REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DE JIJEL

Faculté des sciences

Département de mathématiques

N° d'ordre :

Série :

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

Spécialité Mathématiques

Option Analyse

Thème

Génération de semi-groupes à singularités par une classes d'opérateurs différentiels

par

YACINE HALIM

Soutenu le :15/07/2010 Devant le Jury :

Président :	A. AIBECHE	Prof.	Univ.	Setif
Rapporteur :	M. DENCHE	Prof.	Univ.	Constantine
Examinateurs :	D. AZZAM-LAOUIR	Prof.	Univ.	Jijel
	C. SAIDOUNI	MC.	Univ.	Constantine

LABORATOIRE DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES(LMPA)

515/9

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DE JIJEL

Faculté des sciences

Département de mathématiques

N° d'ordre :
Série :

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

Spécialité Mathématiques

Option Analyse

Thème

Génération de semi-groupes à singularités par une classes d'opérateurs différentiels

par

YACINE HALIM

Soutenu le :15/07/2010 Devant le Jury :

Président :	A. AIBECHE	Prof.	Univ.	Setif
Rapporteur :	M. DENCHE	Prof.	Univ.	Constantine
Examinateurs :	D. AZZAM-LAOUIR	Prof.	Univ.	Jijel
	C. SAIDOUNI	MC.	Univ.	Constantine

LABORATOIRE DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES(LMPA)

Remerciements

Mes remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il ma donné pour terminer ce mémoire.

Je remercie vivement monsieur Mohamed DENCHE professeur à l'université de Constantine, d'avoir accepté de me proposer le sujet de ce mémoire, de m'avoir guidé et conseillé jusqu'à ce que ce travail voit enfin le jour et soit entre vos mains aujourd'hui.

De plus, je remercie tous les membres du jury. Son président, M. Aissa AIBECHE professeur à l'université de sétif pour qui j'ai une grande estime, ainsi que les autres membres, Madame Dalila AZZAM-LAOUIR professeur à l'université de Jijel, M. Cherif SAIDOUNI maître de conférence à l'université de Constantine, de m'avoir fait l'honneur de corriger, commenter et noter ce travail.

Je remercie enfin tous mes collègues et amis du laboratoire et surtout M^{elle}. Sabrina IZZA, qui m'a aider dans la rédaction de ce travail.

A mes parents.
A ma famille.

A mes enseignants,
mes collèques,
et mes amies.

Table des matières

Notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long du travail :

$\mathbb{R}$	l'ensemble des nombres réels.
u'	$:= \partial_t u.$
$L(E,F)$	espace des applications linéaires continues de E dans F.
$\mathcal{C}(E,F)$	ensemble des applications linéaires et fermés de E dans F.
$D(A)$	domaine de l'opérateur A.
$\rho(A)$	ensemble résolvant de l'opérateur A.
$L^p(\Omega)$	$:= \{u \textit{ mesurable sur } \Omega \textit{ et } \int_\Omega \lvert u\rvert^p dx < \infty\}, 1 \le p < \infty.$
$Re\varrho$	partie real du nombre ϱ.
A^{-1}	L'inverse de l'opérateur linéaire A.
$R(A)$	la range de l'opérateur linéaire A.
$(A-\lambda)^{-1}$	La résolvante d'un opérateur linéaire A.
$C^\epsilon(I;E)$	$: = \{ \text{ f} : \text{I} \longrightarrow E : [f]_\epsilon := \sup_{t,\,s\in I,\, t\neq s} \frac{\lVert f(t)-f(s)\rVert_E}{\lvert t-s\rvert^\epsilon} < +\infty\},$
$\lVert f\rVert_{C^\epsilon(I;E)}$	$:= \lVert f\rVert_{C(I;E)} + [f]_\epsilon.$
$C^{k+\epsilon}(I;E)$	$:= \{ \text{ f} \in C_b^k(I;E) : f^{(k)} \in C^\epsilon(I;E)\}.$
$\lVert f\rVert_{C^{k+\epsilon}(I;E)}$	$:= \lVert f\rVert_{C_b^k(I;E)} + [f^{(k)}]_{C^\epsilon(I;E)}.$
$\lVert f\rVert_{C_{0,\mu}}$	$:= \sup\limits_{0\le t\le 1} \lVert t^\mu f(t)\rVert.$
$\lVert f\rVert_{C^\epsilon_{0,\mu}}$	$:=\lVert f\rVert_{C_{0,\mu}} + [f]_\epsilon.$
$\lVert f\rVert_{L^p}$	$:=\left(\int_\Omega \lvert f(x)\rvert^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ où $p \in [1,+\infty[.$
$\lVert f\rVert_{L^\infty}$	$:= \inf\left\{c>0;\ \lvert f(x)\rvert \le c; \text{p.p. sur } \Omega\right\}.$

Introduction

La théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires à un paramètre dans un espace de Banach a commencé dans la première moitié du 20^{eme} siècle, a acquis sa base en 1948 avec l'énoncé du théorème de Hille-Yosida qui a caracterisé les générateur d'un semi-groupe et a atteint son sommet avec l'édition en 1957 du livre " semi-groupes et analyse fonctionnelle " par E. Hille et R.S. Phillips.

Dans les années 1970 et 80, grâce aux efforts de différentes écoles, la théorie a atteint un certain niveau de perfection, qui est bien représenté dans les monographies par E.B. Davies , J.A. Goldstein , A. Pazy et bien d'autres.

Aujourd'hui, la situation est caractérisée par des applications multiples de cette théorie non seulement aux domaines traditionnels tels que les équations aux dérivées partielles ou des processus stochastiques, mais aussi à d'autres domaines où elle est devnue un outil important, tel la résolution des équations intégro-différentielles et des équations différentielles fonctionnelles, en quantique mécanique ou dans la théorie du contrôle de dimension infinie. Les méthodes des semi-groupes sont également appliquées avec succès aux équations concrètes résultant, par exemple, de la dynamique des populations ou la théorie de transport. Il est tout naturel cependant, que la théorie des semi-groupes soit en concurrence avec d'autres approches dans tous les domaines. Dans son ensemble elle est la boîte à outils pertinents d'analyse fonctionnelle et présente maintenant une image très diversifiée.

Le présent travail est consacré à l'étude d'une certaine classe de semi-groupes générés par des opérateurs à domaine non dense dits semi-groupes à singularités et à la génération de ces derniers par une classe d'opérateurs différentiels avec conditions aux limites du type intégral.

Ce mémoire est partagé en cinq chapitres. Dans le premier on énonce tout les résultats de base qui serviront dans les chapitres suivants. On rappellera, en particulier, des notions d'analyse fonctionnelle qui nous sont nécessaires. cela concerne les semi-groupes d'opérateurs linéaires, les opérateur à puissances fractionaires, les espaces de Hölder et on donne un exemple d'opérateur différentiel du second ordre dont la résolvante a une croissance exponentielle. Une bonne partie est consacrée à la construction de la fonction de Green d'opérateurs différentiels du second ordre avec conditions aux limites génerales du type intégral

Le **Chapitre 2** a été bati dans son ensemble autour de semi-groupes de classe $A(\alpha, \beta)$. On montrera le résultat principale suivant

Théorème 0.0.1

supposons que dans le plan complexe $Rc\lambda \geq \omega$ la résolvante de l'opérateur A existe et vérifie

$$\|(A+\lambda I)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\lambda|^r}, \tag{1}$$

avec $r \in (0,1]$. Alors il existe un semi-groupe de classe $A(\alpha, \beta)$ engendré par l'opérateur A. De plus, $\alpha = r^{-1} - 1$ et $\beta = 2r^{-1} - 1$.

Dans le **Chapitre 3** on donne la démonstration d'un résultat enoncé par Yu. t. Sil'chenko et qui étudie l'existence de la solution du problème de Cauchy du premier ordre

$$\begin{cases} v'(t) + A(t)v(t) = f(t), \\ v(0) = v_0, \end{cases} \tag{2}$$

dans un espace de Banach E, où $A(t)$ est un opérateur linéaire dont le domaine D, où $\overline{D} \neq E$.

Et dans le **Chapitre 4**, on etudie l'équation différentielle abstraite du premier ordre suivante

$$\begin{cases} v' + A(t)v = f(t), \quad 0 < t \leq 1, \\ \int_0^1 \Phi(t)v(t)dt = v_1, \end{cases} \tag{3}$$

dans l'espace de Banach $E = L_2$, où $A(t)$ et Φ sont des fonctions données à valeurs opérateurs, $f(t)$ une fonction à valeurs dans E, et v_1 un élément de E. Enfin le dernier chapitre est consacré à l'étude du problème aux limites pour une équation aux dérivées partielles du second ordre du type parabolique avec conditions du type intégrales suivante

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[a(t,x)\dfrac{\partial v}{\partial x}\Big] + b(x) + f(t,x), \\ v(t,0) = 0, \ \displaystyle\int_0^1 \varphi(x)v(t,x)dx = 0, \\ \displaystyle\int_0^1 [\Phi_1(t)v(t,x) + \Phi_2(t)v'(t,x)]dt = v_1(x). \end{cases} \tag{4}$$

Où $t \in (0,1]$, $x \in [0,1]$, $a(t,x)$, $b(x)$ et $f(t,x)$ $\varphi(x)$,$\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ et $v_1(x)$ sont des fonctions données. $a(t,x) \geq a_0 > 0$, et $b(x) \leq -b_0$ pour chaque a_0 et b_0 suffisament grand. L'étude est faite par la réduction du problème au problème aux limite (3) étudié precédement.

Chapitre 1

Rappels et définitions

1.1 Intégrale de Dunford

Soit E_0 un espace de Banach complexe de norme notée $|\ |_{E_0}$; $L(E_0)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de E_0 dans lui -même, ou encore l'espace des opérateurs bornés sur E_0, muni de la norme $\|A\| = \sup_{|x|_{E_0} \leq 1} |Ax|_{E_0}$. $L(E_0)$ est un espace de Banach.
Soit A un opérateur dans E_0, de domaine $D(A)$. On pose

$$A_\lambda = \lambda I - A, \lambda \in \mathbb{C}$$

où $I : E_0 \longrightarrow E_0$ est l'identité sur E_0.

1.1.1 Les opérateurs bornés, fermés

Définition 1.1.1

Soit $A : D(A) \subset E_0 \longrightarrow E_0$.

i) *A est dit **borné** si*

$$D(A) = E_0 \text{ et } \sup_{|x|_{E_0} \leq 1} |Ax|_{E_0} < +\infty$$

et on écrit $A \in L(E_0)$.

ii) *A est dit* ***fermé*** *si*

$$G(A) := \{(x, Ax) \in E_0 \times E_0 : x \in D(A)\}$$

est fermé de $E_0 \times E_0$. *Ceci équivaut à dire que si une suite* (u_n) *de* $D(A)$ *telle que* $u_n \longrightarrow u$ *dans* E_0 *et* $Au_n \longrightarrow f$ *dans* E_0, *alors*

$$\begin{cases} u \in D(A), \\ f = Au. \end{cases}$$

iii) *A est dit* ***fermable*** *s'il existe* $\overline{A}$, *un opérateur linéaire sur* E_0, *tel que* $\overline{G(A)} = G(\overline{A})$, *dans ce cas* $\overline{A}$ *est à determination unique, c'est un opérateur fermé appelé* ***la fermeture*** *de A.*

Si A et B sont deux opérateurs linéaires dans E_0, *de domaines respectifs* $D(A)$ *et* $D(B)$, *on écrira* $A \subset B$ *pour signifier que B est un prolongement de A i.e.,*

$$\begin{cases} D(A) \subset D(B), \\ \\ Bx = Ax \ , \ si \ x \in D(A). \end{cases}$$

Notez que si A est fermable, $\overline{A}$ *est le plus petit prolongement fermé de A.*

1.1.2 Ensemble et opérateur résolvant. Spectre de A

Définition 1.1.2

i) $\rho(A)$ ***l'ensemble résolvant de*** *A, est l'ensemble des* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tels que :*

- $A_\lambda(D(A))$ *est dense dans* E_0.
- A_λ^{-1} *existe et est continu de* $A_\lambda(D(A))$ *(muni de la topologie induite par* E_0*) dans* E_0.

ii) *On note*

$$R(\lambda, A) = A_\lambda^{-1} = (\lambda I - A)^{-1}$$

$R(\lambda, A)$ *est appelé* ***l'opérateur résolvant*** *ou* ***résolvante*** *de A. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on écrira* $R(\lambda)$ *au lieu de* $R(\lambda, A)$.

Définition 1.1.3

*On désigne par $\sigma(A)$ l'ensemble complémentaire dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble $\rho(A)$. $\sigma(A)$ est **le spectre** de A.*

Proposition 1.1.1

Si A est fermé, on a

$$\rho(A) \quad = \quad \{\lambda \in \mathbb{C}; R(\lambda) = A_\lambda^{-1} \in L(E_0)\} \tag{1.1}$$

et $(D(A), \|.\|_A)$ est un espace de Banach, où $\|x\|_A := |Ax|_{E_0} + |x|_{E_0}$ est la norme du graphe.

Théorème 1.1.1 ([2])

Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ dans l'espace de Banach E_0. Alors :

i) *L'ensemble $\rho(A)$ est un ensemble* ouvert *dans le plan complexe $\mathbb{C}$.*

ii) *La fonction $\lambda \longmapsto R(\lambda) = R(\lambda, A)$ est une fonction analytique de λ, dans chaque composante connexe de $\rho(A)$.*

Remarque 1.1.1

Notez que si A est fermé, $R(\lambda) \in L(E_0)$ dès que $\lambda \in \rho(A)$ d'après la Proposition 1.1.1.

Théorème 1.1.2

Si λ et $\mu \in \rho(A)$ et si $R(\lambda)$ et $R(\mu)$ sont dans $L(E_0)$, alors $R(\lambda)$ et $R(\mu)$ satisfont l'équation de la résolvante

$$R(\lambda) - R(\mu) \quad = \quad (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu). \tag{1.2}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= R(\lambda)A_\mu R(\mu) \\ &= R(\lambda)(\mu I - A)R(\mu) \\ &= R(\lambda)[(\mu - \lambda)I + (\lambda I - A)]R(\mu) \\ &= (\mu - \lambda)R(\lambda) + R(\mu). \end{aligned}$$

D'où (1.2).

1.1.3 Intégrale de Dunford et calcul opérationnel

Soit E_0 un espace de Banach, U un ouvert de $\mathbb{C}$. On note $H(U)$, l'espace des fonctions holomorphes, de U dans $\mathbb{C}$.

Formule de Cauchy

Pour $f \in H(U)$, K un compact à bord de U et z_0 à l'intérieur de K, la formule de Cauchy assure alors que

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

où Γ est le bord, positivement orienté, de K.

Intégrale de Dunford

Si $A \in L(E_0)$ et si f est holomorphe sur un voisinage ouvert U de $\sigma(A)$, alors **l'intégrale de Dunford** est définit par :

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma f(z)(zI - A)^{-1} dz,$$

où Γ est le bord, positivement orienté, d'un compact K contenant $\sigma(A)$ et contenu dans U.

Remarque 1.1.2

On a :

1. $f(A) \in L(E_0)$.
2. *D'après la théorie de l'intégrale de Cauchy, l'opérateur $f(A)$ ne dépend que de la fonction f et de l'opérateur A.*

Théorème 1.1.3 ([2])

Soit $A \in L(E_0)$ dans un espace de Banach E_0.

i) *Soit $f, g \in H(U), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Alors :*

- $\alpha f + \beta g \in H(U)$ *et* $\alpha f(A) + \beta g(A) = (\alpha f + \beta g)(A)$.

