REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DE JIJEL

Faculté des sciences

Département de mathématiques

N° d'ordre :

Série :

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

Spécialité Mathématiques

Option Analyse

Thème

Quelques résultats de viabilité pour des inclusions différentielles

par

MESSAOUDA BENGUESSOUM

Soutenu le : 16/02/2010 Devant le Jury :

Président :	M. DENCHE	Prof.	Univ.	Constantine
Rapporteur :	M. YAROU	Prof.	Univ.	Jijel
Examinateurs :	A. AIBECHE	Prof.	Univ.	Sétif
	D. AZZAM-LAOUIR	Prof.	Univ.	Jijel
	T. ZERZAIHI	MC.	Univ.	Jijel

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DE JIJEL

Faculté des sciences

Département de mathématiques

N° d'ordre :

Série :

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

Spécialité Mathématiques

Option Analyse

Thème

Quelques résultats de viabilité pour des inclusions différentielles

par

MESSAOUDA BENGUESSOUM

Soutenu le : 16/02/2010 Devant le Jury :

Président :	M. DENCHE	Prof.	Univ.	Constantine
Rapporteur :	M. YAROU	Prof.	Univ.	Jijel
Examinateurs :	A. AIBECHE	Prof.	Univ.	Sétif
	D. AZZAM-LAOUIR	Prof.	Univ.	Jijel
	T. ZERZAIHI	MC.	Univ.	Jijel

Remerciements

Je tiens avant tout, de remercier Dieu tout puissant qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce mémoire.

Je remercie tout d'abord mon directeur de recherche : Monsieur **M.F.Yarou** professeur qui a bien voulu encadrer ce mémoire.

Je vous suis reconnaissante pour votre appui, disponibilité, vos critiques et du Respect que vous m'avez témoigné durant tout ce temps.

A Mr **M.Denche**, professeur à l'université de Constantine pour avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

Je tiens également à remercier les membres du jury, pour l'attention et le temps consacré à la lecture et le jugement de ce travail, Mr **A.Aibeche** professeur à l'université de Sétif, Mme **D.Azzam-Laouir**, professeur à l'université de Jijel, Mr.**T.Zerzaihi** maitre de conférence à l'université de Jijel.

Je ne saurais oublier l'ensemble des collègues de l'équipe de magister qui ont su installer une joyeuse ambiance de travail.

Enfin, je remercie vivement tous les enseignants du département de mathématiques de l'université de jijel.

AFFECTUEUSEMENT, Â MA FAMILLE

ملخص

نتطرق في هده المذكرة إلى دراسة وجود حل لمسالة
تطورية بالنسبة لمعادلة تفاضلية متعددة القيم من الدرجة الأولى
و الثانية ذات قيم غير محدبة ذات اضطرابات لتابع من النوع كراتيدورى

Résumé

On trait dans ce mémoire l'existence de solution absolument continue Pour une inclusion différentielle, dans le cas non convexe du premier ordre et du second ordre avec perturbation de Carathéodory.
Dans l'espace de dimension fini et infini

Abstract

In this work, we are interested by the existence of absolute continuous solutions for differential inclusion of the first order and second order in the non convex case. With the perturbations of Caratheodory.

Table des matières

Chapitre 0

Introduction générale

Les inclusions différentielles représentent une importante généralisation des équations différentielles. la solution d'une inclusion différentielle est un ensemble accessible, au lieu d'une seule trajectoire. Ces derniéres années en théorie du contrôle, en théorie des systèmes non linéaires en avenir incertain, en jeux différentiels, en économie mathématique et théorie des jeux dans des domaines nouveaux de l'intelligence artificielle, tels la physique qualitative et le contrôle de systèmes dynamiques par des réseaux de neurones, en bio-mathématiques(évolution darwinienne), en sciences cognitives, les problèmes considérés se modélisent sous forme d'inclusions différentielles. Celles ci peuvent dépendre séparement du temps (cas non autonome) ou non (autonome).

Une inclusion différentielle du premier ordre se présente dans le cas autonome sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)) \text{ p.p sur } [0.T] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

où F est une multifonction définie d'un espace X à valeurs dans les parties $\mathcal{P}(X)$ de X. Des méthodes ont été d'abord développée lorsque F est à valeurs convexes. Dans le cas autonome et non convexe, Bressan, Cellina et Colombo [5]ont éxploité les propriétés du sous différentiel d'une fonction convexe propre semicontinue inférieurement qui s'avère être un opérateur maximal monotone, et ont prouvé un résultat d'existence de (1), en supposant que la multifonction F est semi continu supérieurement (s.c.s) à valeurs compactes contenues dans le sous différentiel d'un fonction convexe semi continue inférieurement (s.c.i). Une telle multifonction est appellée opérateur cycliquement monotone.

Le problème avec perturbation univoque de Carathéodory se présente sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)) + g(t, x(t)) \quad \text{p.p sur} \quad [0.T] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

et a été premièrement abordé par F.Ancona et G.Colombo par la même technique de [5] et l'hypothèse que g est de Carathéodory, puis [26, 25] ont obtenu l'existence de solution viable sous des conditions tangentielles.

Ce problème à été généralisé de deux manières, d'abord par Benabdellah, Castaing et Salvadori [9, 11] en prenant F à valeurs compactes contenues dans le gradient généralisé (au sens de Clarke) d'une fonction réguliére. Puis Bounkhel [7] en prenant F à valeurs compactes contenues dans le gradient généralisé d'une fonction localement Lipschitzienne uniformément reguliére. Recement, Yarou [27] a démontré que la classe la plus large (générale) est la classe des fonctions réguliéres et contient donc les autres classes de fonctions (uniformément régulières, C^2 inférieurement, PLN, etc...).

Les inclusions différentielles du second ordre avec perturbation s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) \in F(x(t), \dot{x}(t)) + g(t, x(t), \dot{x}(t)) \text{ p.p sur } [0.T] \\ (\dot{x}(0), x(0)) = (y_0, x_0) \end{cases} \tag{3}$$

où F est une multifonction semi-continue supérieurement à valeurs compactes non convexes contenues dans le sous différentiel d'une fonction propre convexe s.c.i. Ce problème a été étudié largement, citons par exemple Amine, Morchadi et Sajid [24] et Lupulescu [21]. Haddad et Yarou [18] ont obtenu un résultat d'existence de solution pour l'inclusion différentielle (3) avec F semi-continue supérieurement à valeurs contenues dans le sous-différentiel ∂f d'une fonction uniformément régulière localement Lipschitzienne.

Les inclusions différentielles sont étroitement liés à la viabilité, i.e. la solution $x(t) \in K$, où K est un sous ensemble fermé, le premier résultat d'existence de solution viable pour (1) a été donné par Rossi[26]. Morchadi et Gautier [25] ont obtenu un resultat d'existence pour le problème (2). Citons aussi les travaux de Aitalioubrahim et S.Sajid [3], Bounkhel [7], [8], [23] et [24].

On donne dans ce travail, quelques compléments aux résultats su-cités, en exploitant quelques résultats d'existence de solution absolument continue pour F une multifonction semi-continue supérieurement à valeurs compactes non convexes contenues dans le sous différentiel d'une fonction régulière .

Ce mémoire comprend 3 chapitres, dans le chapitre 1, on rappelle des notions essentielles et quelques concepts de base qui seront utilisés dans toute la suite. Dans le chapitre 2, on étudie une inclusion différentiel du premier ordre avec perturbation univoque g de Carathéodory dans l'espace de $\mathbb{R}^n$, dans la deuxième partie de ce chapitre nous donnons l'existence du résultat dans un espace de Hilbert. Dans le chapitre 3, on présente quelques résultats d'existence de solution viable pour le premier problème (2) et le second problème(3).

Chapitre 1

Concepts de base et résultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons des notations de base, quelques résultats fondamentaux sur les multi-applications, des théorèmes sur la compacité et la convergence ainsi que quelques résultats fondamentaux sur la continuité des fonctions univoques et multifonctions. On donnera aussi des définitions et les propriétés des fonctions localement lipschitziennes régulières et de sous différentiabilité.

1.1 Notations

Soit X un espace de Banach, $\|.\|$ la norme de X,

- X^* le dual de X,
- $\mathbb{B}$ boule unité fermée de X,
- $\mathbb{B}[x_0, r]$(resp.$\mathbb{B}(x_0, r)$) la boule fermée (reps. la boule ouverte de X) de centre x_0 et de rayon r,
- Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$,
- I un intervalle de $\mathbb{R}$,
- μ une mesure,

- $\mathcal{A}$ tribu sur Ω,
- $\sigma(X, X^*)$ la topologie faible sur X,
- A est un sous ensemble de X,la distance du point x à l'ensemble A est donnée par,

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

- $Co(A)$ l'enveloppe convexe de A,
- $\delta(., A)$ représente la fonction indicatrice de A définie par

$$\delta(x, A) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ +\infty & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- $\delta^*(., A)$ est la fonction support de A associée à $\delta(., A)$ définie par

$$\delta^*(x', A) = \sup_{a \in A} \langle x', a \rangle, \forall x' \in X^*$$

- χ_A la fonction Caractéristique d'une partie A d'un ensemble donné définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- $\mathcal{C}(I, X)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur I à valeurs dans X.

1.2 Fonctions Univoques

Définition 1.2.1 *(***Les fonctions absolument continues** *) Soit Y un espace vectoriel norme . On dit que $f : [a, b] \longrightarrow Y$ est fonction est absolument continue si, $\forall \xi > 0, \exists \delta > 0$ tel que pour toute partition dénombrable de $[a, b]$ par des intervalles disjoints $[a_k, b_k]$ vérifiant $\sum_k (a_k - b_k) < \delta$ on a*

$$\sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\| < \xi.$$

Théorème 1.1 *Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est absolument continue s'il existe une fonction g intégrable sur $[a, b]$ (au sens de Lebesgue) telle que pour tout $t \in [a, b]$*

$$f(a) - f(b) = \int_a^b g(s) ds$$

Une fonction absolument continue est continue et admet une dérivée presque partout.

Définition 1.2.2 *f est dite a variation bornée (fini) sur $[a, b]$ si sa variation $var(f)$ est finie*

$$var(f) = \sup\{\sum_{k=1}^{n} \|f(t_k) - f(t_{k-1})\|, a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}.$$

Remarque 1.2.1 *Toute fonction absolument continue sur un intervalle est à variation bornée sur cet intervalle.*

Définition 1.2.3 *Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction semi continue inférieurement (s.c.i) en point $x \in X$ et si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers x on a*

$$f(x) \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \inf f(x_n).$$

Définition 1.2.4 ***(Fonction de Carathéodory)***
Soient $(T, \mathcal{A})$ un espace mesuré, X et Y deux espaces métriques et soit $f : T \times X \longrightarrow Y$ on dit que f est de Carathéodory si elle est mesurable par rapport a t et continue par rapport à x.

Définition 1.2.5 ***(Convexité)*** *Soit X espace vectoriel sur $\mathbb{R}$*

- *Pour $x, y \in X$, $[x, y] = \{z = \lambda x + (1 - \lambda)y, 0 \leq \lambda \leq 1\}$ le segment de droite qui relie x et y.*
- *$A \subset X, A$ est convexe si $[x, y] \subset A, \forall x, y \in A$.*
- *une combinaison convexe (finie) des points $x_1, x_2, ..., x_n$ de X est l'élément de X représenté par $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.*
- *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}, f$ est dite fonction convexe si*

$$\forall x, y \in I, 0 \leq \lambda \leq 1, f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Définition 1.2.6 ***(L'enveloppe convexe)***
Soit $A \subset X$, l'enveloppe convexe de A est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes (finies) des éléments de A. C'est le plus petit convexe qui contient A.

Définition 1.2.7 *(***Fonction localement Lipschitzienne***)*
On dite que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est un fonction localement Lipschitzienne sur X s'il existe $A \subset X$, A borné tel que

$$\forall x, y \in A, \exists M > 0, |f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\|.$$

1.2.1 Quelques résultats de compacité

Théorème 1.2 *[1](**Théorème d'Ascoli-Arzelà**) Soit (I, d) un espace métrique compact, (Y, ρ) un espace métrique complet, et H un sous ensemble de $C(I, Y)$, l'espace des applications continues définies sur I à valeurs dans Y, muni de la topologie de la convergence uniforme. Alors*

$$H \text{ est relativement compact} \Longleftrightarrow \begin{cases} H \text{ est équicontinu et} \\ \forall x \in I, \;\; H(x) \text{ est relativement compact} \end{cases}$$

avec

$$H(x) = \{f(x) : f \in H\}.$$

Théorème 1.3 *[1](**Corollaire du théorème d'Ascoli-Arzelà**) Soient I un ensemble compact de $\mathbb{R}$,$(X, \|.\|)$ un espace de dimension finie et soit $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite de fonctions absolument continues définies sur I à valeurs dans X vérifiant les conditions suivantes :*

[*i*] $\forall t \in I, (f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ *est un sous ensemble relativement compact dans X.*

[*ii*]*Il existe une fonction à valeurs réelles positives $h \in L^1_{\mathbb{R}^+}(I)$ tel que*

$$\|\dot{f}_n(t)\| \leq h(t), p.p \text{ sur } I.$$

Alors il existe une sous suite de $(f_n)_n$ qui converge vers une fonction absolument continue $f : I \longrightarrow X$ au sens suivant

[*i*] $(f_n)_n$ *converge uniformément vers f.*

[*ii*] $(\dot{f}_n)_n$ *converge faiblement vers $\dot{f}$ dans $L^1_{\mathbb{R}^+}(I)$.*

1.2.2 Quelques résultats de convergence

Corollaire 1.4 *(**Corollaire de convergence dominée de Lebesgue**) Soit Y un espace métrique , et $g : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctions telle que*

- *Pour tout y l'application qui a x associe $g(x, y)$ est intégrable.*
- *Pour tout x appartenant à $X - N$ avec N négligeable l'application qui a y associe $g(x, y)$ est continue*
- *Il existe h intégrale de X dans $\mathbb{R}^n$ telle que pour tous x et y*

$$|g(x, y)| \leq h(x)$$

Alors l'application qui à y associe $\int g(x, y)dx$ est continue.

Théorème 1.5 *[16](**Théorème de Banach-Mazur**) Soit (x_n) une suite d'élément de X convergeant faiblement vers x. Alors il existe une suite (z_n) (où z_n est combinaison convexe des éléments x_n, x_{n+1},......) qui convergeant fortement vers x.*
En d'autres termes, si x_n converge faiblement alors z_n converge fortement avec

$$z_n \in \overline{co}\{x_k, k \geq n\}$$

Théorème 1.6 *Soit E un espace de Banach et K sous ensemble de E, alors*

$$\overline{Co}(K) = \{x \in E, \forall x' \in E' < x', x > \leq \delta^*(x', K)\}.$$

Proposition 1.2.1 *Soit φ une fonction réel définie par $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$. Alors*

$$\varphi(\lim_{n \longrightarrow \infty} \sup x_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sup \varphi(x_n)$$

Proposition 1.2.2 *[11]Soit X un espace de Banach uniformément convexe, Soit (x_n) une suite dans X telle que $x_n \rightharpoonup x$ pour la topologie faible $\sigma(X, X^*)$ et $\overline{\lim_{n \to \infty}} \|x_n\| \leq \|x\|$, Alors $x_n \longrightarrow x$ fortement.*

Corollaire 1.7 *Soit C un sous ensemble convexe fermé de X, alors*

$$d(x, C) = \sup_{x' \in \overline{\mathbb{B}}_{X'}} [\langle x', x \rangle - \delta^*(x', C)]$$

1.3 Multifonctions

Définition 1.3.1 *1. Soient X et Y deux ensembles non vides*
on dit que F est une multifonction de X dans Y si F est une application de X a valeurs dans $\mathcal{P}(Y)$ et on note $F : X \rightrightarrows Y$.

2. On appelle domaine (effectif) de la multifonction $F : X \rightrightarrows Y$ et on note $domF$ l'ensemble défini par $domF = \{x \in X, F(x) \neq \emptyset\}$.

3. On appelle image de F et on note ImF l'ensemble

$$ImF = \{y \in Y, \exists x \in X, y \in F(x)\}.$$

4. On appelle graphe de F et on note, grF l'ensemble

$$gphF = \{(x, y) \in X \times Y, x \in X, y \in F(x)\}.$$

Définition 1.3.2 *Soit $F : X \rightrightarrows Y$. Alors pour tout $O \subset Y$ nous avons*

$$F^{-1}(O) = \{x \in X, F(x) \cap O \neq \emptyset\}.$$

- *$F^{-1}(O)$ est appelée l'image réciproque large de O par la m.a F .*
- *$F_{+}^{-1}(O)$ est appelée l'image réciproque étroite de O par la m.a F définie par*

$$F^{-1}(O) = \{x \in X, F(x) \subset O\}.$$

1.3.1 Semi continuité des multifonctions

Soit X et Y deux espaces topologiques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction.

Définition 1.3.3 i) *On dit que F est semi-continue supérieurement (s.c.s) en $x \in domF$ si pour tout ouvert Ode Y contenant $F(x)$ il existe un voisinage W de x tel que $F(W) \subset O$, ou bien de façon équivalente, pour tout fermé U de Y, $F^{-1}(U)$ est fermé.*

Proposition 1.3.1 *$F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction à valeurs convexe compacte . Alors F est semi-continue supérieurement si et seulement si la fonction suport $\delta^*(F(.), x')$ est (s.c.s), pour tout $x' \in X^*$.*

Proposition 1.3.2 *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une m.a à valeures compactes, on dit que F est (s.c.s), si pour chaque $x \in X$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que*

$$F(y) \subset F(x) + \mathbb{B}(0, \varepsilon), \forall y \in \mathbb{B}(x, \delta).$$

Théorème 1.8 *[1] Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction à valeurs fermées si F est (s.c.s) alors son graphe est fermé.*

Proposition 1.3.3 *[1] Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction semi continue supérieurement à valeurs compactes, alors pour chaque ensemble compact $K \subset X$, l'image $F(K) = \bigcup_{x \in K} F(x)$ est compacte dans Y.*

Définition 1.3.4 *Soient $(X, d), (Y, d')$ deux espaces métriques $F : X \rightrightarrows Y$ on dit que F est H.s.c.s au point $x_0 \in X$ ssi*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, F(B(x_0, \delta)) \subset V(F(x_0), \varepsilon) = \{y \in Y, d'(y, F(x_0)) \leq \varepsilon\}.$$

On dit que F est H.s.c.s ssi elle est H.s.c.s en tout point $x \in X$.

