit paramètre ϵ . L'idée principale de la théorie des perturbations est de chercher u sous forme d'une série asymptotique en ϵ , c.à.d :

$$(1.1) \quad u \sim u_0 + u_1\varphi_1(\epsilon) + u_2\varphi_2(\epsilon) + \dots$$

La suite $\{\varphi_i(\epsilon)\}_{i=1,2,\dots}$ est une suite asymptotique lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Le problème $\mathcal{P}(u, \epsilon)$ sera remplacé par une suite de problèmes $\mathcal{P}_j(u_i)$ normalement plus simple à résoudre que le problème original $\mathcal{P}(u, \epsilon)$.

En général, la suite $\{\varphi_j(\epsilon)\}_{j \geq 1}$ n'est pas connue à priori (en avance) mais on commence souvent par essayer la suite asymptotique des puissances, c.à.d : $\varphi_j(\epsilon) = \epsilon^j$. Si ce choix donne une réponse satisfaisante c'est bien fait , si non, on construit une autre forme de $\varphi_j(\epsilon)$ qui dépend du problème $\mathcal{P}(u, \epsilon)$ lui même.

Pour appliquer une méthode de perturbation on passe par les étapes suivantes :

(1) Identifier le petit paramètre ϵ du problème ou bien convertir le problème original ne contenant pas ϵ à un qui le contient (perturber le problème original).

(2) Résoudre le problème perturbé en supposant que la solution est développable en série asymptotique de la forme(1).

(3) Trouver la solution approximative du problème original en substituant la valeur de ϵ appropriée.

(4) Vérifier que la solution approchée trouvée est bien une approximation à la solution exacte.

1.4.1 Commentaire :

Dans l'étape (1) il y'a plusieurs façons de perturber un problème, on le perturbe de telle sorte que la forme réduite ($\epsilon = 0$) est facile à résoudre.

L'étape (2) est généralement une coutume de procédures itératives pour déterminer les coefficients dans la série asymptotique.

L'étape (3) peut être facile comme elle peut être difficile. On peut avoir des problèmes singuliers qui sont délicats à traiter. Aussi, on doit justifier que la solution trouvée est une bonne approximation, c'est le procédé de "trial and error".

Les techniques formelles de perturbation sont une généralisation naturelle de l'étude locale des équations différentielles qui consiste à développer la solution au voisinage d'un point $x = x_0$, en série des puissances en $(x - x_0)$ si $x_0 \neq \infty$ ou $\frac{1}{x}$ si $x_0 = \infty$. La même idée est transférée aux problèmes de perturbations : développer la solution en série de la forme (1).

On distingue deux types de problèmes de perturbations :

1- problème de perturbation régulière.

2- problème de perturbation singulière.

Définition 1.4.1 : $\mathcal{P}(u, \epsilon)$ est un problème régulier (ou problème de perturbation régulière) si sa solution $\mathcal{U}(x, \epsilon)$ admet une série asymptotique de puissance de ϵ au voisinage de $\epsilon = 0$ et si de plus $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{U}(x, \epsilon) = \mathcal{U}_0$ où \mathcal{U}_0 est la solution du problème réduit $\mathcal{P}(u, 0)$.

Définition 1.4.2 : $\mathcal{P}(u, \epsilon)$ est un problème singulier (ou problème de perturbation singulière) si sa solution $\mathcal{U}(x, \epsilon)$ n'admet pas une série asymptotique de puissance de ϵ au voisinage de $\epsilon = 0$ ou bien $\mathcal{U}(x, \epsilon)$ admet une série asymptotique de puissance de ϵ au voisinage de $\epsilon = 0$ non uniformément valable $\forall x \in \mathcal{D}$.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{U}(x, \epsilon) \neq \mathcal{U}_0$$

Remarque 1.4.3 (a) Si le problème réduit $\mathcal{P}(u, 0)$ est mal posé alors $\mathcal{P}(u, \epsilon)$ est un problème singulier.

(b) Dans un problème singulier, la solution $\mathcal{U}(x, \epsilon)$ change de caractère dans des différentes régions du paramètre ϵ et de la variable x .

(c) Dans un problème régulier , une seule série de la forme

$$\mathcal{U}(x, \epsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{U}_i(x) \epsilon^i, \quad \epsilon \rightarrow 0$$

est suffisante pour décrire le comportement de la solution. Dans ce qui suit, on va traiter un exemple des perturbations régulières et un exemple des perturbations singulières

exemple 1 : (perturbation régulière)

Considérons l'équation algébrique :

$$\mathcal{F}(x, \epsilon) : x^2 + \epsilon x - 4 = 0 \dots (1), \epsilon \text{ un petit paramètre}$$

Il existe deux racines à l'équation réduite que nous pouvons calculer, à savoir $x = 2$ où $x = -2$

Et pour $|\epsilon|$ suffisamment petit, Il existe aussi deux racines dont chacune a un développement asymptotique relative à $\{\epsilon^n\}_{n=0}^\infty$ quand $\epsilon \rightarrow 0$. Le développement asymptotique de chaque racine x est de la forme :

$$(1.2) \quad x \sim a_0 + \epsilon a_1 + \epsilon^2 a_2 + \dots \quad \epsilon \rightarrow 0$$

pour quelques coefficients inconnus a_0, a_1, a_2, \dots ceci signifie que :

$$(1.3) \quad x - \sum_{n=0}^N a_n \epsilon^n = \mathcal{O}(\epsilon^{N+1}) \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0$$

Les coefficients a_i peuvent être trouvés par récurrence. En remplaçant l'expression(3) dans l'équation $\mathcal{F}(x, \epsilon) = 0$ la représentation :

$$x = a_0 + \epsilon a_1 + \epsilon^2 a_2 + \dots + \epsilon^N a_N + R_N(\epsilon) \text{ ou } R_N(\epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon^{N+1})$$

Puis identifier les coefficients de même puissances de ϵ , on trouve successivement ceux de la série (2). Pour $N = 2$ nous avons,

$$(a_0 + \epsilon a_1 + \epsilon^2 a_2)^2 + \epsilon(a_0 + \epsilon a_1 + \epsilon^2 a_2) - 4 = 0$$

$$(a_0^2 - 4) + (2a_0 a_1 + a_0)\epsilon + (a_1^2 + 2a_0 a_2 + a_1)\epsilon^2 = 0$$

Le plus bas ordre de l'équation est

$$\mathcal{O}(1) : a_0^2 - 4 = 0$$

Cette équation possède deux solutions $a_0 = 2$ ou $a_0 = -2$, solutions de l'équation réduite. Substituons ces résultats dans la prochaine équation :

$$\mathcal{O}(\epsilon) : 2a_0a_1 + a_0 = 0$$

$$a_0(2a_1 + 1) = 0, a_0 \neq 0 \text{ d'où } a_1 = -\frac{1}{2}$$

Substituons a_0 et a_1 dans les coefficients de $\mathcal{O}(\epsilon^2)$

$$a_1^2 + 2a_0a_2 + a_1 = 0$$

$$a_0a_2 = -\frac{1}{8}$$

quand $a_0 = 2$ on trouve $a_2 = \frac{1}{16}$

quand $a_0 = -2$ on trouve $a_2 = -\frac{1}{16}$

donc, les deux racines de l'équation $\mathcal{F}(x, \epsilon) = 0$ satisfont les relations asymptotiques :

$$x_0 = 2 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{16}\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

$$x_1 = -2 - \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{16}\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

Vérification : $\mathcal{F}(x_0, \epsilon) = \mathcal{F}(x_1, \epsilon) = \frac{1}{256}\epsilon^4 = \mathcal{O}(\epsilon^3)$

donc l'équation est vérifiée.

Exemple 2 : (problème de perturbation singulière)

Considérons maintenant l'équation algébrique

$$\mathcal{F}(x, \epsilon) = \epsilon x^3 + \epsilon x^2 + x - 1 = 0 \text{ pour } \epsilon \text{ positif et petit.}$$

Dans ce cas le problème réduit ($\epsilon = 0$) est une équation linéaire, avec seulement une racine $x_0 = 1$. La théorie de perturbation de cette racine est juste comme dans l'exemple précédent pour $N = 1$, on obtient

$$x = a_0 + \epsilon a_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

L'équation s'écrit :

$$(a_0 - 1) + \epsilon(a_0^3 + a_0^2 + a_1) = \mathcal{O}(\epsilon^2), \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0$$

avec la même procédure que l'exemple précédent, on arrive à la représentation asymptotique de cette racine

$$x = 1 - 2\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2), \text{ pour } \epsilon \rightarrow 0$$

Mais $\mathcal{F}(x, \epsilon)$ est un polynôme cubique pour n'importe quelle valeur de $\epsilon \neq 0$, et selon le théorème fondamental de l'algèbre, il y a trois racines. Le fait que le problème réduit ($\epsilon = 0$) admet seulement une racine est de type différent du problème original (trois racines) indique que c'est un problème de perturbation singulière.

La question est : où sont les deux autres racines ?

Nous pouvons trouver les racines absentes par un changement d'échelle du problème, on pose : $y = \epsilon^p x$

En général on pose : $x = \delta(\epsilon)y$ avec $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta(\epsilon) = 0$,

car le changement d'échelle n'est pas connue à priori.

L'équation $\mathcal{F}(x, \epsilon) = 0$ devient :

$$y^3 + \epsilon^p y^2 + \epsilon^{2p-1} y - \epsilon^{3p-1} = 0$$

On a 4 termes dans l'équation : y^3 , $\epsilon^p y^2$, $\epsilon^{2p-1} y$ et ϵ^{3p-1} .

Comment choisir une valeur de p appropriée pour résoudre d'une façon adéquate le problème singulier ?

On a recours à un principe "ad hoc" de balance des termes.

Le principe de la balance des termes indique que le rééchelonnement de l'équation est conforme quand ϵ tend vers zéro seulement si au moins deux termes correspondent à la même puissance de ϵ (ceci s'appelle un équilibre) et d'ailleurs l'équilibre est dominant dans le sens que chaque terme non impliqué dans l'équilibre correspond à une puissance plus élevée de ϵ et est donc asymptotiquement plus petit que les termes d'équilibrage.

Pour ce problème, nous pouvons essayer de trouver la valeur correcte de p par le principe de la balance des termes

1 - Le terme d'équilibrage 2 avec le terme 3

$p = 1$ ce choix est rejeté parce qu'il n'est pas dominant

2 - Le terme d'équilibrage 3 avec le terme 4

ceci exige le choix $p = 0$ ($x = y$) le problème reste inchangé

3 - Le terme d'équilibrage 2 avec le terme 4

Le choix approprié est $p = \frac{1}{2}$. L'équation alors se réduit à :

$$y^3 + \sqrt{\epsilon}y^2 + y - \sqrt{\epsilon} = 0, \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0$$

On pose

$$y \sim y_0 + \sqrt{\epsilon}y_1 + o(\sqrt{\epsilon})$$

on substitue dans l'équation précédente :

$$y_0^3 + y_0 + \sqrt{\epsilon}(3y_0^2y_1 + y_0^2 + y_1 - 1) + \epsilon(3y_1^2y_0 + 2y_0y_1) + \dots = 0$$

$$\epsilon^0 : y_0^3 + y_0 = 0$$

D'où

$$y_0 = 0 \quad \text{ou} \quad y_0^2 = -1$$

$$\sqrt{\epsilon} : 3y_0^2y_1 + y_0^2 + y_1 - 1 = 0$$

Quand $y_0 = 0$ on trouve : $y_1 = 1$

Quand $y_0^2 = -1$ on trouve : $y_1 = -1$

Les solutions sont :

$$y \sim \sqrt{\epsilon}$$

$$y \sim i - \sqrt{\epsilon}$$

$$y \sim -i - \sqrt{\epsilon}$$

Substituons les résultats dans : $x = \epsilon^{-\frac{1}{2}}y$

$$x \sim 1$$

$$x \sim \frac{i}{\sqrt{\epsilon}} - 1$$

$$x \sim \frac{-i}{\sqrt{\epsilon}} - 1$$

On voit bien le caractère singulier des deux dernières solutions quand $\epsilon \rightarrow 0$.

Vérification :

$$\mathcal{F}(1, \epsilon) \sim 2\epsilon \sim 0 \quad \text{quand : } \epsilon \rightarrow 0$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{i}{\sqrt{\epsilon}} - 1, \epsilon\right) \sim i\sqrt{\epsilon} \sim 0 \quad \text{quand : } \epsilon \rightarrow 0$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{-i}{\sqrt{\epsilon}} - 1, \epsilon\right) \sim -i\sqrt{\epsilon} \sim 0 \quad \text{quand : } \epsilon \rightarrow 0$$

Exemple 3 : (problème de perturbation singulière d'équations différentielles)

Dans l'exemple qui suit, nous allons traiter un problème singulier d'équations différentielles et introduire la notion de **couche limite** et la technique de "matching" ou "raccordement" des solutions.

Ce phénomène de singularité est généralement lié aux problèmes aux limites. On aura deux ou plusieurs formes de solutions. Le domaine de la solution contient des points aux voisinages desquels la solution régulière n'est pas valable.