- $f \circ g \in H(U)$ *et* $f(A) \circ g(A) = (f \circ g)(A)$.

ii) *Soit* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H(A)$, *on suppose que les* f_n *sont holomorphes dans un voisinage fixe* V *de* $\sigma(A)$. *Si*

$$f_n \longrightarrow f \text{ uniformément sur } V,$$

alors

$$f_n(A) \longrightarrow f(A) \text{ dans } L(E_0).$$

1.2 Les semi-groupes

1.2.1 Les semi-groupes

Soit E un espace de Banach réel ou complexe muni de la norme $x \longmapsto \|x\|_E$.

Définition 1.2.1

On appelle **semi-groupe** *d'opérateurs dans* E *une application* $G : \mathbb{R}^+ \longrightarrow L(E)$ *qui vérifie :*

i) $G(0) = I$ (*identité dans* $L(E)$).

ii) $G(t+s) = G(t)G(s)$, *pour tout* $s, t \geq 0$ (*propriété algébrique*).

Remarque 1.2.1

Comme $t+s = s+t$, *on a* $G(t+s) = G(s+t) = G(t)G(s) = G(s)G(t)$. *Donc les opérateurs d'un semi-groupe* ***commutent***.

Définition 1.2.2

Soit $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ *un semi-groupe.* $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ *est appelé semi-groupe* ***uniformément continu*** *si*

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \|G(t) - I\|_{L(E)} = 0.$$

Définition 1.2.3 (*Générateur Infinitésimal*)

*On appelle **générateur infinitésimal** du semi-groupe $\{G(t)\}_{t\geq 0}$, l'opérateur linéaire non borné A défini par :*

$$A\varphi = \lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{G(t)\varphi - \varphi}{t}$$

et

$$D(A) = \{\varphi \in E / \lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{G(t)\varphi - \varphi}{t} \text{ existe dans } E\}.$$

Définition 1.2.4

*Un semi-groupe est dit **fortement continu** (de* classe C_0*) si*

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} G(t)x = x, \forall x \in E. \tag{1.3}$$

Remarques 1.2.1

1. *Un semi-groupe $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ uniformément continu est fortement continu car*

$$\|G(t) - I\|_{L(E)} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|G(t)x - x\|_E.$$

2. *Si $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0−semi-groupe, l'application $t \longmapsto G(t)x$ est continue sur $[0\,,+\infty[$, $\forall x \in E$.*

3. *Si A est un opérateur linéaire borné, il existe un semi-groupe uniformément continu $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ unique ayant A comme générateur infinitésimal.*

Théorème 1.2.1 (**[2], [9]**)

Soit $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu. Alors il existe deux nombres $M \geq 1$ et $\omega \geq 0$ tels que :

$$\|G(t)\|_{L(E)} \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0. \tag{1.4}$$

*En particulier, si $M = 1$ et $\omega = 0$, alors on dit que $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de **contraction**.*

Théorème 1.2.2 ([2])

Soit $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu. Alors, le domaine $D(A)$ de son générateur infinitésimal est caractérisé par :

$$D(A) = \{x \in E : \text{ l'application } t \longrightarrow G(t)x \in C^1(\mathbb{R}^+)\}.$$

De plus, on a

- $AG(t)x = G(t)Ax$,
- *Pour $x \in D(A)$, on a $G(t)x \in D(A)$,*
- $\dfrac{d}{dt}G(t)x = G(t)Ax = AG(t)x.$

Théorème 1.2.3 ([2], [9]) (***Hille-Yosida***)

Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

i) *A est fermé et $\overline{D(A)} = E$.*

ii) *$\exists\omega > 0$, $\exists M > 0$, tels que $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > \omega\}$, et $\|(A-\lambda I)^{-1}\|_{L(E)} \leq \frac{M}{Re\lambda-\omega}$, pour $Re\lambda > \omega$.*

Rappelons le résultat suivant qui généralise le théorème de Hille-Yosida.

Théorème 1.2.4 (***Phillips-Myadera-Feller***)

Un opérateur linéaire A vérifie les deux conditions suivantes :

i) *A est fermé et $\overline{D(A)} = E$.*

ii) *il existe deux nombres réels $M \geq 1$ et ω tels que*

$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > \omega\}$

et $\|(A-\lambda I)^{-n}\|_{L(E)} \leq \frac{M}{(Re\lambda-\omega)^n}$, pour $Re\lambda > \omega$, $n = 1, 2, ...,$

si et seulement si A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ tels que $\|G(t)\|_{L(E)} \leq Me^{\omega t}$, pour $t \geq 0$.

On a aussi le théorème essentiel suivant :

Théorème 1.2.5 ([9])

Soit $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0*−semi-groupe et* A *son générateur infinitésimal.*

Alors :

i) *Pour* $x \in X$, $\lim\limits_{h \longrightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} G(s)x\, ds = G(t)x$.

ii) *Pour* $x \in X$, $\int_0^t G(s)x\, ds \in D(A)$ *et* $A(\int_0^t G(s)x\, ds) = G(t)x - x$.

iii) *Pour* $x \in D(A)$, $G(s)x \in D(A)$ *et* $\frac{d}{dt} G(t)x\Big|_{t=s} = AG(s)x = G(s)Ax$.

iv) *Pour* $x \in D(A)$, $G(t)x - G(s)x = \int_s^t G(\tau)Ax\, d\tau = \int_s^t AG(\tau)x\, d\tau$.

On aura besoin dans ce travail d'une autre notion importante qui est celle des :

1.2.2 Semi-groupes analytiques

Au lieu de $t \in [0\ ,+\infty[$ dans la définition de $\{G(t)\}_{t\geq 0}$, on peut penser à élargir ce domaine à $\Delta \subset \mathbb{C}$.

On doit choisir nécessairement Δ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} s \in \Delta \\ et \\ t \in \Delta \end{array} \right. \Longrightarrow s + t \in \Delta.$$

En général, on pose $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2\}$, avec $\varphi_1 < 0 < \varphi_2$.

Soit E un espace de Banach complexe .

Définition 1.2.5

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2$, *avec* $\varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$ *ou* $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 <\mid \arg z \mid < \varphi_2\}$ *un secteur dans* $\mathbb{C}$.

Une famille $\{G(z)\}_{z\in\Delta} \subset L(E)$ *forme un semi-groupe d'opérateurs dans* E ***analytique*** *dans* Δ*, si elle vérifie les conditions suivantes :*

i) $G(z_1+z_2)=G(z_1).G(z_2)$, *pour* $z_1,z_2\in\Delta$.

ii) $G(0)=I_E$.

iii) $\lim_{z\longrightarrow 0,\, z\in\Delta} G(z)x=x, \forall x\in E$.

iv) *L'application* $z\in\Delta^*=\Delta\backslash\{0\}\longmapsto G(z)x\in E$ *est analytique,* $\forall x\in E$.

Remarques 1.2.2

1. *En général on parle d'un semi-groupe analytique lorsque le secteur* Δ *contient l'intervalle* $[\,0,\ +\infty[$.
2. *Un semi-groupe analytique est fortement continu.*

Théorème 1.2.6 ([9])

Soit $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *un semi-groupe fortement continu et* A *son générateur infinitésimal. Si on suppose que* $0\in\rho(A)$, *alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *peut s'étendre à un semi-groupe analytique dans un secteur*

$\Delta_\delta=\{z\in\mathbb{C}:|\arg z|<\delta\}$ *et* $\|G(t)\|_{L(E)}$ *est uniformément bornée*

(*i.e.*, $\exists M>0, \|G(t)\|_{L(E)}<M$) *sur chaque sous-secteur fermé* $\overline{\Delta_{\delta'}}$ *de* Δ_δ *tel que*

$\Delta_{\delta'}=\{z\in\mathbb{C}:|\arg z|\leq\delta'<\delta\}$,

ii) *Il existe une constante* C *telles que pour chaque* $\sigma>0,\ \tau\neq 0$

$$\|(A-(\sigma+i\tau))^{-1}\|_{L(E)}\leq\frac{C}{|\tau|},$$

iii) *Il existe* $0<\delta<\frac{\pi}{2}$ *et* $M>0$ *telles que*

$$\rho(A)\supset\sum:=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\arg\lambda|<\frac{\pi}{2}+\delta\}\cup\{0\}$$

et

$$\|(A-\lambda)^{-1}\|_{L(E)}\leq\frac{M}{|\tau|}\ ,pour\ \ \lambda\in\sum\ \ et\ \ \lambda\neq 0.$$

1.3 Les fonctions Gamma, Béta

1.3.1 La fonction Gamma (Γ)

La fonction **Gamma**, notée $\Gamma(z)$, est définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \, dt.$$

En utilisant, le théorème de la convergence dominée et ses conséquences, on peut montrer que $\Gamma(z)$ existe et est holomorphe dans le demi-plan $Rez > 0$.

On établit aussi que, dans ce demi-plan, les dérivées successives de Γ peuvent s'obtenir par dérivation " sous le signe somme " ainsi :

$$\Gamma'(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \ln t \, dt.$$

$$\Gamma''(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} (\ln t)^2 \, dt.$$

1.3.2 Relations fonctionnelles

- Notons que $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \, dt = 1$.
- $n!$ (factorielle n), on a $\Gamma(n+1) = n!\Gamma(1) = n!$ (fonction factorielle).

  Notons que certains auteurs parlent de $z!$ pour z complexe, en posant par définition $z! = \Gamma(z+1)$.

Remarques 1.3.1

Soit z un nombre complexe a partie réelle positive. On a :

1. $\Gamma(z)$ *est équivalent à* $\frac{1}{z}$ *quand z tend vers 0.*
2. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
3. $\Gamma'(1) = -\gamma$ *où γ est la constante d'*Euler, *limite de la suite* $1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln(n)$, *quand* $n \longrightarrow +\infty$. ($\gamma \simeq 0,577215664901532$).

1.3.3 Autres expressions de $\Gamma(z)$ pour $Rez > 0$

Le changement de variable $t = u^2$ conduit à :
$\Gamma(z) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^{2z-1}\,du$, pour $Rez > 0$, l'intégrale figurant au deuxième membre est dite intégrale de Gauss.

1.3.4 La fonction Béta

Soient deux complexes p et q à parties réelles positives. La fonction **Béta**, notée $(p\,;q)$ est définie par

$$B(p\,;q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$$

elle est reliée à la fonction Gamma par l'expression

$$B(p\,;q) := \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

les fonctions B et Γ sont souvent appelées fonctions **eulériennes** de première espèce et de deuxième espèce respectivement.

1.3.5 Propriétés

•

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{p-1}(\beta-x)^{q-1}\,dx = (\beta-\alpha)^{p+q-1}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{1.5}$$

• Pour $p = z$, $q = 1-z$, $0 < Rez < 1$, on a

$$B(z;1-z) = \int_0^1 t^{z-1}(1-z)^{-z}\,dt$$

et le changement de variable homographique défini par $u = \dfrac{t}{1-t}$, conduit à

$$B(z;1-z) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{z-1}}{1+u}\,du$$

pour

$$0 < Rez < 1.$$

1.4 Puisssances fractionaires d'un opérateur linéaire fermé

hypothèse 1.4.1

Soit A un opérateur linéaire fermé et dense dans un espace de Banach E et

$$\Sigma^{+} = \{\lambda : \ 0 < \omega < |arg\lambda| \leq \pi\} \cup V \subset \rho(A),$$

où V est un voisinage de zéro.

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{1+|\lambda|}, \ \textit{pour } \lambda \in \Sigma^{+}.$$

1.4.1 Puisssances fractionaires négatives d'un opérateur linéaire

Définition 1.4.1 ([9])

Soit A un opérateur linéaire vérifiant l'hypthèse (1.4.1)*. Pour $\alpha > 0$, on définit* ***les Puissances fractionaires négatives*** *de l'opérateur A par*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} z^{-\alpha}(A - zi)^{-1} dz,$$

où γ est la courbe contenue dans Σ^{+} et allant de $\infty e^{-i\delta}$ à $\infty e^{-\delta}$. $\omega < \delta < \pi$, en évitant l'axe des réels négatifs et l'origine de sorte que $\lambda^{-\alpha}$ soit positif. Si $\alpha = n \in N$, alors, d'aprés le Théorème des résidus,

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \lambda^{-\alpha}(A - zi)^{-1} dz,$$

où γ' est une courbe fermée entourant l'origine. Si $0 < \alpha < 1$, on a aussi

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_{0}^{\infty} \lambda^{-\alpha}(A - zi)^{-1} dz.$$

Proposition 1.4.1

pour $0 < \alpha < 1$ on a

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{+\infty} t^{\alpha-1} G(t) dt. \tag{1.6}$$

1.4.2 Puisssances fractionaires positives d'un opérateur linéaire

Définition 1.4.2 ([9])

Soit A un opérateur linéaire vérifiant l'hypothèse (5.5). *Pour $\alpha > 0$, on définit **les Puissances fractionaires positives** de l'opérateur A par*

$$A^{\alpha} = \begin{cases} (A^{-\alpha})^{-1} & \textit{pour } \alpha > 0, \\ I & \textit{Pour } \alpha = 0. \end{cases}$$

Voici quelques propriétés de ces opérateurs

Théorème 1.4.1 ([9])

Soit A^{α} l'opérateur linéaire défini précédemment, alors

i) *A^{α} est un opérateur linéaire fermé à domaine dense ($D(A^{\alpha}) = E$).*

ii) *si $0 < \alpha < \beta$, alors $D(A^{\beta}) \subset D(A^{\alpha})$.*

iii) *$A^{\alpha+\beta} = A^{\alpha}A^{\beta} = A^{\beta}A^{\alpha}$ pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.*

1.5 Fonction de Green d'opérateur differentiel du second ordre

Considérons dans l'interval $[a, b]$ le problème suivant

$$\begin{cases} u'' - \lambda u = f(x), \\ B_i(u) = \int_0^1 R_i(t)u(t)dt + \int_0^1 S_i(t)u'(t)dt = 0, \ i = \overline{1,2}, \end{cases} \tag{1.7}$$

où la fonction $f \in C[a, b]$. Par le théorème de Poincarre l'équation homogéne correspondante à l'equation dans (1.7) admet un système fondamental de solutions particulières $u_k(x, \lambda)$, $k = \overline{1,2}$, qui sont des fonctions entières du paramétre λ.