Corollaire 1.9 *Si $F(x_0)$ est compact alors la H.s.c.s de F au point x_0 est équivalent à la s.c.s au point x_0.*

Définition 1.3.5 i) *On dit que F est semi-continue inférieurement (s.c.i) au point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert O de Y vérifiant $F(x_0) \cap O \neq \emptyset$,il existe un voisinage W de x_0 tel que*

$F(z) \cap O \neq \emptyset, \forall z \in W$

ii) *Si X et Y sont des espaces métriques, alors F est s.c.i, si et seulement si pour tout $y \in Y$,la fonction distance $x \longrightarrow d(y, F(x))$ est s.c.s.*

1.3.2 Quelque résultats de convergence de multifonction

Théorème 1.10 *[1] Soit F une multifonction hemi-continue supérieurement (h.c.s) définie sur un espace de Hausdorff localement convexe X à valeurs fermées convexes dans un espace de Banach Y. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $x_n(.), y_n(.)$ des fonctions mesurables de I dans X et Y respectivement vérifiant*

$$\begin{cases} \text{Pour presque tout } t \in I, \text{ et tout voisinage } W \text{ de } 0 \text{ dans } X \times Y, \\ \text{Il existe } k_0 = k_0(t, W) \ \forall n \geq k_0, (x_n(t), y_n(t)) \in gph(F) + W \end{cases}$$

si

1. *$x_n(.)$ converge p.p vers une fonction $x(.)$*
2. *$y_n(.) \in L^1(I, Y)$ et converge faiblement vers $y(.)$ dans $L^1(I, Y)$*

Alors

$$(x(t), y(t)) \in gph(F), \text{ i.e. } y(t) \in F(x(t)) \text{ pour presque tout } t \in I.$$

1.4 Notions de sous différentiabilité

Définition 1.4.1 ***(Dérivée directionnelle)*** *Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne sur X, la dérivée directionnelle généralisée de f en x dans la direction v, est définie par*

$$f^0(x, v) = \limsup_{\substack{y \longrightarrow x \\ \xi \downarrow 0}} \frac{f(y + \xi v) - f(y)}{\xi}$$

Proposition 1.4.1 *[15] Soit f une fonction $M-$Lipschitzienne au point $x \in X$. Alors*

1. *La fonction* $v \longmapsto f^0(x,v)$ *est finie, positivement homogène, et sous additive et satisfait*

$$|f^0(x,v)| \leq M\|v\|$$

2. $v \longmapsto f^0(x,v)$ *est semi-continue supérieurement.*

3. $f^0(x,-v) = (-f)^0(x,v)$.

Définition 1.4.2 ***Sous différentiel (Gradient Généralisé)*** *Le sous différentiel (gradient généralisé) au sens de Clarke de* f *en* $x \in X$, *est défini par*

$$\partial f(x) = \{\zeta \in X^*, \langle \zeta, v\rangle \leq f^0(x,v), \forall v \in X\}$$

on note par $\|\zeta\|_*$ *la norme dans* X^*

$$\|\zeta\|_* = \sup\{\langle \zeta, v\rangle, v \in X, \|v\| \leq 1\}$$

Proposition 1.4.2 *[15] Soit* f M*−Lipschitzienne au point* $x \in X$. *Alors*

1. $\partial f(x)$ *est un sous ensemble non vide convexe faiblement compact dans* X^* *et* $\|\zeta\|_* \leq M$ *pour tout* $\zeta \in \partial f(x)$

2. *Pour tout* $v \in X$, *on a*

$$f^0(x,v) = max\{\langle \zeta, v\rangle, \zeta \in \partial f(x)\}.$$

Définition 1.4.3 *Soit* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}\bigcup\{\infty\}$ *une fonction convexe s.c.i, le sous différentiel de cette fonction est l'ensemble suivant*

$$\partial f(x) = \{\zeta \in X^*, f(y) - f(x) \geq \langle y - x, \zeta\rangle, pour\ tout \quad y \in X\}.$$

Proposition 1.4.3 *Soit* f *une fonction localement Lipschitzienne convexe, alors la définition du sous différentiel* $\partial f(x)$ *coïncide avec celle au sens de l'analyse convexe.*

Définition 1.4.4 *[16] Le sous différentiel proximal de la fonction* f *au point* x, *noté* $\partial f^p(x)$, *est l'ensemble de tous les vecteurs* $\zeta \in X^*$, *pour lesquels il existe* $\rho, \beta > 0$ *tels que*

$$f(y) - f(x) > \langle y - x, \zeta\rangle - \beta\|x - y\|, \forall y \in \mathbb{B}(x,\rho).$$

Définition 1.4.5 *Un opérateur de* $H : X \rightrightarrows X$ *est dit monotone si* $x_1, x_2 \in domF, \langle F(x_1) - F(x_2), x_1 - x_2\rangle \geq 0$, *ou plus précisément*

$$\forall y_1 \in F(x_1), y_2 \in F(x_2), \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0$$

Définition 1.4.6 *[12] On dit qui un opérateur F de X est cycliquememt monotone si pour toute suite cyclique $x_0, x_1, ..., x_n = x_0$ de $dom(F)$ et toute suite $y_i \in F(x_i), i = 1, ..., n$ on a*

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}, y_i) \geq 0.$$

Proposition 1.4.4 *[12] Soit F un opérateur monotone. Alors F est cycliquement monotone si et seulement si il existe une fonction convexe propre s.c.i f de X dans $]-\infty, \infty]$ telle que $F(x) \subset \partial f(x)$.*

1.4.1 Quelques notions de régularité de fonctions

Récemment, plusieurs notions de régularité, ont été introduite pour remplacer la convexité des valeurs des multifonctions, ces notions s'avèrent équivalentes dans le cas localement Lipschitz (les définitions coïncident).

Définition 1.4.7 *[6] Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, on dit que f est Prox-régulière au point $\overline{x}$ pour $\overline{h} \in \partial f(x)$, s'il existe $r > 0$ et $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $(x, h) \in gph(\partial f)$ vérifiant $\|x - \overline{x}\| < \varepsilon, \|f(x) - f(\overline{x})\| < \varepsilon$, et $\|h - \overline{h}\| < \varepsilon$, on a*

$$f(y) \geq f(x) + \langle h, y - x\rangle - \frac{r}{2}\|y - x\|^2, \text{pour tout } y \in \mathbb{B}(\overline{x}, \varepsilon)$$

Si cette propriété est vérifié pour tout $\overline{h} \in \partial f(\overline{x})$,la fonction f est dit Prox-régulière au point $\overline{x}$. Si f est Prox-régulière pour tout point de $E \cap dom\partial f$, on dit que f est Prox-régulière sur l'ensemble E.

Définition 1.4.8 *[6] Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, On dit que la fonction f est uniformément prox-régulière sur l'ensemble $E \subset X$, s'il existe $r > 0$ et $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\overline{x} \in E$ et tout $\overline{h} \in \partial f(\overline{x})$, pour tout $(x, h) \in gph(\partial f)$ vérifiant , $\|x - \overline{x}\| < \varepsilon, |f(x) - f(\overline{x})| < \varepsilon$, et $\|h - \overline{h}\| < \varepsilon$, on a*

$$f(y) \geq f(x) + \langle h, y - x\rangle - \frac{r}{2}\|x - y\|^2, \text{pour tout } y \in \mathbb{B}(\overline{x}, \varepsilon)$$

Quand $E = \{x_0\}$, on dit que f est Prox-régulière au point x_0 avec un paramétré uniforme.

Proposition 1.4.5 *[6] On dit que la fonction f est uniformément Prox-régulière au voisinage de $x_0 \in X$ si et seulement s'il existe $r > 0$ et $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $(x, h) \in gph(\partial f)$ vérifiant $\|x - x_0\| < \varepsilon$, On a*

$$f(y) \geq f(x) + \langle h, x - y\rangle - \frac{r}{2}\|x - y\|^2 \text{ pour tout } y \in \mathbb{B}(x_0; \varepsilon).$$

Définition 1.4.9 *[6] Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction propre s.c.i et O ouvert de X, alors f est dite C^2-inférieurement sur O si et seulement si $O \subset dom\partial f$ et pour chaque $x_0 \in O$, f est uniformément prox-régulière sur un voisinage de x_0.*

Définition 1.4.10 *[6] Soit $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, On dit que f est primal lower nice (p.l.n) en $x_0 \in domf$ s'il existe $\varepsilon > 0$, $c > 0$, et $T > 0$ tel que :*

$$f(y) \geq f(x) + \langle h, y - x \rangle - \frac{t}{2}\|y - x\|^2 \quad \forall t \geq T.x, y \in \mathbb{B}(x_0; \varepsilon), h \in \partial f(x) \text{ avec } \|h\| \leq c.$$

Proposition 1.4.6 *[6] Supposons que f est uniformément Prox-régulière en x_0. Alors f est p.l.n en x_0. La réciproque est vraie, si f est localement Lipschitzienne en x_0.*

Proposition 1.4.7 *[6] Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne, alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

a) *f est uniformément prox-régulière sur un voisinage de x_0.*

b) *epi(f) est prox-régulière en $(x_0, f(x_0))$.*

c) *Il existe $\alpha > 0$ tel que epif $\cap(\mathbb{B}[x_0; \alpha] \times \mathbb{R})$ est uniformément Prox-réguliére.*

d) *f est C^2-inférieurement en x_0.*

e) *f est primal-lower-nice p.l.n en x_0.*

Définition 1.4.11 *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction semi-continue inférieurement et soit $\Omega \subset dom\ f$ un ouvert non vide. On dit que f est uniformément régulière sur Ω s'il existe un nombre positive $\beta > 0$ tel que pour tout $x \in \Omega$ et $\varepsilon \in \partial^P f(x)$ On a*

$$\langle \varepsilon, y - x \rangle \leq f(y) + f(x) + \beta\|y - x\|^2 \quad \forall y \in \Omega$$

$\partial^P f(x)$ désigne le sous différentiel de f au point x. On dit que f est uniformément régulière sur un ensemble fermé S s'il existe un ouvert O contenant S tel que f est uniformément régulière sur O. La classe de fonction uniformément régulière est assez large Citons à titre d'exemple.

Exemple 1.4.1 *Toute fonction convexe propre s.c.i est uniformément régulière sur chaque sous ensemble non vide de son domaine avec $\beta = 0$.*

Exemple 1.4.2 *Chaque fonction C^2-inférieurement est uniformément régulière sur tout convexe compact de son domaine.*

En effet, *soit f une fonction C^2-inférieurement sur un convexe compact $S \subset domf$ d'aprés le résultat de Rockafellar, il existe β réel positive tel que $W := V+\frac{\beta}{2}\|.\|^2$ une fonction convexe sur S. En utilisant la définition du sous différentiel d'une fonction convexe et le fait que le sous différentiel de Clarke de f est donné par $\partial^C f(x) = \partial f(x) - \beta x, \forall, x \in S$, On obtient l'inégalité dans la définition et par suite f est uniformément régulière.*

1.4.2 Régularité au sens de Clarke

Définition 1.4.12 *[15] f est dite réguliére en $x \in X$ si*

i) *Pour tout $v \in X$, la dérivée directionnelle usuelle $f'(x,v)$ existe.*

ii) *Pour tout $v \in X, f^0(x,v) = f'(x,v)$.*

Proposition 1.4.8 *[15] Si $f_i, (i = 1, ..., n)$ est une famille de fonctions régulières en un point $x \in X$, Alors*

$$\partial(\sum_{i=0}^{n} f_i) = \sum_{i=0}^{n} \partial f_i$$

Proposition 1.4.9 *[15] Soit f Lipschitzienne au voisinage d'un point x, alors*

1 *Si f est strictement différentiable au point x, alors f est régulière.*

2 *Si f est convexe, alors f est régulière au point x.*

3 *toute combinaison linéaire finie de fonctions régulières est régulière*

4 *Si f admet une Gâteaux différentielle $Df(x)$ et est régulière en x, Alors*

$$\partial f(x) = \{Df(x)\}$$

Proposition 1.4.10 *Soit f une fonction régulière en un point $x \in X$, alors $\partial^C f(x)$ coïncide avec le sous différentielle au sensé de l'analyse convexe,*

$$\forall \zeta \in \partial^C f(x) \iff f(y) - f(x) \geq \langle \zeta, y - x \rangle, \;\; \forall y \in \mathbb{R}^n$$

preuve. $\forall \xi \in \partial f(x) \Leftrightarrow \langle \xi, v\rangle \leq f^0(x,v)$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$

Comme f est une fonction régulière, on a $f^0(x,v) = f'(x,v)$.i.e

$$\begin{aligned}
\langle \xi, v\rangle &\leq f'(x,v)\\
&\leq \inf_{\xi>0}\frac{f(x+\xi v)-f(x)}{\xi}\\
\text{on pose } y &= x+\xi v\\
y-x &= \xi v\\
\langle \xi, \xi v\rangle &\leq f(y)-f(x)\\
\langle \xi, y-x\rangle &\leq f(y)-f(x)
\end{aligned}$$

■

Énonçons maintenant une caractérisation importante de cette classe de fonction qui nous sera utile dans la suite.

Proposition 1.4.11 *[9] Soient Ω un ouvert convexe de X, f une fonction réelle définie sur Ω lipschitzienne sur tout borné de Ω et régulière, et $x : I \longrightarrow \Omega$ une fonction à variation bornée sur I, telle que Dx admet une densité $\frac{Dx}{d\mu}$ appartenant à $\mathrm{L}^1_X(I,\mu)$*

Alors la fonction fox est à variation bornée sur I, $D(fox)$ est absolument continue par rapport à μ et $\mu-$ presque partout

$$\begin{aligned}
\langle \partial f(x(t)), \frac{Dx}{d\mu}\rangle &= \{\langle \zeta, \frac{Dx}{d\mu}\rangle, \zeta \in \partial f(x(t))\\
&= \{\frac{D(fox)}{d\mu}(t)\}\\
&= \{f'(x(t), \frac{Dx}{d\mu}(t))\}\\
&= \{-f'(x(t), -\frac{Dx}{d\mu}(t))\}.
\end{aligned}$$

preuve. Remarquons tout d'abord que la fonction x est continue sur I puisque μ vérifie $\mu(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

En vertu des théorémes (1.1) et [4.8] de Moreau-Valadier ($MV2$), la fonction $(f \circ x)$ est à variation bornée sur I, $D(f \circ x)$ est absolument continue par rapport à μ et μ -presque partout

$$\frac{D(f\circ x)}{d\mu}(t) \in \langle \partial f(x(t)), \frac{Dx}{d\mu}(t)\rangle \tag{1.1}$$

$$\frac{D(f\circ x)}{d\mu}(t) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{f(x(t+\varepsilon)) - f(x(t))}{\mu([t,t+\varepsilon])} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{f(x(t)) - f(x(t-\varepsilon))}{\mu([t-\varepsilon,t])} \tag{1.2}$$

$$\frac{Dx}{d\mu}(t) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\mu([t,t+\varepsilon])} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{x(t) - x(t-\varepsilon)}{\mu([t-\varepsilon,t])} \tag{1.3}$$

D'autre part on a $\mu-$ presque partout

$$(f^{'}(x(t)); \frac{Dx}{d\mu}(t)) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{f[x(t) + \mu([t,t+\varepsilon])\frac{Dx}{d\mu}(t)] - f(x(t))}{\mu([t,t+\varepsilon])} \tag{1.4}$$

(avec les conventions $\mu([t,t+\varepsilon]) = \mu(I\cap[t,t+\varepsilon]$,etc...)

Soit $t\in]0,T[$ tel que (1.2), (1.3) et (1.4) soient vérifiées. Soient $M>0$ et $W_{x(t)}$ un voisinage de $x(t)$ dans Ω tels que f soit M-Lipschitzienne sur $W_{x(t)}$. Soit $\delta>0$ tel que $[t-\delta,t+\delta]\subset I$, $x(t+\varepsilon)\in W_{x(t)}$ et $x(t)+\mu([t,t+\varepsilon])\frac{Dx}{d\mu}(t)\in W_{x(t)}$ pour tout $\varepsilon\in]0,\delta]$ Alors pour $\varepsilon\in]0,\delta]$, on a les majorations suivantes

$$\begin{aligned}
&|\frac{f(x(t+\varepsilon)) - f(x(t))}{\mu([t,t+\varepsilon])} - \frac{f[x(t) + \mu([t,t+\varepsilon])\frac{Dx}{d\mu}(t)] - f(x(t))}{\mu([t,t+\varepsilon])}| = \\
&= |\frac{f(x(t+\varepsilon)) - f[x(t) + \mu([t,t+\varepsilon])\frac{Dx}{d\mu}(t)]}{\mu([t,t+\varepsilon])}| \\
&\leq M\frac{\|x(t+\varepsilon) - x(t) - \mu([t,t+\varepsilon])\frac{Dx}{d\mu}(t)\|}{\mu([t,t+\varepsilon])} \\
&= M\|\frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\mu([t,t+\varepsilon])} - \frac{D_x}{d\mu}(t)\|
\end{aligned} \tag{1.5}$$

En passant à la limite quand $\varepsilon\to 0^+$ dans les deux membres de l'inégalité (1.5) et en utilisant (1.2),(1.3), et (1.4), on obtient

$$\frac{D(f\circ x)}{d\mu}(t) = f^{'}(x(t); \frac{Dx}{d\mu}(t)) \tag{1.6}$$

En refaisant un raisonnement analogue à ci-dessus avec des inégalités portant $x(t-\varepsilon)$ et $\mu([t-\varepsilon,t])$à la place de $x(t+\varepsilon)$ et $\mu([t,t+\varepsilon])$, on peut aussi montrer que

$$\frac{D(f\circ x)}{d\mu}(t) = -f^{'}(x(t); -\frac{Dx}{d\mu}(t)\ ) \tag{1.7}$$

De (1.6),(1.7), il résulte maintenant que $\langle \partial f(x(t)), \frac{Dx}{d\mu}(t)\rangle$ est réduit à un singleton. En effet pour $x' \in \partial f(x(t))$ par définition du gradient,on a successivement

$$\langle x', \frac{Dx}{d\mu}(t)\rangle \leq -f'((x(t)); \frac{Dx}{d\mu}(t)) \leq -\langle x', -\frac{Dx}{d\mu}(t)\rangle$$

D'où le résultat. ■

Maintenant, nous allons montrer que la classe la plus large, pour les fonctions localement Lipschitziennes, est celle des fonctions régulières.