Pour simplifier, on considère qu'il existe qu'un seul point singulier qu'on notera x_0 .

Une solution notée par (y_{ex}) qui sera une expansion régulière (en puissance de ϵ) mais valide seulement en dehors d'un voisinage de x_0 , et qu'on appelle solution externe.

Au voisinage $\mathcal{V}(x_0, \epsilon)$ du point singulier x_0 dépendant du paramètre ϵ , la solution qu'on note (y_{in}) prend une autre forme qui n'est pas en puissance ϵ et qu'on appelle solution interne. Le voisinage $\mathcal{V}(x_0, \epsilon)$ s'appelle "couche limite". La couche limite est plus restreinte quand $\epsilon \rightarrow 0$.

Pour obtenir une solution asymptotiquement valide dans tout le domaine \mathcal{D} , y compris le voisinage du point singulier x_0 , appelée solution uniforme et qu'on note (y_{unif}), un principe de "matching" entre les deux solutions interne et externe sera appliqué. La procédure sera expliquée par un exemple ci-après.

Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \epsilon \mathcal{U}'' - (2 - x^2)\mathcal{U} = -1 & , x \in]0, 1[\\ \mathcal{U}'(0) = 0, \mathcal{U}(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Pour un problème quelconque on ne connaît pas la position de la couche limite à priori. Mais pour les problèmes aux limites des équations différentielles ordinaires du second ordre de la forme :

$$\begin{cases} \epsilon \mathcal{U}'' + a(x)\mathcal{U}' + b(x)\mathcal{U} = 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \\ \mathcal{U}(0) = \alpha_0, \mathcal{U}(1) = \beta_0, \end{cases}$$

La position de la couche limite est déterminée selon le signe de $a(x)$ dans l'intervalle $0 \leq x \leq 1$

- si $a(x) > 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ la couche limite est au point $x_0 = 0$.
- si $a(x) < 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ la couche limite est au point $x_0 = 1$.

Si $a(x)$ change de signe dans $[0, 1]$, une étude plus détaillée est nécessaire. On peut avoir un ou plusieurs points singuliers à l'intérieur de l'intervalle $]0, 1[$.

Dans le cas de notre problème, $a(x) \equiv 0$, alors il est nécessaire de considérer d'une façon "ad hoc" les deux possibilités de présence de la couche limite.

Si on suppose que la couche limite est au voisinage de 0, alors la solution externe (\mathcal{U}_{ex}) selon ($\epsilon = 0$) doit satisfaire la condition $\mathcal{U}(1) = 0$ ce qui n'est pas le cas car $\mathcal{U}_{ex}(x) = \frac{1}{2-x^2}$ et $\mathcal{U}_{ex}(1) = \frac{1}{2-1} = 1 \neq 0$. Mais si on suppose que la couche limite est au voisinage de 1, alors c'est la condition $\mathcal{U}'_{ex}(0) = 0$ qui doit être satisfaite. $\mathcal{U}'_{ex}(x) = \frac{2x}{(2-x^2)^2}$ d'où la condition $\mathcal{U}'_{ex}(0) = 0$ est satisfaite. De là, on suppose à priori que la couche limite est au voisinage de 1.

En premier lieu, on cherche la solution externe :

$$\mathcal{U}_{ex}(x, \epsilon) = \mathcal{U}_0 + \epsilon \mathcal{U}_1 + \epsilon^2 \mathcal{U}_2 + \dots$$

On substitue dans l'équation on trouve :

$$\epsilon(\mathcal{U}_0'' + \epsilon \mathcal{U}_1'' + \epsilon^2 \mathcal{U}_2'' + \dots) - (2 - x^2)(\mathcal{U}_0 + \epsilon \mathcal{U}_1 + \epsilon^2 \mathcal{U}_2 + \dots) = -1$$

$$\epsilon^0 : \begin{cases} (2 - x^2)\mathcal{U}_0 = 1 \text{ d'où } , \mathcal{U}_0 = \frac{1}{2-x^2} \\ \mathcal{U}'_0(0) = 0 \end{cases}$$

$$\epsilon^1 : \begin{cases} \mathcal{U}_0'' - (2 - x^2)\mathcal{U}_1 = 0 \\ \mathcal{U}'_1(0) = 0 \end{cases}$$

$$\epsilon^2 : \begin{cases} \mathcal{U}_1'' - (2 - x^2)\mathcal{U}_2 = 0 \\ \mathcal{U}'_2(0) = 0 \end{cases}$$

⋮

$$\epsilon^{(i+1)} : \begin{cases} \mathcal{U}_i'' - (2 - x^2)\mathcal{U}_{i+1} = 0 \\ \mathcal{U}'_{i+1}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{U}'_0(0) = \frac{+2x}{(2 - x^2)^2} \Big|_{x=0} = 0$$

$$\mathcal{U}''(x) = \frac{2(3x^2 + 2)}{(2 - x^2)^3}$$

$$\epsilon^1 : \mathcal{U}_1(x) = \frac{2(3x^2 + 2)}{(2 - x^2)^4}$$

$$\mathcal{U}'_1(0) = \frac{4x(9x^2 + 14)}{(2 - x^2)^5} \Big|_{x=0} = 0$$

$$\mathcal{U}_{ex}(x, \epsilon) = \frac{1}{2 - x^2} + \epsilon \frac{2(3x^2 + 2)}{(2 - x^2)^4} + O(\epsilon^2)$$

Pour trouver la solution interne on fait le changement de variable suivant (en considérant que le point singulier est $x_0 = 1$).

$$X = \frac{1-x}{\delta(\epsilon)}, \delta(\epsilon) \rightarrow 0 \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0$$

La fonction $\delta(\epsilon)$ sera déterminée par le principe de "balance des termes", semblable à celui appliqué à l'équation algébrique traité précédemment

$$\kappa = 1 - \delta X$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dX} \frac{dX}{dx} = -\frac{1}{\delta} \frac{d}{dX}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \right) = \left(-\frac{1}{\delta} \frac{d}{dX} \right) \left(-\frac{1}{\delta} \frac{d}{dX} \right) = \frac{1}{\delta^2} \frac{d^2}{dX^2}$$

on pose : $\frac{d}{dX} = \bullet$, $\frac{d^2}{dX^2} = \bullet\bullet$

En substituant dans l'équation (1) il en résulte :

$$\frac{\epsilon}{\delta^2} \ddot{U} - [2 - (1 - \delta X)^2] \dot{U} = -1 / U(0) = 0$$

$$\frac{\epsilon}{\delta^2} \ddot{U} - (1 + 2\delta X - \delta^2 X^2) \dot{U} = -1 \dots (*)$$

On fait la balance des termes :

$$\left(\frac{\epsilon}{\delta^2} = 1 \right) \text{ d'où : } \delta(\epsilon) = \sqrt{\epsilon}$$

(*) devient alors :

$$\ddot{U} - (1 + 2\sqrt{\epsilon}X - \epsilon X^2) \dot{U} = -1 / U(0) = 0$$

On cherche une solution sous la forme asymptotique :

$$U_{in}(x, \epsilon) \sim U_0(X) + \sqrt{\epsilon} U_1(X) + \epsilon U_2(X) + \dots$$

puis on substitue dans l'équation(*) :

$$(*) : (\ddot{U}_0 + \sqrt{\epsilon} \ddot{U}_1 + \epsilon \ddot{U}_2 + \dots) - (1 + 2\sqrt{\epsilon}X - \epsilon X^2)(\dot{U}_0 + \sqrt{\epsilon} \dot{U}_1 + \epsilon \dot{U}_2 + \dots) = -1$$

En identifiant les coefficients de puissance de ϵ à zéro, on obtient :

$$\epsilon^0 : \begin{cases} \ddot{u}_0 - u_0 = -1 \\ u_0(0) = 0 \end{cases}$$

$$\epsilon^1 : \begin{cases} \ddot{u}_1 - u_1 - 2Xu_0 = 0 \\ u_1(0) = 0 \end{cases}$$

$$\epsilon^2 : \begin{cases} \ddot{u}_2 - u_2 - 2Xu_1 + X^2u_0 = 0 \\ u_2(0) = 0 \end{cases}$$

etc...

Ce limitant au premier ordre d'approximation (trouver uniquement u_0 on obtient : $u_0(x) = A_0e^x - (1 + A_0)e^{-x} + 1$ d'où la solution interne à l'ordre $O(\epsilon^0)$ est $u_{in}(X) = u_0(x) + O(\sqrt{\epsilon})$

$$u_{in}(X) = A_0e^X - (1 + A_0)e^{-X} + 1$$

On constate que la solution $u_{in}(X)$ contient une constante A_0 . Pour la déterminer, on utilise le principe de raccordement ou bien de "matching"

Principe de "matching"

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+, X \text{ fixe}} u_{ex}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+, x \text{ fixe}} u_{in}(X)$$

Ce principe tout simplement indique que loin des limites les deux solutions doivent être de même taille, le dire d'une autre façon, si on "pousse" la solution externe vers la couche limite on obtient la solution interne "poussée" à l'extérieur de la couche limite.

$$u_{ex}(x) = \frac{1}{2 - x^2}$$

$$\mathcal{U}_{in}(X) = A_0 e^X - (1 + A_0) e^{-X} + 1$$

$$\mathcal{U}_{ex}(X) = \frac{1}{2 - (1 - X\sqrt{\epsilon})^2}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+ \text{ fixe}} \mathcal{U}_{ex}(X) = 1$$

$$\mathcal{U}_{in}(x) = A_0 e^{\frac{1-x}{\sqrt{\epsilon}}} - (1 + A_0) e^{-\left(\frac{1-x}{\sqrt{\epsilon}}\right)} + 1$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+ \text{ fixe}} \mathcal{U}_{in}(x) = 1, \text{ si } A_0 = 0.$$

$$\mathcal{U}_{in}(X) = -e^{-X} + 1$$

$$\mathcal{U}_{in}(x) = -e^{-\left(\frac{1-x}{\sqrt{\epsilon}}\right)} + 1$$

Jusqu'à présent, on a déterminé deux solutions dans des régions différentes de l'intervalle $[0, 1]$. Une solution interne $\mathcal{U}_{in}(x)$ vraie dans l'intervalle $[0, \delta[$ et une autre solution externe $\mathcal{U}_{ex}(x)$ vraie dans l'intervalle $[\delta', 1]$ avec les conditions $[\delta', \delta] \neq \emptyset$

La région $]\delta', \delta[$ est la région de "overlap" où les deux solutions sont asymptotiquement égales.

La solution "uniforme" qui est vraie dans tout le domaine $[0, 1]$ est donnée par :

$$\mathcal{U}_{unif}(x) = \mathcal{U}_{ex}(x) + \mathcal{U}_{in}(x) - \mathcal{U}_{match}$$

avec : $\mathcal{U}_{match} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{X fixe } \mathcal{U}_{ex}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{, fixe } \mathcal{U}_{in}(X)$

$$\mathcal{U}^{unif}(x) = \frac{1}{2-x^2} - e^{-\left(\frac{1-x}{\sqrt{\epsilon}}\right)}$$

\mathcal{U}_{match} est la solution dans l'intervalle $]\delta', \delta[$ dans notre cas :

$$\mathcal{U}(x, \epsilon) \sim \frac{1}{2-x^2} - e^{-\left(\frac{1-x}{\sqrt{\epsilon}}\right)}$$

On vérifie cette solution dans l'équation originale (1) :

$$\mathcal{U}(x, \epsilon) \sim \frac{1}{2-x^2} - e^{-\left(\frac{1-x}{\sqrt{\epsilon}}\right)} + O(\epsilon) \quad \epsilon \rightarrow 0$$

$$\mathcal{U}''(x, \epsilon) \sim \frac{2(3x^2+2)}{(2-x^2)^3} - \frac{1}{\epsilon} e^{-\left(\frac{1-x}{\sqrt{\epsilon}}\right)} + O(\epsilon) \quad \epsilon \rightarrow 0$$

On substituons dans (1), on trouve :

$$\epsilon \left[\frac{2(3x^2+2)}{(2-x^2)^3} - \frac{1}{\epsilon} e^{-\left(\frac{1-x}{\sqrt{\epsilon}}\right)} + O(\epsilon) \right] - (2-x^2) \left[\frac{1}{2-x^2} - e^{-\left(\frac{1-x}{\sqrt{\epsilon}}\right)} \right]$$

$$= -1 + (1-x^2) e^{-\left(\frac{1-x}{\sqrt{\epsilon}}\right)} + \frac{2\epsilon(3x^2+2)}{(2-x^2)^3}$$

$$= -1 + O(\epsilon)$$

$$\mathcal{U}'(x, \epsilon) \sim \frac{2x}{(2-x^2)^2} - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} e^{-\left(\frac{1-x}{\sqrt{\epsilon}}\right)} + O(\epsilon) \quad \epsilon \rightarrow 0$$

$$\mathcal{U}'(0, \epsilon) \sim -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} e^{-\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} + O(\epsilon) \quad \epsilon \rightarrow 0$$

$$\mathcal{U}'(0) \sim 0$$

$$\mathcal{U}(1) \sim 1 - 1 + O(\epsilon)$$

$$\mathcal{U}(1) \sim O(\epsilon)$$

Exemple 4 : (problème de perturbation régulière aux dérivés partielles non originalement perturbé)

Comme on a déjà prévu dans l'introduction que certains problèmes n'admettent pas un petit paramètre, mais on l'introduit de façon à pouvoir le résoudre par des méthodes de perturbation analogues à celles traitées précédemment.