On cherche la solution générale de l'équation dans (1.7) par la méthode de variation des constantes sous la forme

$$u_p(x, \lambda) = \sum_{k=1}^{2} c_k(x, \lambda)u_k(x, \lambda),$$

on obtient

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{2} c'_k(x,\lambda)u_k(x,\lambda) = 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{2} c'_k(x,\lambda)u'_k(x,\lambda) = f(x). \end{cases}$$

Le determinant de ce système est le wronskien du système fondamental de solutions particulières de l'équation homogène correspandante à (1.7), donc

$$W(x,\lambda) = \begin{vmatrix} u_1(x,\lambda) & u_2(x,\lambda) \\ u'_1(x,\lambda) & u'_2(x,\lambda) \end{vmatrix} \neq 0.$$

D'où le système (1.5) admet une solution unique

$$c'_k(x,\lambda) = \frac{W_{2k}(x,\lambda)f(x)}{W(x,\lambda)}, \; k = \overline{1,2}, \tag{1.8}$$

où $W_{2k}(x,\lambda)$ est le complèment algèbrique de l'élément se trouvant à la 2^{eme} ligne et à la K^{eme} colonne. En intégrant (1.8) de a à x, on obtient

$$c_k(x,\lambda) = c_k(a,\lambda) + \int_a^x \frac{W_{2k}(x,\lambda)f(x)}{W(x,\lambda)}dx, \; k = \overline{1,2},$$

en intégrant (1.8) de b à x, on obtient

$$c_k(x,\lambda) = c_k(b,\lambda) + \int_b^x \frac{W_{2k}(x,\lambda)f(x)}{W(x,\lambda)}dx, \; k = \overline{1,2}.$$

D'où la solution générale $u(x,\lambda)$ de l'équation dans (1.7) admet la représentation

$$\begin{aligned} u(x,\lambda) &= \sum_{k=1}^{2} c_k u_k(x,\lambda) + \frac{1}{2}\int_a^x \frac{-u_2(s,\lambda)u_1(x,\lambda) + u_2(x,\lambda)u_1(s,\lambda)}{W(s,\lambda)}f(s)ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_b^x \frac{u_2(s,\lambda)u_1(x,\lambda) - u_2(x,\lambda)u_1(s,\lambda)}{W(s,\lambda)}f(s)ds, \end{aligned}$$

où

$$c_k(x,\lambda) = \frac{1}{2}\big(c_k(x,\lambda)_1 + c_k(x,\lambda)_2\big),$$

en posant

$$g(x,s,\lambda) = \pm\frac{1}{2}\frac{u_2(s,\lambda)u_1(x,\lambda) - u_2(x,\lambda)u_1(s,\lambda)}{W(s,\lambda)},$$

où $g(x, s, \lambda)$ prend le signe +, si $a < x < s < b$ et le singe -, si $a < s < x < b$. D'où on obtient pour la solution générale de l'équation dans (1.7) la réprésentation

$$u(x, \lambda) = \sum_{k=1}^{2} c_k u_k(x, \lambda) + \int_a^b g(x, s, \lambda) f(s) ds. \tag{1.9}$$

Finalement pour obtenir la solution su problème (1.7) on détèrmine les constantes $c_k, k = \overline{1, 2}$, dans (1.9) de telle manière qu'elle vérifie les condition aux limites dans (1.7), ainsi on obtient

$$\sum_{k=1}^{2} c_k B_i(u_k(x, \lambda)) = -\int_a^b B_i(g(x, s, \lambda)) f(s) ds, \; i = \overline{1, 2}. \tag{1.10}$$

Si

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} B_1(u_1) & B_1(u_2) \\ B_2(u_1) & B_2(u_2) \end{vmatrix} \neq 0,$$

alors, le syetème (1.10) admet des solutions uniques c_1, c_2 données par

$$c_1 = \int_a^b \frac{\begin{vmatrix} -B_1(g)_x & B_1(u_1) \\ B_2(g)_x & B_2(u_2) \end{vmatrix}}{\Delta(\lambda)} f(s) ds$$

et

$$c_2 = \int_a^b \frac{\begin{vmatrix} B_1(u_1) & -B_1(g)_x \\ B_2(u_1) & -B_2(g)_x \end{vmatrix}}{\Delta(\lambda)} f(s) ds.$$

On remplace c_1 et c_2 dans (1.9), on obtient la représentation de la solution du problème (1.7)

$$u(x, \lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \Big[\int_a^b \Big\{ - \begin{vmatrix} -B_1(g)_x & B_1(u_1) \\ B_2(g)_x & B_2(u_2) \end{vmatrix} u_1(x, \lambda) - \begin{vmatrix} B_1(u_1) & -B_1(g)_x \\ B_2(u_1) & -B_2(g)_x \end{vmatrix} u_2(x, \lambda)$$

$$+ \Delta(\lambda) g(x, s, \lambda) \Big\} f(s) ds \Big],$$

ce qui donne

$$u(x, \lambda) = \int_a^b \frac{\begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & g(x, s; \lambda) \\ B_1(u_1) & B_1(u_2) & B_1(g)_x \\ B_2(u_1) & B_2(u_2) & B_2(g)_x \end{vmatrix}}{\Delta(\lambda)} f(s) ds.$$

Si on pose

$$G(x,s;\lambda)=\frac{\begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & g(x,s;\lambda) \\ B_1(u_1) & B_1(u_2) & B_1(g)_x \\ B_2(u_1) & B_2(u_2) & B_2(g)_x \end{vmatrix}}{\Delta(\lambda)}. \tag{1.11}$$

Alors, pour $u(x,\lambda)$ on obtient la représentation

$$u(x,\lambda)=\int_a^b G(x,s;\lambda)f(s)ds. \tag{1.12}$$

Définition 1.5.1

$G(x,s;\lambda)$ *est dite* ***fonction de Green*** *du problème* (1.7).

Théorème 1.5.1

Soit $\lambda\in C$ tel que $\Delta(\lambda)\neq 0$ et $f\in C[a,b]$. Alors le problème (1.7) *admet une solution $u\in C^2[a,b]$ mémomorphe en λ admettant la représentation* (1.12). *Les pôles de la fonction de Green sont les zéros du déterminant carctéristique $\Delta(\varrho)$.*

Théorème 1.5.2

1) *$G(x,s;\lambda)$ est une fonction continue , $s\in[a,b]$.*

2) *Pour tout s fixé dans $]a,b[$, la fonction $G(x,s;\lambda)$ admet des dérivées premières et secondes en x dans chacun des intervalles $[a,s[$ et $]s,b]$. De plus,*

$$\lim_{x\to\to s^+}\frac{\partial G(x,s;\lambda)}{\partial x}-\lim_{x\to s^-}\frac{\partial G(x,s;\lambda)}{\partial x}=1.$$

3) *dans chacun des intervalles $[a,s[$ et $]s,b]$ la fonction $G(x,s;\lambda)$ envisagèe comme fonction en x verifie l'équation $L(G)=0$ et les conditions aux limites $B_i(G)=0, i=\overline{1,2}$.*

Théorème 1.5.3

Si le problème homogéne correspondant au problème (1.7) *admet uniquement la solution triviale. Alors, le problème aux limites* (1.7) *admet une seule fonction de Green.*

1.6 Les espaces de Hölder

Soit E un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Notations 1.6.1

On définit les espaces de Banach suivants :

$B(I;E) = \{f : I \longrightarrow E/ \ f \text{ borné}\}$, $\|f\|_{B(I;E)} = \sup_{t\in I} \|f(t)\|_E$,

$C^m(I;E) = \{f : I \longrightarrow E/ \ f \ m \text{ fois continûement différentiable } \}$, $(m \in \mathbb{N})$,

$C^\infty(I;E) = \{f : I \longrightarrow E/ \ f \text{ indéfiniment continûement dérivable sur } I\}$,

$C_b(I;E) = B(I;E) \cap C(I;E)$,

$C_b^m(I;E) = \{f \in C^m(I;E) : f^{(i)} \in C_b(I;E), i = 0, ..., m\}, (m \in \mathbb{N})$, *muni de la norme*

$$\|f\|_{C_b^m(I;E)} = \sum_{k=0}^{m} \| f \|_{B(I;E)} \cdot$$

Définition 1.6.1 ([6])

*Pour $\varepsilon \in]0,1[$, on définit l'espace de **Hölder** $C^\varepsilon(I;E)$ à exposant ε par :*

$$C^\varepsilon(I;E) := \{f : I \longrightarrow E : [f]_\varepsilon = \sup_{t,\, s\in I,\, t\neq s} \frac{\|f(t) - f(s)\|_E}{| t - s |^\varepsilon} < +\infty\},$$

$$\|f\|_{C^\varepsilon(I;E)} = \|f\|_{C(I;E)} + [f]_\varepsilon,$$

$$C^{k+\varepsilon}(I;E) := \{f \in C_b^k(I;E) : f^{(k)} \in C^\varepsilon(I;E)\},$$

$$\|f\|_{C^{k+\varepsilon}(I;E)} = \|f\|_{C_b^k(I;E)} + [f^{(k)}]_{C^\varepsilon(I;E)}.$$

Ces espaces sont des espaces de Banach.

1.7 Opérateur différentiel du second ordre à résolvante a croissance exponentielle

On donne un exemple d'opérateur différentiel du second ordre dont la résolvante a une croissance exponentielle

$$\begin{cases} v'' - \lambda v = f(x), \\ v(0) = v'(0) = 0. \end{cases} \tag{1.13}$$

On pose $\varrho^2 = \lambda$. L'équation homogène correspondant à l'équation (1.13) admet $\{e^{\varrho x}, e^{-\varrho x}\}$ comme système fondamental de solutions. On cherche la solution particulière de l'équation (1.13) par la méthode des variations des constantes sous la forme

$$v_p(x) = C_1(x)e^{\varrho x} + C_2(x)e^{-\varrho x}.$$

On obtient

$$\begin{cases} C_1' e^{\varrho x} + C_2'(x)e^{-\varrho x}(x) = 0, \\ \varrho C_1' e^{\varrho x} - \varrho C_2'(x)e^{-\varrho x}(x) = f(x), \end{cases}$$

ce système est èquivalente à

$$\begin{cases} C_1' = \frac{e^{-\varrho x}f(x)}{2\varrho}, \\ C_2' = -\frac{e^{-\varrho x}f(x)}{2\varrho}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \int_0^x \frac{e^{-\varrho s}f(s)}{2\varrho}ds, \\ C_2' = -\int_0^x \frac{e^{-\varrho s}f(s)}{2\varrho}ds. \end{cases}$$

Donc la solution génerale est

$$v(x) = \int_0^x \frac{e^{\varrho(x-s)} - e^{-(x-s)}}{2\varrho}ds + C_1 e^{\varrho x} + C_2 e^{-\varrho x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{C}.$$

On utilise les conditions $v(0) = 0$ et $v'(0) = 0$, on obtient

$$v(x) = \int_0^x \frac{e^{\varrho(x-s)} - e^{-\varrho(x-s)}}{2\varrho} f(s)ds. \tag{1.14}$$

Et en calculant la norme de cette fonction, on obtient l'éstimation suivant

$$\begin{aligned} \|v(x)\|_{L_p(0,1)} &= \left[\int_0^1 |v(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}, \\ &= \left[\int_0^1 \left|\int_0^x \frac{e^{\varrho(x-s)} - e^{-\varrho(x-s)}}{2\varrho} f(s)ds\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}, \\ &\leq \left[\int_0^1 \left|\int_0^x \frac{e^{\varrho(x-s)} - e^{-\varrho(x-s)}}{2\varrho}\right|^2 |f(s)|^2 dsdx\right]^{\frac{1}{2}}, \\ &\leq \left(\int_0^x \sup_{0\leq s\leq 1}\left|\frac{e^{\varrho(x-s)} - e^{-\varrho(x-s)}}{2\varrho}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |f(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}, \\ &= \left(\int_0^x \sup_{0\leq s\leq 1}\left|\frac{e^{\varrho(x-s)} - e^{-\varrho(x-s)}}{2\varrho}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \|f(x)\|_{L_2(0,1)}, \end{aligned}$$

d'où

$$\|v(x)\|_{L_p(0,1)} \leq \sup_{0\leq s\leq 1} \Big(\int_0^x \Big|\frac{e^{\varrho(x-s)} - e^{-\varrho(x-s)}}{2\varrho}\Big|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} |e^{\varrho(x-s)} - e^{-\varrho(x-s)}| &\leq \sqrt{2}(|e^{\varrho(x-s)}|^2 + |e^{-\varrho(x-s)}|^2), \\ &= \sqrt{2}(e^{2Re\varrho(x-s)} + e^{-2Re\varrho(x-s)}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Big|\frac{e^{\varrho(x-s)} - e^{-\varrho(x-s)}}{2\varrho}\Big|^2 dx &\leq \int_0^1 \frac{\sqrt{2}(e^{2Re\varrho(x-s)} + e^{-2Re\varrho(x-s)})}{4\varrho^2} dx, \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4|\varrho|^2}\Big(\frac{1}{2Re\varrho}(e^{2(x-s)Re\varrho} - e^{-2(x-s)Re\varrho})\Big|_0^1, \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4|\varrho|^2 2Re\varrho}(e^{2(1-s)Re\varrho} - e^{-2(1-s)Re\varrho} - e^{-2sRe\varrho} + e^{2sRe\varrho}), \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{4|\varrho|^2 2Re\varrho}(e^{2(1-s)Re\varrho} + e^{2sRe\varrho}), \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{4|\varrho|^2 2Re\varrho}(e^{2Re\varrho} + e^{2Re\varrho}), \\ &\leq \frac{\sqrt{2}e^{2Re\varrho}}{4|\varrho|^2 Re\varrho}. \end{aligned}$$

Comme $\varrho \in \sum_{\frac{\delta}{2}} = \{\varrho \in C;\ |arg\varrho| \leq \frac{\delta}{2}, \varrho \neq 0\}$, on a $(Re\varrho)^{-1} < \frac{1}{|\varrho|\cos(\frac{\delta}{2})}$,

alors,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Big|\frac{e^{\varrho(x-s)} - e^{-\varrho(x-s)}}{2\varrho}\Big|^2 dx &\leq \frac{\sqrt{2}e^{Re\varrho}}{4|\varrho|^2 Re\varrho}, \\ &\leq \frac{\sqrt{2}e^{2Re\varrho}}{4|\varrho|^3 cos(\frac{\delta}{2})}, \end{aligned}$$

donc on a

$$\Big(\int_0^1 \Big|\frac{e^{\varrho(x-s)} - e^{-\varrho(x-s)}}{2\varrho}\Big|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2^{\frac{1}{4}}e^{Re\varrho}}{2|\varrho|^{\frac{3}{2}} cos^{\frac{1}{2}}(\frac{\delta}{2})}.$$

D'où

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{Ce^{\sqrt{\lambda}}}{\lambda^{\frac{3}{4}}}.$$

Chapitre 2

Semi-groupes de classe $A(\alpha, \beta)$

Ce chapitre est consacré à l'étude d'une classe de semi-groupes à singularité qui s'appelle Semi-groupes de classe $A(\alpha, \beta)$ et qui sont d'une grande importance dans la résolution du problème de cauchy pour équation différentielle opérationnelle à coefficient opératoriel non borné et à domaine non dense. Nous fournissons la définition et les propriétés de ce type de Semi-groupes et nous démontrons le théorème qui donne les conditions suffisantes d'existence du Semi-groupes de classe $A(\alpha, \beta)$.

2.1 Semi-groupes de classe $A(\alpha, \beta)$

Soit A un opérateur linéaire, dans un espace de Banach E avec le domaine $D(A) = D$. On suppose qu'il existe un opérateur-fonction $U(t)$ pour $t > 0$ et que les conditions suivantes sont vérifiées

i) $U(t)$ est un opérateur linéaire borné de E dans D, $t \in (0, +\infty)$,

ii) $U(t+s) = U(t)U(s)$, $t, s > 0$,

iii) $\lim\limits_{t \to +0} U(t)v = v$ pour $v \in D$,

iv) $U(t)$ est diffférentiable avec $t > 0$ et

$$\frac{d}{dt}U(t) = -A(t)U(t),$$

v) $U(t)$ commute avec $A(t)$ dans D,

vi) Les estimations

$$\|U(t)\| \leq Mt^{-\alpha}e^{-\omega t}; \ \|U'(t)\| \leq Mt^{-\beta}e^{-\omega t}, \tag{2.1}$$

sont vraies pour chaque $M > 0$, $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 1$.

Définition 2.1.1

La fonction opératorielle $U(t) = e^{-tA}$ *(t>0) possédant les propriétés 1-6 est dite* ***semi-groupe de classe*** $A(\alpha, \beta)$ *engendré par l'opérateur* A.

Remarques 2.1.1

Si $\overline{D} = E$, $\alpha = 0$, *et* $\beta = 1$, *alors* $U(t)$ *est un semi-groupe analytique.*

Proposition 2.1.1

Les nombres α *et* β *dans l'inégalité* (2.1) *doivent être liés par l'inégalité* $\alpha + 1 \leq \beta$.