Proposition 1.4.12 *[27] Si f est localement Lipschitzienne et uniformément régulière. Alors f est régulière.*

preuve. Supposons que f est uniformément régulière, immédiatement on a $f^0(x,v) \geq f'(x,v)$. pour montrer que f est régulière , il suffit de que $f^0(x,v) \leq f'(x,v)$. En effet de la définition d'un fonction uniformément régulière, pour tout sous ensemble non vide S de X, il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $x \in S$, et pour tout $\xi \in \partial^p f(x)$ on nous

$$\langle \xi, x' - x\rangle \leq f(x') - f(x) + \beta\|x' - x\|^2 \quad \textit{pour tout} \quad x' \in S$$

Choisissons h suffisamment petit tel que $x' = x + hv \in S$, alors

$$\langle \xi, hv\rangle \leq f(x+hv) - f(x) + \beta v^2\|v\|^2$$

De la proposition[1.4.2.(2)] il existe $\xi_v \in \partial^c f(x)$ tel que $f^0(x,v) = \langle \xi_v, v\rangle$. comme $\partial^p f(x) = \partial^C f(x)$ et $\xi_v \in \partial^p f(x)$ on a

$$\langle \xi_v, hv\rangle \leq f(x+hv) - f(x) + \beta v^2\|v\|^2$$

$$\langle \xi_v, v\rangle \leq \frac{1}{h}[f(x+hv) - f(x)] + \beta h\|v\|^2$$

$$\begin{aligned} f^0(x,v) &\leq \lim_{h\downarrow 0}\{\frac{1}{h}[f(x+hv) - f(x)]\} + \beta h\|v\|^2 \\ &\leq f'(x,v) \end{aligned}$$

Alors f est régulière. ■

Chapitre 2

Résultat d'existence pour un opérateur cycliquement monotone avec des fonctions régulières

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'établir un résultat d'existence de solution pour des inclusions différentielles du premier ordre dans le cas non convexe avec perturbation univoque de Carathéodory. Ce problème se présente sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)) + g(t, x(t))\text{p.p } [0, T] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

où $F : X \rightrightarrows X$ est un multifonction semi continue supérieurement à valeurs compactes contenues dans le sous différentielle d'une fonction régulière. Ce problème a été étudié par Benabdellah[9] et Yarou [27]. les résultats de ce chapitre généralisent les résultats obtenus dans [27], au cas où g satisfait une condition de croissance linéaire On établit le résultat d'abord dans le cas d'un espace de dimensions fini, puis dans un espace de Hilbert. Notons que la démonstration des deux résultats repose sur trois étapes essentielles. La première étape consiste a construire des solutions approximantes par la méthode de discrétisation, l'étape2 a étudier la convergence des solutions en utilisant des théorèmes de convergence, dans la dernière étape on montre l'existence de solution du problème.

Énonçons maintenant, le résultat d'existence de solution pour le problème (2.1) dans un espace de dimension finie.

2.2 Cas d'un espace de dimension finie

Théorème 2.1 *Supposons que g et F satisfont les conditions suivantes :*

[C_1] $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *est une multifonction semi-continue supérieurement à valeurs non vides compactes*

[C_2] *Il existe une fonction régulière* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *tel que*

$$F(x) \subset \partial f(x) \ \ \textit{pour tout} \ \ x \in \mathbb{R}^n$$

[C_3] $g : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une fonction de Carathéodory et, il existe* $m \in \mathrm{L}^1(I, \mathbb{R}_+)$ *tel que*

$$\|g(t,x)\| \leq (1 + \|x\|)m(t), \forall (t,x) \in I \times \mathbb{R}^n$$

Alors pour chaque $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *il existe* T *et une fonction* $x(.) : [T_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *absolument continue solution du problème (2.1)*

preuve Puisque f est localement Lipschitz, il existe $r > 0$ et $M > 0$ tels que sur la boule $\mathbb{B}(x_0, r)$, $F(x) \subset \partial f(x) \subset M\mathbb{B}[0.1]$

$$\sup\{\|y\|, y \in F(x), x \in \mathbb{B}[x_0, r]\} \leq M \tag{2.2}$$

Choisissons $T' > 0$ tel que

$$\|x_0\| + \frac{\|x_0\| + \int_{T_0}^{T'} (M + m(s))ds}{(1 - \int_{T_0}^{T'} m(s)ds)} \leq r$$

I- Supposons d'abord que

$$\int_{T_0}^{T''} m(s)ds < 1 \tag{2.3}$$

Choisissions T tel que $0 < T < \min\{T', T''\}$

Étape 1 :**Construction des solutions approximantes**

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, considérons la partition suivante de $[T_0, T]$

$$T_0 = t_0^n < t_1^n < t_2^n < t ... < t_n^n = T, \;\; t_i^n = T_0 + i\frac{T - T_0}{n}, \;\; i = 0, 1, ..., n.$$

Pour chaque $i = 0, ..., n-1$ définissons les fonctions suivantes

- Pour $t \in [T_0, t_1^n]$

$$\begin{cases} x_n^0(T_0) = x_0 \\ y_n^0 \in F(x_n^0(T_0)), \\ x_n^0(t) = x_0 + (t - T_0)y_n^0 + \displaystyle\int_{T_0}^t g(s, x_0)ds \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \dot{x}_n^0(t) = y_n^0 + g(t, x_0) \;\; \text{p.p} \;\;]T_0, t_1^n[\\ x_n^0(T_0) = x_0 \end{cases}$$

- Pour $t \in [t_1^n, t_2^n]$

$$\begin{cases} x_n^1(t_1^n) = x_n^0(t_1^n) \\ y_n^1 \in F(x_n^1(t_1^n)), \\ x_n^1(t) = x_n^0(t_1^n) + (t - t_1^n)y_n^1 + \displaystyle\int_{t_1^n}^t g(s, x_n^1(t_1^n))ds \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \dot{x}_n^1(t) = y_n^1 + g(t, x_n^0(t_1^n)) \;\; \text{p.p} \;\;]t_1^n, t_2^n[\\ x_n^1(t_1^n) = x_n^0(t_1^n) \end{cases}$$

- Pour $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$

$$\begin{cases} x_n^i(t_i^n) = x_n^{i-1}(t_i^n) \\ y_n^i \in F(x_n^i(t_i^n)), \\ x_n^i(t) = x_n^{i-1}(t_i^n) + (t - t_i^n)y_n^i + \displaystyle\int_{t_i^n}^t g(s, x_n^i(t_i^n))ds \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \dot{x}_n^i(t) = y_n^i + g(t, x_n^i(t_i^n)) \;\; \text{p.p} \;\;]t_i^n, t_{i+1}^n[\\ x_n^i(t_i^n) = x_n^{i-1}(t_i^n) \end{cases}$$

On définit

$$\begin{cases} x_n(.) : [T_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x_n(t) = x_n^i(t) \text{ si } t \in [t_i^n, t_{i+1}^n] \end{cases}$$

et $y_n(t) = y_n^i, t \in [t_n^i, t_n^{i+1}[, i = 0, ..., n-1$

Pour chaque $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$ et $i = 0, ..., n-1$ on obtient que

$$\begin{cases} x_n(t) = x_n(t_i^n) + (t - t_i^n) y_n(t_i^n) + \int_{t_i^n}^{t} g(s, x_n(t_i^n)) ds \\ y_n(t_i^n) \in F(x_n(t_i^n)) \end{cases}$$

Par construction, pour tout $i = 0, ..., n-1$ nous avons que

$$x_n(t_{i+1}^n) = x_0 + \frac{T - T_0}{n}[y_n(0) + ... + y_n(t_i^n)] + \int_{T_0}^{t_1^n} g(s, x_0) ds + ... + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s, x_n(t_i^n)) ds \quad (2.4)$$

Par (2.4) et (2.2), on obtient

$$\begin{aligned} \|x_n(t_{i+1}^n)\| &= \|x_0 + \frac{T - T_0}{n}[y_n(t_0^n) + y_n(t_1^n) + ... + y_n(t_i^n)] \\ &+ \int_{T_0}^{t_1^n} g(s, x_n(t_0^n)) ds + ... + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s, x_n(t_i^n)) ds\| \\ &\leq \|x_0\| + \frac{T - T_0}{n}(\|y_n(t_0^n)\| + \|y_n(t_1^n)\| + ... + \|y_n(t_i^n)\|) \\ &+ \int_{T_0}^{t_1^n} \|g(s, x_n(t_0^n))\| ds + ... + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|g(s, x_n(t_i^n))\| ds \\ &\leq \|x_0\| + (i+1)\frac{T - T_0}{n} M + (1 + \|x_n(t_0^n)\|) \int_{T_0}^{t_1^n} m(s) ds \\ &+ ... + (1 + \|x_n(t_i^n)\|) \int_{t_i}^{t_{i+1}^n} m(s) ds \\ &\leq \|x_0\| + \int_{T_0}^{T} M ds + (1 + \max_{0 \leq k \leq n} \|x_n(t_k^n)\|) \int_{T_0}^{T} m(s) ds \\ \max_{0 \leq k \leq n} \|x_n(t_k^n)\| &\leq \|x_0\| + \int_{T_0}^{T} M ds + (1 + \max_{0 \leq k \leq n} \|x_n(t_k^n)\|) \int_{T_0}^{T} m(s) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1-\int_{T_0}^{T} m(s)ds)\max_{0\le k\le n}\|x_n(t_k^n)\| &\le \|x_0\| + \int_{T_0}^{T}(M+m(s))ds \\
\max_{0\le k\le n}\|x_n(t_k^n)\| &\le \frac{\|x_0\| + \int_{T_0}^{T}(M+m(s))ds}{(1-\int_{T_0}^{T} m(s)ds)} \\
\|x_n(t_{i+1}^n) - x_0\| &\le \|x_n(t_{i+1}^n)\| + \|x_0\| \\
&\le \|x_0\| + \frac{\|x_0\| + \int_{T_0}^{T}(M+m(s))ds}{(1-\int_{T_0}^{T} m(s)ds)} \le r \\
\text{Donc } x_n(t_{i+1}^n) &\in \mathbb{B}[x_0, r]
\end{aligned}$$

Maintenant, soit θ_n une fonction étagée définie de I vers I par

$$\begin{cases} \theta_n(T_0) = T_0 \\ \theta_n(t) = t_i^n, \forall\ t \in]t_i^n, t_{i+1}^n], \quad 0 \le i \le n-1 \end{cases}$$

Alors pour tout $t \in [T_0, T]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ nous avons les propriétés suivantes

$$0 \le t - \theta_n(t) \le \frac{T - T_0}{n}$$

$$x_n(t) = x_n(\theta_n(t)) + (t - \theta_n(t))y_n(\theta_n(t)) + \int_{\theta_n(t)}^{t} g(s, x_n(\theta_n(t)))ds \tag{2.5}$$

$$y_n(\theta_n(t)) \in F(x_n(\theta_n(t))) \tag{2.6}$$

$$\dot{x}_n(t) = y_n(\theta_n(t)) + g(t, x_n(\theta_n(t))) \text{ p.p }]T_0, T[\tag{2.7}$$

Étape 2 :**Convergence des solutions approximantes**

$$\begin{aligned}
\|\dot{x}_n(t)\| &= \|y_n(\theta_n(t)) + g(t, x_n(\theta_n(t))\| \\
&\le \|y_n(\theta_n(t))\| + \|g(t, x_n(\theta_n(t))\| \\
&\le M + (1 + \|x_n(\theta_n(t))\|)m(t) \\
&\le M + (1+r)m(t) \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

$$\|x_n(t) - x_0\| \leq \|x_0\| + r$$

$$x_n(t) \in \mathbb{B}[x_0, \|x_0\| + r] \tag{2.9}$$

Alors par (2.8) $(\dot{x}_n)_n$ est bornée dans $\mathrm{L}^1([T_0.T], \mathbb{R}^n)$ et par (2.9) l'ensemble $\{x_n(t))_n, n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans $\mathbb{R}^n$, il en résulte du corollaire (1.3) , il existe une sous suite $(x_n(.))$ et une fonction $x(.) : [T_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue telles que

i) $x_n(.)$ converges uniformément vers $x(.)$.

ii) $\dot{x}_n(.)$ converges faiblement vers $\dot{x}(.)$ dans $\mathrm{L}^1([T_0.T], \mathbb{R}^n)$.

Aussi, comme $|\theta_n(t) - t| \leq \frac{T - T_0}{n}$ pour tout $t \in [T_0, T]$, alors $\theta_n(t) \longrightarrow t$ uniformément sur $[T_0, T]$ de plus par (i) et θ_n, on obtient $x_n(\theta_n(t)) \longrightarrow x(t)$ uniformément sur $[T_0, T]$. Comme la suite $(g(., x_n(.)))_n \longrightarrow g(., x(.))$ dans $\mathrm{L}^1([T_0.T], \mathbb{R}^n)$ et par (2.6),(2.7)

$$\begin{aligned}
\lim_{n \longrightarrow \infty} d((x_n(t), \dot{x}_n(t) - g(t, x_n(\theta_n(t)), gphF)) &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \inf_{(y,z) \in gphF} \|(x_n(t), \dot{x}_n(t) - g(t, x_n(\theta_n(t))) - (y, z)\| \\
(x_n(\theta_n(t)), \dot{x}_n(t) - g(t, x_n(\theta_n(t))) &\in gphF \\
\lim_{n \longrightarrow \infty} d((x_n(t), \dot{x}_n(t) - g(t, x_n(\theta_n(t)), gphF)) &\leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \|x_n(t) - x_n(\theta_n(t))\| \\
&= 0 \\
\dot{x}_n(t) - g(t, x_n(\theta_n(t))) &\in F(x_n(t)) \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Puisque ∂f est une multiapplication (s.c.s) à valeurs convexes compactes de $\mathbb{R}^n$,d'aprés le théoreme (1.10),on obtient

$$\dot{x}(t) - g(t, x(t)) \in \partial f(x(t)), \text{ p.p } \forall t \in [T_0, T] \tag{2.11}$$

Étape 3 :**Existence de solutions**

Comme la fonction $t \longmapsto f(x(t))$ est à variation bornée sur I, d'après la proposition (

1.4.11) et la relation (2.11) nous avons que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}f(x(t)) &= \langle \dot{x}(t), \dot{x}(t) - g(t, x(t))\rangle \;\; a.e \;\; on \;\; [T_0.T] \\
f(x(T)) - f(x(T_0)) &= \int_{T_0}^{T} \frac{d}{dt} f(x(s))ds \\
&= \int_{T_0}^{T} \langle \dot{x}(s), \dot{x}(s) - g(s, x(s))\rangle ds \\
&= \int_{T_0}^{T} \langle \dot{x}(s), \dot{x}(s)\rangle ds - \int_{T_0}^{T} \langle \dot{x}(s), g(s, x(s))\rangle ds \\
&= \int_{T_0}^{T} \|\dot{x}(s)\|^2 ds - \int_{T_0}^{T} \langle \dot{x}(s), g(s, x(s))\rangle ds \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

D'autre part par la construction, on obtient

$$\dot{x}_n(t) - g(t, x_n(t_i^n)) \in \partial f(x_n(t_i^n)), \;\; \text{p.p} \;\; t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[, i = 0, ..., n-1$$

De plus par la proposition(1.4.10) implique que pour chaque $\zeta \in \partial f(x_n(t_i^n))$

$$f(x_n(t_{i+1}^n)) - f(x_n(t_i^n)) \;\; \geq \;\; \langle x_n(t_{i+1}^n) - x_n(t_i^n), \zeta\rangle \qquad (2.13)$$

En particulier pour

$$\zeta = \dot{x}_n(t) - g(t, x_n(t_i^n))$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
f(x_n(t_{i+1}^n)) - f(x_n(t_i^n)) &\geq \langle x_n(t_{i+1}^n)) - x_n(t_i^n)), \dot{x}_n(t) - g(t, x_n(t_i^n))\rangle \\
&= \langle \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \dot{x}_n(s)ds, \dot{x}_n(t)\rangle - \langle \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \dot{x}_n(s)ds, g(t, x_n(t_i^n))\rangle \\
&\geq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \langle \dot{x}_n(s), \dot{x}_n(s)\rangle ds - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \langle \dot{x}_n(s), g(s, x_n(t_i^n))\rangle ds \\
&\geq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|\dot{x}_n(s)\|^2 ds - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \langle \dot{x}_n(s), g(s, x_n(t_i^n))\rangle ds
\end{aligned}$$

Par additions des n inégalités, on obtient

$$f(x_n(T)) - f(x(T_0)) \;\; \geq \;\; \int_{T_0}^{T} \|x_n(s)\|^2 ds - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \langle \dot{x}_n(s), g(s, x_n(t_i^n))\rangle ds \quad (2.14)$$