Soit à résoudre le problème non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \Delta\psi + \frac{1}{3}\psi_r\psi_\theta = 0 \\ \psi(1, \theta) = \cos\theta \end{cases}$$

Plusieurs difficultés sont liées à ce problème :

- (a) Il est non linéaire
- (b) Il n'y a pas apparence du petit paramètre.
- (c) Même le problème linéaire associé n'admet pas de solution "triviale".

Pour résoudre ces difficultés, on procède à le modifier en considérant que le terme non linéaire est "négligeable" ou ayant une influence secondaire. Pour cela, on introduit un petit paramètre ϵ et essayons de résoudre le problème "perturbé" suivant :

$$\begin{cases} \Delta\psi + \epsilon\psi_r\psi_\theta = 0 \\ \psi(1, \theta) = \cos\theta \end{cases}$$

L'expansion de ψ en fonction de ϵ est :

$$\psi = \phi^{(0)}(r, \theta) + \epsilon\phi^{(1)}(r, \theta) + \epsilon^2\phi^{(2)}(r, \theta) + \dots$$

substitutions dans l'équation précédente

$$\Delta\phi^{(0)}(r, \theta) + \epsilon\Delta\phi^{(1)}(r, \theta) + \epsilon^2\Delta\phi^{(2)}(r, \theta) + \dots + \epsilon[\phi_r^{(0)}(r, \theta) + \epsilon\phi_r^{(1)}(r, \theta) + \epsilon^2\phi_r^{(2)}(r, \theta) + \dots][\phi_\theta^{(0)}(r, \theta) + \epsilon\phi_\theta^{(1)}(r, \theta) + \epsilon^2\phi_\theta^{(2)}(r, \theta) + \dots] = 0$$

$$\epsilon^0 : \Delta\phi^{(0)} = 0$$

$$\epsilon^1 : \Delta\phi^{(1)} = -\phi_r^{(0)}\phi_\theta^{(0)}$$

$$\epsilon^2 : \Delta\phi^{(2)} = -\phi_r^{(0)}\phi_\theta^{(1)} - \phi_r^{(1)}\phi_\theta^{(0)}$$

$$\epsilon^3 : \Delta\phi^{(3)} = -\phi_r^{(0)}\phi_\theta^{(2)} - \phi_r^{(1)}\phi_\theta^{(1)} - \phi_r^{(2)}\phi_\theta^{(0)}$$

avec la condition : $\phi^{(0)}(1, \theta) = \cos\theta$, $\phi^{(j)}(1, \theta) = 0$, $j = 1, 2, 3, \dots$

$$\epsilon^0 : \begin{cases} \Delta \phi^{(0)} = 0 \\ \phi^{(0)}(1, \theta) = \cos \theta \end{cases}$$

ie :

$$(1.4) \quad \begin{cases} \phi_{rr}^{(0)} + \frac{1}{r} \phi_r^{(0)} + \frac{1}{r^2} \phi_{\theta\theta}^{(0)} = 0 \\ \phi^{(0)}(1, \theta) = \cos \theta \end{cases}$$

On utilise la méthode de la séparation des variables

$$\text{On pose : } \phi^{(0)}(r, \theta) = \mathcal{R}(r)\varphi(\theta)$$

De la condition $\phi^{(0)}(1, \theta) = \cos \theta$ on trouve :

$$\begin{cases} \varphi(\theta) = \cos \theta \\ \mathcal{R}(1) = 1 \end{cases}$$

$$\text{ie : } \phi^{(0)}(r, \theta) = \mathcal{R}(r) \cos \theta$$

l'équation : $\phi_{rr}^{(0)} + \frac{1}{r} \phi_r^{(0)} + \frac{1}{r^2} \phi_{\theta\theta}^{(0)} = 0$ sera remplacé par :

$$(1.5) \quad \mathcal{R}''(r) + \frac{1}{r} \mathcal{R}'(r) - \frac{1}{r^2} \mathcal{R}(r) = 0$$

$r = 0$ est un point singulier régulier donc il existe au moins une solution de Frôbenius c.a.d
 $\mathcal{R}(r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i r^{i+\alpha}$

On substitue dans l'équation *** on trouvera :

$$\sum_{i=0}^{\infty} [(i+\alpha)(i+\alpha-1) + (i+\alpha) - 1] a_i r^{i+\alpha-2} = 0$$

Pour $i = 0$ l'équation quadratique :

$$\alpha^2 - 1 = 0 \text{ d'où } \alpha = 1 \text{ ou } \alpha = -1 \text{ (on prend la solution analytique ie : } \alpha = 1).$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i^2 + 2i) a_i r^{i-1} = 0 \text{ tout les coefficients sont nuls}$$

$$a_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

$$\mathcal{R}(r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i r^{i+1} = a_0 r$$

Or $\mathcal{R}(1) = 1$ d'où

$$\boxed{a_0 = 1}$$

$$\mathcal{R}(r) = r$$

$$\phi^{(0)}(r, \theta) = r \cos \theta$$

$$e^1 : \begin{cases} \Delta \phi^{(1)} = r \cos \theta \sin \theta = \frac{r}{2} \sin 2\theta \\ \phi^{(1)}(1, \theta) = 0 \end{cases}$$

En introduisant la méthode de séparation des variables on pose :

$$\phi^{(1)}(r, \theta) = \mathcal{R}(r)\varphi(\theta) \text{ de la condition } \phi^{(1)}(1, \theta) = 0 \text{ on trouve :}$$

$$\begin{cases} \varphi(\theta) = \sin 2\theta \\ \mathcal{R}(1) = 0 \end{cases}$$

$$\text{On déduit alors que : } \phi^{(1)}(r, \theta) = \mathcal{R}(r) \sin 2\theta$$

$$\text{L'équation : } \Delta \phi^{(1)} = \phi_{rr}^{(1)} + \frac{1}{r} \phi_r^{(1)} + \frac{1}{r^2} \phi_{\theta\theta}^{(1)} = \frac{r}{2} \sin 2\theta \text{ devient :}$$

$$\mathcal{R}''(r) + \frac{1}{r} \mathcal{R}'(r) - \frac{4}{r^2} \mathcal{R}(r) = \frac{1}{2} r$$

$r = 0$ est un point singulier régulier

$$\mathcal{R}(r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i r^{i+\alpha}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} [(i+\alpha)(i+\alpha-1) + (i+\alpha) - 4] a_i r^{i+\alpha-2} = \frac{1}{2} r$$

l'équation quadratique :

$$\alpha^2 - 4 = 0 \text{ d'où } \alpha = 2 \text{ ou } \alpha = -2 \text{ (on prend la solution analytique ie : } \alpha = 2).$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i^2 + 4i) a_i r^i = \frac{1}{2} r$$

$$i = 1, 5a_1 = \frac{1}{2} \text{ d'où :}$$

$$a_1 = \frac{1}{10}$$

$$a_i = 0, i = 2, 3, \dots$$

$$\mathcal{R}(r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i r^{i+2} = a_0 r^2 + a_1 r^3 = a_0 r^2 + \frac{1}{10} r^3$$

$$\mathcal{R}(1) = 0 \text{ d'où :}$$

$$a_0 = -\frac{1}{10}$$

$$\phi^{(1)}(r, \theta) = \frac{1}{10}(r^3 - r^2) \sin 2\theta$$

$$\begin{cases} \Delta \phi^{(2)} = -\phi_r^{(0)} \phi_\theta^{(1)} - \phi_r^{(1)} \phi_\theta^{(0)} \\ \phi^{(2)}(1, \theta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta \phi^{(2)} = \left(-\frac{r^3}{4} + \frac{r^2}{5}\right) \cos 3\theta + \frac{r^3}{20} \cos \theta \\ \phi^{(2)}(1, \theta) = 0 \end{cases}$$

on pose :
$$\begin{cases} \phi^{(2)}(r, \theta) = \mathcal{R}_1(r) \cos 3\theta + \mathcal{R}_2(r) \cos \theta \\ \mathcal{R}_1(1) = 0 ; \mathcal{R}_2(1) = 0 \end{cases}$$

on substitue $\phi^{(2)}(r, \theta)$ dans l'équation $\Delta \phi^{(2)} = \left(-\frac{r^3}{4} + \frac{r^2}{5}\right) \cos 3\theta + \frac{r^3}{20} \cos \theta$ on trouve :

$$\begin{cases} \mathcal{R}_1''(r) + \frac{1}{r} \mathcal{R}_1'(r) - \frac{9}{r^2} \mathcal{R}_1(r) = -\frac{1}{4}r^3 + -\frac{1}{5}r^2 \\ \mathcal{R}_2''(r) + \frac{1}{r} \mathcal{R}_2'(r) - \frac{1}{r^2} \mathcal{R}_2(r) = \frac{1}{20}r^3 \end{cases}$$

$r = 0$ est un point singulier régulier pour les deux équations précédentes.

Pour résoudre l'équation $\mathcal{R}_1''(r) + \frac{1}{r} \mathcal{R}_1'(r) - \frac{9}{r^2} \mathcal{R}_1(r) = -\frac{1}{4}r^3 - \frac{1}{5}r^2$

On pose : $\mathcal{R}_1(r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i r^{i+\alpha}$

on obtient : $\sum_{i=0}^{\infty} [(i+\alpha)(i+\alpha-1) + (i+\alpha) - 9] a_i r^{i+\alpha-2} = -\frac{1}{4}r^3 - \frac{1}{5}r^2$

l'équation quadratique :

$\alpha^2 - 9 = 0$ d'où $\alpha = 3$ ou $\alpha = -3$ (on prend la solution analytique ie : $\alpha = 3$).

D'où

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i^2 + 6i) a_i r^{i+1} = -\frac{1}{4}r^3 + \frac{1}{5}r^2$$

$i = 1, 7a_1 = \frac{1}{5}, \boxed{a_1 = \frac{1}{35}}$

$i = 2, 16a_2 = -\frac{1}{4}$

$\boxed{a_2 = -\frac{1}{64}}$

$a_i = 0, i = 3, 4, 5, \dots$

$$\mathcal{R}_1(r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i r^{i+3}$$

$$\mathcal{R}_1(r) = a_0 r^3 + a_1 r^4 + a_2 r^5$$

$$\mathcal{R}_1(r) = a_0 r^3 + \frac{1}{35} r^4 - \frac{1}{64} r^5$$

$$\mathcal{R}_1(1) = 0 \text{ d'où } a_0 = \frac{1}{64} - \frac{1}{35}$$

$$\boxed{a_0 = \frac{-29}{2240}}$$

$$\mathcal{R}_1(r) = \frac{r^4}{35} - \frac{r^5}{64} - \frac{29r^3}{2240}$$

Pour résoudre l'équation $\mathcal{R}_2''(r) + \frac{1}{r}\mathcal{R}_2'(r) - \frac{1}{r^2}\mathcal{R}_2(r) = \frac{1}{20}r^3$

$$\text{On pose : } \mathcal{R}_2(r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i r^{i+\alpha}$$

$$\text{on obtient : } \sum_{i=0}^{\infty} [(i+\alpha)(i+\alpha-1) + (i+\alpha) - 1] a_i r^{i+\alpha-2} = \frac{1}{20} r^3$$

l'équation quadratique :

$$\alpha^2 - 1 = 0 \text{ d'où } \alpha = 1 \text{ ou } \alpha = -1 \text{ (on prend la solution analytique ie : } \alpha = 1).$$

D'où

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i^2 + 2i) a_i r^{i-1} = \frac{1}{20} r^3$$

$$i = 4, 24a_4 = \frac{1}{20}, \boxed{a_4 = \frac{1}{480}}$$

$$a_i = 0, i = 1, 2, \dots$$

$$\mathcal{R}_2(r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i r^{i+1} = a_0 r + a_4 r^5 = a_0 r + \frac{1}{480} r^5$$

$$\mathcal{R}_2(1) = 0, \boxed{a_0 = -\frac{1}{480}}$$

$$\mathcal{R}_2(r) = \frac{1}{480} (r^5 - r)$$

$$\boxed{\phi^2(r, \theta) = \left(\frac{r^4}{35} - \frac{r^5}{64} - \frac{29r^3}{2240} \right) \cos 3\theta + \frac{1}{480} (r^5 - r) \cos \theta}$$

$$\psi(r, \theta) = \phi^{(0)}(r, \theta) + \epsilon \phi^{(1)}(r, \theta) + \epsilon^2 \phi^{(2)}(r, \theta) + \dots$$

$$\boxed{\psi(r, \theta) = r \cos \theta + \frac{\epsilon}{10} (r^3 - r^2) \sin 2\theta + \epsilon^2 \left[\left(\frac{r^4}{35} - \frac{r^5}{64} - \frac{29r^3}{2240} \right) \cos 3\theta + \frac{1}{480} (r^5 - r) \cos \theta \right] + \dots}$$

Mais $\epsilon = \frac{1}{3}$, on aura donc :

$$\psi(r, \theta) = r \cos \theta + \frac{1}{30}(r^3 - r^2) \sin 2\theta + \left(\frac{r^4}{315} - \frac{r^5}{576} - \frac{29r^3}{20160}\right) \cos 3\theta + \frac{1}{4320}(r^5 - r) \cos \theta + \dots$$

Exemple 5 : (problème de perturbation régulière La perturbation dans le domaine de validité)

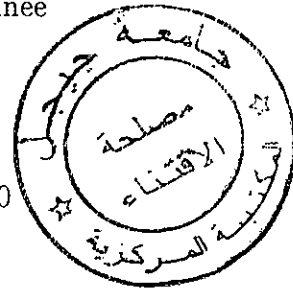
La perturbation peut ne pas apparaître dans l'équation du problème mais dans les conditions initiales ou dans les conditions aux limites, ou même dans la forme du domaine de la variable. Dans ce qui suit on va traiter le même problème traité précédemment mais qui présente une perturbation à la frontière du domaine.