Démonstration

De la propriété **(iv)** on a

$$\begin{aligned}
\int_t^\tau Ae^{-sA}dt &= -e^{-sA}\Big|_t^\tau, \\
&= e^{-tA} - e^{-\tau A},
\end{aligned}$$

alors

$$e^{-tA} = e^{-\tau A} + \int_t^\tau Ae^{-sA}dt.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\|e^{-tA}\| &= \|e^{-\tau A} + \int_t^\tau Ae^{-sA}dt\|, \\
&\leq \|e^{-\tau A}\| + \|\int_t^\tau Ae^{-sA}dt\|, \\
&\leq M\tau^{-\alpha}e^{-w\tau} + \int_t^\tau MS^{-\beta}e^{-ws}ds, \\
&\leq M\tau^{-\alpha} + \int_t^\tau MS^{-\beta}ds, \\
&= M\tau^{-\alpha} + \frac{M}{\beta - 1}\Big[t^{-(\beta-1)} - \tau^{-(\beta-1)}\Big], \\
&\leq C_1 t^{-(\beta-1)}.
\end{aligned}$$

Comme on a $\|e^{-tA}\| \leq Mt^{-\alpha}$ pour t assez petit. Alors $\alpha \leq \beta - 1$.

Définition 2.1.2 (***Générateur Infinitésimal***)

*On appelle **générateur infinitésimal** du semi-groupe $\{U(t)\}_{t\geq 0}$, l'opérateur linéaire non borné A_0 défini par :*

$$A_0\varphi = \lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{U(t)\varphi - \varphi}{t}$$

et

$$D_0(A) = \{\varphi \in E / \lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{G(t)\varphi - \varphi}{t} \textit{ existe dans } E\}.$$

Proposition 2.1.2

On a $D_0 = D$ et $A = -A_0$.

Démonstration

De la propriété **(iv)** on a

$$U(t)x - U(s)x = -\int_s^t AU(\tau)d\tau, \ (t, s > 0).$$

Si $x \in D$, par passage à la limite quand s tend vers 0, on obtient

$$U(t)x - x = -\int_0^t AU(\tau)d\tau,$$

d'où l'expression

$$\frac{U(t) - I}{t}x = -\frac{1}{t} - \int_0^t AU(\tau)d\tau,$$

admet une limite quand $t \rightarrow 0$ ce qui veut dire que $x \in D_0$, donc $D \subset D_0$, et $A_0 x = -A$.

Soit maintenant $x \in D_0$, alors, par passage à la limite quand s tend vers 0 dans l'égalité

$$U(t)\frac{U(s) - I}{s}x = -\int_t^{t+s} AU(\tau)d\tau,$$

on obtient $U(t)A_0x = -AU(t)x$. Supposons que A admet un inverse borné, alors $U(t)A^{-2}A_0x = -U(t)A^{-1}x$ par un autre passage à la limite pour $t \rightarrow 0$, on obtient $x = -AA_0x$, ainsi $x \in D$. D'où $D = D_0$ et $A = A_0$.

2.2 Conditions suffisantes d'existence du Semi-groupes de classe $A(\alpha, \beta)$

Théorème 2.2.1

Supposons que dans le plan complexe $Re\lambda \geq \omega$ la résolvante de l'opérateur A existe et vérifie

$$\|(A+\lambda I)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\lambda|^r}, \tag{2.2}$$

avec $r \in (0,1]$. Alors, il existe un semi-groupe de classe $A(\alpha,\beta)$ engendré par l'opérateur A. De plus $\alpha = r^{-1}-1$ et $\beta = 2r^{-1}-1$.

Démonstration

Posons

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} e^{\lambda t}(A+\lambda)^{-1}d\lambda, \tag{2.3}$$

où $\sigma_0 \geq \omega$. Remarquons que la résolvante $(A+\lambda)^{-1}$ n'existe pas uniquement dans le demi-paln complexe $Re\lambda \geq \omega$, mais aussi dans le domaine délimité par la parabole $\lambda = \omega - z + i\tau$, où $z = c_1(\omega^2+\tau^2)^{\frac{r}{2}}$ $(c_1 > 0)$ où l'inégalité (2.2) est verifiée. D'où l'intégration dans (2.3) selon la droite $Re\lambda = \sigma_0$ peut être remplacée par l'intégration sur la parabole.

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1+\Gamma_2} e^{\lambda t}(A+\lambda)^{-1}d\lambda, \tag{2.4}$$

où

$$\Gamma_1 = \{\lambda = \omega - z + i\tau,\ z = c_1(\omega^2+\tau^2)^{\frac{r}{2}},\ \tau \geq 0\},$$

et

$$\Gamma_1 = \{\lambda = \omega - z + i\tau,\ z = c_1(\omega^2+\tau^2)^{\frac{r}{2}},\ \tau \leq 0\},$$

l'intégrale (2.4) est absolument convergente pour $\tau < 1$

$$\begin{aligned}
\|U(t)\| &= \|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1+\Gamma_2} e^{\lambda t}(A+\lambda)^{-1}d\lambda\|, \\
&\leq C\int_0^\infty e^{(\omega-z)t}|\lambda|^{-r}d\tau, \\
&\leq Ce^{\omega t}t^{1-\frac{1}{r}}.
\end{aligned}$$

Utilisons l'identité $(A+\lambda I)^{-1}=\lambda^{-1}I-\lambda^{-1}A(A+\lambda I)$ nous obtenons une représentation pour (2.3) sur les élements $v\in D$

$$U(t)V=V-\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}e^{\lambda t}(A+\lambda)^{-1}AVd\lambda. \tag{2.5}$$

Pour t tendant vers zero la dernieère intégrale converge vers zero, d'où

$$\lim_{t\to0^+}U(t)V=V,\ pour\ v\in D.$$

Si dans l'égalité (2.5) on intégre selon la parabole $\Gamma_1+\Gamma_2$, alors la formule sera vraie $\forall v\in E$. De plus

$$U'(t)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1+\Gamma_2}e^{\lambda t}A(A+\lambda)^{-1}d\lambda, \tag{2.6}$$

cette intégrale est absolument convergente, $U'(t)=-AU(t)$ et

$$\begin{aligned}\|U'(t)\| &= \|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1+\Gamma_2}e^{\lambda t}A(A+\lambda)^{-1}d\lambda\|,\\ &\leq C\int_0^{\infty}e^{(\omega-z)t}|\lambda|^{1-r}d\tau,\\ &\leq Ce^{\omega t}t^{1-\frac{2}{r}}.\end{aligned}$$

Pour démontrer les propriétés du semi-groupe, utilisons le problème de Cauchy

$$\begin{cases}V'+AV=0,\\ V(0)=0\end{cases} \tag{2.7}$$

et montrons qu'il admet uniquement la solution triviale dans la classe des fonctions $V=V(t)$ vérifiant pour t assez grand l'inégalité $\|V(t)\|\leq e^{\omega t}$. Pour cela posons $W(\lambda)=\int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}}e^{-\lambda t}V(t)dt$ pour $\varepsilon>0$, où $V(t)$ est une certaine solution du problème (2.7) dans la classe donée. Pour $Re\lambda>\omega$ on peut faire tendre $\varepsilon\to0$ dans l'inégalité, en suite transformons l'expression $AW(\lambda)$ en utilisant (2.7) et intégrant par parties

$$\begin{aligned}AW(\lambda) &= \int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}}e^{-\lambda t}AV(t)dt,\\ &= -\int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}}e^{-\lambda t}V'(t)dt,\\ &= e^{-\lambda\varepsilon}V(\varepsilon)-e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}}-\lambda\int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}}e^{-\lambda t}V(t)dt.\end{aligned}$$

Les termes hors intégrale tendent vers zero lorsque ε tend vers zero, nous obtenons $AW(\lambda)+\lambda W(\lambda)=0$, comme $Re\lambda>\omega$ appartient à l'ensemble resolvante de A, alors la dernière égalité donne $W(\lambda)=0$. Et en utilisant la transformation inverse de Laplace on obtient que $V(t)=0$. De ce qui precéde on a l'unicité de la solution du problème (2.7). On considère le problème

$$\begin{cases} u'+Au=0, \\ u(0)=x. \end{cases} \tag{2.8}$$

$x\in E$, $u(t)=U(t)x$. Et soit le problème auxiliaiare

$$\begin{cases} v'+Av=0, \\ v(0)=u(s). \end{cases} \tag{2.9}$$

Ce qui implique que $v(t)=U(t)u(s)$. Seconde solution qui s'écrit $v(t)=U(t+s)x$. Vu l'unicité on obtient $U(t+s)x=U(t)U(s)x$. Ce qui entraine l'unicité du semigroupe engendré par l'opérateur A.

2.3 Exemples

(1) Soit E une intersection des ensembles $L_1(0,\infty)$ et $L_p(0,\infty)$ muni de la norme suivante $\|v\|_E=\|v\|_{L_1}+\|v\|_{L_p}$. Considérons l'opérateur $A=-(\frac{d^2}{dx^2})$ dont le domaine est

$$D(A)=\{(v\in E)\cap(\exists v\in E):\int_0^\infty v(x)dx=0\}.$$

Pour la résolvante de cet opérateur on a la formule suivante

$$\begin{aligned}(\lambda I+A)^{-1}f(x) &= -\frac{e^{-t\sqrt{\lambda}}}{\sqrt{\lambda}}\int_0^\infty f(x)dx+\int_0^\infty\frac{e^{-(s+x)\sqrt{\lambda}}}{2\sqrt{\lambda}}f(s)ds; \\ &+ \int_0^x\frac{e^{(s-x)\sqrt{\lambda}}}{2\sqrt{\lambda}}f(s)ds+\int_x^\infty\frac{e^{(s-x)\sqrt{\lambda}}}{2\sqrt{\lambda}}f(s)ds;\end{aligned}$$

et l'estimation stricte (2.2) est verifeé lorsque $r=\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}$.

Et pour les semigroupes correspondants la formule suivante

$$U(t)\varphi(t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty[e^{-\frac{x^2}{4t}}+e^{-\frac{1-x^2}{4t}}]\varphi(s)ds-\frac{e^{-(x^2+4t)}}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty\varphi(s)ds$$

est verifiée. Ici $\|u(t)\| = \mu t^{-\alpha}$. $\|U'(t)\| = \mu t^{-\beta}$ avec $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}$. $\beta = \frac{3}{2} - \frac{1}{2p}$. Les valeurs de α etβ proviennent du dernièr terme. Posons $x + \alpha = 1$, $\beta = 1 + \alpha$.

(2) Soit E l' ensemble des couples suite $v = \{x_n, y_n\}$ dont la norme $\|v\| = \sum_{u=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{2}}|x_u| + |u_u|)$ est finie. On introduit le sous espace $L = \{v \in E, x_1 = y_1 = 0\}$ de E, la fonction opérationelle

$$U(t)v = \{0, 0; (x_n \cos nt - y_n \sin nt)e^{(in^p - nt)}, (x_n \cos nt + y_n \sin nt)e^{(in^p t - nt)}\}$$

est un semigroupe de classe $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + p)$. où $1 \leq p \leq \frac{3}{2}$. Dans ce cas A est donné par la formule $Av = \{0, 0, (in^p - n)x_n - ny_n, (in^p - n)y_n + nx_n\}$, ici $D(A)$ appartient à L et n'est pas dense dans E.

Chapitre 3

Problème de Cauchy pour une équation parabolique abstraite avec opérateur à domaine non dense générant un semi-groupe à singularités

Ce chapitre est consacré au problème de Cauchy du premier ordre

$$\begin{cases} v'(t) + A(t)v(t) = f(t), \ (0 < t \leq 1), \\ v(0) = v_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

dans un espace de Banach E, où $A(t)$ est un opérateur linéaire défini sur D et $f(t)$ est une fonction donné. Supposons que $A(t)$ admet un inverse borné $A^{-1}(t)$, on sait que Différents problème aux limite pour équation de type parabolique peuvent être reduit à ce problème. Il est généralement supposé que le domain D est un ensemble dense dans E, et donc engendre, pour chaque t, un semi-groupe analytique. Ce type de problème a été étudées par de nombreux auteurs, parmi lesquels on trouve Krein [4], Pazzy [9], Tanabe [15].

Ici on suppose que $A(t)$ est un opérateur dont le domaine est non dense dans E, alors il génère un semi-groupe à singularité.

Définition 3.0.1

On dit que la fonction $v(t)$ est une solution du problème (3.1) *Si $v(t)$, $v'(t)$ et $A(t)v(t)$ sont continues sur $[0,1]$ et que la relation* (3.1) *est verifieé.*

Théorème 3.0.1 ([13])

Supposons que les conditions suivantes sont verifiées

i) *Il existe un semi-groupe $e^{-\tau A(t)}$ de classe $A(\alpha,\beta)$ engendré par l'opérateur $A(t)$ et supposons que α et β sont liés par l'inégalité $\alpha+1 \leq \beta < 2$ dans l'éstimation* (2.1).

ii) *Pour chaque $t \in [0,1]$, $A(t)$ admet un inverse borné $A^{-1}(t)$ et les inégalités*

$$\|[A(t)-A(\tau)]A^{-1}(\tau)\| \leq M|t-\tau|^{\varepsilon}, \tag{3.2}$$

$$\|A^{-1}(\tau)[A(t)-A(\tau)]v\| \leq M|t-\tau|^{\varepsilon}\|v\|. \tag{3.3}$$

Sont verifiées pour chaque $\varepsilon \in (\beta-1,1]$, et $v \in D$.

iii) *La fonction f(t) verifie la condition de Hölder*

$$\|f(t+\Delta t)-f(t)\| \leq Ct^{-\mu}|\Delta t|^{\varepsilon_1}, \varepsilon_1 \in (\frac{\beta-1}{\beta-\alpha},1]; \mu \in [0,1-\alpha).$$

iv) *On a $v_0 \in D(A^{\delta}(0))$, si $\overline{D}=E$, avec $\alpha<\delta\leq 1$. Si non on a*

$$v_0 \in D(A^{\delta}(0)), min\{2\alpha, \frac{\beta-1}{\beta-\alpha}\} < \delta \leq 1.$$

*Alors, il existe un opérateur-fonction $U(t,s): E \longrightarrow D_t$ (dit **opérateur résolu**) défini pour $0 \leq s < t \leq 1$ tel que :*

1) *$U(t,s)$ continue par rapport aux deux variables $0 \leq s < t \leq 1$,*

2) *$U(t,s)$ est continuement différentiable par rapport à t pour $t > s$ et*

$$\frac{\partial U(t,s)}{\partial t} = -A(t)U(t,s),$$

3) *La fonction opératorielle* $U(t,\tau)A^{-1}(0)$ *est continuement différentiable par rapport à* τ *pour* $\tau < t$ *et*

$$\frac{\partial U(t,s)A^{-1}(0)}{\partial t} = U(t,\tau)A(\tau)A^{-1}(0), \tag{3.4}$$

4) $U(t,s)U(s,\tau) = U(t,\tau), 0 \leq \tau < s < t \leq 1,$

5) *les estimations*

$$\|U(t,s)\| \leq M(t-s)^{-\alpha}e^{-\omega(t-s)}, \ \|A(t)U(t,s)A^{-1}(t)\| \leq M(t-s)^{-\alpha}e^{-\omega(t-s)}, \tag{3.5}$$

sont valides.