Montrons que

$$(\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\langle \dot{x}_n(s), g(s, x_n(t_i^n))\rangle ds)_n \quad \text{converges vers} \quad \int_{T_0}^{T}\langle \dot{x}(s), g(s, x(s))\rangle ds$$

$$\begin{aligned}
&\|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\langle \dot{x}_n(s), g(s, x_n(t_i^n))\rangle ds - \int_{T_0}^{T}\langle \dot{x}(s), g(s, x(s))\rangle ds\| \\
&= \|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}(\langle \dot{x}_n(s), g(s, x_n(t_i^n))\rangle - \langle \dot{x}(s), g(s, x(s))\rangle) ds\| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\| \langle \dot{x}_n(s), g(s, x_n(t_i^n))\rangle - \langle \dot{x}(s), g(s, x(s))\rangle\| ds \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\| \langle \dot{x}_n(s), g(s, x_n(t_i^n))\rangle - \langle \dot{x}_n(s), g(s, x_n(s))\rangle\| ds \\
&+ \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\| \langle \dot{x}_n(s), g(s, x_n(s))\rangle - \langle \dot{x}_n(s), g(s, x(s))\rangle\| ds \\
&+ \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\| \langle \dot{x}_n(s), g(s, x(s))\rangle - \langle \dot{x}(s), g(s, x(s))\rangle\| ds \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\| \langle \dot{x}_n(s), g(s, x_n(t_i^n))\rangle - \langle \dot{x}_n(s), g(s, x_n(s))\rangle\| ds \\
&+ \int_{T_0}^{T}\| \langle \dot{x}_n(s), g(s, x_n(s))\rangle - \langle \dot{x}_n(s), g(s, x(s))\rangle\| ds \\
&+ \int_{T_0}^{T}\| \langle \dot{x}_n(s), g(s, x(s))\rangle - \langle \dot{x}(s), g(s, x(s))\rangle\| ds
\end{aligned}$$

Comme g est une fonction de Carathéodory, et $i), ii)$ alors

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\langle \dot{x}_n(s), g(s, x_n(t_i^n))\rangle ds = \int_{T_0}^{T}\langle \dot{x}(s), g(s, x(s))\rangle ds$$

Par passage à la limite pour $n \longrightarrow \infty$ une (2.14) et f fonction continue, on obtient que

$$f(x(T)) - f(x(T_0)) \geq \lim_{n\longrightarrow\infty}\sup \int_{T_0}^{T}\|\dot{x}_n(s)\|^2 ds - \int_{T_0}^{T}\langle \dot{x}(s), g(s, x(s))\rangle ds$$

De plus, par l'inégalité (2.12)

$$\|\dot{x}\|^2_{\mathbb{L}^2(I,\mathbb{R}^n)} \geq \lim_{n\longrightarrow\infty}\sup \|\dot{x}_n\|^2_{\mathbb{L}^2(I,\mathbb{R}^n)}$$

On définit une fonction φ par

$$
\begin{aligned}
\varphi : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longrightarrow \varphi(x) = \sqrt{x} \quad \text{croissante}
\end{aligned}
$$

$$\varphi(\|\dot{x}\|^2_{L^2(I,\mathbb{R}^n)}) \geq \varphi(\lim_{n\longrightarrow\infty} \sup \|\dot{x}_n\|^2_{L^2(I,\mathbb{R}^n)})$$

D'après la proposition (1.2.1), on obtient que

$$
\begin{aligned}
\|\dot{x}\|_{L^2(I,\mathbb{R}^n)} &\geq \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup \varphi(\|\dot{x}_n\|^2_{L^2(I,\mathbb{R}^n)}) \\
&\geq \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup \|\dot{x}_n\|_{L^2(I,\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
$$

D'après le théorème (1.2.2)la suite $(\dot{x}_n)_n$ converge fortement dans $L^2([T_0,T],\mathbb{R}^n)$ vers $\dot{x}$. Donc, il existe une sous suite de $\dot{x}_n(.)$ notée encore $\dot{x}_n(.)$ qui converge ponctuellement vers $\dot{x}(.)$. Comme F est s.c.s à valeur fermé le graphe de F est ferme d'après le théorème (1.8) et par (2.10), nous avons

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)) + g(t, x(t)) \;\; \text{p.p sur } [T_0, T]$$

Alors $x(.) : [T_0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un solution du problème (2.1).

II- Maintenant si

$$\int_{T_0}^{T''} m(s)ds \geq 1,$$

Considérons la partition de I définie par

$$T_0 < T_1 < ... < T_n = T$$

tel que, pour chaque $i = 0, ..., n-1$

$$\int_{T_i}^{T_i+1} m(s)ds < 1$$

alors par (I) il existe une fonction $x_1(.) : [T_0, T_1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue Telle que

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) \in F(x_1(t)) + g(t, x_1(t)), & \text{p.p sur } [T_0, T_1] \\ x_1(T_0) = x_0, \end{cases}$$

Donc supposons que, pour chaque $i = 0, ..., n-1$ il existe une fonction $x_i(.) : [T_i, T_{i+1}] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue sur $[T_i, T_{i+1}]$ définie par

$$x_i(t) = \begin{cases} x_i(t), & t \in [T_i, T_{i+1}] \\ x_{i-1}(T_i) = x_i(T_i), \end{cases}$$

tel que (on pose $x_{-1}(T_0) = x_0$)),

$$\dot{x}_i(t) \in F(x_i(t)) + g(t, x_i(t)), \quad \text{p.p sur } [T_i, T_{i+1}]$$

En répétant le processus nous obtenons une solution sur tout l'intervalle $[T_0, T]$. ∎

Énonçons maintenant un résultat d'existence pour le mémé problème, mais dans un espace de Hilbert de dimension infinie.

2.3 Cas d'un espace de Hilbert de dimension infinie

Théorème 2.2 *Supposons que*

(C_1) *$F : H \rightrightarrows H$ est une multiapplication s.c.s à valeurs compactes*

(C_2) *Il existe une fonction régulière $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que*

$$F(x) \subset \partial f(x), F(x) \subset (1 + \|x\|)K$$

avec K est un sous ensemble convexe compacte dans H.

(C_3) *$g : \mathbb{R} \times H \longrightarrow H$ est une fonction de Carathéodory et il existe K_1 un sous ensemble convexe compact dans H tel que*

$$\|g(t, x)\| \in (1 + \|x\|)K_1$$

Alors, pour chaque $x_0 \in H$, il existe $T > 0$ et une fonction $x(.) : [0, T] \longrightarrow H$ absolument continue solution de problème (2.1).

preuve : Puisque f est loc-Lipschitz, il existe $r > 0$ et $M > 0$ tels que sur la boule $\mathbb{B}(x_0, r)$, $F(x) \subset \partial f(x) \subset M\mathbb{B}[0.1]$

$$\sup\{\|y\|, y \in F(x), x \in \mathbb{B}[x_0, r]\} \leq M \tag{2.15}$$

Par (C_2) il existe $m > 0$ tel que pour $x \in \mathbb{B}[x_0, r]$

$$F(x) \subset (1 + \|x_0\| + r)K \subset m\mathbb{B}$$

Par (C_3) il existe $m_1 > 0$ tel que pour $x \in \mathbb{B}[x_0, r]$

$$\|g(t, x)\| \subset (1 + \|x_0\| + r)K_1 \subset m_1\mathbb{B}$$

Donc

$$\|g(t, x)\| \leq m_1$$

On choisit T tel que $0 < T < \frac{r}{m+m_1}$

Étape 1 :**Construction des solutions approximantes**

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, considérons la partition suivante de l'intervalle I par

$$t_0^n = 0 < t_1^n < ... < t_n^n = T, t_i^n = \frac{iT}{n}, i = 0, ..., n$$

Pour chaque $i = 0, ..., n-1$, définissons par induction les suites

- Pour $t \in [0, t_1^n]$

$$\begin{cases} x_n^0(t_0^n) = x_0 \\ y_n^0 \in F(x_n^0(t_0^n)), \\ x_n^0(t) = x_0 + (t - t_0^n)y_n^0 + \displaystyle\int_{t_0^n}^t g(s, x_0)ds \\ x_n^0(t_1^n) = x_0 + \frac{T}{n}y_n^0 + \displaystyle\int_{t_0^n}^{t_1^n} g(s, x_0)ds \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \dot{x}_n^0(t) = y_n^0 + g(t, x_0) \text{ p.p }]t_0^n, t_1^n[\\ x_n^0(t_0^n) = x_0 \end{cases}$$

- Pour $t \in [t_1^n, t_2^n]$

$$\begin{cases} x_n^1(t_1^n) = x_n^0(t_1^n) \\ y_n^1 \in F(x_n^1(t_1^n)), \\ x_n^1(t) = x_n^0(t_1^n) + (t - t_1^n)y_n^1 + \int_{t_1^n}^t g(s, x_n^0(t_1^n))ds \\ x_n^1(t_2^n) = x_n^0(t_1^n) + \frac{T}{n}y_n^1 + \int_{t_1^n}^{t_2^n} g(s, x_n^0(t_1^n))ds \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \dot{x}_n^1(t) = y_n^1 + g(t, x_n^0(t_1^n)) \text{ p.p }]t_1^n, t_2^n[\\ x_n^1(t_1^n) = x_n^0(t_1^n) \end{cases}$$

- Pour $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$

$$\begin{cases} x_n^i(t_i^n) = x_n^{i-1}(t_i^n) \\ y_n^i \in F(x_n^i(t_i^n)) \\ x_n^i(t) = x_n^{i-1}(t_i^n) + (t - t_i^n)y_n^i + \int_{t_i^n}^t g(s, x_n^{i-1}(t_i^n))ds \\ x_n^i(t_{i+1}^n) = x_n^{i-1}(t_i^n) + \frac{T}{n}y_n^i + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s, x_n^{i-1}(t_i^n))ds \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \dot{x}_n^i(t) = y_n^i + g(t, x_n^{i-1}(t_i^n)) \text{ p.p }]t_i^n, t_{i+1}^n[\\ x_n^i(t_i^n) = x_n^{i-1}(t_i^n) \end{cases}$$

On définit

$$\begin{cases} x_n(.) : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x_n(t) = x_n^i(t) \text{ si } t \in [t_i^n, t_{i+1}^n] \end{cases}$$

$$\text{et} \quad y_n(t) = y_n^i, t \in [t_n^i, t_n^{i+1}[, i = 0, ..., n-1$$

Pour chaque $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$ et $i = 0, ..., n-1$ on obtient que

$$\begin{cases} x_n(t) = x_n(t_i^n) + (t - t_i^n)y_n(t_i^n) + \int_{t_i^n}^t g(s, x_n(t_i^n))ds \\ y_n(t_i^n) \in F(x_n(t_i^n)) \end{cases}$$

Par la construction, pour tout $i = 0, ..., n-1$ nous avons que

$$x_n(t_{i+1}^n) = x_0 + \frac{T}{n}[y_n(0) + ... + y_n(t_i^n)] + \int_0^{t_1^n} g(s, x_0)ds + ... + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s, x_n(t_i^n))ds \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}
\|x_n(t^n_{i+1}) - x_0\| &= \|x_0 + \frac{T}{n}[y_n(t^n_0) + y_n(t^n_1) + \ldots + y_n(t^n_i)] \\
&+ \int_0^{t^n_1} g(s, x_n(t^n_0))ds + \ldots + \int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}} g(s, x_n(t^n_i))ds - x_0\| \\
&\leq \frac{T}{n}(\|y_n(t^n_0)\| + \|y_n(t^n_1)\| + \ldots + \|y_n(t^n_i)\|) \\
&+ \int_0^{t^n_1} \|g(s, x_n(t^n_0))\|ds + \ldots + \int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}} \|g(s, x_n(t^n_i))\|ds \\
&\leq (i+1)\frac{T}{n}m + \int_0^T m_1 ds \\
&\leq T(m + m_1) \leq r
\end{aligned}$$

$$\text{D'où } \; x_n(t^n_{i+1}) \in \mathbb{B}[x_0, r] \tag{2.17}$$

Maintenant, soit θ_n une fonction étagée définie de I vers I par

$$\begin{cases} \theta_n(0) = 0 \\ \theta_n(t) = t^n_i, \forall\ t \in]t^n_i, t^n_{i+1}], \;\; 0 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

Alors pour tout $t \in [0, T]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ nous avons les propriétés suivantes

$$0 \leq t - \theta_n(t) \leq \frac{T}{n}$$

$$x_n(t) = x_n(\theta_n(t)) + (t - \theta_n(t))y_n(\theta_n(t)) + \int_{\theta_n(t)}^t g(s, x_n(\theta_n(t)))ds \tag{2.18}$$

$$y_n(\theta_n(t)) \;\; \in \;\; F(x_n(\theta_n(t))) \tag{2.19}$$

$$\dot{x}_n(t) \;\; = \;\; y_n(\theta_n(t)) + g(t, x_n(\theta_n(t))) \;\text{ p.p }]0, T[\tag{2.20}$$

$$\text{par(2.17)} \quad x_n(\theta_n(t)) \in \mathbb{B}[x_0, r] \tag{2.21}$$

Étape 2 :**Convergence des solutions approximantes**

$$\begin{aligned}
\|\dot{x}_n(t)\| &= \|y_n(\theta_n(t)) + g(t, x_n(\theta_n(t)))\| \\
&\leq \|y_n(\theta_n(t))\| + \|g(t, x_n(\theta_n(t)))\| \\
&\leq m + m_1
\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
\|x_n(t) - x_0\| &= \|x_0 + \int_0^T [g(s, x_n(\theta_n(t))) + y_n(\theta_n(t))] - x_0\| \\
&\leq \|\int_0^T [g(s, x_n(\theta_n(t))) + y_n(\theta_n(t))]\| \\
&\leq T(m + m_1) \leq r \\
\text{Alors } x_n(t) &\in \mathbb{B}[x_0, r] \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|x_n(t) - x_n(s)\| &= \|x_0 + \int_0^t [g(s, x_n(\theta_n(\tau))) + y_n(\theta_n(\tau))]d\tau - x_0 - \\
&+ \int_0^s [g(\tau, x_n(\theta_n(\tau))) + y_n(\theta_n(\tau))d\tau\| \\
&= \|\int_s^t [g(\tau, x_n(\theta_n(\tau))) + y_n(\theta_n(\tau))d\tau\| \\
&\leq \int_s^t \|[g(\tau, x_n(\theta_n(\tau))) + y_n(\theta_n(\tau))\|d\tau \\
&\leq (m + m_1)|s - t| \text{ où } 0 < s < t < T \text{ et } n \in \mathbb{N}^* \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est equicontinue dans $\mathcal{C}([0,T], H)$. L'ensemble $\{x_n(t), n \in \mathbb{N}^*\}$ est relativement compact dans l'espace H pour $t \in [0,T]$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,T], x_n(t) \in x_0 + (1 + \|x_0\|)T(K_1 + K) = K_2$ est compacte, donc par le théorème d'Ascoli's (1.2), $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est relativement compacte dans l'espace de Banach $\mathcal{C}([0,T], H)$ et par(2.22) la suite $(\dot{x}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans l'espace $\mathrm{L}^1(I, H)$, alors il existe une sous suite, notée encore $(x_n)_n$ de (x_n) et $x \in \mathcal{C}([0,T], H)$ tels que

i) $x_n(.)$ converge uniformément vers $x(.)$.

ii) $\dot{x}_n(.)$ converge faiblement vers $\dot{x}(.)$ dans $\mathrm{L}^1(I, H)$.

Aussi, comme $|\theta_n(t) - t| \leq \frac{T}{n}$ pour chaque $t \in [0,T]$, alors θ_n converge uniformément vers t sur $[0,T]$ en déduit que $x_n(\theta_n(t))$ converge uniformément vers $x(t)$, comme g est une fonction de Carathéodory la suite $(g(., x_n(\theta_n(.)))_n$ converge uniformément vers $g(., x(.))$

Par (2.19) et (2.20)

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow\infty} d((x_n(t), \dot{x}_n(t) - g(t, x_n(\theta_n(t)))), gphF)) &\leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \|x_n(t) - x_n(\theta_n(t))\| \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \dot{x}_n(t) - g(t, x_n(\theta_n(t))) \in F(x_n(t)) \tag{2.25}$$

Comme $\dot{x}_n(.)$ converge faiblement vers $\dot{x}(.)$ in $L^1([0,T], H)$ et par le lemme de Mazur's (1.5) on obtient

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &\in \bigcap_n \overline{co}\{\dot{x}_k(t), k \geq n\} \text{ p.p } t \in [0,T] \\ &\in \bigcap_n \overline{co}(A_n), \text{tel que } \quad A_n = \{\dot{x}_k(t), k \geq n\} \\ \dot{x}(t) &\in \overline{co}(A_n), \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Pour $t \in [0,T]$ fixé, et $\zeta \in H$, d'après le théorème(1.6), on obtient que

$$\begin{aligned}\langle \zeta, \dot{x}(t)\rangle &\leq \delta^*(\zeta, A_n), \forall n \in \mathbb{N} \\ &\leq \sup_{k\geq n} \langle \zeta, \dot{x}_n(t)\rangle \\ &\leq \inf_n \sup_{k\geq n} \langle \zeta, \dot{x}_n(t)\rangle\end{aligned}$$

Comme $F(x) \subset \partial f(x)$, on déduit que

$$\dot{x}_n(t) - g(t, x_n(\theta_n(t))) \in \partial f(x_n(\theta_n(t)))$$

$$\begin{aligned}\langle \zeta, \dot{x}(t)\rangle &\leq \inf_n \sup_{k\geq n} \langle \zeta, \partial f(x_n(\theta_n(t)) + g(t, x_n(\theta_n(t)))\rangle \\ &\leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup \delta^*(\zeta, \partial f(x_n(\theta_n(t)) + g(t, x_n(\theta_n(t)))\end{aligned}$$

Comme la fonction suport $\delta^*(.,.)$ est (s.c.s), nous avons que

$$\langle \zeta, \dot{x}(t)\rangle \leq \delta^*(\zeta, \partial f(x(t)) + g(t, x(t)))$$

$$\begin{aligned}
\langle \zeta, \dot{x}(t) \rangle - \delta^*(\zeta, \partial f(x(t)) + g(t, x(t))) &\leq 0 \\
\sup_{\zeta \in \overline{\mathbf{B}}} [\langle \zeta, \dot{x}(t) \rangle - \delta^*(\zeta, \partial f(x(t)) + g(t, x(t)))] &\leq 0
\end{aligned}$$