Soit donc à résoudre l'équation de Laplace à l'intérieur d'une région presque cylindrique de rayon $r = 1 + \epsilon \cos \theta$, $0 < \epsilon \ll 1$

ie :
$$\begin{cases} \Delta \phi = 0 \\ \phi(1 + \epsilon \cos \theta, \theta) = f(\theta) \quad \text{ou } f(\theta) \text{ une fonction donnée} \end{cases}$$

on veut définir $\phi(r, \theta)$ qui satisfait :

$$(1.6) \quad \begin{cases} \Delta \phi = \phi_{rr} + \frac{1}{r} \phi_r + \frac{1}{r^2} \phi_{\theta\theta} = 0 \\ \phi(1 + \epsilon \cos \theta, \theta) = f(\theta) \end{cases}$$



On considère que la fonction $f(\theta)$ est développable en série de Taylor en puissance de $(\epsilon \cos \theta)$.

$$(1.7) \quad \phi(1, \theta) + (\epsilon \cos \theta) \phi_r(1, \theta) + \frac{1}{2} (\epsilon \cos \theta)^2 \phi_{rr}(1, \theta) + \dots = f(\theta)$$

Suivant le procédé de perturbation, on considère que la solution $\phi(r, \theta)$ est développable en série asymptotique.

$$\phi(r, \theta) \sim \phi^{(0)}(r, \theta) + \epsilon \phi^{(1)}(r, \theta) + \epsilon^2 \phi^{(2)}(r, \theta) + \dots \quad \epsilon \rightarrow 0$$

D'où :

$$\phi(1, \theta) \sim \phi^{(0)}(1, \theta) + \epsilon \phi^{(1)}(1, \theta) + \epsilon^2 \phi^{(2)}(1, \theta) + \dots \quad \epsilon \rightarrow 0$$

On substitue dans $f(\theta)$, on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\theta) = \phi^{(0)}(1, \theta) + \epsilon \phi^{(1)}(1, \theta) + \epsilon^2 \phi^{(2)}(1, \theta) + \dots + \epsilon \cos \theta [\phi_r^{(0)}(1, \theta) + \epsilon \phi_r^{(1)}(1, \theta) \epsilon^2 \phi_r^{(2)}(1, \theta) + \dots] \\ \quad + \frac{1}{2} (\epsilon \cos \theta)^2 [\phi_{rr}^{(0)}(1, \theta) + \phi_{rr}^{(1)}(1, \theta) + \dots] \\ \text{avec : } \Delta \phi^{(j)} = 0, j = 0, 1, 2, 3 \dots \end{array} \right.$$

Identifions les coefficients des puissances identiques de ϵ ,

$$\epsilon^0 : \left\{ \begin{array}{l} \phi^{(0)}(1, \theta) = f(\theta) \\ \Delta \phi^{(0)} = 0 \end{array} \right.$$

$$\epsilon^1 : \left\{ \begin{array}{l} \phi^{(1)}(1, \theta) = -\cos \theta \phi_r^{(0)}(1, \theta) \\ \Delta \phi^{(1)} = 0 \end{array} \right.$$

$$\epsilon^2 : \left\{ \begin{array}{l} \phi^{(2)}(1, \theta) = -\cos \theta \phi_r^{(1)}(1, \theta) - \frac{1}{2} \cos^2 \theta \phi_{rr}^{(0)}(1, \theta) \\ \Delta \phi^{(2)} = 0 \end{array} \right.$$

...

Pour obtenir un simple exemple, on pose $f(\theta) = \sin \theta$

$$\epsilon^0 : \left\{ \begin{array}{l} \phi^{(0)}(1, \theta) = f(\theta) = \sin \theta \\ \Delta \phi^{(0)} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi^{(0)}(1, \theta) = \sin \theta \\ \phi_{rr}^{(0)} + \frac{1}{r} \phi_r^{(0)} + \frac{1}{r^2} \phi_{\theta\theta}^{(0)} = 0 \end{array} \right.$$

On utilise la méthode de la séparation des variables

On pose : $\phi^{(0)}(r, \theta) = \mathcal{R}(r) \varphi(\theta)$

De la condition $\phi^{(0)}(1, \theta) = \sin \theta$ on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(\theta) = \sin \theta \\ \mathcal{R}(1) = 1 \end{array} \right.$$

ie : $\phi^{(0)}(r, \theta) = \mathcal{R}(r) \sin \theta$

l'équation : $\phi_{rr}^{(0)} + \frac{1}{r}\phi_r^{(0)} + \frac{1}{r^2}\phi_{\theta\theta}^{(0)} = 0$ sera remplacé par :

$$(1.8) \quad \mathcal{R}''(r) + \frac{1}{r}\mathcal{R}'(r) - \frac{1}{r^2}\mathcal{R}(r) = 0$$

$r = 0$ est un point singulier régulier donc il existe au moins une solution de Frôbenius c.a.d
 $\mathcal{R}(r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i r^{i+\alpha}$

On substitue dans l'équation *** on trouvera :

$$\sum_{i=0}^{\infty} [(i+\alpha)(i+\alpha-1) + (i+\alpha) - 1] a_i r^{i+\alpha-2} = 0$$

Pour $i = 0$ l'équation quadratique :

$\alpha^2 - 1 = 0$ d'où $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$ (on prend la solution analytique ie : $\alpha = 1$).

$\sum_{i=0}^{\infty} (i^2 + 2i) a_i r^{i-1} = 0$ tout les coefficients sont nuls

$a_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots$

$$\mathcal{R}(r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i r^{i+1} = a_0 r$$

Or $\mathcal{R}(1) = 1$ d'où

$$\boxed{a_0 = 1}$$

$$\mathcal{R}(r) = r$$

$$\boxed{\phi^{(0)}(r, \theta) = r \sin \theta}$$

Pour trouver $\phi^{(1)}(r, \theta)$ on résout :

$$\begin{cases} \phi^{(1)}(1, \theta) = -\cos \theta \sin \theta = -\frac{1}{2} \sin 2\theta \\ \Delta \phi^{(1)} = 0 \end{cases}$$

En introduisant la méthode de séparation des variables on pose :

$$\phi^{(1)}(r, \theta) = \mathcal{R}(r)\varphi(\theta) \text{ de la condition } \phi^{(1)}(1, \theta) = -\frac{1}{2} \sin 2\theta$$

On trouve :

$$\begin{cases} \varphi(\theta) = \sin 2\theta \\ \mathcal{R}(1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

On déduit alors que : $\phi^{(1)}(r, \theta) = \mathcal{R}(r) \sin 2\theta$

L'équation : $\Delta\phi^{(1)} = \phi_{rr}^{(1)} + \frac{1}{r}\phi_r^{(1)} + \frac{1}{r^2}\phi_{\theta\theta}^{(1)} = 0$ devient :

$$\mathcal{R}''(r) + \frac{1}{r}\mathcal{R}'(r) - \frac{4}{r^2}\mathcal{R}(r) = 0$$

$r = 0$ est un point singulier régulier

$$\mathcal{R}(r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i r^{i+\alpha}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} [(i+\alpha)(i+\alpha-1) + (i+\alpha) - 4] a_i r^{i+\alpha-2} = 0$$

l'équation quadratique :

$\alpha^2 - 4 = 0$ d'où $\alpha = 2$ ou $\alpha = -2$ (on prend la solution analytique ie : $\alpha = 2$).

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i^2 + 4i) a_i r^i = 0$$

$$a_i = 0, i = 1, 2, 3, \dots$$

$$\mathcal{R}(r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i r^{i+2} = a_0 r^2$$

$$\mathcal{R}(1) = \frac{-1}{2} \text{ d'où :}$$

$$\boxed{a_0 = \frac{-1}{2}}$$

$$\mathcal{R}(r) = \frac{-r^2}{2}$$

$$\boxed{\phi^{(1)}(r, \theta) = \frac{-r^2}{2} \sin 2\theta}$$

De la même méthode :

$$\begin{cases} \phi^{(2)}(1, \theta) = r \cos \theta \sin 2\theta \\ \Delta\phi^{(2)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi^{(2)}(1, \theta) = r(\frac{1}{2} \sin 3\theta + \frac{1}{2} \sin \theta) \\ \Delta\phi^{(2)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi^{(2)}(1, \theta) = \frac{r}{2} \sin 3\theta + \frac{r}{2} \sin \theta \\ \Delta \phi^{(2)} = 0 \end{cases}$$

$$\text{on pose : } \begin{cases} \phi^{(2)}(r, \theta) = \mathcal{R}_1(r) \sin 3\theta + \mathcal{R}_2(r) \sin \theta \\ \mathcal{R}_1(1) = \frac{1}{2}, \mathcal{R}_2(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

on substitue $\phi^{(2)}(r, \theta)$ dans l'équation $\Delta \phi^{(2)} = 0$ on trouve :

$$\begin{cases} \mathcal{R}_1''(r) + \frac{1}{r}\mathcal{R}_1'(r) - \frac{9}{r^2}\mathcal{R}_1(r) = 0 \\ \mathcal{R}_2''(r) + \frac{1}{r}\mathcal{R}_2'(r) - \frac{1}{r^2}\mathcal{R}_2(r) = 0 \end{cases}$$

$r = 0$ est un point singulier régulier pour les deux équations précédentes.

$$\text{Pour résoudre l'équation } \mathcal{R}_1''(r) + \frac{1}{r}\mathcal{R}_1'(r) - \frac{9}{r^2}\mathcal{R}_1(r) = 0$$

$$\text{On pose : } \mathcal{R}_1(r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i r^{i+\alpha}$$

$$\text{on obtient : } \sum_{i=0}^{\infty} [(i+\alpha)(i+\alpha-1) + (i+\alpha) - 9] a_i r^{i+\alpha-2} = 0$$

l'équation quadratique :

$$\alpha^2 - 9 = 0 \text{ d'où } \alpha = 3 \text{ ou } \alpha = -3 \text{ (on prend la solution analytique ie : } \alpha = 3).$$

D'où

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i^2 + 6i) a_i r^{i+1} = 0$$

$$a_i = 0, i = 1, 2, 3, \dots$$

$$\mathcal{R}_1(r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i r^{i+3}$$

$$\mathcal{R}_1(r) = a_0 r^3$$

$$\mathcal{R}_1(1) = \frac{1}{2} \text{ d'où :}$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2}}$$

$$\mathcal{R}_1(r) = \frac{r^3}{2}$$

$$\text{Pour résoudre l'équation } \mathcal{R}_2''(r) + \frac{1}{r}\mathcal{R}_2'(r) - \frac{1}{r^2}\mathcal{R}_2(r) = 0$$

$$\text{On pose : } \mathcal{R}_2(r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i r^{i+\alpha}$$

on obtient : $\sum_{i=0}^{\infty} [(i + \alpha)(i + \alpha - 1) + (i + \alpha) - 1] a_i r^{i+\alpha-2} = 0$

l'équation quadratique :

$\alpha^2 - 1 = 0$ d'où $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$ (on prend la solution analytique ie : $\alpha = 1$).