Et, le problème de cauchy admet une solution unique donnée par la formule

$$v(t) = U(t,0)v_0 + \int_0^t U(t,s)f(s)ds = U(t,0)v_0 + g(t). \tag{3.6}$$

Démonstration

Considérons l'équation intégrale suivante

$$V(t,\tau) = A(t)exp\{-(t-\tau)A(t)\}A^{-1}(t) + \int_\tau^t A(t)exp\{-(t-\tau)A(t)\}[A(t)-A(s)]A^{-1}(s)V(s,\tau)ds. \tag{3.7}$$

Le terme à l'exterieur de l'intégrale et le noyau de l'équation ont des singularités faibles, donc l'équation (3.7) admet une solution unique continue $V(t,\tau)$ pour $t > \tau$, qui vérifie l'estimation

$$\|V(t,\tau)\| \leq c(t-\tau)^{-\alpha}. \tag{3.8}$$

Définissons une fonction à valeurs opérateurs $U(t,\tau)$ de D dans D par la formule

$$U(t,\tau) = A^{-1}(t)V(t,\tau)A(t). \tag{3.9}$$

Cet opérateur vérifie l'équation

$$U(t,\tau)v = exp\{-(t-\tau)A(t)\}v + \int_\tau^t exp\{-(t-\tau)A(t)\}[A(t)-A(s)]A^{-1}(s)U(s,\tau)vds, \ v \in D \tag{3.10}$$

De (3.11), on a

$$\begin{aligned} U(t,\tau) &= A^{-1}(t)V(t,\tau)A(t), \\ A(t)U(t,\tau)A^{1}(\tau) &= V(t,\tau), \\ \|A(t)U(t,\tau)A^{1}(\tau)\| &= \|V(t,\tau)\|, \\ &\leq c(t-\tau)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

D'où la deuxième inégalité de (3.5) est démontré. L'inégalité (3.3) implique que $A^{-1}(t)A(\tau)$ admet une extension fermée à $\overline{D}$, nous désignerons cette extension par $\overline{A^{-1}(t)A(\tau)}$. D'autre part, on a

$$D(\overline{A^{-1}(t)[A(t)-A(\tau)]}) = R(\overline{A^{-1}(t)A(\tau)}) = \overline{D}, \tag{3.11}$$

et

$$\|\overline{A^{-1}(t)[A(t)-A(\tau)]}v\| \leq M|t-\tau|^{\epsilon}\|v\|, \ v \in \overline{D}. \tag{3.12}$$

On établit les autres propriétés de $U(t,\tau)$ dans les lemmes suivants.

Lemme 3.0.1

L'opérateur $U(t,\tau)$ admet une extension à un opérateur défini de E dans $\overline{D}$.

Démonstration

Considérons l'équation intégrale

$$\begin{aligned} \Pi(t,\tau) &= A^{-1}(\sigma)A(t)exp\{-(t-\tau)A(t)\} + \int_{\tau}^{t} \overline{A^{-1}(\sigma)A(t)}exp\{-(t-\tau)A(t)\} \\ &\times \ \overline{A^{-1}(t)[A(t)-A(s)]A^{1}(s)A(\sigma)\Pi(s,\tau)}ds, \end{aligned} \tag{3.13}$$

par sa solution, nous entendons un opérateut $\Pi(t,\tau)$ défini de E dans $\overline{D}$ continu pour $t > \tau$. Cette solution est construit sous la forme de la série $\Sigma_{k=0}^{\infty}\Pi_k(t,\tau)$, où

$$\Pi_0(t,\tau) = A^{-1}(\sigma)A(t)exp\{-(t-\tau)A(t)\}; \tag{3.14}$$

$$\Pi_k(t,\tau) \ = \int_{\tau}^{t} \overline{A^{-1}(\sigma)A(t)}exp\{-(t-\tau)A(t)\}\overline{A^{-1}(t)[A(t)-A(s)]A^{1}(s)A(\sigma)\Pi_{k-1}(s,\tau)}ds,$$
$$(k = 1,2,3,...). \tag{3.15}$$

Combinons (3.13) et (3.11), on obtient

$$U(t,\tau)v = A^{-1}(t)A(\sigma)\Pi(t,\tau)v, \ v \in D, \tag{3.16}$$

le membre de droite de cette équation admet l'extension $\overline{A^{-1}(t)A(\sigma)\Pi(t,\tau)}$ qui est défini de E dans $\overline{D}$, donc l'opérateur $U(t,\tau)$ aussi admet une extension à un opérateur défini de E dans $\overline{D}$, qu'on note $U(t,\tau)$. Cet opérateur vérifie l'équation

$$U(t,\tau) = exp\{-(t-\tau)A(t)\} + \int_\tau^t A(t)exp\{-(t-\tau)A(t)\}\overline{A^{-1}(t)[A(t) - A(s)]A^1(s)U(s,\tau)}ds. \tag{3.17}$$

Cette égalité implique la première éstimation dans (3.5).

Lemme 3.0.2

La fonction à valeurs opérateur $U(t,\tau)A^{-1}(0)$ est continuement différentiable par rapport à τ pour $\tau < t$, et la formule (3.4) *est vérifiée.*

Démonstration

On applique l'opérateur borné $A(\tau)A^{-1}(0)$ à droite pour les deux membres de (3.17).

$$U(t,\tau)A(\tau)A^{-1}(0) = exp\{-(t-\tau)A(t)\}A(\tau)A^{-1}(0) + \int_\tau^t A(t)exp\{-(t-\tau)A(t)\}\times$$

$$\times\overline{A^{-1}(t)[A(t) - A(s)]A^1(s)U(s,\tau)}A(\tau)A^{-1}(0)ds. \tag{3.18}$$

Selon cette formule, nous transformons l'expression

$$A^{-1}(0) - \int_\sigma^t U(t,\tau)A(\tau)A^{-1}(0)d\tau.$$

En faisant des transformations semblables à celles de 2, nous arrivons à l'égalité

$$A^{-1}(0) - \int_\sigma^t U(t,\tau)A(\tau)A^{-1}(0)d\tau = exp\{-(t-\sigma)A(t)\}+$$

$$+\int_\sigma^t exp\{-(t-s)A(t)\}[A(t) - A(s)]\{A^{-1}(0) - \int_s^t U(s,\tau)A(\tau)A^{-1}(0)d\tau\}ds \tag{3.19}$$

Combinons (3.19) et (3.17), on obtient

$$U(t,\sigma)A^{-1}(0) = A^{-1}(0) - \int_\sigma^t U(t,\tau)A(\tau)A^{-1}(0)d\tau.$$

Lemme 3.0.3

La fonction à valeurs opérateurs $U(t,\tau)$ vérifie l'équation intégrale

$$U(t,\tau) = exp\{-(t-\tau)A(\tau)\} + \int_{\tau}^{t} U(t,s)[A(\tau)-A(s)]exp\{-(t-\tau)A(\tau)\}ds. \quad (3.20)$$

Démonstration

la preuve de ce lemme peut être effectuée par la méthode exposée au 2, en utilisant l'identité

$$exp\{-(t-\tau)A(t)\} - exp\{-(t-\tau)A(\tau)\}$$

$$= \int_{\tau}^{t} A(t)exp\{-(t-s)A(t)\}[A(\tau)-A(t)]exp\{-(s-\tau)A(t)\}ds \quad (3.21)$$

Lemme 3.0.4

La fonction à valeurs opérateurs $U(t,\tau)$ est contuniement différentiable par rapport a t pour $t>\tau$, et Vérifie (2.9).

Démonstration

Comme $U(t,\tau)$ est une fonction de E dans $\overline{D}$, on peut appliquer l'opérateur

$$\overline{A^{-1}(0)A(t)} : \overline{D} \longrightarrow \overline{D},$$

sur les deux membres de l'équation (3.20). On obtient alors la formule

$$\overline{A^{-1}(0)A(t)}U(t,\tau) = \overline{A^{-1}(0)A(t)}exp\{-(t-\tau)A(\tau)\}+$$

$$+\int_{\tau}^{t} \overline{A^{-1}(0)A(t)}U(t,s)[A(\tau)-A(s)]exp\{-(t-\tau)A(\tau)\}ds, \quad (3.22)$$

de la même manière que dans la démonstration du lemme (3.0.2). Pour cette égalité nous obtenons la relation

$$A^{-1}(0) - \int_{\tau}^{\sigma} \overline{A^{-1}(0)A(t)}U(t,\tau) = A^{-1}(0)exp\{-(\sigma-\tau)A(\tau)\}+$$

$$+\int_{\tau}^{\sigma} \{A^{-1}(0) - \int_{s}^{\sigma} \overline{A^{-1}(0)A(t)}U(t,s)ds\}[A(\tau)-A(s)]exp\{-(s-\tau)A(\tau)\}ds \quad (3.23)$$

combinons (3.26) avec (3.20) , on obtient l'égalité

$$A^{-1}(0) - \int_{s}^{\sigma} A^{-1}(0)A(t)U(t,\tau)dt = A^{-1}(0)U(\sigma,\tau). \quad (3.24)$$

Cela implique la différentiabilité par rapport à σ et la formule

$$\frac{\partial A^{-1}(0)U(\sigma,\tau)}{\partial\sigma} = -A^{-1}(0)A(\sigma)U(\sigma,\tau). \tag{3.25}$$

Comme $t > \tau$, il existe $\tau_0 > 0$ tel que $\tau + \tau_0 < t$. En Intégrant par rapport à σ de $\tau + \tau_0$ à t, on obtient

$$-\int_{\tau+\tau_0}^{t} A^{-1}(0)A(\sigma)U(\sigma,\tau)d\sigma = A^{-1}(0)U(t,\tau) - A^{-1}(0)U(\tau+\tau_0;\tau).$$

Comme $A(\sigma)U(\sigma,\tau)$ est continue par rapport a σ dans l'intervalle $[\tau+\tau_0,t]$, on peut appliquer $A(0)$ sur les deux membres

$$-\int_{\tau+\tau_0}^{t} A(\sigma)U(\sigma,\tau)d\sigma = (0)U(t,\tau) - U(\tau+\tau_0;\tau).$$

Cela implique l'affirmation du lemme.

Lemme 3.0.5

l'estimation suivante est vérifiée

$$\|A^{\delta}exp(-tA)\| \leq ct^{-\beta\delta-\alpha(1-\delta)-\delta_1}exp(-\rho t),\ \ \delta\in(0,1),$$

où $\delta_1 > 0$ *si* $\beta > 1+\alpha$ *et* $\delta_1 = 0$ *si* $\beta = 1+\alpha$.

Démonstration

Par l'utilisation de la représentation (1.6), on obtient

$$A^{\delta}exp(-tA) = \frac{1}{\Gamma(1-\delta)}\int_0^{\infty} S^{-\delta}Aexp\{-(t+s)A\}ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\delta)}\int_0^{t} S^{-\delta}Aexp\{-(t+s)A\}ds + \frac{1}{\Gamma(1-\delta)}\int_t^{\infty} S^{-\delta}Aexp\{-(t+s)A\}ds = I_1 + I_2.$$

Estimation de I_1. Pour ce, nous utilisons une méthode développée dans [10] et $A^{-1}I_1$ est représenté comme une intégrale de Stieltjes

$$A^{-1}I_1 = \frac{1}{\Gamma(1-\delta)}\int_0^{t} S^{-\delta}Aexp\{-(t+s)A\}ds = -\frac{t^{\delta}}{\Gamma(1-\delta)}\int_0^{t}\varphi(s)d\phi(s),$$

où $\varphi(s) = S^{-\delta}$, $\phi(s) = A^{-1}exp\{-(t+s)\}$. La dernière intégrale peut être considérée comme la limite de la série de Riemann-Stieltjes :

$$S_n = \sum_{k=1}^{2^n} \varphi\Big(\frac{k}{2^n}\Big)\Big[\phi\Big(\frac{k}{2^n}\Big) - \phi\Big(\frac{k-1}{2^n}\Big)\Big].$$

Il est évident que $S_n \to \int_0^1 \varphi(s)d\phi(s)$. Nous considérons les incréments $\Delta\varphi = \varphi(s+\Delta s) - \varphi(s)$, $\Delta\phi = \phi(s+\Delta s) - \phi(s)$. D'autre part, nous avons les estimations

$$|\Delta\varphi| \leq c_1 \frac{\Delta s^{\theta_1}}{S^{\delta+\theta_1}} \ (0 \leq \theta_1 \leq 1),$$

$$\|A\Delta\phi\| \leq \left\| \int_{t(t+s)}^{t(1+\delta+\Delta s)} Aexp(-\sigma A)d\sigma \right\| \leq \frac{c_2 \Delta\delta cexp(-\rho t)}{t^{\beta-1}(1+s)^\beta} \leq c_2 \frac{\Delta\delta}{t^{\beta-1}} exp(-\rho t),$$

et aussi l'estimation

$$\begin{aligned} \|A\Delta\phi\| &\leq \|exp\{-t(1+s+\Delta s)A\}\| + \|exp\{-t(1+s)A\}\|, \\ &\leq c_3 t^{-\alpha}(1+s)^{-\alpha} exp(-\rho t), \\ &\leq c_3 t^{-\alpha} exp(-\rho t), \end{aligned}$$

En combinant les deux dernières estimations, on obtient l'inégalité

$$\|A\Delta\phi\| \leq c \frac{\Delta\delta^{\theta_2} exp(-\rho t)}{t^{(\beta-1)\theta_2 + \alpha(1-\theta_2)}} \ (0 \leq \theta_2 \leq 1).$$

En utilisant ces inégalites, il est facile d'estimer les différences

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{2^n} \Big[\varphi\Big(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\Big) - \varphi\Big(\frac{2k}{2^{n+1}}\Big)\Big]\Big[\phi\Big(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\Big) - \phi\Big(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\Big)\Big].$$

Par suite, on a

$$A(S_{n+1} - S_n) \leq c \frac{exp(-\rho t) 2^{n(\theta_1+\theta_2-1)}}{t^{\delta+(\beta-1)\theta_2+\alpha(1-\theta_2)}} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{\Delta s_k}{S_k^{\delta+\theta_1}}, \tag{3.26}$$

où $S_k = (2k-1)/2^{n+1}$, $\Delta S_k = 2^{-(n+1)}$. Posons $\theta_2 = \delta + \delta_2$ ($\delta_2 > 0$) et choisissons θ_1 tel que $1 - \theta_2 < \theta_1 < 1 - \delta$. Donc $\theta_1 + \theta_2 > 1$, $\delta + \theta_1 < 1$ et la serie dans (3.26) est uniformement borné pour chaque n. Finalement, comme $\|AS_0\| \leq cT^{-\alpha-\delta}exp(-\rho t)$, il résulte de la fermeture de A que l'estimation suivante est vérifiée

$$\|I_1\| \leq c \frac{exp(-\rho t)}{t^{\delta+(\beta-1)\theta_2+\alpha(1-\theta_2)}} = c \frac{exp(-\rho t)}{t^{\beta\delta+\alpha(1-\delta)+\delta_1}}, \ \delta_1 = (\beta - \alpha - 1)\delta_2.$$

Passons au terme I_2

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\Gamma(1-\delta)}\int_t^{\infty} S^{-\delta} A exp\{-(t+s)A\}ds, \\ &= \frac{t^{-\delta}}{\Gamma(1-\delta)} exp(-2tA) - \frac{\delta t^{-\delta}}{\Gamma(1-\delta)}\int_t^{\infty} \tau^{-\delta-1} exp\{-t(1+\tau)A\}ds. \end{aligned}$$

Donc

$$\|I_2\| \leq c\frac{exp(-2\rho t)}{t^{\alpha+\delta}} + \frac{c}{t^{\delta}}\int_1^{\infty} \tau^{-\delta-1}\frac{exp\{-t(1+\tau)\rho\}}{t^{\alpha}(1+\tau)^{\alpha}}d\tau \leq c\frac{exp(-\rho t)}{t^{\alpha+\delta}}.$$

Lemme 3.0.6

Les relations limites suivantes sont verifiées

a) $\lim\limits_{t\to\tau} U(t,\tau)v_0 = v_0$ *quand* $v_0 \in D(A^{\delta}(\tau))$, $\delta > \min\{2\alpha, (\beta-1)/(\beta-\alpha)$ *;*

b) *Si* $\overline{D} = E$, *donc* $\lim\limits_{t\to\tau} U(t,\tau)v_0 = v_0$ *quand* $v_0 \in D(A^{\delta}(\tau))$, $\delta > \alpha$.