Comme $\partial f(x)$ convexe fermé, d'après la corollaire (1.7) nous avons que

$$d(\dot{x}(t), \partial f(x(t)) + g(t, x(t))) = 0$$

$$\text{Donc } \dot{x}(t) \in \partial f(x(t)) + g(t, x(t)). \tag{2.26}$$

Étape 3 :**Existence de solution**

La fonction $t \longmapsto f(x(t))$ est à variation bornée sur I, d'après la proposition (1.4.11) et la relation (2.26) nous avons que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} f(x(t)) &= \langle \dot{x}(t), \dot{x}(t) - g(t, x(t)) \rangle \;\; p.p \quad [0.T] \\
f(x(T)) - f(x(0)) &= \int_0^T \frac{d}{dt} f(x(s)) ds \\
&= \int_0^T \langle \dot{x}(s), \dot{x}(s) - g(s, x(s)) \rangle ds \\
&= \int_0^T \langle \dot{x}(s), \dot{x}(s) \rangle ds - \int_0^T \langle \dot{x}(s), g(s, x(s)) \rangle ds \\
&= \int_0^T \|\dot{x}(s)\|^2 ds - \int_0^T \langle \dot{x}(s), g(s, x(s)) \rangle ds
\end{aligned} \tag{2.27}$$

D'autre part par construction, on obtient

$$\dot{x}_n(t) - g(t, x_n(t_i^n) \in \partial f(x_n(t_i^n)), \;\; \text{p.p} \;\; t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[, i = 0, ..., n-1$$

De plus par la proposition(1.4.10) pour chaque $\zeta \in \partial f(x_n(t_i^n))$

$$f(x_n(t_{i+1}^n)) - f(x_n(t_i^n)) \;\geq\; \langle x_n(t_{i+1}^n) - x_n(t_i^n), \zeta \rangle \tag{2.28}$$

En particulier pour

$$\zeta = \dot{x}_n(t) - g(t, x_n(t_i^n)$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
f(x_n(t_{i+1}^n)) - f(x_n(t_i^n)) &\geq \langle x_n(t_{i+1}^n)) - x_n(t_i^n)), \dot{x}_n(t) - g(t, x_n(t_i^n)) \rangle \\
&= \langle \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \dot{x}_n(s)ds, \dot{x}_n(t) \rangle - \langle \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \dot{x}_n(s)ds, g(t, x_n(t_i^n)) \rangle \\
&\geq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \langle \dot{x}_n(s), \dot{x}_n(s) \rangle ds - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \langle \dot{x}_n(s), g(s, x_n(t_i^n)) \rangle ds \\
&\geq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|\dot{x}_n(s)\|^2 ds - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \langle \dot{x}_n(s), g(s, x_n(t_i^n)) \rangle ds
\end{aligned}$$

Par addition de n inégalités , on obtient

$$f(x_n(T)) - f(x(0)) \geq \int_0^T \|x_n(s)\|^2 ds - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \langle \dot{x}_n(s), g(s, x_n(t_i^n)) \rangle ds \quad (2.29)$$

Montrons que la suite

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \langle \dot{x}_n(s), g(s, x_n(t_i^n)) \rangle ds\right)_n \text{ converges vers } \int_0^T \langle \dot{x}(s), g(s, x(s)) \rangle ds$$

$$\begin{aligned}
&\| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \langle \dot{x}_n(s), g(s, x_n(t_i^n)) \rangle ds - \int_0^T \langle \dot{x}(s), g(s, x(s)) \rangle ds \| \\
&= \| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (\langle \dot{x}_n(s), g(s, x_n(t_i^n)) \rangle - \langle \dot{x}(s), g(s, x(s)) \rangle) ds \| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \| \langle \dot{x}_n(s), g(s, x_n(t_i^n)) \rangle - \langle \dot{x}(s), g(s, x(s)) \rangle \| ds \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \| \langle \dot{x}_n(s), g(s, x_n(t_i^n)) \rangle - \langle \dot{x}_n(s), g(s, x_n(s)) \rangle \| ds \\
&+ \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \| \langle \dot{x}_n(s), g(s, x_n(s)) \rangle - \langle \dot{x}_n(s), g(s, x(s)) \rangle \| ds \\
&+ \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \| \langle \dot{x}_n(s), g(s, x(s)) \rangle - \langle \dot{x}(s), g(s, x(s)) \rangle \| ds \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \| \langle \dot{x}_n(s), g(s, x_n(t_i^n)) \rangle - \langle \dot{x}_n(s), g(s, x_n(s)) \rangle \| ds \\
&+ \int_0^T \| \langle \dot{x}_n(s), g(s, x_n(s)) \rangle - \langle \dot{x}_n(s), g(s, x(s)) \rangle \| ds
\end{aligned}$$

$$+\int_0^T \| \langle \dot{x}_n(s), g(s,x(s))\rangle - \langle \dot{x}(s), g(s,x(s))\rangle \| ds$$

Comme g est une fonction de Carathéodory , et $i), ii)$ alors

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \langle \dot{x}_n(s), g(s, x_n(t_i^n))\rangle ds = \int_0^T \langle \dot{x}(s), g(s,x(s))\rangle ds$$

Par passage à la limite pour $n \longrightarrow \infty$, (2.29) et le fait que f est une fonction continue, on obtient

$$f(x(T)) - f(x(0)) \geq \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup \int_0^T \|\dot{x}_n(s)\|^2 ds - \int_0^T \langle \dot{x}(s), g(s,x(s))\rangle ds$$

De plus , par l'inégalité (2.27)

$$\|\dot{x}\|^2_{L^2(I,\mathbb{R}^n)} \geq \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup \|\dot{x}_n\|^2_{L^2(I,\mathbb{R}^n)}$$

Comme $\|.\|$ est (s.c.i) et $\dot{x}_n \rightharpoonup \dot{x}$, on obtint

$$\|\dot{x}\| \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf \|\dot{x}_n\|$$

On définit une fonction φ par

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \varphi(x) = x^2 \quad \text{croissante} \end{aligned}$$

D'apres la propositions (1.2.1), nous avons que

$$\|\dot{x}\|^2_{L^2(I,\mathbb{R}^n)} \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf \|\dot{x}_n\|^2_{L^2(I,\mathbb{R}^n)}$$

Consiquence

$$\|\dot{x}\|^2_{L^2(I,\mathbb{R}^n)} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \|\dot{x}_n\|^2_{L^2(I,\mathbb{R}^n)}$$

Par l'égalité du parallélogramme dans un espace de Hilbert H sur $\mathbb{R}$, on obtient que

$$\|\dot{x}_n - \dot{x}\|^2 = \|\dot{x}_n\|^2 + \|\dot{x}\|^2 - 2\langle \dot{x}_n, \dot{x}\rangle$$

par passage a la limet , on obtient que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|\dot{x}_n - \dot{x}\|^2 = 0$$

Alors la suite $(\dot{x}_n)_n$ converge fortement dans $L^2([0,T], \mathbb{R}^n)$ vers $\dot{x}$. Donc, il existe une sous suite de $\dot{x}_n(.)$ qui en notée encore $\dot{x}_n(.)$ converge ponctuellement vers $\dot{x}(.)$.

Comme F est une multifonction (s.c.s) à valeur fermé le graphe de F est fermé d'après théorème (1.8) et (2.25), nous avons

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)) + g(t, x(t)) \ \text{ p.p sur } [0, T]$$

Alors $x(.) : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un solution de problème (2.1). ∎

Chapitre 3

Résultat d'existence de solution viable avec perturbation

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons établir deux résultats d'existence de solutions viables, pour des inclusions différentielles, dans le cas non convexe, avec perturbation univoque de Carathéodory dans l'espace de dimension finie $\mathbb{R}^n$. Le premier problème concerne une inclusion différentielle du premier ordre et se présente sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)) + g(t, x(t)), & \text{p.p } [0, T] \\ x(0) = x_0 \\ x(t) \in K \end{cases} \tag{3.1}$$

où K est un sous ensemble fermé dans $\mathbb{R}^n$, F une multifonction semi continu supérieure (s.c.s) à valeurs compactes contenues dans le sous différentiel d'un fonction régulière et une condition tangentielle de la forme

$$\lim_{h \longrightarrow 0^+} \inf \frac{1}{h} d_K(x + hv + \int_t^{t+h} g(\tau, x(\tau))d\tau = 0$$

Dans ce chapitre nous allons généraliser les résultats obtenus dans [24]et[3]. Ensuite nous allons considérer le problème du second ordre qui se présente sous la forme :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) \in F(x(t),\dot{x}(t)) + g(t,x(t),\dot{x}(t)), \text{p.p}[0,T] \\ (\dot{x}(0),x(0)) = (y_0,x_0) \\ x(t) \in K \end{cases} \tag{3.2}$$

avec les même conditions du problème (3.1) et avec la condition tangentielle

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+} \inf \frac{1}{h^2} d_K(x+hy+\frac{h^2}{2}w + \int_t^{t+h} g(\tau,x(\tau),\dot{x}(\tau)))d\tau = 0$$

3.2 Résultat d'existence du premier ordre

Théorème 3.1 *Soit K sous ensemble non vide fermé de $\mathbb{R}^n$, supposons que $g : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de Carathéodory et $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multifonction satisfaisant les conditions suivantes*

(C_1) *F semi-continue supérieurement à valeurs non vides compactes*

(C_2) *Il existe une fonction régulière $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, tel que,*

$$F(x) \subset \partial^C f(x) \ \ \textit{pour tout} \ \ x \in \mathbb{R}^n$$

(C_3) *Il existe $m \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ tel que*

$$\|g(t,x)\| \leq m(t), \ \ \forall (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$$

C_4 $\forall (t,x) \in \mathbb{R}\times K, \exists v \in F(x)$ *tel que*

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+} \inf \frac{1}{h} d_K(x+hv+\int_t^{t+h} g(\tau,x)d\tau) = 0$$

Alors, pour chaque $x_0 \in K$, il existe $T > 0$ et une fonction $x(.) : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue solution du problème (3.1).

preuve : Comme f est localement Lipschitzienne, il existe $r > 0$ et $M > 0$ tel que f soit M-lipschitzienne sur $\mathbb{B}(x_0,r)$ et par suite $\partial^C f(x) \subset M\mathbb{B}[0,1]$ pour tout $x \in \mathbb{B}(x_0,r)$.

Soit $T_1 > 0$ tel que

$$\int_0^{T_1} (m(s)+M+1) \leq \frac{r}{2}$$

La preuve repose essentiellement sur le lemme suivant du à [24]

Lemme 3.1 *Supposons que*

1. $K_0 = K \cap \mathbb{B}(x_0, r)$ *est compact dans* $\mathbb{R}^n$.

2. F *et* g *satisfaisant les conditions* $C_1 - C_4$

Alors pour chaque $\varepsilon > 0$, *il existe* $\eta > 0$ $(0 < \eta < \varepsilon)$ *tel que, pour chaque* $(t, x) \in [0, T] \times K_0$, *il existe* $u \in F(x) + \frac{\varepsilon}{T}\mathbb{B}$ *et* $h_{t,x} \in [\eta, \varepsilon]$ *tel que*

$$x + h_{t,x}u + \int_t^{t+h_{t,x}} g(\tau, x)d\tau \in K$$

preuve, Soit $(t, x) \in [0, T] \times K_0$ et $\varepsilon > 0$. Comme F est semi-continue supérieurement, alors il existe $\delta_x > 0$ tel que

$$F(y) \subset F(x) + \varepsilon\mathbb{B}, \forall y \in \mathbb{B}(x, \delta_x)$$

Soit $(s, y) \in [0, T] \times K_0$, par la condition tangentielle il existe $h_{s,y} \in]0, \varepsilon]$ et $v \in F(y)$ tel que

$$d_K(y + h_{s,y}v + \int_s^{s+h_{s,y}} g(\tau, x)d\tau) < h_{s,y}\frac{\varepsilon}{4T}.$$

Considérons le sous ensemble

$$\mathcal{N}(s, y) = \{(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, d_K(z + h_{s,y}v + \int_t^{t+h_{s,y}} g(\tau, x)d\tau) < h_{s,y}\frac{\xi}{4T}\}$$

Comme

$$\|g(\tau, z)\| \leq m(\tau) \text{ p.p sur } [0, T], \forall z \in \mathbb{R}^n$$

Alors, en appliquant le corollaire de la convergence dominée sur la suite des fonctions $(\chi_{[t,t+h_{s,y}]}g(.,.))_t$ tel que la fonction

$$(l, z) \longrightarrow z + h_{s,y}v + \int_l^{l+h_{s,y}} g(\tau, z)d\tau$$

est continue. Aussi, la fonction

$$(l, z) \longrightarrow d_K(z + h_{s,y}v + \int_l^{l+h_{s,y}} g(\tau, z)d\tau) \text{ est continue}$$

Par conséquent le sous ensemble $\mathcal{N}(s,y)$ est ouvert. De plus, comme $(s,y) \in \mathcal{N}(s,y)$, il existe une boule $\mathbb{B}((s,y),\eta_{s,y})$ de rayon $\eta_{s,y} < \delta_x$ contenue dans $\mathcal{N}(s,y)$.

Le sous ensemble $[0,T] \times K_0$ est compact alors, il admet un recouvrement des boules $\mathbb{B}((s_i,y_i),\eta_{s_i,y_i})$ fini q. Pour simplifier, on pose $h_{s_i,y_i} = h_i, i = 1,...,q$ et $\eta = \min_{i=1,...,q} h_i > 0$

Soit $(t,x) \in [0,T] \times K_0$ fixés. Comme $(t,x) \in \mathbb{B}((s_i,y_i),\eta_{s_i,y_i})$ qui est contenue dans $\mathcal{N}(s_i,y_i)$, alors il existe $x_i \in K$ et $u_i \in F(y_i)$ tel que

$$\begin{aligned} \|u_i - \frac{1}{h_i}(x_i - x - \int_t^{t+h_i} g(\tau,x)d\tau)\| &\leq \frac{1}{h_i} d_K(x + h_i u_i + \int_t^{t+h_i} g(\tau,x)d\tau) + \frac{\varepsilon}{4T} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2T} \end{aligned}$$

On pose

$$u = \frac{1}{h_i}(x_i - x - \int_t^{t+h_i} g(\tau,x)d\tau)$$

Alors

$$x_i = x + h_i u + \int_t^{t+h_i} g(\tau,x)d\tau \in K$$

et

$$\|u_i - u\| \leq \frac{\varepsilon}{2T}$$

Comme

$$\|x - y_i\| \leq \eta(s,y) < \delta_x$$

Alors

$$F(y_i) \subset F(x) + \frac{\varepsilon}{2T}\mathbb{B}$$

$$u \in F(x) + \frac{\varepsilon}{T}\mathbb{B}$$

■

Procédons maintenant à la démonstration du théorème en trois étapes.

Étape 1 : **Construction des solutions approximantes**

Soit $(x_0, t) \in K_0 \times [0, T]$ et $0 < \varepsilon < T$, par le lemme (3.1), il existe $\eta > 0$, $h_0 \in [\eta, \varepsilon]$ et $u_0 \in F(x_0) + \frac{\varepsilon}{b}\mathbb{B}$ tel que

$$x_1 = x_0 + h_0 u_0 + \int_0^{h_0} g(\tau, x_0) d\tau \in K$$

Alors si $h_0 < T$

$$\begin{aligned}
\|x_1 - x_0\| &= \|x_0 + h_0 u_0 + \int_0^{h_0} g(\tau, x_0) d\tau - x_0\| \\
&= \|h_0 u_0 + \int_0^{h_0} g(\tau, x_0) d\tau\| \\
&\leq h_0 \|u_0\| + \int_0^{h_0} \|g(\tau, x_0)\| d\tau \\
&\leq T(M+1) + \int_0^{T} (m(\tau)) d\tau \\
&\leq \int_0^{T} (M + 1 + m(\tau)) d\tau \\
&\leq \frac{r}{2} \text{ d'où } x_1 \in K_0
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme(3.1)à nouveau, pour $(h_0, x_1) \in [0, T] \times K_0$, il existe $h_1 \in [\eta, \varepsilon]$ et $u_1 \in F(x_1) + \frac{\varepsilon}{T}\mathbb{B}$ tel que

$$x_2 = x_1 + h_1 u_1 + \int_{h_0}^{h_0 + h_1} g(\tau, x_1) d\tau \in K$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\|x_2 - x_0\| &= \|x_1 + h_1u_1 + \int_{h_0}^{h_0+h_1} g(\tau, x_1)d\tau - x_0\| \\
&= \|x_0 + h_0u_0 + \int_0^{h_0} g(\tau, x_0)d\tau + h_1u_1 + \int_{h_0}^{h_0+h_1} g(\tau, x_1)d\tau - x_0\| \\
&= \|h_0u_0 + \int_0^{h_0} g(\tau, x_0)d\tau + h_1u_1 + \int_{h_0}^{h_0+h_1} g(\tau, x_1)d\tau\| \\
&\leq \|h_0u_0\| + \|h_1u_1\| + \int_0^{h_0} \|g(\tau, x_0)\|d\tau + \int_{h_0}^{h_0+h_1} \|g(\tau, x_1)\|d\tau \\
&\leq (h_0 + h_1)(M + 1) + (h_0 + h_1)m(\tau) \\
\text{Alors } si \ (h_0 + h_1) &\leq T \text{ on obtient} \\
\|x_2 - x_0\| &\leq T(M + 1) + \int_0^T (m(\tau))d\tau \\
&\leq \| \int_0^T (M + 1 + m(\tau))d\tau\| \\
&\leq \frac{T}{2} \text{ d'ou } x_2 \in K_0
\end{aligned}$$