D'où

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i^2 + 2i) a_i r^{i-1} = 0$$

$$a_i = 0, i = 1, 2, \dots$$

$$\mathcal{R}_2(r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i r^{i+1} = a_0 r$$

$$\mathcal{R}_2(1) = \frac{1}{2}, \quad \boxed{a_0 = \frac{1}{2}}$$
$$\mathcal{R}_2(r) = \frac{r}{2}$$

$$\boxed{\phi^2(r, \theta) = \left(\frac{r^3}{2} \sin 3\theta + \frac{r}{2} \sin \theta\right)}$$

Rassemblons les résultats précédents, on trouve :

$$\phi(r, \theta) = \phi^{(0)}(r, \theta) + \epsilon \phi^{(1)}(r, \theta) + \epsilon^2 \phi^{(2)}(r, \theta) + o(\epsilon^2)$$

$$\boxed{\phi(r, \theta) = r \sin \theta - \epsilon \frac{r^2}{2} \sin 2\theta + \epsilon^2 \left[\frac{r^3}{2} \sin 3\theta + \frac{r}{2} \sin \theta \right] + o(\epsilon^2)}$$

Vérification :

$$\phi_r(r, \theta) \sim \sin \theta - \epsilon r \sin 2\theta + \epsilon^2 \left[\frac{3}{2} r^2 \sin 3\theta + \frac{1}{2} \sin \theta \right] + o(\epsilon^2)$$

$$\phi_{rr}(r, \theta) \sim -\epsilon \sin 2\theta + \epsilon^2 [3r \sin 3\theta] + o(\epsilon^2)$$

$$\phi_{\theta\theta}(r, \theta) \sim -r \sin \theta + 2\epsilon r^2 \sin 2\theta + \epsilon^2 \left[\frac{-9}{2} r^3 \sin 3\theta - \frac{r}{2} \sin \theta \right] + o(\epsilon^2)$$

On aura donc :

$$\Delta\phi(r, \theta) = \phi_{rr}(r, \theta) + \frac{1}{r}\phi_r(r, \theta) + \frac{1}{r^2}\phi_{\theta\theta}(r, \theta)$$

$$\Delta\phi(r, \theta) \sim -\epsilon \sin 2\theta + 3\epsilon^2 r \sin 3\theta + \frac{1}{r} \sin \theta - \epsilon \sin 2\theta + \epsilon^2 \left[\frac{3}{2} r \sin 3\theta + \frac{1}{2} r \sin \theta \right] - \frac{1}{r} \sin \theta \\ + 2\epsilon \sin 2\theta + \epsilon^2 \left[\frac{-9}{2} r \sin 3\theta - \frac{1}{2} r \sin \theta \right]$$

$$\sim \epsilon^2 \left[\left(3r + \frac{3}{2}r - \frac{9}{2}r \right) \sin 3\theta + \left(\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}r \right) \sin \theta \right]$$

$$\sim 0$$

$$\phi(1 + \epsilon \cos \theta, \theta) \sim \sin \theta + \epsilon^2 \left[-\cos \theta \sin 2\theta + \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \sin 3\theta \right] + o(\epsilon^2)$$

$$\sim o(\epsilon^2)$$

Chapitre 2

Mécanique des fluides

Introduction :

La dynamique des fluides est la science qui étudie le mouvement des fluides dont il s'agit de déterminer les propriétés (pression, vitesse, température, masse volumique, etc.), dans tout le champ de l'écoulement comme des fonctions continues de l'espace et du temps.

Les équations fondamentales de la dynamique des fluides expriment la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement, et la conservation de l'énergie. Elles constituent un système complexe d'équations aux dérivées partielles, le modèle de Navier-Stokes qu'il n'est envisageable de résoudre que numériquement ou dans des cas de figure permettant de les simplifier, en fonction du fluide à étudier ou du type d'écoulement considéré, il est parfois possible de négliger certains termes des équations ou de considérer certaines propriétés du fluide constantes au cours du mouvement, ce qui rend le modèle plus facile à résoudre.

Au cours du développement de cette science certains de ces simplifications sont devenus des " cas classiques " et ont entraîné une sorte de " cloisonnement " de la dynamique des fluides en différents sous-ensembles qui correspondent à différents types d'hypothèses et qui permettent différentes approches d'un problème. On peut ainsi dégager un certain nombre de dualités dont nous allons donner quelques exemples dans ce texte.

(Le lecteur souhaitant obtenir un développement plus approfondi, peut consulter [15], [16])

2.1 Les Fluides et le Modèle de Milieu Continu

Dans ce chapitre on va définir nos hypothèses de travail et en particulier le modèle de milieu continu.

Définition 2.1.1 : *On appelle fluide un milieu de la matière en déformation permanente. Les fluides n'ont pas de forme propre (à la différence des solides) donc ils se déforment facilement. Quand vous introduisez un fluide dans un récipient ce dernier épouse la forme du récipient qui le contient. Les molécules de fluide sont peu liées entre elles (liquide) voir même libres et sans interaction mutuelle (gaz). On distingue deux genres de fluide, un gaz qui a la caractéristique d'occuper tout le récipient qui le contient et un liquide qui admet un volume fixe indépendant du*

recipient qui le contient.

2.1.1 Le Modèle de Milieu Continu

On doit au préalable se donner une échelle de description. L'échelle macroscopique, celle du monde qui nous entoure, n'est pas adaptée notamment parce que le fluide n'a pas de cohérence spatiale à cette échelle.

L'échelle microscopique ne convient pas non plus car il est techniquement impossible de collecter positions, vitesses, accélérations... pour toutes les molécules de fluide, de plus, cela n'aurait aucun intérêt.

Nous allons donc nous placer dans une échelle intermédiaire, l'échelle mésoscopique, échelle caractéristiques des particules fluides. (qu'on va définir par la suite)

On considère toujours des domaines fluides macroscopiques dont la dimension caractéristique L est telle que $L \gg \lambda$ où λ est la distance moyenne intermoléculaire (λ est le libre parcours moyen des molécules).

2.1.2 Notion de Particule

Soit L une distance caractéristique macroscopique d'un fluide sous étude et λ une distance microscopique. Soit \mathcal{D} un domaine de dimension caractéristique L telle que $\frac{L}{\lambda} \gg 1$. Soit un point mathématique $M \in \mathcal{D}$ et soit la sphère $S(M)$ de centre M et de rayon R tel que : $\lambda \ll R \ll L$.

A l'instant t , on peut mesurer la masse $m(S, t)$ de matière contenue dans $S(M)$ et ce pour tout M de \mathcal{D} . On peut donc définir une masse volumique moyenne dans $S(M)$ à l'instant t .

$$\rho = \frac{m(S, t)}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \rho(M, t)$$

Si on identifie $S(M)$ comme particule du fluide en M . On obtient un champ de masse volumique $\rho(M, t)$ sur \mathcal{D} .

Si on représente l'évolution de $\rho(M, t)$ en fonction du rayon R on distingue 3 zones :

1) Pour R trop petit de l'ordre microscopique, on a trop peu de molécules qui sont contenues dans S : la masse volumique fluctue rapidement et perd donc toute signification.

2) Tandisque, Pour une valeur de R trop grand, de l'ordre macroscopique, on commence à voir les variations de ρ en fonction de l'espace : contrairement à ce qui se passe quand R est trop petit, on a ici des variantes lentes, dus au fait qu'on se place dans un domaine trop grand pour qu'il puisse être considéré comme uniforme.

3) Pour une valeur de R trop grande par rapport à l'échelle microscopique mais négligeable par rapport à l'échelle macroscopique (échelle intermédiaire), la masse volumique $\rho(M, t)$ subit de petites variations et peut être considérée comme une fonction continue des variables espace-temps. C'est cette sphère (ou bien ce cube ou autre volume de même dimension) qui sera identifiée à une particule du fluide. Les particules du fluide seront identifiées aux points mathématiques du volume occupé par le fluide. Toutes les caractéristiques quantitatives seront des fonctions continues des variables spatiales $x = (x_1, x_2, x_3)$ et temporelle.

Remarque 2.1.2 *quelques discontinuités sont permises pour décrire des écoulements à plusieurs phases.*

2.2 Description d'un fluide en mouvement

Décrire le mouvement d'un fluide fait appel à des notions différentes de celles développées en mécanique du point ou du solide. Le mouvement d'un fluide est un écoulement où il y a déformation continue du fluide. On peut, de manière analogue à ce que l'on fait en mécanique du solide, isoler (par la pensée en trouvant un moyen de visualisation, coloration par exemple) une particule comme elle a été définie ci-dessus puis la suivre au cours du temps, c'est à dire connaître à chaque instant ces caractéristiques mécanique et thermique (position, vitesse, accélération, masse volumique, température)

Il existe en mécanique des fluides deux modes principaux de description : description lagrangienne et description eulérienne. Nous les étudierons successivement, en déterminant également les formules qui existent pour passer de l'une à l'autre.

Dans les deux descriptions, on se place dans un repère orthonormé galiléen \mathcal{R} de centre O , et M un point générique de coordonnées (x_1, x_2, x_3) ou bien (x, y, z) . Une particule du fluide sera identifiée à un point mathématique de l'espace.

2.2.1 Description Lagrangienne

Dans cette description, chaque particule du fluide est identifiée à l'instant initial.

Soit une particule initialement au point M_0 de coordonnées (a_1, a_2, a_3) , $\overrightarrow{OM}_0 = \vec{a}(a_1, a_2, a_3)$.

A l'instant $t \neq 0$, la particule sera dans une position de l'espace M de coordonnées (x_1, x_2, x_3) , son vecteur position est donc :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{x}(\vec{a}, t)$$

(a_1, a_2, a_3, t) sont donc les variables nécessaires à la description. Elle sont indépendantes entre elles et on les appelle variables de Lagrange.

Pour connaître parfaitement l'évolution du fluide, il faut donc déterminer toutes ses caractéristiques mécaniques et thermiques en fonctions de 4 variables, 3 variables spatiales (a_1, a_2, a_3) et la variable temporelle t .

Une propriété de base

Comme la fonction position $\vec{x} = \vec{x}(\vec{a}, t)$, permet d'associer à chaque particule fluide à l'instant initial une et une seule particule fluide à l'instant t . Cela signifie que la transformation est bijective entre le domaine initial et le domaine à l'instant $t > 0$.

Autrement dit, à chaque instant t et à chaque particule du fluide ne correspond qu'un seul point origine \vec{a}

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{a}, t) \iff \vec{a} = \vec{a}(\vec{x}, t) \quad (2.1)$$

Trajectoire des particules fluides :

La trajectoire d'une particule est la courbe tracée par la particule au cours de son déplacement.

Il est très simple de déterminer les trajectoires des particules fluides dans la description Lagrangienne, il suffit de suivre l'évolution d'une particule au fil du temps. Cela revient à déterminer la fonction vectorielle $\vec{x}(\vec{a}, t)$, où t est la variable et \vec{a} un paramètre. L'ensemble des trajectoires $x_i = x_i(a_j, t)$, a_j $j = 1, 2, 3$ est une famille de courbes à trois paramètres.

Vitesse et accélération :

Pour une particule fluide donnée, i.e. pour \vec{a} fixé, la vitesse est donnée par

$$\vec{v}(\vec{a}, t) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \dots \dots (2.2)$$

soit, en notation tensorielle

$$\tilde{v}_i(a_j, t) = \frac{\partial x_i}{\partial t} \dots \dots (2.3)$$

L'accélération est donnée par

$$\vec{\gamma}(\vec{a}, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \dots \dots (2.4),$$

soit, en notation tensorielle

$$\tilde{\gamma}(a_j, t) = \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial t} \dots \dots (2.5).$$

La méthode de lagrange s'avère délicate pour décrire le mouvement d'un fluide car il n'est pas facile d'identifier les particules du fluide au cours de leur déplacement.

2.2.2 Description Eulerienne

Dans cette description, on n'a pas besoin d'identifier les particules du fluide. On se fixe au repère galiléen independant des particules du fluide puis on décrit les propriétés du fluide en fonction des variables spatiales $x = (x_1, x_2, x_3)$ et la variable temporelle t .

Ainsi l'observateur est placé en un point M fixé du repère et observe passer les particules fluides devant lui. A deux instants différents, ce n'est pas la même particule qui occupe la position $\vec{x}(M)$ de l'observateur. La méthode d'Euler consiste à connaître les propriétés des particules du fluide au cours du temps t à un endroit donné déterminé par ses coordonnées.

On note $F(\vec{x}, t)$ la valeur de la propriété F au point \vec{x} à l'instant t . Les variables decrivant un tel système sont les trois coordonnées d'espace (x_1, x_2, x_3) (repérant l'observateur) et l'insttant t d'observation. Les variables (x_1, x_2, x_3, t) sont appelées les variables d'Euler.

C'est la description d'Euler qui sera adapté pour la description mécanique et thermique d'un fluide.

Définition 2.2.1 1- *Un écoulement est permanent ou stationnaire si ses composantes de vitesse sont indépendantes de la variable temps t , sinon il est instationnaire ou non permanent.*

2- *Un écoulement est uniforme si ses composantes de vitesse sont indépendantes des coordonnées d'espace, sinon il est non- uniforme.*

2.2.3 Lien entre les deux descriptions

Soit F une propriété physique représentée par :

- La description lagrangienne $\tilde{F}(\vec{a}, t)$.
- La description eulérienne $F(\vec{x}, t)$.

$F(\vec{x}, t)$ est la valeur à l'instant t de la propriété F au point \vec{x} fixé de l'espace.

C'est aussi la valeur de F pour la particule du fluide qui se trouve en \vec{x} à l'instant t .