Démonstration

Il résulte de l'équation (3.20) que

$$U(t,\tau)v_0 - v_0 = exp\{-(t-\tau)A(\tau)\}v_0 - v_0 + \int_{\tau}^{t} U(t,s)[A(\tau)-A(s)]exp\{-(t-\tau)A(\tau)\}v_0 ds,$$

où

$$\begin{aligned} \left\|\int_{\tau}^{t} U(t,s)[A(\tau)-A(s)]exp\{-(t-\tau)A(\tau)\}v_0 ds\right\| &\leq \int_{\tau}^{t} \|U(t,s)\|\left\|[A(\tau)-A(s)]A^{-1}(\tau)\right\| \times \\ \times\left\|A^{1-\delta}(\tau)\times \exp\{-(t-\tau)A(\tau)\}\right\|ds\|A^{\delta}v_0\| &\leq \int_{\tau}^{t} \frac{cds\|A^{\delta}v_0\|}{(t-s)^{\alpha}(s-\tau)^{\beta(1-\delta)+\alpha\delta+\delta_1-\varepsilon}}, \\ &\leq c(t-\tau)^{1+\varepsilon-\beta+\delta(\beta-\alpha)-\alpha-\delta_1}\left\|A^{\delta}v_0\right\| \underset{t\to\tau}{\longrightarrow} 0\,. \end{aligned}$$

Comme $\beta < 1+\varepsilon$ et $\delta > \alpha/(\beta-\alpha)$, on a $exp\{-(t-\tau)A(\tau)\}v_0 \underset{t\to\tau}{\longrightarrow} v_0$.

Nous pouvons maintenant montrer que la solution du problème (3.1) est unique et est donnée par la Formule (3.6). Dans cette formule, le terme $U(t,0)v_0$ est une solution du problème

$$v'(t) + A(t)v(t) = 0 \ (0 < t \leq 1), \ v(0) = v_0.$$

L'unicité de cette solutions implique l'égalité

$$U(t,s)U(s,\tau) = U(t,\tau), 0 \leq \tau < s < t \leq 1.$$

Lemme 3.0.7

On a $g(t) \in D$ et l'estimation

$$\|A(t)g(t)\| = \left\|A(t)\int_0^t U(t,s)f(s)ds\right\| \leq ct^{-\alpha-\mu}\|f\|_{C^{\epsilon_1,\mu}}. \tag{3.27}$$

Démonstration

Considérons l'équation intégrale (3.17) pour $f(\tau)$ et intégrons les deux membre par rapport à τ de 0 à t

$$\int_0^t U(t,\tau)f(\tau)d\tau = \int_0^t exp\{-(t-\tau)A(t)\}f(\tau)d\tau + \int_0^t \left\{\int_0^t exp\{-(t-\tau)A(t)\}\times \right.$$
$$\left. \times[A(t)-A(s)]U(s,\tau)f(\tau)ds\right\}d\tau.$$

Interchangeons, l'ordre d'intégration, on obtient

$$\int_0^t U(t,\tau)f(\tau)d\tau = \int_0^t exp\{-(t-\tau)A(t)\}f(\tau)d\tau + \int_0^t exp\{-(t-\tau)A(t)\}\times$$
$$\times[A(t)-A(s)]\left\{\int_0^t U(s,\tau)f(\tau)d\tau\right\}ds. \tag{3.28}$$

On peut montrer que

$$\left\|A(t)\int_0^t exp\{-(t-\tau)A(t)\}f(\tau)d\tau\right\| \leq ct^{-\alpha-\mu}\|f\|_{C^{\epsilon_1,\mu}}. \tag{3.29}$$

Maintenant, nous considérons l'expression intégrale

$$z(t) = A(t)\int_0^t exp\{-(t-\tau)A(t)\}f(\tau)d\tau + \int_0^t A(t)exp\{-(t-s)A(t)\}[A(t)-A(s)]A^{-1}(s)z(s)ds. \tag{3.30}$$

Il s'agit d'une équation avec des singularités faibles et $\|z(t)\| \leq ct^{-\alpha-\mu}\|f\|_{C^{\epsilon_1,\mu}}$ d'aprés l'estimation (3.28). Combinant (3.30) et (3.29), Nous concluons que $A^{-1}(t)z(t) = g(t)$. Donc, $g(t) \in D$ et l'estimation (3.27) est vérifiée.

Corollaire 3.0.1

La fonction $g(t)$ est continuement déffirentiable pour $t > 0$ et

$$g'(t) = f(t) - A(t)\int_0^t U(t,s)f(s)ds. \tag{3.31}$$

Chapitre 4

Equation parabolique abstraite du premièr ordre avec conditions non locales

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un problème parabolique pour une équation différentielle du premier ordre à coéfficient opératoriel à domaine non dense. On établit des conditions nécessaires et suffisantes qui guarantissent l'existence et l'unicité de la solution. L'étude est faite par la réduction du problème posé à une équation opératorielle.

4.1 Position du problème

On a l'équation différentielle abstraite du premier ordre suivante

$$v' + A(t)v = f(t), \quad 0 < t \leq 1, \tag{4.1}$$

$$\int_0^1 \Phi(t)v(t)dt = v_1 \tag{4.2}$$

dans l'espace de Banach $E = L_2$, où $A(t)$ est un opérateur linéaire avec $D(A(t)) = D_t$, Φ est une fonction donnée à valeurs opérateurs, $f(t)$ une fonction à valeurs dans E et v_1 un élément de E.

Remarques 4.1.1

Notons qu'ici nous utilisons une classe de semi-groupe(de $A(\alpha,\beta)$) qui est toujours utilisée dans le cas des opérateurs à domaine non dense.

On supppose que $A(t)$ admet un inverse borné $A^{-1}(t)$ pour chaque $t \in [0,1]$, $D_s \subset D_t$ quand $s \le t$, l'opérateur-fonction $A(0)A^{-1}(t)$ est continuement différentiable et il existe un semi-groupe de classe $A(\alpha,\beta)$, $T_t(s) = e^{-sA(t)}$ vérifiant les éstimations

$$\|T_t(s)\| \le Ms^{-\alpha}e^{-\omega s}, \ \|T_t'(s)\| \le Ms^{-\beta}e^{-\omega s}. \tag{4.3}$$

Pour chaque $M > 0$, $\omega > 0$, $\alpha \ge 0$ et $\beta \ge 1$.

Remarques 4.1.2

1.Notons que sous les conditions du théorème (3.7) *, on a la relation suivante*

$$\lim_{t\to 0} A^{-1}(t)U(t,0)v = A^{-1}(0), \ v \in E. \tag{4.4}$$

2. Si le membre de droite de (4.1) *vérifie la condition de Hölder*

$$\|f(t+\Delta t) - f(t)\| \le c|\Delta t|^{\varepsilon}$$

pour chaque $\varepsilon \in \left(\frac{(\beta-1)}{(\beta-\alpha)}, 1\right]$ *, alors, la fonction* $g(t) = \int_0^t U(t,s)f(s)ds$ *appartient a* D_t *et l'estimation*

$$\|A(t)g(t)\| \le ct^{-\alpha}\|f\|_{\varepsilon} \tag{4.5}$$

est satisfaite.

4.2 Existence et unicité de la solution

La solution de l'équation (4.1)-(4.2) s'écrit sous la forme

$$v(t) = U(t,0)v_0 + g(t), \tag{4.6}$$

avec $v_0 = v(0)$ et $g(t) = \int_0^t U(t,s)f(s)ds$.

Pour trouver v_0 utilisons la condition(4.2) . On intégre l'égalité (4.6) entre 0 et 1 par rapport à t, on obtient

$$v_1 = \int_0^1 \Phi(t)v(t)dt = \int_0^1 \Phi(t)U(t,0)v_0 dt + \int_0^1 \Phi(t)g(t)dt. \tag{4.7}$$

L'intégrale $\int_0^1 \Phi(t)g(t)dt$ éxiste, en effet

$$\int_0^1 \Phi(t)g(t)dt = \int_0^1 \Phi(t)A^{-1}(t)A(t)g(t)dt.$$

Donc on a

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^1 \Phi(t)g(t)dt \right\| &= \left\| \int_0^1 \Phi(t)A^{-1}(t)A(t)g(t)dt \right\|, \\
&\leq \int_0^1 \| \Phi(t)A^{-1}(t) \| \| A(t)g(t) \| \, dt, \\
&\leq \int_0^1 c_1 \| A(t)g(t) \| \, dt, \\
&\leq \int_0^1 c_1 c \frac{1}{t^\alpha} \|f\|_\epsilon dt, \\
&= \int_0^1 C \frac{1}{t^\alpha} \|f\|_\epsilon dt.
\end{aligned}$$

Et l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ de Riemann converge quand $\alpha < 1$, par conséquent l'intégrale $\int_0^1 \Phi(t)g(t)dt$ existe.

D'autre part

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \Phi(t)U(t,0)v_0 dt &= \int_0^1 \Phi(t)A^{-1}(t)A(t)U(t,0)v_0 dt, \\
&= -\int_0^1 \Phi(t)A^{-1}(t)\frac{\partial U(t,0)}{\partial t} v_0 dt, \\
&= -\Phi(t)A^{-1}(t)U(t,0)v_0 \Big|_0^1 + \int_0^1 [\Phi(t)A^{-1}(t)]'(t,0)v_0 dt, \\
&= [\Phi(0)A^{-1}(0) - \Phi(1)A^{-1}(1)U(1,0)]v_0 + \int_0^1 [\Phi(t)A^{-1}(t)]'(t,0)v_0 dt.
\end{aligned}$$

Comme l'opérateur $[\Phi(t)A^{-1}(t)]'$ est borné, l'intégrale $\int_0^1 [\Phi(t)A^{-1}(t)]'U(t,0)v_0 dt$ existe, par conséquent l'intégrale $\int_0^1 \Phi(t)U(t,0)v_0 dt$ éxiste.

On a donc

$$v_1 = \Big[\Phi(0)A^{-1}(0) - \Phi(1)A^{-1}(1)U(1,0)\Big]v_0 + \int_0^1 [\Phi(t)A^{-1}(t)]'(t,0)v_0dt + \int_0^1 \Phi(t)g(t)dt \quad (4.8)$$

Soient l'opérateur $A(0)\Phi^{-1}(0)\Phi(t)A^{-1}(t)$ et sa dérivée bornés (uniformément par rapport à t, i. e.

$$\|A(0)\Phi^{-1}(0)\Phi(t)A^{-1}(t)\| \leq q, \; \|A(0)\Phi^{-1}(0)[\Phi(t)A^{-1}(t)]'\| \leq q. \quad (4.9)$$

Alors, l'opérateur $A(0)\Phi^{-1}(0)$ peut être appliqué au (4.8)

$$\begin{aligned} A(0)\Phi^{-1}(0)v_1 &= A(0)\Phi^{-1}(0)[\Phi(0)A^{-1}(0) - \Phi(1)A^{-1}(1)U(1,0)]v_0 + A(0)\Phi^{-1}(0) \\ &\times \int_0^1 [\Phi(t)A^{-1}(t)]'(t,0)v_0dt + A(0)\Phi^{-1}(0)\int_0^1 \Phi(t)g(t)dt, \\ &= [I - A(0)\Phi^{-1}(0)\Phi(1)A^{-1}(1)U(1,0)]v_0 + A(0)\Phi^{-1}(0) \\ &\times \int_0^1 [\Phi(t)A^{-1}(t)]'(t,0)v_0dt + A(0)\Phi^{-1}(0)\int_0^1 \Phi(t)g(t)dt. \end{aligned}$$

Introduisons les opérateurs bornés suivants

$$K = A(0)\Phi^{-1}(0)\Phi(1)A^{-1}(1)U(1,0),$$

$$L = A(0)\Phi^{-1}(0)\int_0^1 [\Phi(t)A^{-1}(t)]'(t,0)v_0dt.$$

On remplaçons par K et L dans (4.8) on obtient

$$A(0)\Phi^{-1}(0)v_1 = [I - K]v_0 + Lv_0 + A(0)\Phi^{-1}(0)\int_0^1 \Phi(t)g(t)dt. \quad (4.10)$$

Puis on estime les opérateur K et L,

$$\begin{aligned} \|K\| &= \|A(0)\Phi^{-1}(0)\Phi(1)A^{-1}(1)U(1,0)\|, \\ &\leq q\|U(1,0)\|, \\ &\leq qMe^{-\omega}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|L\| &= A(0)\Phi^{-1}(0)\int_0^1 [\Phi(t)A^{-1}(t)]'(t,0)v_0dt\|,\\
&\leq q\int_0^1 \|U(t,0)\|dt,\\
&\leq q\int_0^1 Me^{-\omega t}t^{-\alpha}dt,\\
&= Mq\int_0^1 t^{-\alpha}e^{-\omega t}dt,\\
&= Mq\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\omega^{1-\alpha}}.
\end{aligned}$$

Si $qMe^{-\omega} < 1$, alors $\|K\| < 1$ donc l'opérateur $I - K$ est continuement inversible et

$$\|(I-K)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-qMe^{-\omega}}.$$

Donc

$$(I-K)^{-1}A(0)\Phi^{-1}(0)v_1 = v_0 + (I-K)^{-1}A(0)Lv_0 + (I-K)^{-1}A(0)\Phi^{-1}(0)\int_0^1 \Phi(t)g(t)dt.$$

Or, on a

$$\begin{aligned}
\|(I-K)^{-1}L\| &= \|(I-K)^{-1}\|\|L\|,\\
&\leq \frac{1}{1-qMe^{-\omega}}Mq\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\omega^{1-\alpha}},
\end{aligned}$$

et si on prend

$$\omega > \max\left\{ln2Mq, [2Mq\Gamma(1-\alpha)]^{\frac{1}{1-\alpha}}\right\}, \tag{4.11}$$

on obtient que $\|(I-K)^{-1}L\| < 1$, par suite on a

$$v_0 = [I + (I-K)^{-1}L]^{-1}(I-K)A(0)\Phi^{-1}(0)\left[v_1 - \int_0^1 \Phi(t)g(t)dt\right]. \tag{4.12}$$

Remarques 4.2.1

Cette relation définie v_0 comme un élément unique.

On remplace v_0 et on obtient la solution du problème original.

$$v(t) = u(t,0)[I + (I-K)^{-1}L]^{-1}(I-K)A(0)\Phi^{-1}(0)[v_1 - \int_0^1 \Phi(t)\int_0^t U(t,s)dsdt] + \\ + \int_0^t U(t,s)f(s)ds. \tag{4.13}$$

D'où le théorème.

Théorème 4.2.1

Les conditions suivantes sont vérifiées

1) *l'opérateur-fonction* $A(t)$ *admet un inverse borné* $A^{-1}(t)$ *pour chaque* $t \in [0,1]$ *et* $D_s \subset D_t$ *quand* $s \leq t$ *;*

2) *l'opérateur* $\Phi(t)$ *est subordonné à l'opérateur* $A(t)$*, alors, il éxiste l'opérateur borné* $\Phi^{-1}(0)$*, l'opérateur-fonction* $\Phi(t)A^{-1}(t)$ *est continuement différentiable est les conditions* (4.8) *sont vérifiées ;*

3) *l'opérateue* $A(t)$ *engendre un semi-groupe de classe* $A(\alpha, \beta)$ *avec* $\alpha + 1 \leq \beta \leq 2$ *pour chaque* $t \in [0,1]$ *;*

4) *le nombre* ω *dans l'estimation* (4.3) *vérifie la condition* (5.21)*; où* q *obéit à l'inégalité* (4.8) *;*

5) *la fonction* $f(t)$ *vérifie la condition de Hölder pour la norme de* L_2

$$\|f(t+\Delta t) - f(t)\| \leq C|\Delta t|^{\varepsilon},$$

pour chaque $\varepsilon \in \left(\frac{(\beta-1)}{(\beta-\alpha)}, 1\right]$.

Alors, le problème (4.1)-(4.2) *admet une solution unique, donné par* (5.22).