On pose $h_{-1} = 0$, par induction, comme $h_i \in [\eta, \varepsilon]$, par le lemme(3.1), il existe un entier s tel que $\sum_{i=0}^{s-1} h_i < T \leq \sum_{i=0}^{s} h_i$, alors nous avons construit les suites $(h_p)_p \subset [\eta, \varepsilon]$, $(x_p)_p \subset K_0$, et $(u_p)_p \subset F(x_p) + \frac{\varepsilon}{T}\mathbb{B}$ tel que pour tout $p = 0, ..., s - 1$ nous avons

$$\begin{cases}
x_{p+1} = x_p + h_pu_p + \displaystyle\int_{h_{p-1}}^{h_{p-1}+h_p} g(\tau, x_p)d\tau \in \mathbb{K} \\
u_p \in F(x_p) + \frac{\varepsilon}{T}\mathbb{B}
\end{cases}$$

Par induction, pour tout $p \geq 2$ nous avons

$$\begin{cases}
x_p = x_0 + \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} h_iu_i + \sum_{i=0}^{p-1} \int_{\sum_{j=0}^{i-1} h_i}^{\sum_{j=0}^{i} h_i} g(\tau, x_i)d\tau \\
u_p \in F(x_p) + \frac{\varepsilon}{T}\mathbb{B}
\end{cases}$$

Montrons maintenant que $x_p \in K_0$

$$\begin{aligned}
\|x_p - x_0\| &= \|x_0 + \sum_{i=0}^{p-1} h_i u_i + \sum_{i=0}^{p-1} \int_{\sum_{j=0}^{i-1} h_i}^{\sum_{j=0}^{i} h_i} g(\tau, x_i) d\tau - x_0\| \\
&= \|\sum_{i=0}^{p-1} h_i u_i + \sum_{i=0}^{p-1} \int_{\sum_{j=0}^{i-1} h_i}^{\sum_{j=0}^{i} h_i} g(\tau, x_i) d\tau\| \\
&\leq (M+1)\sum_{i=0}^{p-1} h_i + \int_0^T m(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

puisque $\sum_{i=0}^{p-1} h_i \leq T$, alors $\|x_p - x_0\| \leq \frac{r}{2}$, d'ou $x_p \in K_0$

Pour chaque entier $k \geq 1$ et pour tout entier $q = 1, ..., s$ on note par h_q^k un réel associé à $\varepsilon = \frac{1}{k}$ et $x_p = x_q$, donné par le lemme(3.1), considérons la suite $(\tau_k^q)_k$

$$\begin{cases} \tau_k^0 = 0, \tau_k^s = T \\ \tau_k^q = h_0^k + h_1^k + h_2^k + ... + h_{q-1}^k \end{cases}$$

et définissions sur $[0, T]$ la suite de fonctions $(x_k(.))_k$ par

$$\begin{cases} x_k(t) = x_{q-1} + (t - \tau_k^{q-1}) u_{q-1} + \int_{\tau_k^{q-1}}^t g(\tau, x_{q-1}) d\tau, \forall t \in [\tau_k^{q-1}, \tau_k^q] \\ x_k(0) = 0 \end{cases}$$

Alors $\dot{x}_k(t) = u_{q-1} + g(t, x_{q-1})$ pour tout $t \in [\tau_k^{q-1}, \tau_k^q]$

Définissions la fonction $\theta_k : [0, T] \longrightarrow [0, T]$ par

$$\begin{cases} \theta_k(0) = 0 \\ \theta_k(t) = \tau_k^{q-1} \quad t \in]\tau_k^{q-1}, \tau_k^q] \end{cases}$$

Satisfaisant la propriété suivante : $\forall k \geq 1, |t - \theta_k(t)| \leq \frac{T}{k}$, alors $\theta_k(t)$ converge uniformément vers t et $x_{q-1} = x_k(\theta_k(t)) \in \mathbb{B}[x_0, r]$

$$\begin{cases} x_k(t) = x_k(\theta_k(t)) + (t - (\theta_k(t))) u_k((\theta_k(t))) + \int_{\theta_k(t)}^t g(\tau, x_k((\theta_k(t)))) d\tau, \forall t \in [0, T] \\ x_k(0) = 0 \end{cases}$$

$$\dot{x}_k(t) = u_k(\theta_k(t)) + g(t, x_k(\theta_k(t))) \text{ p.p } t \in [0,T] \tag{3.3}$$

Étape 2 :**Convergence des solutions approximantes**

$$\begin{aligned} \|\dot{x}_k(t)\| &= \|u_k(\theta_k(t)) + g(t, x_k(\theta_k(t)))\| \\ &\leq \|u_k(\theta_k(t))\| + \|g(t, x_k(\theta_k(t)))\| \leq M + 1 + m(t) \\ \int_0^T \|\dot{x}_k(t)\|^2 dt &\leq \int_0^T (M + 1 + m(\tau))^2 d\tau \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} \|x_k(t)\| &= \|x_k(\theta_k(t)) + \int_{\theta_k(t)}^t \dot{x}_k(\tau) d\tau\| \\ &= \|x_k(\theta_k(t)) + x_k(0) - x_k(0) + \int_{\theta_k(t)}^t \dot{x}_k(\tau) d\tau\| \\ &= \|x_k(\theta_k(t)) + x_k(0) + \int_0^t \dot{x}_k(\tau) d\tau\| \\ &\leq \|x_0\| + \|\int_0^T (M + 1 + m(\tau)) d\tau\| \\ &\leq \|x_0\| + \frac{r}{2} \leq \|x_0\| + r \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} \|x_k(t) - x_k(s)\| &= \|(t-s)u_k(\theta_k(t)) + \int_s^t g(\tau, x_k(\theta_k(t))) d\tau\| \\ &= \|\int_s^t (u_k(\theta_k(t)) + g(\tau, x_k(\theta_k(t))) d\tau)\| \\ &\leq \int_s^t \|(u_k(\theta_k(t)) + g(\tau, x_k(\theta_k(t))) d\tau)\| \\ &\leq |\int_s^t (M + 1 + m(\tau)) d\tau| \end{aligned} \tag{3.6}$$

Alors par (3.4) la suite $\dot{x}_k(.)$ est bornée dans $L^2([0.T], \mathbb{R}^n)$, et par (3.5) et (3.6)la suite $(x_k)_k$ est bornée et equicontinue, on applique le théorème d'Arzela Ascoli (1.2), on obtient que le sous ensemble $\{x_k(t), k > 0\}$ est relativement compact dans $C(I, \mathbb{R}^n)$, Donc il existe une sous suite encore notée par $x_k(.)$ de $x_k(.)$ et fonction $x(.) : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue tels que

i) $x_k(.)$ converge uniformément vers $x(.)$ sur $[0,T]$

ii) $\dot{x}_k(.)$ converge faiblement vers $\dot{x}(.)$ in $L^2([0.T], \mathbb{R}^n)$

Par la relation (3.3) $\dot{x}_k(t) - g(t, x_k(\theta_k(t))) = u_k(\theta_k(t)) \in F(x(t)) + \frac{\varepsilon}{T}\mathbb{B}$ alors

$$d_{grF}(x_k(t), \dot{x}_k(t) - g(t, x_k(\theta_k(t)))) \leq \|x_k - x_k(\theta_k(t))\| + \frac{1}{kT}$$

Comme $(\theta_k(.))$ converge uniformément vers t et (i) ,$x_k(\theta_k(t))$ converge uniformément vers $x(t)$ de plus g est une fonction de Carathéodory alors $(g(., x_k(\theta_k(.))))_k \longrightarrow g(., x(.))$ dans $L^2([0.T], \mathbb{R}^n)$

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} d_{grF}(x_k(t), \dot{x}_k(t) - g(t, x_k(\theta_k(t)))) = 0 \tag{3.7}$$

Puisque ∂f est un multifonction semi continue supérieurement à valeurs convexes compactes dans $\mathbb{R}^n$, d'après le théorème (1.10), on obtient que

$$\dot{x}(t) - g(t, x(t)) \in \partial f(x(t)) \text{ p.p } [0, T] \tag{3.8}$$

Étape 3 :**Existence de solution**

D'après la proposition (1.4.11), la fonction $(f \circ x)$ est à variation bornée sur I, la mesure de Lebesgue sur I et presque par tout sur I, et par la formule(3.8) on trouve que

$$\frac{d}{dt} f(x(t)) = \langle \dot{x}(t), \dot{x}(t) - g(t, x(t)) \rangle \ p.p \text{ sur } [0.T]$$

$$\begin{aligned} f(x(T)) - f(x(0)) &= \int_0^T \frac{d}{d\tau} f(x(\tau)) d\tau \\ &= \int_0^T \langle \dot{x}(\tau), \dot{x}(\tau) - g(\tau, x(\tau)) \rangle d\tau \\ &= \int_0^T \langle \dot{x}(\tau), \dot{x}(\tau) \rangle d\tau - \int_0^T \langle \dot{x}(\tau), g(\tau, x(\tau)) \rangle d\tau \\ &= \int_0^T \|\dot{x}(\tau)\|^2 d\tau - \int_0^T \langle \dot{x}(\tau), g(\tau, x(\tau)) \rangle d\tau \end{aligned} \tag{3.9}$$

D'autre part, pour tout $q = 1, ..., s$

$$\dot{x}_k(t) - g(t, x_k(\tau_k^{q-1})) = \dot{x}_k(t) - g(t, x_k(\tau_k^{q-1})) \in \partial f(x_k(\tau_k^{q-1})) + \frac{1}{kT}\mathbb{B}$$

il existe $b_q \in \mathbb{B}$ tel que

$$\dot{x}_k(t) - g(t, x_k(\tau_k^{q-1})) - \frac{1}{kT} b_q \in \partial f(x_k(\tau_k^{q-1}))$$

D'autre part, en vertu des propriétés du sous différentiel, d'une fonction régulière, on déduit que pour tout $\zeta \in \partial f(x_k(\tau_k^{q-1}))$

$$f(x_k(\tau_k^q)) - f(x_k(\tau_k^{q-1})) \geq \langle x_k(\tau_k^q) - x_k(\tau_k^{q-1}), \zeta \rangle \tag{3.10}$$

En particulier pour

$$\zeta = \dot{x}_k(t) - g(t, x_k(\tau_k^{q-1})) + \frac{1}{kT} b_q$$

nous avons

$$\begin{aligned}
& f(x_k(\tau_k^q)) - f(x_k(\tau_k^{q-1})) \geq \langle x_k(\tau_k^q) - x_k(\tau_k^{q-1}), \dot{x}_k(t) - g(t, x_k(\tau_k^{q-1})) + \frac{1}{kT} b_q \rangle \\
&= \langle \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \dot{x}_k(\tau) d\tau, \dot{x}_k(t) \rangle - \langle \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \dot{x}_k(\tau) d\tau, g(t, x_k(\tau_k^{q-1})) \rangle + \langle \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \dot{x}_k(\tau) d\tau, \frac{1}{kT} b_q \rangle \\
&\geq \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \langle \dot{x}_k(\tau), \dot{x}_k(\tau) \rangle d\tau - \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \langle \dot{x}_k(\tau), g(\tau, x_{q-1}) \rangle d\tau + \frac{1}{kT} \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \langle \dot{x}_k(\tau), b_q \rangle d\tau \\
&= \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \|x_k(\tau)\|^2 d\tau - \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \langle \dot{x}_k(\tau), g(\tau, x_k(\tau_k^{q-1})) \rangle d\tau + \frac{1}{kT} \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \langle \dot{x}_k(\tau), b_q \rangle d\tau
\end{aligned}$$

Par addition de n inégalités on obtient

$$\begin{aligned}
f(x_k(T)) - f(x_0) \geq & \int_0^T \|x_k(\tau)\|^2 d\tau - \int_0^T \langle \dot{x}_k(\tau), g(\tau, x_{q-1}) \rangle d\tau \\
& + \sum_{q=1}^{s} \frac{1}{kT} \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \langle \dot{x}_k(\tau), b_q \rangle d\tau
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Montrons maintenant que

$$\left(\sum_{q=0}^{s} \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \langle \dot{x}_k(\tau), g(\tau, x_k(\tau_k^{q-1})) \rangle d\tau\right)_k \quad converges \ vers \quad \int_0^T \langle \dot{x}(\tau), g(\tau, x(\tau)) \rangle d\tau$$

$$\| \sum_{q=0}^{s} \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \langle \dot{x}_k(\tau), g(\tau, x_k(\tau_k^{q-1})) \rangle ds - \int_0^T \langle \dot{x}(\tau), g(\tau, x(\tau)) \rangle d\tau \|$$

$$= \| \sum_{q=0}^{s} \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} (\langle \dot{x}_k(\tau), g(\tau, x_k(\tau_k^{q-1})) \rangle - \langle \dot{x}(\tau), g(\tau, x(\tau)) \rangle) d\tau \|$$

$$\leq \sum_{q=0}^{s} \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \| \langle \dot{x}_k(\tau), g(\tau, x_k(\tau_k^{q-1})) \rangle - \langle \dot{x}(\tau), g(\tau, x(\tau)) \rangle \| d\tau$$

$$\leq \sum_{q=0}^{s} \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \| \langle \dot{x}_k(\tau), g(\tau, x_k(\tau_k^{q-1})) \rangle - \langle \dot{x}_k(\tau), g(\tau, x_k(\tau)) \rangle \| d\tau$$

$$+ \sum_{q=0}^{s} \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \| \langle \dot{x}_k(\tau), g(\tau, x_k(\tau)) \rangle - \langle \dot{x}_k(\tau), g(\tau, x(\tau)) \rangle \| d\tau$$

$$+ \sum_{q=0}^{s} \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \| \langle \dot{x}_k(\tau), g(\tau, x(\tau)) \rangle - \langle \dot{x}(\tau), g(\tau, x(\tau)) \rangle \| d\tau$$

$$= \sum_{q=0}^{s} \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \| \langle \dot{x}_k(\tau), g(\tau, x_k(\tau_k^{q-1})) \rangle - \langle \dot{x}_k(\tau), g(\tau, x_k(\tau)) \rangle \| d\tau$$

$$+ \int_0^T \| \langle \dot{x}_k(\tau), g(\tau, x_k(\tau)) \rangle - \langle \dot{x}_k(\tau), g(\tau, x(\tau)) \rangle \| d\tau$$

$$+ \int_0^T \| \langle \dot{x}_k(\tau), g(\tau, x(\tau)) \rangle - \langle \dot{x}(\tau), g(\tau, x(\tau)) \rangle \| d\tau$$

Comme g est de Carathéodroy, et i),ii), on obtient que

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \sum_{q=0}^{s} \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \langle \dot{x}_k(\tau), g(\tau, x_k(\tau_k^{q-1})) \rangle d\tau = \int_0^T \langle \dot{x}(\tau), g(\tau, x(\tau)) \rangle d\tau$$

En passant à la limite dans l'inégalité (3.24) quand $k \longrightarrow \infty$ et en utilisant la continuité de f, nous avons

$$f(x(T)) - f(x_0) \geq \lim_{k \longrightarrow \infty} \sup \int_0^T \|\dot{x}_k(s)\|^2 ds - \int_0^T \langle \dot{x}(s), g(s, x(s)) \rangle ds$$

De plus par (3.22)

$$\|\dot{x}\|^2_{L^2(I,\mathbb{R}^n)} \geq \lim_{k \longrightarrow \infty} \sup \|\dot{x}_k\|^2_{L^2(I,\mathbb{R}^n)}$$

On définit une fonction φ par

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \varphi(x) = \sqrt{x} \quad \text{croissante} \end{aligned}$$

$$\varphi(\|\dot{x}\|^2_{L^2(I,\mathbb{R}^n)}) \geq \varphi(\lim_{k\longrightarrow\infty} \sup \|\dot{x}_k\|^2_{L^2(I,\mathbb{R}^n)})$$

D'après la proposition (1.2.1), on obtient que

$$\begin{aligned} \|\dot{x}\|_{L^2(I,\mathbb{R}^n)} &\geq \lim_{k\longrightarrow\infty} \sup \varphi(\|\dot{x}_k\|^2_{L^2(I,\mathbb{R}^n)}) \\ &\geq \lim_{k\longrightarrow\infty} \sup \|\dot{x}_k\|_{L^2(I,\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

D'après le théorème (1.2.2) la suite $(\dot{x}_k)_k$ converge fortement vers $\dot{x}$ dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$, alors il existe une sous suite encore notée $\dot{x}_k(.)$ qui converge ponctuellement vers x.
Par la construction, $(x_k(t), \dot{x}_k(t) - f(t, x_k(t))) \in gphF$, comme F multifonction s.c.s à valeurs fermées d'après le théorème (1.8) le gphF est fermé on a

$$(x(t), \dot{x}(t) - g(t, x(t))) \in gphF \;\; p.p \;\; sur \;\; [0,T]$$

$$\text{i.e} \;\; \dot{x}(t) \in F(x(t)) + g(t, x(t))\text{p.p} \;\; [0,T]$$

Finalement, montrons que $x(t) \in K$. Comme $\lim_{k\longrightarrow\infty} \theta_k(t) = t$ pour tout $t \in [0,T]$ et $\lim_{k\longrightarrow\infty} \|x(t) - x_k(\theta_k(t))\| = 0, x_k(\theta_k(t)) \in K$ et K fermée on obtient $x(t) \in K$. ■

3.3 Résultat d'existence du second ordre

Théorème 3.2 *Supposons que g et F satisfaisons les conditions suivantes*

C_1 *Soit K et O deux sous ensembles dans $\mathbb{R}^n$,K fermée ,O ouvert, F multifonction semi-continue supérieur à valeurs compactes*

C_2 *Il existe une fonction régulière $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$,tel que :*

$$F(x,y) \subset \partial^C f(y) \;\; pour \; tout \;\; y \in \mathbb{R}^n$$

C_3 *$g : \mathbb{R} \times K \times O \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de Carathéodory , il existe $m \in L^2(\mathbb{R})$ tel que*

$$\|g(t,x,y)\| \leq m(t), \;\; \forall (t,x,y) \in \mathbb{R} \times K \times O$$

C_4 *$\forall (t,x,v) \in \mathbb{R} \times K \times O, \exists w \in F(x,v)$ tel que (Condition Tangentielle)*

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+} \inf \frac{1}{h^2} d_K(x + hv + \frac{h^2}{2} w + \int_t^{t+h} g(\tau, x, v) d\tau) = 0$$

Alors, pour chaque $(x_0, y_0) \in K \times O$, *il existe* $T > 0$ *et une fonction* $x(.) : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *solution du problème (3.2).*

preuve. Soit $r > 0$ et $M > 0$ tel que $\mathbb{B}[y_0, r] \subset O$ et f est $M-$ Lipschitzienne sur $\mathbb{B}[y_0, r]$, alors par suite $\partial f(y) \subset M\overline{\mathbb{B}}$ pour chaque $y \in \mathbb{B}[y_0, r]$ de plus F est localement borné sur $\mathbb{B}[(x_0, y_0), r]$ i.e.

$$\sup\{\|v\|, v \in F(x, y), (x, y) \in \mathbb{B}[(x_0, y_0), r]\} \leq M \tag{3.12}$$

On choisissions T_1 tel que

$$\int_0^{T_1} (m(s) + M + 1)ds \;\; \leq \;\; \frac{r}{3} \tag{3.13}$$

On pose

$$T_2 \;\; = \;\; \min\{\frac{r}{3(M+1)}, \frac{2r}{3(\|y_0\| + r)}\} \tag{3.14}$$

et par suite, en note que $K_0 = (K \times \mathbb{B}[y_0, r]) \cap \mathbb{B}[(x_0, y_0), r]$ compacte dans $\mathbb{R}^n$

Choisissions T tel que

$$0 \leq T \;\; \leq \;\; \min\{T_1, T_2\} \tag{3.15}$$

Énonçons maintenant le lemme principal pour montrer ce résultat.