A l'instant t , la particule considérée se trouve en $\vec{x}(\vec{a}, t)$, donc en un point où F vaut $F(\vec{x}(\vec{a}, t), t)$. Par égalité des deux on trouve.

$$\tilde{F}(\vec{a}, t) = F(\vec{x}(\vec{a}, t), t) \dots \dots \dots (2.6).$$

Par un raisonnement analogue on montre que

$$F(\vec{x}, t) = \tilde{F}(\vec{a}(\vec{x}, t), t) \dots \dots \dots (2.7).$$

Accélération en variables d'Euler. Notion de dérivée particulaire d'une propriété physique quelconque

Remarque préliminaire :

Si $\vec{v}(\vec{x}, t)$ est le champ eulérien de vitesse et $\vec{\gamma}(\vec{x}, t)$ celui de l'accélération, il est clair que :

$$\vec{\gamma}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(\vec{x}, t + \delta t) - \vec{v}(\vec{x}, t)}{\delta t}$$

car $\vec{v}(\vec{x}, t + \delta t)$ et $\vec{v}(\vec{x}, t)$ sont des vitesses de particules fluides différentes, or on cherche le taux de variation de la vitesse d'une même particule fluide au cours du temps. On est donc obligé de revenir à la description de Lagrange.

Méthode : on va déterminer $\tilde{\vec{\gamma}}(\vec{a}, t)$, on en déduira $\vec{\gamma}(\vec{x}(\vec{a}, t), t)$ c'est-à-dire $\vec{\gamma}(\vec{x}, t)$ on a :

$$\tilde{\gamma}_i(\vec{a}, t) = \frac{\delta \tilde{v}_i}{\delta t}(\vec{a}, t) \text{ et } \tilde{v}_i(\vec{a}, t) = v_i(\vec{x}(\vec{a}, t), t)$$

Par une formule de dérivation composée, on obtient :

$$\tilde{\gamma}_i(\vec{a}, t) = \frac{\partial v_i}{\partial t} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}(\vec{a}, t)} + \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial x_1} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}(\vec{a}, t)} \times \frac{\partial x_1}{\partial t}(\vec{a}, t) + \dots \dots \dots}_{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}(\vec{a}, t)} \times \frac{\partial x_j}{\partial t}(\vec{a}, t)}$$

Or on a aussi (avec (2.2)) puis (2.6) :

$$\frac{\partial x_j}{\partial t}(\vec{a}, t) = \tilde{v}_j(\vec{a}, t)$$

$$\frac{\partial x_j}{\partial t}(\vec{a}, t) = v_j(\vec{x}(\vec{a}, t))$$

L'équation précédente s'écrit donc :

$$\gamma_i(\vec{x}(\vec{a}, t), t) = \frac{\partial v_i}{\partial t} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}(\vec{a}, t)} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}(\vec{a}, t)} \times v_j(\vec{x}(\vec{a}, t), t)$$

Et en écrivant simplement $\vec{x} = \vec{x}(\vec{a}, t)$, on obtient :

$$\gamma_i(\vec{x}, t) = \frac{\partial v_i}{\partial t} \Big|_{\vec{x}, t} + v_j(\vec{x}, t) \times \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \Big|_{\vec{x}, t}$$

On vient donc de calculer le taux de variation temporelle d'une grandeur attachée à une particule du fluide que l'ont suit, et que l'on a exprimé en variable d'Euler.

Définition 2.2.2 On appelle *dérivée particulaire*, noté $\frac{Df}{Dt}$ d'une quantité $f(x, t)$, donnée en variables eulérienne d'une particule du fluide à la position x et au temps t , la variation temporelle (dérivée par rapport à t) de la quantité de la même particule qui sera à la position $x + dx$ au temps $t + dt$. Autrement dit, la dérivée temporelle de $f(x, t)$ en suivant la particule.

D'ou :

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(\vec{x}, t) \text{ en variables de lagrange.}$$

Ou alors

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t}(\vec{x}, t) + v_j(\vec{x}, t) \times \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}, t) \text{ en variables d'Euler.}$$

En notant $\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{v})$ le tenseur dont la matrice en coordonnées cartésiennes est $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ on a alors :

$$\overrightarrow{\gamma}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{v}) \circ \vec{v}$$

D'un point de vue pratique, on retiendra que l'accélération peut s'écrire sous différentes formes équivalentes :

$$\vec{\gamma}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla) \vec{v}$$

ou encore :

$$\vec{\gamma}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$$

Théorème 2.2.3 *Théorème de Reynolds*

Soit un ensemble de particules fluides que l'on suit dans leur mouvement. L'ensemble occupe le volume \mathcal{V}_m à l'instant t . Soit aussi une propriété physique représentée en variable d'Euler par $F(\vec{x}, t)$.

La question est : quelle est la variation et la somme de cette valeur physique sur le volume \mathcal{V}_m qui évolue au cours du temps ?

On a

$$\frac{d}{dt} \left(\int \int \int_{\mathcal{V}_m} F(\vec{x}, t) d\mathcal{V} \right) = \int \int \int_{\mathcal{V}_m} \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial(F v_j)}{\partial x_j} \right) d\mathcal{V}$$

Trajectoire en description eulérienne et notion de ligne de courant à un instant donné

1. Trajectoire

Définition 2.2.4 La trajectoire est l'ensemble des positions \vec{x} occupées par une particule fluide donnée. Elle est donc solution de :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t) \Leftrightarrow dx_i = v_i(\vec{x}, t) dt,$$

avec la condition initiale $\vec{x}(0) = \vec{a}$

d'où

$$dt = \frac{dx_1}{v_1(\vec{x}, t)} = \frac{dx_2}{v_2(\vec{x}, t)} = \frac{dx_3}{v_3(\vec{x}, t)}$$

On a trois équations du premier ordre, donc 3 constantes d'intégration. On obtient ainsi une famille de courbes à 3 paramètres, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

2. Ligne de courant à un instant t_0 fixé

Définition 2.2.5 : On appelle ligne de courant une courbe dont la direction de la vitesse est tangente en chacun de ses points, à un instant t_0 fixé. Le long d'une telle ligne, à t_0 et en un point M de coordonnées $x = (x_1, x_2, x_3)$, le vecteur tangent $d\vec{x} = (dx_1, dx_2, dx_3)$ est parallèle au vecteur vitesse $\vec{v}(\vec{x}, t_0) = (v_1, v_2, v_3)$.

$$\frac{dx_1}{v_1(\vec{x}, t_0)} = \frac{dx_2}{v_2(\vec{x}, t_0)} = \frac{dx_3}{v_3(\vec{x}, t_0)}$$

Ici comme on a un système de deux équations différentielles du premier ordre, on obtient une famille de fonctions à deux paramètres.

Pour observer les lignes de courant, on met en suspension une quantité importante de particules d'impureté légère, et prendre une photo avec un temps de pose très court. A priori, les trajectoires et les lignes de courant sont des entités différentes. Toutefois, ces deux concepts sont identiques dans le cas d'écoulements stationnaires.

2.3 Les principes fondamentaux de la mécanique

En physique, pour mettre en équation un phénomène on a toujours recourt à un mode de conservation quantitative. En mécanique des fluides 3 modes de conservation sont considérées :

- 1) Conservation de la masse (la masse n'est ni disparu ni ajouté)
- 2) Conservation de la quantité de mouvement (principe fondamental de la dynamique)
- 3) Conservation de l'énergie (principe fondamental de la thermodynamique)

(Voir [5],[9],[21]).

2.4 Etablissement des équations d'un mouvement d'un fluide

2.4.1 Equation de continuité ou de la conservation de la masse

Considérons un volume \mathcal{V} délimité par une surface S en mouvement de vitesse \vec{v} et densité ρ . La quantité de fluide contenue dans ce volume est égale à :

$$m = \int \int \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}$$

Soit \vec{dS} le vecteur unitaire de cette surface orienté vers l'extérieur à la surface fermée.

Le débit massique sortant de la surface S est égal à :

$$\int \int_S \rho \vec{v} \vec{dS}$$

En absence de source ou de puits la masse est conservée, donc l'augmentation de la masse à l'intérieur du volume \mathcal{V} est égal au débit de la masse entrante à travers la surface S .

La conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_{\mathcal{V}} \rho dV = - \int \int_S \rho \vec{v} \vec{dS}$$

D'après le théorème de la divergence

$$\int \int_S \rho \vec{v} \vec{dS} = \int \int \int_{\mathcal{V}} \text{div}(\rho \vec{v}) dV$$

L'équation de conservation de la masse peut être écrite :

$$\int \int \int_{\mathcal{V}} \left[\text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] dV = 0$$

Comme cette équation doit être vérifiée pour tout volume \mathcal{V} , on obtient l'équation :

$$\boxed{\text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Cette équation est connue sous le nom "équation de la conservation de la masse" ou bien "équation de continuité".

Deux cas particuliers sont à considérer :

1- fluide incompressible $\frac{D\rho}{Dt} = 0 \Rightarrow \text{div} \vec{v} = 0$

Pour un écoulement stationnaire ou instationnaire cet écoulement est dit isovolume.

2- écoulement stationnaire :

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\right) \Rightarrow \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

Ou bien :

$$\rho \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho = 0$$

En dehors de la possibilité du premier cas, il existe la possibilité d'écoulement isovolumes tels que :

$\vec{v} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho = 0$, où les variations de la masse volumique sont orthogonales en tout point a vecteur vitesse.

Ce cas correspond à des écoulements stratifiés par salinité ou température (courants marins) et par humidité (atmosphère).

2.4.2 Conservation de la quantité de mouvement :

La dynamique des fluides s'appuie sur la loi fondamentale de la dynamique que l'on applique à chaque élément du fluide. Les différentes forces qui s'exercent sur un élément du fluide sont de deux types :

- 1) forces intérieures sont d'origine moléculaires, leur résultante est nulle.
- 2) forces extérieures sont des forces de volume ou des forces de surface.

On considère volume matériel $\mathcal{V}_m(t)$, que l'on suit dans son mouvement.

On note $S_m(t)$ la surface délimitant ce volume. on note que le volume $\mathcal{V}_m(t)$ et la surface $S_m(t)$ dépendent du temps, et qu'il ne sort ni rentre dans $\mathcal{V}_m(t)$ aucune particule.

On applique le principe fondamental de la dynamique au système matériel constitué des particules fluides contenues dans \mathcal{V}_m (la somme des forces extérieures agissant sur le système est égale à la variation de la quantité du mouvement). Pour cela, il nous faut d'abord faire l'inventaire des forces extérieurs appliqués à \mathcal{V}_m .

Ces forces sont de deux types :

Les forces de volume :

c'est à dire les forces d'interaction à longue distance (gravité, forces électromagnétiques, etc....).

Dans le cadre de la mécanique des milieux continus, ces forces sont définies par une densité massique \vec{f} . Ce qui signifie que la force exercée sur un petit volume $\Delta\mathcal{V}$ s'écrit : $\Delta\vec{F} = \rho\vec{f}\Delta\mathcal{V}$ et que la force \vec{F} exercée sur un volume \mathcal{V} s'écrit :

$$\vec{F} = \int \int \int_{\mathcal{V}} \rho\vec{f}d\mathcal{V}$$

Les forces d'interaction moléculaire :

Notion de viscosité dans un fluide en mouvement

L'expérience montre que, lors d'un écoulement d'un fluide, la pression (force normale) ne suffit pas pour expliquer quelques phénomènes et qu'il convient d'introduire des forces tangentielles qui s'opposent au mouvement du fluide. Ces forces, de type frottement, dues aux interactions entre molécules du fluide, sont appelées forces de viscosité.

La viscosité dynamique dépend de la température et de la pression mais elle varie plus en fonction de la température que de la pression. Elle augmente avec la température pour les gaz et diminue pour les liquides.

On note par μ le coefficient de viscosité dynamique . Supposer que μ est uniforme (constant) revient à supposer qu'il n'y a pas de variation notable de température dans l'écoulement.

Viscosité cinématique :

Dans de nombreuses formules apparaît le rapport de la viscosité dynamique μ et de la masse volumique ρ . Ce rapport est appelé : viscosité cinématique ν :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Les forces de viscosité agissent à très courte distance d'action, de l'ordre du libre parcours moyen, c'est à dire une distance nulle du point de vue de la mécanique des milieux continus. Ces forces ne concernent donc que les molécules du fluide de \mathcal{V}_m situées "sur la face intérieure" de S_m qui ne seront influencées que par les molécules extérieures à \mathcal{V}_m situées "sur la face extérieure" de S_m .

L'action de ces molécules extérieures sera alors modélisé par une action de surface.

Soit un élément de surface défini par son aire ΔS et par sa normale extérieure \vec{n} .