Chapitre 5

Problème aux limites pour équation aux dérivées partielles avec conditions intégrales

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un problème aux limites pour une équation aux dérivées partielles du seconde ordre du type parabolique avec conditions du type intégrales. L'étude est faite par la réduction du problème posé au probléme aux limites pour une équation abstraite étudiée dans le chapitre precédent.

On considère l'équation parabolique suivante

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[a(t,x)\frac{\partial v}{\partial x}\right] + b(x) + f(t,x). \tag{5.1}$$

Où $t \in (0,1]$, $x \in [0,1]$, $a(t,x)$, $b(x)$ et $f(t,x)$ sont des fonctions données, $a(t,x) \geq a_0 > 0$, et $b(x) \leq -b_0$ pour chaque a_0 et b_0 suffisament grand .

Nous cherchons une solution $v = v(t,x)$ de (5.1) vérifiant les conditions aux limites suivantes

$$v(t,0) = 0, \int_0^1 \varphi(x)v(t,x)dx = 0, \tag{5.2}$$

et la condition

$$\int_0^1 [\Phi_1(t)v(t,x) + \Phi_2(t)v'(t,x)]dt = v_1(x). \tag{5.3}$$

Où $\varphi(x)$,$\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ et $v_1(x)$ sont des fonctions données.

Théorème 5.0.2

les conditions suivantes sont vérifiées

(1) *les fonctions $a(t,s)$ et $a'_x(t,s)$ sont continues par rappot aux deux variables et $a(t,s) \geq a_0 > 0$;*

(2) *la fonction $b(x)$ est continue, $b(x) \leq -b_0$ pour $b_0 > 0$ suffisament grand (il est choisi tel que* (5.21) *soit vérifiée) ;*

(3) *les fonctions $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$, et $\varphi(x)$ sont continues et $\varphi(x) \neq 0$;*

(4) $v_1(x) \in D_0$ *;*

(5) *la fonction $f(t,s)$ vérifie la condition de Hölder par rapport à la norme de L_2*

$$\|f(t+\Delta t,.) - f(t,.)\| \leq C|\Delta t|^{\varepsilon},$$

pour chaque $\varepsilon \in \left(\frac{1}{4}, 1\right]$.

Alors, le problème (5.1)-(5.3) *admet une solution unique.*

Démonstration

On considère le problème ci-dessus dans l'espace de Banach $E = L_2$ avec $x \in [0,1]$ et introduisons dans L_2 les opérateurs suivants

$$A(t)v(x) = -\frac{d}{dx}\left[a(t,x)\frac{dv}{dx}\right] - b(x)v, \tag{5.4}$$

avec le domaine

$$D(A(t)) = D_t = \left\{v(x) \in W_2^2(0,1),\ v(0) = 0,\ \int_0^1 \varphi(x)v(x)dt = 0\right\},$$

et l'opérateur

$$\Phi(t)v(x) = \Phi_1(t)v(x) + \Phi_2(t)v'(x), \tag{5.5}$$

dont le domaine est

$$D(\Phi(t)) = \left\{v(x) \in W_2^1(0,1),\ v(0) = 0\right\}.$$

Donc, le problème (5.1)-(5.3) devient l'équation différentielle abstraite du premier ordre suivante

$$\frac{dv}{dt} + A(t)v = f(t), \quad 0 < t \leq 1, \tag{5.6}$$

$$\int_0^1 \Phi(t)v(t)dt = v_1. \tag{5.7}$$

Pour chaque $M > 0$, $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 1$. On montre que les opérateurs $a(t)$ et $\Phi(t)$ vérifient les conditions du théorème (4.2.1) . On considère l'équation résolvante de l'opérateur $A(t)$ dans le cas simple où $a(t,s) = 1$, $b(x) = -b_0$ et $\varphi(x) = 1$. On a

$$-v'' + b_0 v + \lambda v = f(x), \tag{5.8}$$

avec les conditions

$$v(0) = 0, \quad \int_0^1 v(x)dx = 0.$$

Posons $\varrho^2 = b_0 + \lambda$, on obtient alors

$$-v'' + \varrho^2 = f(x). \tag{5.9}$$

Construction de la fonction de green

$$\begin{cases} -v'' + \varrho^2 v = f(x), \\ v(0) = 0, \ \int_0^1 v(x)dx = 0. \end{cases} \tag{5.10}$$

Supposons que le problème homogène correspondant à (5.10) n'admet que la solution triviale, donc le problème (5.10) admet une fonction de Green unique $G(x,s,\lambda)$. qui se met sous la forme

$$G(x,s,\lambda) = \begin{cases} \alpha_1(s)e^{-\varrho s} + \alpha_2(s)e^{\varrho x}, \ sur \ ]0,s[, \\ \gamma_1(s)e^{-\varrho s} + \gamma_2(s)e^{\varrho x}, \ sur \ ]s,1[. \end{cases} \tag{5.11}$$

D'autre parte, d'après la condition 1 du théorème (1.5.2) on a

$$-(\alpha_1(s) - \gamma_1(s))e^{-\varrho s} - (\alpha_2(s) - \gamma_2(s))e^{\varrho s}) = 0, \tag{5.12}$$

et d'après la condition 2 du théorème on a

$$-(\alpha_1(s) - \gamma_1(s))\varrho e^{-\varrho s} - (\alpha_2(s) - \gamma_2(s))\varrho e^{\varrho s}) = 1. \tag{5.13}$$

D'après la condition 3 du théorème on a

$$G(0, s, \lambda) = 0, \int_0^1 G(x, s, \lambda)dx = 0. \tag{5.14}$$

Enfin de (5.12), (5.13) et (5.14) on obtient le système

$$\begin{cases} -(\alpha_1(s) - \gamma_1(s))\varrho e^{-\varrho s} - (\alpha_2(s) - \gamma_2(s))\varrho e^{\varrho s}) = 1, \\ -(\alpha_1(s) - \gamma_1(s))e^{-\varrho s} - (\alpha_2(s) - \gamma_2(s))e^{\varrho s}) = 0, \\ G(0, s, \lambda) = 0, \ \int_0^1 G(x, s, \lambda)dx = 0, \end{cases} \tag{5.15}$$

et de (5.12) et (5.13) on a

$$W = \begin{vmatrix} \varrho e^{-\varrho s} & -\varrho e^{\varrho s} \\ -e^{-\varrho s} & -\varrho e^{\varrho s} \end{vmatrix} = -2\varrho,$$

D'où

$$\alpha_1(s) - \gamma_1(s) = -\frac{1}{2\varrho} \begin{vmatrix} 1 & \varrho e^{-\varrho s} \\ 0 & -\varrho e^{-\varrho s} \end{vmatrix} = \frac{e^{\varrho s}}{2\varrho},$$

ainsi

$$\alpha_1(s) = \frac{e^{\varrho s}}{2\varrho} + \gamma_1(s), \tag{5.16}$$

$$\alpha_2(s) - \gamma_2(s) = -\frac{1}{2\varrho} \begin{vmatrix} \varrho e^{-\varrho} & 1 \\ -\varrho e^{-\varrho s} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{e^{-\varrho s}}{2\varrho},$$

par suite

$$\alpha_2(s) = \gamma_2(s) - \frac{e^{-\varrho s}}{2\varrho}, \tag{5.17}$$

de (5.13) on a

$$\begin{cases} \alpha_1(s) + \alpha_2(s) = 0, \\ \int_0^s(\alpha_1(s)e^{-st} + \alpha_2(s)e^{\varrho t})dt + \int_0^s(\gamma_1(s)e^{-st} + \gamma_2(s)e^{\varrho t})dt = 0, \end{cases} \tag{5.18}$$

en remplaçant (5.16) et (5.17) dans (5.18), on obtient

$$(\frac{e^{\varrho s}}{2\varrho} + \gamma_1(s)) + (\gamma_2(s) - \frac{e^{-\varrho s}}{2\varrho}) = 0,$$

$$\int_0^s (\frac{e^{\varrho s}}{2\varrho} + \gamma_1(s))e^{-\varrho t} + (\gamma_2(s) - \frac{e^{-\varrho s}}{2\varrho})e^{\varrho t}dt + \int_s^1 (\gamma_1(s)e^{-\varrho t} + \gamma_2(s)e^{\varrho t})dt = 0,$$

$$\gamma_1(s) + \gamma_2(s) + \frac{e^{\varrho s}}{2\varrho} - \frac{e^{-\varrho s}}{2\varrho} = 0,$$

$$\gamma_1(s)\int_0^1 e^{-\varrho t}dt + \gamma_2(s)\int_0^1 e^{\varrho t}dt + \int_0^s \frac{e^{\varrho(s-t)} - e^{\varrho(t-s)}}{2\varrho}dt = 0.$$

Si $\Delta(\lambda) \neq 0$, on obtient

$$\gamma_1(s) = \frac{1}{2\varrho\Delta(\lambda)}\Big[\int_0^1 (e^{\varrho(t-s)} - e^{\varrho(t-s)})dt - \int_0^s (-e^{\varrho(s-t)} + e^{\varrho(t-s)})dt\Big],$$

et

$$\gamma_2(s) = \frac{1}{2\varrho\Delta(\lambda)}\Big[\int_0^s (-e^{\varrho(s-t)} + e^{\varrho(t-s)})dt + \int_0^1 (e^{-\varrho(s-t)} - e^{\varrho(t-s)})dt\Big],$$

d'après la formule (5.11),

si $x > s$, on a

$$G(x,s,\lambda) = \frac{1}{2\varrho\Delta(\lambda)}\Big[\Big\{\int_0^1 (e^{\varrho(t-s)} - e^{\varrho(t-s)})dt - \int_0^s (-e^{\varrho(s-t)} + e^{\varrho(t-s)})dt\Big\}e^{-\varrho x},$$
$$+\Big\{\int_0^s (-e^{\varrho(s-t)} + e^{\varrho(t-s)})dt - \int_0^1 (e^{-\varrho(s-t)} + e^{\varrho(s-t)})dt\Big\}e^{\varrho x}\Big],$$

$$G(x,s,\lambda) = \frac{1}{2\varrho\Delta(\lambda)}\Big[\Big(\int_0^1 e^{\varrho t}dt + \int_s^1 e^{-\varrho t}dt + \int_0^1 e^{-\varrho t}dt - \int_0^s e^{\varrho t}dt\Big)e^{\varrho(s-x)},$$
$$+\Big(\int_0^s e^{\varrho t}dt - \int_0^1 e^{-\varrho t}dt\Big)e^{\varrho(x-s)}.$$

Si $x < s$, on a

$$\begin{aligned} G(x,s,\lambda) &= \alpha_1(s)e^{-\varrho x} + \alpha_2(s)e^{\varrho x}, \\ &= (\gamma_1(s) + \frac{e^{\varrho s}}{2\varrho})e^{-\varrho x} + (\gamma_2(s) - \frac{e^{-\varrho s}}{2\varrho})e^{\varrho x}, \\ &= \gamma_1(s)e^{-\varrho x} + \gamma_2(s)e^{\varrho x} + \frac{e^{\varrho(s-x)} - e^{\varrho(x-s)}}{2\varrho}. \end{aligned}$$

La fonction de Green du problème (5.10) donné par

$$G(x,s,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{cases}\varphi(x)+\varphi_1(x), & si\ x>s,\\ \varphi(x)+\varphi_2(x), & si\ x<s,\end{cases} \tag{5.19}$$

avec

$$\varphi(x,s,\lambda)=\frac{1}{2\varrho}[(e^{\varrho}-1)e^{-\varrho(x+s)}+(e^{-\varrho s}-e^{-\varrho})e^{\varrho(x+s)},$$

$$\varphi_1(x,s,\lambda)=\frac{e^{\varrho(s-x)}}{2\varrho}(e^{\varrho s}-e^{-\varrho s}-e^{\varrho}+1)+\frac{e^{\varrho(x-s)}}{2\varrho^2}(e^{\varrho s}-e^{-\varrho}-2),$$

$$\varphi_2(x,s,\lambda)=\frac{1}{2\varrho}\Big[\Big(e^{-\varrho}-e^{-\varrho s}\Big)e^{\varrho(s-x)}+\Big(e^{\varrho s}-e^{\varrho}\Big)e^{\varrho(s-x)}\Big],$$

$$\Delta(\lambda)=(e^{\varrho}+e^{-\varrho}-2).$$

Et que la résolvante de (5.10) est donnée par

$$R(\lambda,L_2)=\int_0^1 G(.,s,\lambda)f(s)ds,\ f\in L_2(0,1).$$

D'où

$$\begin{aligned}\|R(\lambda,L_2)f\|_{L_2} &= \left[\int_0^1 |R(\lambda,L_2)f(x)|_2dx\right]^{\frac{1}{2}},\\ &= \left[\int_0^1 \Big|\int_0^1 G(x,s,\lambda)f(s)ds\Big|^2dx\right]^{\frac{1}{2}},\\ &\le \left[\int_0^1\int_0^1 |G(x,s,\lambda)|^2|f(s)|^2ds|^2dx\right]^{\frac{1}{2}},\\ &\le \Big(\int_0^1 \sup_{0\le s\le 1}|G(x,s,\lambda)|^2\int_0^1|f(s)|^2dsdx\Big)^{\frac{1}{2}},\\ &\le \Big(\int_0^1 \sup_{0\le s\le 1}|G(x,s,\lambda)|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^1|f(s)|^2ds\Big)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

par suite

$$\|R(\lambda,L_2)f\|_{L_2}\le \sup_{0\le s\le 1}\Big(\int_0^1|G(x,s,\lambda)|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Estimation de la résolvante

On a

$$\|R(\lambda,L_2)\|_{L_2}\le\frac{1}{|\Delta(\varrho)|}(\|\varphi(x,s,\lambda)\|_{L_2}+\|\varphi_i(x,s,\lambda)\|_{L_2}). \tag{5.20}$$

De (5.19), on a

$$\begin{aligned}
\|\varphi_i(x,s,\lambda)\|_{L_2} &= \Big[\int_0^1 |\varphi_i(x,s,\lambda)|^2 dx\Big]^{\frac{1}{2}},\\
&= \Big[\int_0^s |\varphi_2(x,s,\lambda)|^2 dx + \int_s^1 |\varphi_1(x,s,\lambda)|^2 dx\Big]^{\frac{1}{2}},\\
&\leq \sqrt{2}\Big[\Big(\int_0^s |\varphi_2(x,s,\lambda)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\int_s^1 |\varphi_1(x,s,\lambda)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big].
\end{aligned}$$

Aussi

$$\begin{aligned}
|\varphi(x,s,\lambda)| &= \Big|\frac{1}{2\varrho}\big[(e^{\varrho}-1)e^{-\varrho(x+s)} + (e^{-\varrho s}-e^{-\varrho})e^{\varrho(x+s)}\big|,\\
&\leq \frac{1}{2|\varrho|}\big[|e^{\varrho}-1|e^{-Re\varrho(x+s)} + |e^{-\varrho s}-e^{-\varrho}|e^{Re\varrho(x+s)}\big],\\
&\leq \frac{1}{2|\varrho|}\big[(e^{Re\varrho}+1)e^{-Re\varrho(x+s)} + (e^{-Re\varrho s}+e^{-Re\varrho})e^{Re\varrho(x+s)}\big].
\end{aligned}$$