Lemme 3.2 *Soit F et g satisfaisant les conditions $C_1 - C_4$, alors pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\eta \in]0, \varepsilon[$ tel que pour $(t, x, v) \in [0, T] \times K_0$ il existe $w \in F(x, v) + \frac{\varepsilon}{T}\mathbb{B}$ et $h \in [\eta, \varepsilon]$ tel que*

$$(x + hv + \frac{h^2}{2}w + \int_t^{t+h} g(\tau, x, v)d\tau) \in K$$

preuve. Soit $(t, x, v) \in [0, T] \times K_0$, soit $\varepsilon > 0$, comme F semi continue supérieurement, il existe $\delta_{(x,v)} > 0$ tel que

$$F(y, u) \subset F(x, v) + \frac{\varepsilon}{T}\mathbb{B}, \forall (y, u) \in \mathbb{B}((x, v), \delta_{(x,v)}) \tag{3.16}$$

D'autre part pour tout $(s,y,u) \in [0,T]\times K_0$, par le condition Tangentiel, il existe $h_{(s,y,u)} \in$ $]0,\varepsilon]$ et $c \in F(y,u)$ tel que

$$d_K(y + h_{(s,y,u)}u + \frac{h^2_{(s,y,u)}}{2}c + \int_s^{s+h_{(s,y,u)}} g(\tau,y,u)d\tau) < h^2_{(s,y,u)}\frac{\varepsilon}{4T}$$

Considérons maintenant le sous l'ensemble suivant :

$$N(s,y,u) = \{(l,a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n, d_K(a+h_{(s,y,u)}b+\frac{h^2_{(s,y,u)}}{2}c+\int_l^{l+h_{(s,y,u)}} g(\tau,a,b)d\tau) < h^2_{(s,y,u)}\frac{\varepsilon}{4T}$$

Comme $\|f(l,a,b)\| \leq m(l)$ pour tout $(l,a,b) \in \mathbb{R}\times K\times O$ le corollaire de la convergence dominée donnée que la fonction

$$(l,a,b) \longrightarrow a + h_{(s,y,u)}b + \frac{h^2_{(s,y,u)}}{2}c + \int_l^{l+h_{(s,y,u)}} g(\tau,a,b)d\tau \text{ est continue}$$

Aussi la fonction

$$(l,a,b) \longrightarrow d_K(a + h_{(s,y,u)}b + \frac{h^2_{(s,y,u)}}{2}c + \int_l^{l+h_{(s,y,u)}} g(\tau,a,b)d\tau) \text{ est continue}$$

Par conséquent le sous ensemble $N(s,y,u)$ est ouvert de plus comme $(s,y,u) \in N(s,y,u)$, il existe $\mathbb{B}((s,y,u),\eta_{(s,y,u)})$ avec $\eta_{(s,y,u)} < \delta_{(x,v)}$ tel que $\mathbb{B}((s,y,u),\eta_{(s,y,u)}) \subset N(s,y,u)$

Le sous ensemble $[0,T]\times K_0$ est compacte, alors il admet un recouvrement des boules fini q $\mathbb{B}((s_i,y_i,u_i),\eta_i)$, pour simplicité, on prend

$$h_{(s_i,y_i,u_i)} = h_i, \eta_{(s_i,y_i,u_i)} = \eta_i, \eta = \min_{i=1,\dots,q} h_i > 0$$

Soit $(t,x,v) \in [0,T]\times K_0$. Comme $(t,x,v) \in \mathbb{B}((s_i,y_i,u_i),\eta_i)$,il existe $x_i \in K$ et $c_i \in F(y_i,u_i)$ tel que

$$\begin{aligned} \|c_i - \frac{2}{h_i^2}(x_i - x - h_i v - \int_t^{t+h_i} g(\tau,x,v)d\tau)\| &\leq \frac{1}{h_i^2}d_K(x + h_i v + \frac{h_i^2}{2}c_i + \int_t^{t+h_i} g(\tau,x,v)d\tau) + \frac{\varepsilon}{4T} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2T} \end{aligned}$$

Supposons que $w = \frac{2}{h_i^2}(x_i - x - h_i v - \int_t^{t+h_i} g(\tau,x,v)d\tau)$ alors

$$x_i = x + h_i v + \int_t^{t+h_i} g(\tau,x,v)d\tau \in K$$

Comme $(t,x,v) \in \mathbb{B}((s_i,y_i,u_i),\eta_i)$ et $\eta_i < \delta_{(x,v)}$, par (3.16) implique

$$F(y_i,u_i) \subset F(x,v) + \frac{\varepsilon}{2T}\mathbb{B}.$$

Alors

$$w \in F(x,v) + \frac{\varepsilon}{T}\mathbb{B}$$

■

Suite de la démonstration du théorème (3.2)

Étape 1 :**Construction des solutions approximantes**

Soit $(t,(x_0,y_0)) \in [0,T]\times \in K_0$ et $0 < \varepsilon < T$, grâce le lemme (3.2)

Il existe $0 < \eta < \varepsilon$, $h_0 \in [\eta,\varepsilon]$ et $w_0 \in F(x_0,y_0) + \frac{\varepsilon}{T}\mathbb{B}$ tel que

$$(x_0 + h_0 y_0 + \frac{h_0^2}{2} w_0 + \int_0^{h_0} g(\tau,x_0,y_0)d\tau) \in K$$

Supposons que

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h_0 y_0 + \dfrac{h_0^2}{2} w_0 + \displaystyle\int_0^{h_0} g(\tau,x_0,y_0)d\tau \\ y_1 = y_0 + h_0 w_0 \\ w_0 \in F(x_0,y_0) \subset \mathbb{B}(0,M+1), \end{cases}$$

Montrons que $(x_1, y_1) \in K_0$

$$\begin{aligned}
\|x_1 - x_0\| &= \|x_0 + h_0 y_0 + \frac{h_0^2}{2} w_0 + \int_0^{h_0} g(\tau, x_0, y_0) d\tau - x_0\| \\
&= \|h_0 y_0 + \frac{h_0^2}{2} w_0 + \int_0^{h_0} g(\tau, x_0, y_0) d\tau\| \\
&\leq h_0 \|y_0\| + \frac{h_0^2}{2} \|w_0\| + \int_0^{h_0} \|g(\tau, x_0, y_0)\| d\tau \\
&\leq T\|y_0\| + T(M+1) + \int_0^T (m(\tau)) d\tau \\
&\leq T\|y_0\| + \int_0^T (M + 1 + m(\tau)) d\tau \\
&\leq r \text{ d'ou } x_1 \in \mathbb{B}[x_0, r] \\
\|y_1 - y_0\| &= \|y_0 + h_0 w_0 - y_0\| \\
&\leq T\|w_0\| < T(M+1) < \frac{r}{3} \\
&\leq r \text{ d'ou } y_0 \in \mathbb{B}[y_0, r]
\end{aligned}$$

Alors $(x_1, y_1) \in K_0$

Par récurrence, pour $p \geq 2$ et pour $i = 1, ..., p-1$ nous construisons les suites suivantes $(h_i, (x_i, y_i), w_i) \in [\eta, \varepsilon] \times K_0 \times \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=0}^{p-1} h_i \leq T$ et

$$\begin{cases}
x_i = (x_{i-1} + h_{i-1} y_{i-1} + \frac{h_{i-1}^2}{2} w_{i-1} + \int_{h_{i-2}}^{h_{i-2}+h_{i-1}} g(\tau, x_{i-1}, y_{i-1}) d\tau) \in K \\
y_i = y_{i-1} + h_{i-1} w_{i-1} \\
w_{i-1} \in F(x_{i-1}, y_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{T}\mathbb{B}
\end{cases}$$

Comme $h_i \in]\eta, \varepsilon[$ il existe un entier s, tel que

$$\sum_{i=0}^{s-1} h_i < T \leq \sum_{i=0}^{s} h_i$$

Dans ce qui suit, choisissons ε petit tel que

$$\sum_{i=0}^{s-1} \frac{h_i^2}{2} \leq \sum_{i=0}^{s-1} h_i < T$$

pour tout $p = 1, ..., s-1$ on définit $(h_p)_p \subset [\eta, \varepsilon]$,$(x_p, y_p)_p \subset K_0$ et $(w_p)_p \subset F(x_p, y_p) + \frac{\varepsilon}{T}\mathbb{B}$

tel que

$$\begin{cases} x_p = (x_{p-1} + h_{p-1}y_{p-1} + \frac{h_{p-1}^2}{2}w_{p-1} + \int_{h_{p-2}}^{h_{p-2}+h_{p-1}} g(\tau, x_{p-1}, y_{p-1})d\tau) \in K \\ y_p = y_{p-1} + h_{p-1}w_{p-1} \\ w_{p-1} \in F(x_{p-1}, y_{p-1}) + \frac{\varepsilon}{T}\mathbb{B} \end{cases}$$

Par construction, pour $p = 1, ..., s-1$ nous avons que

$$\begin{cases} x_p = (x_0 + \sum_{i=0}^{p-1} h_i y_i + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{h_i^2}{2} w_i + \int_0^{h_0} g(\tau, x_0, y_0)d\tau + \sum_{i=0}^{p-1} \int_{\sum_{j=0}^{i-1} h_j}^{\sum_{j=0}^{i} h_j} g(\tau, x_i, y_i)d\tau) \in K \\ y_p = y_0 + \sum_{i=0}^{p-1} h_i w_i \\ w_i \in F(x_i, y_i) + \frac{\varepsilon}{T}\mathbb{B} \end{cases}$$

Montrons maintenant que les points $(x_p, y_p) \in K_0$

$$\begin{aligned} \|y_p - y_0\| &= \|y_0 + \sum_{i=0}^{p-1} h_i w_i - y_0\| \\ &\leq \sum_{i=0}^{p-1} h_i \|w_i\| < T(M+1) \\ &\leq \frac{r}{3} < r \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \ y_p \in \mathbb{B}[y_0, r] \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} \|x_p - x_0\| &= \|x_0 + \sum_{i=0}^{p-1} h_i y_i + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{h_i^2}{2} w_i + \int_0^{h_0} g(\tau, x_0, y_0)d\tau + \sum_{i=0}^{p-1} \int_{\sum_{j=0}^{i-1} h_j}^{\sum_{j=0}^{i} h_j} g(\tau, x_i, y_i)d\tau - x_0\| \\ &\leq \sum_{i=0}^{p-1} h_i \|y_i\| + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{h_i^2}{2} \|w_i\| + \int_0^{h_0} \|g(\tau, x_0, y_0)\|d\tau + \sum_{i=0}^{p-1} \int_{\sum_{j=0}^{i-1} h_j}^{\sum_{j=0}^{i} h_j} \|g(\tau, x_i, y_i)\|d\tau \\ &\leq (\|y_0\| + r) \sum_{i=0}^{p-1} h_i + (M+1) \sum_{i=0}^{p-1} \frac{h_i^2}{2} + \int_0^T m(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{i=0}^{p-1} h_i \leq T \text{ et } \sum_{i=0}^{p-1} \frac{h_i^2}{2} \leq T$$

Par la relation (3.13) et (3.14), on obtient que

$$\begin{aligned} \|x_p - x_0\| &\leq (\|y_0\| + r)T + \int_0^T (M + 1 + m(\tau))d\tau \\ &\leq (\|y_0\| + r)T + \frac{r}{3} \leq r \end{aligned}$$

$$\text{d'ou} \quad x_p \in \mathbb{B}[x_0, r] \qquad (3.18)$$

Alors par (3.17) et (3.18) les points $(x_p, y_p) \subset K_0$

Pour tout $k \neq 0$ et pour $q = 0, ..., s$ on note par h_q^k une réel associé à $\varepsilon = \frac{1}{k}$ et $(t, x_q, y_q) = (h_{q-1}^k, x_p, y_p)$ qui donne par le lemme (3.2). Soit la suite $(\tau_k^q)_k$ défini par

$$\begin{cases} \tau_k^0 = 0, \quad \tau_k^s = T \\ \tau_k^q = h_0^k + ... + h_{q-1}^k \end{cases}$$

et définissions les suites de fonctions absolument continue $(x_k(.))_k$ dans sous intervalle $[\tau_k^{q-1}, \tau_k^q]$ par

$$\begin{cases} x_k(t) = x_{q-1} + (t - \tau_k^{q-1})y_{q-1} + \dfrac{(t - \tau_k^{q-1})^2}{2} w_{q-1} + \displaystyle\int_{\tau_k^{q-1}}^t (t - \tau)g(\tau, x_{q-1}, y_{q-1})d\tau \\ x_k(0) = x_0 \end{cases}$$

Par la définition de x_k, nous avons que

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = y_{q-1} + (t - \tau_k^{q-1})w_{q-1} + \displaystyle\int_{\tau_k^{q-1}}^t g(\tau, x_{q-1}, y_{q-1})d\tau \ \text{ p.p } [\tau_k^{q-1}, \tau_k^q] \\ \ddot{x}_k(t) = w_{q-1} + g(t, x_{q-1}, y_{q-1}) \ \text{ p.p } [\tau_k^{q-1}, \tau_k^q] \end{cases}$$

Définissions la fonction $\theta_k(.) : [0, T] \longrightarrow [0, T]$ par

$$\begin{cases} \theta_k(0) = 0 \\ \theta_k(t) = \tau_k^{q-1}, t \in]\tau_k^{q-1}, \tau_k^q] \end{cases}$$

satisfaisant les propriétés suivantes : $k > 1, |t - \theta_k(t)| \leq \frac{T}{k}$, alors $\theta_k(t)$ converge uniformément vers t et $x_{q-1} = x_k(\theta_k(t)) \in \mathbb{B}[x_0, r]$ et $y_{q-1} = y_k(\theta_k(t)) \in \mathbb{B}[y_0, r]$

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = y_k(\theta_k(t)) + (t - \theta_k(t))w_k(\theta_k(t)) + \displaystyle\int_{\theta_k(t)}^{t} g(\tau, x_k(\theta_k(\tau)), y_k(\theta_k(\tau)))d\tau \text{ p.p } [0, T] \\ \ddot{x}_k(t) = w_k(\theta_k(t)) + g(t, x_k(\theta_k(t)), y_k(\theta_k(t))) \text{ p.p } [0, T] \end{cases}$$

Étape 2 :**Convergence des solutions approximantes**

$$\begin{aligned} \|\ddot{x}_k(t)\| &= \|w_k(\theta_k(t)) + g(t, x_k(\theta_n(t)), y_k(\theta_k(t))\| \\ &\leq \|w_k(\theta_k(t))\| + \|g(t, x_k(\theta_k(t)), y_k(\theta_k(t))\| \\ \int_0^T \|\ddot{x}_k(t)\|^2 dt &\leq \int_0^T (M + 1 + m(t))^2 dt \qquad (3.19) \\ \|\dot{x}_k(t)\| &= \|\dot{x}_k((\theta_k(t))) + \int_{\theta_k(t)}^{t} \ddot{x}_k(\tau)d\tau\| \\ &= \|\dot{x}_k(\theta_k(t)) + \dot{x}_k(0) - \dot{x}_k(0) + \int_{\theta_k(t)}^{T} (\ddot{x}_k(\theta_k(\tau))d\tau\| \\ &\leq \|y_0\| + \|\int_0^T (\ddot{x}_k(\theta_k(\tau))d\tau\| \\ &\leq \|y_0\| + \|\int_0^T (M + 1 + m(\tau))d\tau\| \\ &\leq \|y_0\| + \frac{r}{3} \\ \|x_k(t)\| &= \|x_k((\theta_k(t))) + \int_{\theta_k(t)}^{t} \dot{x}_k(\tau)d\tau\| \\ \|x_k(t)\| &= \|x_k((\theta_k(t))) + x_k(0) - x_k(0) + \int_{\theta_k(t)}^{t} \dot{x}_k(\tau)d\tau\| \\ &\leq \|x_k(0)\| + \int_0^T \|\dot{x}_k(\tau)\|d\tau \\ &\leq \|x_0\| + T(\|y_0\| + \frac{r}{3}) < \|x_0\| + \frac{2r}{3} \end{aligned}$$