La force de contact $\Delta \vec{F}_s$ exercée sur cet élément de surface s'écrit : $\Delta \vec{F}_s = \vec{T} \Delta S$

Où le vecteur \vec{T} est le vecteur contrainte et représente une densité surfacique de forces. Il a la dimension d'une pression. On suppose en outre qu'il ne dépend que de la normale \vec{n} : $\vec{T} = \vec{T}(\vec{n})$

Dans ces conditions, les actions de contact extérieures \vec{F}_s sur \mathcal{V}_m s'écrivent :

$$\vec{F}_s = \int \int_{S_m} \vec{T}(\vec{n}) dS$$

Tenseur des contraintes :

On applique le principe fondamental de la dynamique au volume \mathcal{V}_m , on suppose que la contrainte \vec{T} est une fonction linéaire de la normale \vec{n} . Il existe donc un tenseur d'ordre 2, $\vec{\sigma}$ appelé tenseur des contraintes, tel que :

$$\vec{T}(\vec{n}) = \vec{\sigma} \vec{n}$$

$$T_i = \sigma_{ij} n_j$$

Le tenseur des contraintes $\vec{\sigma}$ est symétrique :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \forall i, j$$

2.4.3 Equation de quantité de mouvement :

L'application du principe fondamental de la dynamique au volume matériel \mathcal{V}_m donne alors : "la variation de la quantité de mouvement = la résultante des forces extérieures" c'est à dire :

$$\frac{D}{Dt} \int \int \int_{\mathcal{V}_m} \rho \vec{v} d\mathcal{V} = \int \int \int_{\mathcal{V}_m} \rho \vec{f} d\mathcal{V} + \int \int_{S_m} \vec{\sigma} \vec{n} dS$$

En appliquant le théorème de la divergence à l'intégrale de surface du membre de droite et le théorème de Reynolds à l'intégrale triple du membre de gauche, on obtient :

$$\int \int \int_{\mathcal{V}_m} \frac{d\vec{v}}{dt} d\mathcal{V} = \int \int \int_{\mathcal{V}_m} (\rho \vec{f} + \text{div} \vec{\sigma}) d\mathcal{V}$$

$$\int \int \int_{\mathcal{V}_m} \frac{dv_i}{dt} d\mathcal{V} = \int \int \int_{\mathcal{V}_m} (\rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}) d\mathcal{V}$$

$$i = 1, 2, 3$$

Ces relations constituent la forme intégrale du bilan de quantité de mouvement. Comme elles doivent être vérifiées quelque soit le volume matériel \mathcal{V}_m , on en déduit une forme locale, dite équation de quantité de mouvement qui s'écrit :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \vec{v} \cdot \vec{v} \right] = \rho \vec{f} + \text{div} \vec{\sigma}$$

C'est l'équation de Stokes.

Ou :

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

$$i = 1, 2, 3$$

2.5 Les équations de Navier-Stokes et d'Euler

Considérons une particule de fluide de masse dm , et appliquons le Principe Fondamentale de la Dynamique :

$$dm \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p d\mathcal{V} + \vec{f} d\mathcal{V} + \nu \Delta \vec{v} d\mathcal{V}$$

sachant que $dm = \rho d\mathcal{V}$ on obtient la relation fondamentale des fluides newtoniens.

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \vec{f} + \nu \Delta \vec{v}$$

c'est l'équation de Navier-Stokes que l'on peut écrire sous la forme :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + \vec{f} + \nu \Delta \vec{v}$$

On remarque qu'elle est non linéaire à cause de la présence du terme convectif $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$ c'est ce qui rend les problèmes de mécanique des fluides mathématiquement difficile à résoudre.

2.5.1 Cas d'un fluide parfait : équation d'Euler

Le fluide est dit parfait lorsque les effets de viscosité peuvent être négligés : la loi de comportement (3) est alors réduite à :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \dots (7)$$

Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) + \vec{\nabla} p = \vec{f} \dots (8)$$

le système (8) est appelé « équation d'euler ».

2.5.2 Remarque préliminaire sur les notations utilisées :

Les opérateurs vectoriels de divergence, rotationnel et gradient seront exprimés ici en utilisant l'opérateur $\vec{\nabla}$ défini par :

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$$

$$\text{ie : } \begin{cases} \overrightarrow{\text{grad}} \vec{U} = \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{U} = \vec{\nabla} \wedge \vec{U} \\ \overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f \end{cases}$$

δ_{ij} est le symbole de kronecker (= 0 pour $i \neq j$ et 1 si $i = j$). La convention de sommation sur les indices répétés n'est pas utilisée.

Les équations générales qui régissent le mouvement d'un fluide visqueux occupant un domaine \mathcal{D} (domaine de l'espace \mathbb{R}^3 occupé par le fluide) :

Conservation de la masse :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \dots (1)$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i \dots (2)$$

Où $\vec{v}(\vec{x}, t)$ est le vecteur vitesse de composantes (v_1, v_2, v_3) dans le repère considéré.

$\rho(\vec{x}, t)$ est la masse volumique $(\rho > 0)$

$\vec{f}(\vec{x}, t) = (f_1, f_2, f_3)$ est la densité volumique des forces extérieures agissant sur le fluide (généralement force de pesanteur)

$P(\vec{x}, t)$ est la pression du fluide $(P \geq 0)$

$\sigma_{ij}(\vec{x}, t)$ Sont les composantes du tenseur symétrique des contraintes

$\varepsilon_{ij}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ Sont les composantes du tenseur des vitesses de déformation.

ν et μ sont les coefficients de viscosité.

Les lois de conservation sont générales pour l'ensemble des milieux « continus » c'est-à-dire ceux que l'on peut raisonnablement considérer d'un point de vue macroscopique, les lois de comportement et les lois d'états.

Problème mathématique / numérique associé

Le problème mathématique / numérique correspondant aux équations posées.

Résoudre un problème d'écoulement consiste à intégrer un système d'équations aux dérivées partielles dont les données sont (au minimum) :

✓ La forme du volume \mathcal{V}

✓ Les forces extérieures \vec{f} ,

✓ Les coefficients de viscosité ν et μ

✓ Les conditions initiales et aux limites.
et les inconnues sont :

✓ Principalement la vitesse \vec{v}

✓ Secondairement la masse volumique ρ , la pression p , et la température T

Fluide newtonien

Le fluide est dit newtonien si le tenseur des contraintes est liée au tenseur de déformation par la relation :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk}(u)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(u)$$

2.5.3 Cas d'un fluide incompressible : Les équations de Navier-Stokes

L'équation de conservation de la masse d'un milieu incompressible s'écrit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \dots (3)$$

Cette incompressibilité et l'homogénéité (ie. ρ est invariant par rapport à l'espace) du fluide font que la conservation de la masse signifie simplement $\rho = \rho_0 = \text{Constante}$ et que le tenseur de contraintes est réduit à :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(u) \dots (4)$$

Doù la nouvelle forme de (2) :

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i + \mu \Delta v_i \dots (5)$$

Où son expression vectorielle :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} = \frac{\vec{f}}{\rho_0} + \nu \Delta \vec{v} \dots (6)$$

Où $\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$ est la **viscosité cinématique** du fluide.

Le système d'équations non- linéaire $\{(3), (6)\}$ est connu sous le nom de **Navier-Stokes**, il comporte quatre équations aux dérivées partielles (dont trois du second ordre) pour la détermination de quatre inconnus : v_1, v_2, v_3 , et p , des données initiales sur \vec{v} et p et les conditions aux

limites, plus éventuellement des conditions de continuité si la frontière comporte une surface libre, ou une interface.

Condition Initiales et aux Limites :

1-Conditions initiales :

Comme tout problème d'équation différentielle, un problème de la mécanique de fluide exige la connaissance de l'état initial du fluide. C'est à dire une condition initiale des fonctions du problème $U(x, 0), T(x, 0), E(x, 0)$, le domaine au temps $t = 0$.

2- Conditions aux limites :

Dans les cas réels, le domaine du fluide admet des frontières. Il est nécessaire de connaître l'état du fluide aux frontières du domaine.

2-1 Frontière rigide (Fluide en contact d'un corp rigide)

L'expérience montre que la couche du fluide juste en contact d'un solide s'accroche à la paroi rigide. De là, il est légitime de considérer que la vitesse au bord est nulle (considérons que la paroi rigide est fixe) $\vec{v}/\partial\Omega = 0$.

Comme il vient par la suite, si on considère que la viscosité est nulle, cette condition ne peut être satisfaite. la condition est relaxée à ce que la vitesse normale est nulle (le fluide ne peut pas traverser la paroi rigide) (problème d'euler)

2-2 Interface et frontière libre

Si on a un écoulement à deux où plusieurs fluides non miscibles, une surface de séparation entre deux différent fluides (appelée interface) se crée. Vu la discontinuité de la densité à l'interface des conditions de discontinuité sont alors imposées à l'interface.

Des forces surfaciques se crée pour balancer et corriger cette discontinuité.

Cas des écoulements stationnaires :

Un écoulement est dit stationnaire ou permanent si la vitesse ne dépend pas explicitement du temps, i.e $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$.

Dans un écoulement stationnaire et incompressible, le problème d'écoulement est réduit à :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \\ (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} = \frac{\vec{f}}{\rho_0} + \nu \Delta \vec{v} \\ \vec{v} = 0 \text{ sur la frontière rigide.} \end{cases}$$

2.5.4 Ordres de grandeur- Nombre de Reynolds

Résoudre un système de Navier-Stokes dans le cas général dans un domaine Ω est presque impossible, (des solutions exactes existent que pour des écoulements assez simples : poiseuille). Pour cela, on essaie de simplifier et éliminer le terme non linéaire de l'équation de Navier-Stokes. la viscosité est négligée loin des frontières et ne sera considérée qu'aux voisinages des ces frontières. Alors, on se propose de comparer l'ordre de grandeur des termes non linéaires à celui des termes de viscosité. Pour cela, on se donne :

- une échelle de variation de vitesses : v (pour évaluer les dérivées spatiales de v_i)
- une échelle de longueur sur laquelle on a une variation sensible de v : L .
- une échelle de vitesse que l'on peut prendre égale à v (avec éventuellement un changement de référentiel)

On a alors :

$$\left| \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| \sim \rho \frac{v^2}{L} \quad \text{et} \quad \left| \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \right| \sim \mu \frac{v}{L^2}$$

Donc :

$$\frac{\left| \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|}{\left| \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \right|} \sim \mathcal{R}_e$$

Où on définit le *Nombre de Reynolds* par :

$$\mathcal{R}_e = \frac{vL}{\nu}$$

Les écoulement pour lesquels l'approximation de stokes est justifiée sont donc tels que : $\mathcal{R}_e \ll 1$.

Remarque 2.5.1 On a : $\mathcal{R}_e = \frac{\text{termes non linéaires}}{\text{termes visqueux}}$.

Le paradoxe de stokes : *A posteriori*, on peut calculer les termes non linéaire et constater que l'approximation de stokes n'est pas vérifiée dans tout l'écoulement et pourtant ces résultats sont en bon accord avec l'expérience. Le point discutable, c'est notre hypothèse selon laquelle les termes non linéaire sont négligeables partout. En fait, en remettant complètement en cause les conditions aux limites du problème, on aurait pu modifier la solution. Les termes non linéaires sont bien négligeables au voisinage immédiat du profil. Les calculs que l'on a menés (notamment la force exercée sur le profil) sont bien valables dans cette zone.

2.6 Le nombre de Reynolds comme paramètre de base en mécanique des fluides à ρ constant

On classe les écoulements en fonction de l'ordre de grandeur de leur nombre de Reynolds.

1. Si $\mathcal{R}_e \ll 1$, on a l'approximation de Stokes. Il n'y a plus de problème mathématique mais on se retrouve face au paradoxe de Stokes...

2. Si $\mathcal{R}_e \gg 1$, il faut distinguer 2 cas :

- **dans les écoulements autour d'un corps**, il se forme des couches limites et un sillage d'autant plus petits que le nombre de Reynolds est grand. A l'extérieur, on peut utiliser un modèle de fluide parfait. A l'intérieur, on développe l'approximation de la couche limite. Cependant, au delà d'une certaine valeur de \mathcal{R}_e , l'écoulement devient instable et il faut faire appel aux théories de la stabilité et de la turbulence.
- **à l'intérieur de parois**, là aussi, la turbulence apparaît au delà d'une certaine valeur de \mathcal{R}_e qui dépend de la géométrie de l'écoulement. Ici on utilise des théories adéquates.

2.7 Ecoulement sur une plaque plane semi-infinie

La résolution des équations de Navier-Stokes est, on l'a vu, très difficile voire impossible. On va faire des approximations pour arriver à un système à résoudre plus simple. ces approximations doivent nous permettre de déterminer la vitesse de l'écoulement et la pression dans la couche limite et le sillage qui accompagne les écoulements à grand nombre de Reynolds autour de solides profilés. La couche limite et le sillage sont d'autant moins épais que \mathcal{R}_e est grand.

Dans tout qui suit, nous allons particulièrement nous intéresser au cas particulier de la couche limite d'un écoulement stationnaire, incompressible et plan d'une plaque plane semi-infinie.

Nous négligerons en outre l'action de la pesanteur. Le problème de Navier-Stokes se réduit à :

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_1} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) \\ v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_2} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right) \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \\ v_1(x_1, 0) = v_2(x_1, 0) = 0 \\ v_1(x_1, +\infty) = U_\infty \end{array} \right.$$

2.7.1 Les équations de prandtl

Idee : l'idée de prandtl est que l'effet de la viscosité est uniquement au voisinage de la plaque rigide plane.