Alors par (3.19) la suite $(\ddot{x}_k(.))_k$ est bornée dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$, $(\dot{x}_k(.))_k$, $(x_k(.))_k$ est bornée dans $\mathbb{R}^n$ et equicontinue puisque

$$\begin{aligned}
\|\dot{x}_k(t)-\dot{x}_k(s)\| &= \|y_{q-1}-\int_{\tau_k^{q-1}}^{t}\ddot{x}_k(\tau)d\tau - y_{q-1}\int_{\tau_k^{q-1}}^{s}\ddot{x}_k(\tau)d\tau\| \\
&= \|\int_s^t \ddot{x}_k(\tau)d\tau\| \\
&\leq |\int_s^t \|\ddot{x}_k(\tau)\|d\tau| \\
&= |\int_s^t (M+1+m(\tau))d\tau|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|x_k(t)-x_k(s)\| &= \|x_k(\tau_k^{q-1})+\int_{\tau_k^{q-1}}^{t}x_k(\tau)d\tau - x_k(\tau_k^{q-1})+\int_{\tau_k^{q-1}}^{s}x_k(\tau)d\tau\| \\
&= \|\int_t^s x_k(\tau)d\tau\| \\
&\leq |\int_t^s \|x_k(\tau)\|d\tau| \\
&= (\|y_0\|+\frac{T}{3})|t-s|
\end{aligned}$$

Par le théorème d' Ascoli's (1.2) les ensembles $(x_k(.))_k$, $(\dot{x}_k(.))_k$ est relativement compactes dans $C([0,T],\mathbb{R}^n)$ .Alors il existe une sous suite qui en note encore $(x_k(.))_k$ et une fonction absolument continue $x(.):[0,T]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ telle que

i) x_k converge uniformément continue vers x sur $[0,T]$

ii) $\dot{x}_k$ converge uniformément vers $\dot{x}$ sur $[0,T]$

iii) $\ddot{x}_k$ converge faiblement vers $\ddot{x}$ dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$

Par la construction, on a

$$\ddot{x}_k(t)-g(t,x_k(\theta_k(t)),y_k(\theta_k(t)))=w_k(\theta_k(t))\in F(x_k(\theta_k(t)),y_k(\theta_k(t))+\frac{1}{kT}\mathbb{B}$$

$$d_{gphF}(x_k(t),\dot{x}_k(t),\ddot{x}_k(t)-g(t,x_k(\theta_k(t)),y_k(\theta_k(t))\leq\|x_k(t)-x_k(\theta_k(t))\|+\|\dot{x}_k(t)-\dot{x}_k(\theta_k(t))\|+\frac{1}{kT}$$

Comme $\theta_k(t)$ converge uniformément vers t sur $[0,T]$ et par (i),(ii), en déduire que $x_k(\theta_k(t))$ converge uniformément vers $x(t)$ et $\dot{x}_k(\theta_k(t))$ converge uniformément vers $\dot{x}(t)$

sur $[0, T]$

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} d_{gphF}(x_k(t), \dot{x}_k(t), \ddot{x}_k(t) - g(t, x_k(\theta_k(t)), y_k(\theta_k(t))) = 0 \tag{3.20}$$

Comme g est une fonction de Carathéodory la suite $(g(., x_k(\theta_k(t)), \dot{x}_k(\theta_k(t))))_k$ converge vers $g(., x(.), \dot{x}(.))$ dans $L^2([0, T], \mathbb{R}^n)$

Puisque $\partial f(x)$ semi continue supérieure à valeurs fermée convexe dans $\mathbb{R}^n$, alors par le théorème (1.10), nous avons

$$\ddot{x}(t) - g(t, x(t), \ddot{x}(t)) \in \partial f(x(t)) \text{ p.p } [0, T] \tag{3.21}$$

Étape 3 :**Existence de solution**

Comme $f(\dot{x}(t))$ est à variation bornée sur I par le proposition 1.4.11 nous avons que :

$$\frac{d}{dt} f(\dot{x}(t)) = \langle \ddot{x}(t), \ddot{x}(t) - g(t, x(t), \dot{x}(t)) \rangle \ p.p \ sur \ [0.T]$$

$$\begin{aligned}
f(\dot{x}(T)) - f(\dot{x}(0)) &= \int_0^T \frac{d}{dt} f(\dot{x}(\tau)) d\tau \\
&= \int_0^T \langle \ddot{x}(\tau), \ddot{x}(\tau) - g(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) \rangle d\tau \\
&= \int_0^T \langle \ddot{x}(\tau), \ddot{x}(\tau) \rangle d\tau - \int_0^T \langle \ddot{x}(\tau), g(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) \rangle d\tau \\
&= \int_0^T \|\ddot{x}(\tau)\|^2 d\tau - \int_0^T \langle \ddot{x}(\tau), g(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) \rangle d\tau
\end{aligned} \tag{3.22}$$

D'autre part, pour tout $q = 1, ..., s$

$$\ddot{x}_k(t) - g(t, x_k(\tau_k^{q-1}), \dot{x}_k(\tau_k^{q-1})) \in \partial f(x_k(\tau_k^{q-1})) + \frac{1}{kT} \mathbb{B}$$

Alors, il existe $b_q \in \mathbb{B}$ tel que

$$\ddot{x}_k(t) - g(t, x_k(\tau_k^{q-1}), \dot{x}_k(\tau_k^{q-1})) + \frac{1}{kT} b_q \in \partial f(x_k(\tau_k^{q-1}))$$

Par les propriétés du sous différentiel, de fonction régulière, on déduit que pour tout $\zeta \in \partial f(x_k(\tau_k^{q-1}))$

$$f(\dot{x}_k(\tau_k^q)) - f(\dot{x}_k(\tau_k^{q-1})) \geq \langle \dot{x}_k(\tau_k^q) - \dot{x}_k(\tau_k^{q-1}), \zeta \rangle \tag{3.23}$$

En particulier pour

$$\zeta = \ddot{x}_k(t) - g(t, x_k(\tau_k^{q-1}), \dot{x}_k(\tau_k^{q-1})) + \frac{1}{kT} b_q$$

Nous avons

$$f(\dot{x}_k(\tau_k^q)) - f(\dot{x}_k(\tau_k^{q-1})) \geq \langle \dot{x}_k(\tau_k^q) - \dot{x}_k(\tau_k^{q-1}), \ddot{x}_k(t) - g(t, x_k(\tau_k^{q-1}), \dot{x}_k(\tau_k^{q-1})) + \frac{1}{kT} b_q \rangle$$

$$= \langle \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \ddot{x}_k(\tau) d\tau, \ddot{x}_k(t) \rangle - \langle \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \ddot{x}_k(\tau) d\tau, g(t, x_k(\tau_k^{q-1}), \dot{x}_k(\tau_k^{q-1})) \rangle + \langle \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \ddot{x}_k(\tau) d\tau, \frac{1}{kT} b_q \rangle$$

$$\begin{aligned}
&\geq \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \langle \ddot{x}_k(\tau), \ddot{x}_k(\tau) \rangle d\tau - \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \langle \ddot{x}_k(\tau), g(\tau, x_k(\tau_k^{q-1}), \dot{x}_k(\tau_k^{q-1})) \rangle d\tau + \frac{1}{kT} \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \langle \ddot{x}_k(\tau), b_q \rangle d\tau \\
&= \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \|\ddot{x}_k(\tau)\|^2 d\tau - \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \langle \ddot{x}_k(\tau), g(\tau, x_k(\tau_k^{q-1}), \dot{x}_k(\tau_k^{q-1})) \rangle d\tau + \frac{1}{kT} \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \langle \ddot{x}_k(\tau), b_q \rangle d\tau
\end{aligned}$$

Par addition de n inégalités on obtient

$$\begin{aligned}
f(\dot{x}_k(T)) - f(\dot{x}(0)) \ &\geq \ \int_0^T \|\ddot{x}_k(\tau)\|^2 d\tau - \sum_{q=1}^{s} \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \langle \ddot{x}_k(\tau), g(\tau, x_k(\tau_k^{q-1}), \dot{x}_k(\tau_k^{q-1})) \rangle d\tau \\
&+ \ \sum_{q=1}^{s} \frac{1}{kT} \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \langle \ddot{x}_k(\tau), b_q \rangle d\tau
\end{aligned} \tag{3.24}$$

En effet, que

$$\Big(\sum_{q=0}^{s} \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \langle \ddot{x}_k(\tau), g(\tau, x_k(\tau_k^{q-1}), \dot{x}_k(\tau_k^{q-1})) \rangle d\tau\Big)_n \ \textit{converges vers} \ \int_0^T \langle \ddot{x}(\tau), g(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) \rangle d\tau$$

$$\begin{aligned}
&\Big\| \sum_{q=0}^{s} \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \langle \ddot{x}_k(\tau), g(\tau, x_k(\tau_k^{q-1}), \dot{x}_k(\tau_k^{q-1})) \rangle d\tau - \int_0^T \langle \ddot{x}(\tau), g(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) \rangle d\tau \Big\| \\
&= \Big\| \sum_{q=0}^{s} \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} (\langle \ddot{x}_k(\tau), g(\tau, x_k(\tau_k^{q-1}), \dot{x}_k(\tau_k^{q-1})) \rangle - \langle \ddot{x}(\tau), g(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) \rangle) d\tau \Big\| \\
&\leq \sum_{q=0}^{s} \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \| \langle \ddot{x}_k(\tau), g(\tau, x_k(\tau_k^{q-1}), x_k(\tau_k^{q-1})) \rangle - \langle \ddot{x}(\tau), g(\tau, x(\tau), \ddot{x}(\tau)) \rangle \| d\tau \\
&\leq \sum_{q=0}^{s} \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} \| \langle \ddot{x}_k(\tau), g(\tau, x_k(\tau_k^{q-1}), \dot{x}_k(\tau_k^{q-1})) \rangle - \langle \ddot{x}_k(\tau), g(\tau, x_k(\tau), \dot{x}_k) \rangle \| d\tau
\end{aligned}$$

$$+\sum_{q=0}^{s}\int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q}\| \langle \ddot{x}_k(\tau), g(\tau, x_k(\tau), \dot{x}_k(\tau))\rangle - \langle \ddot{x}_k(\tau), g(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau))\rangle \| d\tau$$

$$+\sum_{q=0}^{s}\int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q}\| \langle \ddot{x}_k(\tau), g(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau))\rangle - \langle \dot{x}(\tau), g(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau))\rangle \| d\tau$$

$$=\sum_{q=0}^{s}\int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q}\| \langle \ddot{x}_k(\tau), g(\tau, x_k(\tau_k^{q-1}), x_k(\tau_k^{q-1}))\rangle - \langle \ddot{x}_k(\tau), g(\tau, x_k(\tau), x_k(\tau))\rangle \| d\tau$$

$$+\int_0^T \| \langle \ddot{x}_k(\tau), g(\tau, x_k(\tau), x_k(\tau))\rangle - \langle \ddot{x}_k(\tau), g(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau))\rangle \| d\tau$$

$$+\int_0^T \| \langle \ddot{x}_k(\tau), g(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau))\rangle - \langle \ddot{x}(\tau), g(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau))\rangle \| d\tau$$

Comme g est de Carathéodroy, et i),ii),iii) on obtient que

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}\sum_{q=0}^{s}\int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q}\langle \ddot{x}_k(\tau), g(\tau, x_k(\tau_k^{q-1}), \dot{x}_k(\tau_k^{q-1}))\rangle d\tau = \int_0^T \langle \ddot{x}(\tau), g(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau))\rangle ds$$

En passant à la limite dans l'inégalité (3.24) quand $k \longrightarrow \infty$ et en utilisant la continuité de f, nous avons

$$f(\dot{x}(T)) - f(\dot{x}_0) \geq \lim_{k\longrightarrow\infty}\sup \int_0^T \|\ddot{x}_k(\tau)\|^2 d\tau - \int_0^T \langle \ddot{x}(\tau), g(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau))\rangle d\tau$$

De plus par (3.22)

$$\|\ddot{x}\|^2_{L^2(I,\mathbb{R}^n)} \geq \lim_{k\longrightarrow\infty}\sup \|\ddot{x}_k\|^2_{L^2(I,\mathbb{R}^n)}$$

On définit une fonction φ par

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \varphi(x) = \sqrt{x} \quad \text{croissante} \end{aligned}$$

$$\varphi(\|\ddot{x}\|^2_{L^2(I,\mathbb{R}^n)}) \;\geq\; \varphi(\lim_{k\longrightarrow\infty}\sup \|\ddot{x}_k\|^2_{L^2(I,\mathbb{R}^n)})$$

D'après la proposition (1.2.1), on obtient que

$$\begin{aligned} \|\ddot{x}\|_{L^2(I,\mathbb{R}^n)} &\geq \lim_{k\longrightarrow\infty}\sup \varphi(\|\ddot{x}_k\|^2_{L^2(I,\mathbb{R}^n)}) \\ &\geq \lim_{k\longrightarrow\infty}\sup \|\ddot{x}_k\|_{L^2(I,\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

D'après le théorème (1.2.2)la suite $(\ddot{x}_k)_k$ converge fortement vers $\ddot{x}$ dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$, alors il existe une sous suite qui en note encore $(\ddot{x}_k)_k$ converge ponctuellement vers $\ddot{x}$ presque partout sur $[0,T]$ par (3.20), $(x_k(t), \dot{x}_k(t), \ddot{x}_k(t) - g(t, x_k(t), \dot{x}_k(t))) \in gphF$

Puisque F s.c.s à valeurs fermée d'après le théorème (1.8) le gphF est fermé conséquence

$$(x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t) - g(t, x(t), \dot{x}(t))) \in gphF \ \ p.p \ \ sur \ \ [0,T]$$

$$\text{i.e } \ddot{x}(t) \in F(x(t), \dot{x}(t)) + g(t, x(t), \dot{x}(t)) \ \ \text{p.p} \ \ [0,T]$$

Finalement, montrons que $x(t) \in K$. Comme $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} \theta_k(t) = t$ pour tout $t \in [0,T]$ et $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} \|x(t) - x_k(\theta_k(t))\| = 0, x_k(\theta_k(t)) \in K$ et K fermée on obtient $x(t) \in K$. ■

Bibliographie

[1] J.P. Aubin and A. Cellina, *Differential inclusions*. Set-valued maps and Viablity Theory, Springer-Verlarg, Berlin,(1984).

[2] F. Ancona and G. Colombo, *Existence of solutions for a class of nonconvex differential inclusions*

[3] M. Aitalioubrahim and S. Sajid, *Viability problem with perturbation in Hilbert space*, Electronic journal of qualitative theory of differential equations,(2007), No.7, $1-14$.

[4] S. Amine and R. Morchadi, S. Sajid, *Carathéodory prrturbation of second-order differential inclusion with constraints* , Electronic journal of Equalions, Vol. (2005) No.144,pp.$1-11$ ISSN :$1072-6691$

[5] A. Bressan, A. Cellina and G. Colombo *Upper Semicontinuous Differential Inclusions Without convexity* , v. 106, Number 3. July 1989

[6] F. Bernard and L. Thibault, *Uniform Prox-regularity of functions and epigraphs in Hilbert spaces,Nonlinear Analysis* , 60(2005)$187-207$.

[7] M. Bounkhel, *Existence Results of Nonconvex Differential Inclusions*, J. Portugaliae Mathematica, Vol.59(2002), No.3,pp.$283-310$

[8] M. Bounkhel and T. Haddad, *Existence Results to viable solution for Nonconvex Differential Inclusions*, EJDE, (2005), No.50,pp.$1-10$,

[9] H. Benabdallah, *Sur une Classe d'equations Differentielles Multivoques Semi-continues Superieurement a valeures Nonconvexes* , Seminaire D'analyse convexe Montpellier (1991), Expose $N°6$.

[10] H. Benabdallah, C. Castaing and A. Salvadori *Compactness and discretization methods for differential inclusions and evolution problems,* Atti. Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, XLV,(1997), $9-51$

[11] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle théorie et applications.*

[12] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi groupes de contractions dans les espaces de Hilbert,* North Holland Publ. Company, Amsterdam-London, 1973

[13] C. Castaing and M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions,* Lecture Notes in Math. Springer-Verlarg, Berlin Vol.580,1970.

[14] F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis,* Vancouver,British Columbia, March.1983.

[15] F. H. Clarke,Y.S.Ledyaev,R.J. Stern et P.R. Wolenki, *Nonsmooth Analysis and control theory,* Springer-Verlarg,New york,Inc.1997.

[16] K. Deimling,*Multivalued differential equations walter de gruter,* Berlin, New York 1992

[17] R. Descombes,*Cours d'analyse, Librairie Vuibert,*Paris 1962

[18] T. Haddad and M. Yarou, *Existence of Solutions for nonconvex second order differential inclusions,the infinite dimensional space.* Electronic Journal of Differential Equations, Vol (2006) , No. 33, pp. $1-8$.

[19] M. Kisieliwiez, *Differential Inclusions and Optimal Control, PWN Polish Scientific Publishers,* Tnarzana and Kluwer Academic Publishers.

[20] V. Lupulescu, *Existence of solutions to a class of second order differential inclusions*, Techninal report, CM $01/I - 11$, Department of Mathematics of Aveiro University,2001.

[21] V. Lupulescu, *Existence of solutions for non convex second order differential inclusions*, Applied Mathematics E-Notes, 3(2003), $115 - 123$

[22] V. Lupulescu,*Existence of Solutions for nonconvex Functional Differential Inclusions*, Electronic Journal of Differential Equations,Vol (2004), No. 141, pp. $1 - 6$.

[23] V. Lupulescu, *A viability result for second-order differential inclusions.* Elect Journal of Differential Equations,(2002) , No. 76, pp. $1 - 12$.

[24] R. Mochadi and S. Sajid, *A viability result for a first-order differential inclusion* Vol. 63 Fasc.$1 - 2006$

[25] R. Mochadi and S. Gautier *A viability result for a first-order differential inclusion without convexity* Preprint University pari 1995

[26] P. Rossi, *Viability for upper semi continuous differential inclusions without convexity* , Diff and Integral Equations, $5(2)(1992), 455 - 459$

[27] M. Yarou, *Discretization Methods for Nonconvex Differential Inclusions,* EJQTDE, 2009, N 12, 1-10.