Dans cette partie, nous allons utiliser une méthode courante en physique pour aboutir aux équations de prandtl :

1. Faire des analyses d'ordre de grandeur ;
2. Introduire des échelles en conséquence ;
3. Déterminer les mécanismes que l'on veut conserver ;
4. Conclure en déterminant le système d'équations de prandtl.

On utilisera la notation $o(X)$ pour l'ordre de grandeur de X .

(Attention à la confusion possible avec le petit o des mathématiques).

Les mécanismes de base :

On a 2 mécanismes de même importance en présence :

- Le freinage représenté par $\frac{\partial v_1}{\partial t}$;
- La diffusion représenté par $\nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}$.

En outre, il est clair qu'ici $\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \neq 0$ donc, d'après l'équation de conservation de la masse v_2 n'est pas nulle. Si la couche est mince, on a $|v_1| \gg |v_2|$. Il faudra cependant prendre garde à conserver a priori des termes de type $v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$ (en effet, même si v_2 est petit devant v_1 , $\frac{\partial v_1}{\partial x_2}$ et donc le produit n'ont aucune raison de l'être). En conclusion, on peut dire qu'il faut garder les termes de freinage, de diffusion et que l'on a :

$$(2.2) \quad o\left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) = o\left(\nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}\right)$$

A ces 2 mécanismes, il faut bien sûr ajouter la conservation de la masse.

2.7.2 Les échelles du problème

On a besoin de différentes échelles pour évaluer l'ordre de grandeur de chacun des termes des équations de Navier- Stokes. Il nous faut :

- une échelle U pour v_1 et ses variations,
- une échelle W pour v_2 et ses variations,
- une échelle de longueur L caractéristique des variations selon x_1 (pour évaluer $\frac{\partial}{\partial x_1}$),
- une échelle de longueur δ caractéristique des variations selon x_2 .

Avec les équations dont on dispose, on va relier ces échelles entre elles afin de déterminer lesquelles on choisira comme échelles indépendantes.

D'après l'équation de la conservation de la masse, on a : $\frac{U}{L} + \frac{W}{\delta} = 0$

D'où : $W = U \frac{\delta}{L}$

D'après (2), on déduit : $\frac{U^2}{L} = \nu \frac{U}{\delta^2}$

qui donne immédiatement, en utilisant la définition du nombre de Reynolds :

$$\frac{\delta}{L} = \sqrt{\frac{1}{\mathcal{R}_e L}}$$

On retrouve bien le fait que l'épaisseur de la couche limite diminue quand \mathcal{R}_{eL} augmente. L'indice L signifie ici que la longueur caractéristique utilisée pour calculer \mathcal{R}_e est L . Cette précision est importante, car il y a plusieurs longueurs caractéristiques dans le problème. On a 2 relations pour 4 échelles, il n'y a donc, en réalité, que 2 échelles indépendantes : on choisit U et L .

On déduit alors :

$$\delta = \frac{L}{\sqrt{\mathcal{R}_{eL}}} \quad \text{et} \quad W = \frac{U}{\sqrt{\mathcal{R}_{eL}}}$$

2.7.3 Simplification des équations

On va maintenant évaluer les termes des 2 premières équations de (1). On rappelle que l'on ne sait pas évaluer les termes de pression a priori donc on ne peut pas les négliger.

$$o(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1}) = \frac{U^2}{L} \quad o(v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2}) = \frac{U}{\sqrt{\mathcal{R}_{eL}}} \frac{U}{L} \sqrt{\mathcal{R}_{eL}} = \frac{U^2}{L}$$

$$o(v_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}) = \nu \frac{U}{L^2} = \frac{U^2}{L} \frac{1}{\mathcal{R}_{eL}} \quad o(\nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}) = \nu \frac{U}{L^2} \mathcal{R}_{eL} = \frac{U^2}{L}$$

$$\text{Si } \mathcal{R}_{eL} \text{ est grand, on obtient : } v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}$$

Pour la deuxième équation, on procède de la même façon et on obtient (on cherche à comparer chaque terme à $\frac{U^2}{L}$) :

$$o(v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1}) = \frac{U^2}{L} \sqrt{\frac{1}{\mathcal{R}_{eL}}} \quad o(v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2}) = \frac{U^2}{L} \sqrt{\frac{1}{\mathcal{R}_{eL}}}$$

$$o(\nu \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2}) = \nu \frac{U}{L^2} (\frac{1}{\mathcal{R}_{eL}})^{3/2} \quad o(\nu \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}) = \frac{U^2}{L} \sqrt{\frac{1}{\mathcal{R}_{eL}}}$$

En conservant les termes du même ordre que ci-dessus, on obtient simplement : $\frac{\partial P}{\partial x_2} = 0$, c'est à dire que P ne dépend que de x_1 . En se plaçant en x_2 suffisamment éloigné de la couche limite, on obtient donc : $P = P_\infty(x_1)$.

En rassemblant les résultats précédents, on obtient les équations de prandtl :

$$\begin{cases} v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP_\infty}{dx_1} + \nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

auxquelles il convient d'ajouter les conditions aux limites :

$$\begin{cases} v_1(x_1, 0) = v_2(x_1, 0) = 0 \\ v_1(x_1, +\infty) = U_\infty \end{cases}$$

Remarque 2.7.1 on n'impose pas de condition sur v_2 à l'infini car un calcul plus rigoureux en théorie des perturbations montre que cela donne une condition de trop. On connaît seulement son ordre de grandeur ($\frac{U_\infty}{\sqrt{ReL}}$).

2.8 Cas de la plaque plane sans gradient extérieur de pression

On suppose que la vitesse à l'infini est uniforme et constante, on a donc, par application du théorème de Bernoulli (loin de l'obstacle, on a un comportement de fluide parfait), P_∞ qui est constante. La solution que nous allons développer est due à Blasius. Le système de Prandtl se réduit à :

$$(2.3) \quad \begin{cases} v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \\ v_1(x_1, 0) = v_2(x_1, 0) = 0 \\ v_1(x_1, +\infty) = U_\infty \end{cases}$$

2.8.1 Invariance du problème selon certaines affinités

Si on utilise des variables sans dimension, on peut écrire (3) de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{v}_1 \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \tilde{x}_1} + \tilde{v}_2 \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \tilde{x}_2} = \frac{\partial^2 \tilde{v}_1}{\partial \tilde{x}_2^2} \\ \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \tilde{x}_1} + \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial \tilde{x}_2} = 0 \\ \tilde{v}_1(\tilde{x}_1, 0) = \tilde{v}_2(\tilde{x}_1, 0) = 0 \\ \tilde{v}_1(\tilde{x}_1, +\infty) = 1 \end{array} \right.$$

où on a posé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{v}_1 = \frac{v_1}{U_\infty} \\ \tilde{v}_2 = \frac{v_2}{U_\infty} \sqrt{\mathcal{R}_e L} \\ \tilde{x}_1 = \frac{x_1}{L} \\ \tilde{x}_2 = \frac{x_2}{L} \sqrt{\mathcal{R}_e L} \end{array} \right.$$

En faisant un calcul complet (transformations linéaires selon les 4 variables du problème), on montre que le problème est invariant par la transformation :

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{v}_2 \mapsto v'_1 = y \tilde{v}_2 \\ 1 \mapsto x'_1 = \frac{\tilde{x}_2}{y^2} \\ 2 \mapsto x'_2 = \frac{\tilde{x}_2}{y} \end{array} \right.$$

On a donc une solution de la forme : $v'_1 = F(x'_1, x'_2)$

avec v'_1, x'_1, x'_2 définis par (4) laissant le système invariant quelque soit y , on peut choisir $y = \sqrt{\tilde{x}_1}$. v'_1 est donc une fonction qui ne dépend que d'une variable :

$$\tilde{v}_1 = G(\eta) \quad \text{où} \quad \eta = \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{\tilde{x}_1}}$$

On a :

$$\frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \tilde{x}_1} = G'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{x}_1} = -\frac{1}{2\tilde{x}_1} \eta G'(\eta)$$

Or, d'après l'équation de conservation de la masse, on a :

$$\tilde{v}_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = - \int_0^{\tilde{x}_2} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \tilde{x}_1} d\tilde{x}_2$$

qui conduit à :

$$\bar{v}_2 = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} \int_0^\eta \alpha G'(\alpha) d\eta$$

En posant :

$$g(\eta) = \int_0^\eta G(\alpha) d\alpha$$

on obtient par intégration par partie :

$$\begin{cases} \bar{v}_1 = g'(\eta) \\ \bar{v}_2 = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} (\eta g' - g) \end{cases}$$

En reportant dans l'équation en \bar{v}_1 , on obtient l'équation de Blasius :

$$2g''' + gg'' = 0 \quad \text{avec : } \begin{cases} g'(0) = 0 \\ g(0) = 0 \\ g'(\infty) = 1 \end{cases}$$

Bibliographie

- [1] Ali H Nayfeh , Introduction to perturbation techniques, John Willey & Sons (New york-1981).
- [2] Ali H. Nayfeh, Perturbation methods, John Willy & Sons (New york-1973).
- [3] Atkinson, K.E. An introduction to numerical analysis, John Willey & sons, 1978.
- [4] Bender.C.M and Orszag.S. Advanced Mathematical Methods for Scienticts and Engineers
.M.C Graw-Hill Ne
- [5] Chassaing .P.Mécanique des fluides. Editions Cépaduès. 1997.
- [6] Donald R. Smith, Singular- perturbation theory: An Introduction with applications, Cambridge University press (1985).
- [7] E. Jhon Hinch, Perturbations Mhéthods, Cambridge texts in applied mathematics, Cambridge University press (1991).
- [8] Erdelyi,A. Asymptotic expansions. Dover Publications Inc, New York (1965).
- [9] G. Durant: Mécanique des milieux continues, Masson, Paris 1990.
- [10] G.K. Batchelor, Introduction to fluid Dynamics, Cambridge University Press, (1988)
- [11] G.P. Galdi. An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations, Vol. 1 et 2 Springer,1994.
- [12] Godin. J . Dynamique des fluides. Notes de cours. Ecole polytechnique de montréal (1994).
- [13] Herbert, D. Lecture notes on asymptotic analysis, Imperial college, 1989.
- [14] Hinch, E.J. Perturbation methods, CUP,1991.
- [15] [http:// calys. Obspm. Fr/ moncuque/ DESS/ node3.html](http://calys.Obspm.Fr/moncuque/DESS/node3.html)

- [16] <http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/blanquet/synophys/45meflu/45meflu.htm>
- [17] J.C. Burkill and H. Burkill, A second course in mathematical analysis, CUP, 1970.
- [18] Jeffreys, H. Asymptotic approximations. Clarendon Press, Oxford.
- [19] Keener, J.P. Principles of applied mathematics: transformation and approximation, Perseus books, 2000.
- [20] Lacey, A. Lecture notes on asymptotic analysis, Heriot-Watt, 2001.
- [21] Landau, Lifschitz, Mécanique des fluides, Editions MIR.
- [22] Murray, J.D. Asymptotic analysis, Springer Verlag, 1984.
- [23] O'Malley, R.E. Introduction to singular perturbations. Panabolic Press, New York.
- [24] Rhyning, Dynamique des fluides, Editions Presse Universitaire Romande.
- [25] S.Candel, Mécanique des fluides, Editions DUNOD, (1990).
- [26] Verlucht, F. Nonlinear differential equations and dynamical systems, Springer 1996.
- [27] W.P. Graebel. Advanced Fluid Mechanics. The University of Michigan. Academic Press in imprint of Elsevier (2007).
- [28] W. Wasow. asymptotic expansion for ordinary differential equations Robert E. Krieger publishing company. Huntington, New York (1976).
- [29] Wason, W. Asymptotic expansions for ordinary differential equations. Robert. E. Krieger Publishing company, New York (1976).
- [30] White. F.M. Fluid Mechanics. 4 éd.. Me Graw-Hill. (1999).

ملخص

الهدف من هذا البحث هو تقديم بعض تطبيقات التحليل التفاضلي و هتمر بصفة خاصة بنظرية الإزديابات المنظمة و الغير منظمة مدعمة بأمثلة مشوعة.

تقدم مدخل إلى ميكانيكة الأجسام المائعة، مع كتابة المعادلات الأساسية ثم تقوم بالنطيق على سيلان جسر مانع غير قابل للضبط على صفحة تمثل نصف مسنوى مفتوح.

Résumé

Dans ce travail on s'intéresse à quelques applications de l'analyse asymptotique.

On expose une synthèse des perturbations régulières et singulières avec des exemples.

On présente les notions générales sur les fluides, on établit les équations fondamentales.

Une application d'un écoulement d'un fluide incompressible sur une plaque plane semi-infinie est donnée.

Abstract

This work is devoted to some applications of asymptotic analysis.

We do a synthesis of the singular and regular perturbation with various examples.

We present an introduction to fluid mechanics and establish the fundamental equations.

An application of flow incompressible fluid past on a semi-infinite flat plate is given.