Il s'ensuite

$$\begin{aligned}
\|\varphi(x,s,\lambda)\|_{L_2(0,1)} &\leq \Big\|\frac{1}{2|\varrho|}\big[(e^{Re\varrho}+1)e^{-Re\varrho(x+s)} + (e^{-Re\varrho s}+e^{-Re\varrho})e^{Re\varrho(x+s)}\big]\Big\|_{L_2(0,1)},\\
&\leq \frac{1}{2|\varrho|}(e^{Re\varrho}+1)\|e^{-Re\varrho(x+s)}\|_{L_2(0,1)} +\\
&+ \frac{1}{2|\varrho|}(e^{-Re\varrho s}+e^{-Re\varrho})\|e^{Re\varrho(x+s)}\|_{L_2(0,1)}. \qquad (5.21)
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{-2(x+s)Re\varrho}dx &= -\frac{1}{2Re\varrho}e^{-2(x+s)Re\varrho}\Big|_0^1,\\
&= -\frac{1}{2Re\varrho}(e^{-2(1+s)Re\varrho} - e^{-2sRe\varrho}),\\
&= \frac{1}{2Re\varrho}(e^{-2sRe\varrho} - e^{-2(1+s)Re\varrho}),\\
&\leq \frac{1}{2Re\varrho}e^{-2sRe\varrho},\\
&\leq \frac{1}{2Re\varrho}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\|e^{-Re\varrho(x+s)}\|_{L_2(0,1)} = \Big(\int_0^1 e^{-2(x+s)Re\varrho}dx\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}(Re\varrho)^{\frac{1}{2}}}, \qquad (5.22)$$

de même, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{2(x+s)Re\varrho}dx &= \frac{1}{2Re\varrho}e^{2(x+s)Re\varrho}\Big|_0^1, \\
&= \frac{1}{2Re\varrho}(e^{2(1+s)Re\varrho} - e^{2sRe\varrho}), \\
&\leq \frac{1}{2Re\varrho}e^{2(1+s)Re\varrho}.
\end{aligned}$$

Par suite

$$\|e^{Re\varrho(x+s)}\|_{L_2(0,1)} = \Big(\int_0^1 e^{2(x+s)Re\varrho}dx\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{e^{2(1+s)Re\varrho}}{\sqrt{2}(Re\varrho)^{\frac{1}{2}}}. \tag{5.23}$$

On remplace par (5.22) et (5.23) dans (5.21) on obtient

$$\begin{aligned}
\|\varphi(x,s,\lambda)\|_{L_2(0,1)} &\leq \frac{1}{2|\varrho|}(e^{Re\varrho}+1)\frac{1}{\sqrt{2}(Re\varrho)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2|\varrho|}(e^{-Re\varrho s}+e^{-Re\varrho})\frac{e^{(1+s)Re\varrho}}{\sqrt{2}(Re\varrho)^{\frac{1}{2}}}, \\
&\leq \frac{e^{Re\varrho}+1}{2\sqrt{2}|\varrho|(Re\varrho)^{\frac{1}{2}}} + \frac{e^{Re\varrho}+e^{sRe\varrho}}{2\sqrt{2}|\varrho|(Re\varrho)^{\frac{1}{2}}}, \\
&\leq \frac{3e^{Re\varrho}+1}{2\sqrt{2}|\varrho|(Re\varrho)^{\frac{1}{2}}}, \\
&\leq \frac{3e^{Re\varrho}+k_1e^{Re\varrho}}{2\sqrt{2}|\varrho|(Re\varrho)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Or,on a, $\varrho \in \sum_{\frac{\delta}{2}} = \{\varrho \in C,\ |arg\varrho| < \frac{\delta}{2}\}$, ce qui entraine

$$\begin{aligned}
\cos|arg\varrho| &> \cos(\frac{\delta}{2}), \\
|\varrho|\cos|arg\varrho| &> |\varrho|\cos(\frac{\delta}{2}), \\
Re\varrho &> |\varrho|\cos(\frac{\delta}{2}), \\
(Re\varrho)^{-\frac{1}{2}} &< \frac{1}{|\varrho|^{\frac{1}{2}}\cos^{\frac{1}{2}}(\frac{\delta}{2})}.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$\|\varphi(x,s,\lambda)\|_{L_2(0,1)} \leq \frac{C_1e^{Re\varrho}}{|\varrho|^{\frac{3}{2}}}, \tag{5.24}$$

où $C_1 = \dfrac{3+k_1}{2\sqrt{2}\cos^{\frac{1}{2}}(\frac{\delta}{2})}$.

Aussi,

$$\begin{aligned}
|\varphi_2(x,s,\lambda)| &= \left|\frac{1}{2\varrho}\left[(e^{-\varrho}-e^{-\varrho s})e^{\varrho(s-x)}+(e^{\varrho s}-e^{\varrho})e^{\varrho(x-s)}\right|,\right.\\
&\le \frac{1}{2|\varrho|}\Big(|e^{-\varrho}-e^{-\varrho s}|e^{(s-x)Re\varrho}+|e^{\varrho s}-e^{\varrho}|e^{(x-s)Re\varrho}\Big),\\
&\le \frac{1}{2|\varrho|}\Big((e^{-Re\varrho}+e^{-sRe\varrho})e^{(s-x)Re\varrho}+(e^{sRe\varrho}+e^{Re\varrho})e^{(x-s)Re\varrho}\Big).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\|\varphi_2(x,s,\lambda)\|_{L_2(0,s)} &\le \left\|\frac{1}{2|\varrho|}\Big((e^{-Re\varrho}+e^{-sRe\varrho})e^{(s-x)Re\varrho}+(e^{sRe\varrho}+e^{Re\varrho})e^{(x-s)Re\varrho}\Big)\right\|_{L_2(0,s)}\\
&\le \frac{1}{2|\varrho|}(e^{-Re\varrho}+e^{-sRe\varrho})\|e^{(s-x)Re\varrho}\|_{L_2(0,s)}+\\
&+\frac{1}{2|\varrho|}(e^{sRe\varrho}+e^{Re\varrho})\|e^{(x-s)Re\varrho}\|_{L_2(0,s)}. \qquad (5.25)
\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
\int_0^s e^{2(s-x)Re\varrho}dx &= -\frac{1}{2Re\varrho}e^{2(s-x)Re\varrho}\Big|_0^s,\\
&= -\frac{1}{2Re\varrho}(1-e^{2sRe\varrho}),\\
&= \frac{1}{2Re\varrho}(e^{2sRe\varrho}-1),\\
&\le \frac{e^{2sRe\varrho}}{2Re\varrho}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\|e^{(x-s)Re\varrho}\|_{L_2(0,s)} = \Big(\int_0^1 e^{2(s-x)Re\varrho}dx\Big)^{\frac{1}{2}} \le \frac{e^{sRe\varrho}}{\sqrt{2}(Re\varrho)^{\frac{1}{2}}}, \qquad (5.26)$$

de même, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^s e^{2(x-s)Re\varrho}dx &= \frac{1}{2Re\varrho}e^{2(x-s)Re\varrho}\Big|_0^s,\\
&= \frac{1}{2Re\varrho}(1-e^{-2sRe\varrho}),\\
&\le \frac{1}{2Re\varrho}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\|e^{Re\varrho(x-s)}\|_{L_2(0,s)} = \Big(\int_0^s e^{2(x-s)Re\varrho}dx\Big)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{\sqrt{2}(Re\varrho)^{\frac{1}{2}}}. \qquad (5.27)$$

On remplace par (5.26) et (5.27) dans (5.25) on obtient

$$
\begin{aligned}
\|\varphi_2(x,s,\lambda)\|_{L_2(0,s)} &\leq \frac{1}{2|\varrho|}(e^{-Re\varrho}+e^{-sRe\varrho})\frac{e^{sRe\varrho}}{\sqrt{2}(Re\varrho)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2|\varrho|}(e^{sRe\varrho}+e^{Re\varrho})\frac{1}{\sqrt{2}(Re\varrho)^{\frac{1}{2}}},\\
&\leq \frac{2e^{sRe\varrho}}{2\sqrt{2}|\varrho|(Re\varrho)^{\frac{1}{2}}}+\frac{e^{sRe\varrho}+e^{Re\varrho}}{2\sqrt{2}|\varrho|(Re\varrho)^{\frac{1}{2}}},\\
&\leq \frac{4e^{sRe\varrho}}{2\sqrt{2}|\varrho|(Re\varrho)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Et comme

$$(Re\varrho)^{-\frac{1}{2}} < \frac{1}{|\varrho|^{\frac{1}{2}}\cos^{\frac{1}{2}}(\frac{\delta}{2})},$$

on a alors

$$\|\varphi_2(x,s,\lambda)\|_{L_2(0,s)} \leq \frac{C_2 e^{Re\varrho}}{|\varrho|^{\frac{3}{2}}} \tag{5.28}$$

où $C_2 = \dfrac{4}{2\sqrt{2}\cos^{\frac{1}{2}}(\frac{\delta}{2})}$.

D'autre part, on a

$$
\begin{aligned}
|\varphi_1(x,s,\lambda)| &= \left|\frac{1}{2\varrho}\Big[(e^{\varrho s}-e^{-\varrho s}-e^{\varrho}+1)e^{\varrho(s-x)}+(e^{\varrho s}-e^{-\varrho}-2)e^{\varrho(x-s)}\Big]\right|,\\
&\leq \frac{1}{2|\varrho|}\Big(|e^{\varrho s}-e^{-\varrho s}-e^{\varrho}+1|e^{(s-x)Re\varrho}+|e^{\varrho s}-e^{-\varrho}-2|e^{(x-s)Re\varrho}\Big),\\
&\leq \frac{1}{2|\varrho|}(e^{sRe\varrho}+e^{-sRe\varrho}+e^{Re\varrho}+1)e^{(s-x)Re\varrho}+\frac{1}{2|\varrho|}(e^{sRe\varrho}+e^{-Re\varrho}+2)e^{(x-s)Re\varrho}.
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
\|\varphi_1(x,s,\lambda)\|_{L_2(s,1)} &\leq \left\|\frac{1}{2|\varrho|}(e^{sRe\varrho}+e^{-sRe\varrho}+e^{Re\varrho}+1)e^{(s-x)Re\varrho}+\frac{1}{2|\varrho|}(e^{sRe\varrho}+e^{-Re\varrho}+2)e^{(x-s)Re\varrho}\right\|,\\
&\leq \frac{1}{2|\varrho|}(e^{sRe\varrho}+e^{-sRe\varrho}+e^{Re\varrho}+1)\|e^{(s-x)Re\varrho}\|_{L_2(s,1)}\\
&+ \frac{1}{2|\varrho|}(e^{sRe\varrho}+e^{-Re\varrho}+2)\|e^{(x-s)Re\varrho}\|_{L_2(s,1)}.
\end{aligned} \tag{5.29}
$$

Or,

$$
\begin{aligned}
\int_s^1 e^{2(s-x)Re\varrho}dx &= -\frac{1}{2Re\varrho}e^{2(s-x)Re\varrho}\Big|_s^1,\\
&= -\frac{1}{2Re\varrho}(e^{2(s-1)Re\varrho}-1),\\
&= \frac{1}{2Re\varrho}(1-e^{2(s-1)Re\varrho}),\\
&\leq \frac{1}{2Re\varrho}.
\end{aligned}
$$

Par suite

$$\|e^{-Re\varrho(s-x)}\|_{L_2(s,1)} = \left(\int_s^1 e^{2(s-x)Re\varrho}dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}(Re\varrho)^{\frac{1}{2}}}, \tag{5.30}$$

de même, on a

$$\begin{aligned}
\int_s^1 e^{2(x-s)Re\varrho}dx &= \frac{1}{2Re\varrho}e^{2(x-s)Re\varrho}\Big|_s^1, \\
&= \frac{1}{2Re\varrho}(e^{2(1-s)Re\varrho} - 1), \\
&\leq \frac{e^{2(1-s)Re\varrho}}{2Re\varrho}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\|e^{(x-s)Re\varrho}\|_{L_2(s,1)} = \left(\int_s^1 e^{2(x-s)Re\varrho}dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{e^{2(1-s)Re\varrho}}{\sqrt{2}(Re\varrho)^{\frac{1}{2}}}. \tag{5.31}$$

On remplace par (5.30) et (5.31) dans (5.29) on obtient

$$\begin{aligned}
\|\varphi_1(x,s,\lambda)\|_{L_2(0,1)} &\leq \frac{1}{2|\varrho|}(e^{sRe\varrho} + e^{-sRe\varrho} + e^{Re\varrho} + 1)\frac{1}{\sqrt{2}(Re\varrho)^{\frac{1}{2}}} \\
&+ \frac{1}{2|\varrho|}(e^{sRe\varrho} + e^{-Re\varrho} + 2)\frac{e^{2(1-s)Re\varrho}}{\sqrt{2}(Re\varrho)^{\frac{1}{2}}}, \\
&\leq \frac{2e^{Re\varrho} + 2}{2\sqrt{2}|\varrho|(Re\varrho)^{\frac{1}{2}}} + \frac{e^{Re\varrho} + e^{-sRe\varrho} + 2e^{(1-s)Re\varrho}}{2\sqrt{2}|\varrho|(Re\varrho)^{\frac{1}{2}}}, \\
&\leq \frac{5e^{Re\varrho} + 3}{2\sqrt{2}|\varrho|(Re\varrho)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Et comme

$$(Re\varrho)^{-\frac{1}{2}} < \frac{1}{|\varrho|^{\frac{1}{2}}\cos^{\frac{1}{2}}(\frac{\delta}{2})}.$$

Alors,

$$\|\varphi_1(x,s,\lambda)\|_{L_2(0,1)} \leq \frac{C_3 e^{Re\varrho}}{|\varrho|^{\frac{3}{2}}}, \tag{5.32}$$

où $C_3 = \dfrac{5+3k_2}{2\sqrt{2}\cos^{\frac{1}{2}}(\frac{\delta}{2})}$. De (5.24), (5.28) et (5.32), il resulte que

$$\|G(x,s,\lambda)\|_{L_2(0,1)} \leq \frac{C_4 e^{Re\varrho}}{|\Delta(\varrho)||\varrho|^{\frac{3}{2}}}. \tag{5.33}$$

Où $C_4 = C_1 + \sqrt{2}(C_2 + C_3)$.

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
\Delta(\varrho) &= e^{\varrho} + e^{-\varrho} - 2, \\
|\Delta(\varrho)| &= |e^{\varrho} + e^{-\varrho} - 2|, \\
&\geq e^{Re\varrho} - e^{-Re\varrho} - 2, \\
&\geq e^{Re\varrho} - 3, \\
&\geq e^{Re\varrho} - 3k_3 e^{Re\varrho}, \\
&\geq (1 - 3k_3)e^{Re\varrho},
\end{aligned}$$

qui donne

$$\frac{1}{|\Delta(\varrho)|} \leq \frac{k}{e^{Re\varrho}}.$$

On remplace dans (5.33), on obtient

$$\|G(x, s, \lambda)\|_{L_2(0,1)} \leq \frac{C}{|\varrho|^{\frac{3}{2}}}. \tag{5.34}$$

$$\|(A + \lambda I)^{-1}\| \leq C|\lambda + b_0|^{-\frac{3}{4}}, \ Re\lambda > -b_0.$$

D'aprés théorème (2.2.1) A genere un semi-groupe de classe $A(\alpha, \beta)$, où $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\beta = \frac{5}{3}$.

On suppose que l'opérateur $A(t)$ admet un inverse borné $A^{-1}(t)$, et on considère le problème

$$\begin{aligned}
A(t)v(x) &= f(x), \\
-\frac{d}{dx}\left[a(t, x)\frac{dv}{dx}\right] - b(x)v(x) &= f(x), \\
-\left[a'_x\frac{dv}{dx} + a\frac{d^2v}{dx^2}\right] - b(x)v &= f(x), \\
-a\frac{d^2v}{dx^2} - a'_x\frac{dv}{dx} - b(x)v &= f(x),
\end{aligned}$$

avec les conditions $v(0) = 0$ et $\int_0^1 \varphi(x)v(x)dx = 0$. Pour simplifier, on pose $\varphi(x) = 1$. Et $z(x) = \int_0^x v(s)ds$, on obtient

$$-az''' - a'_x z'' - bz = f(x),$$

C'est à dire

$$z''' + \frac{a'_x}{a} + \frac{b}{a}z = \frac{f(x)}{a}.$$

Avec les conditions

$$z(0) = 0,\ z'(0) = 0 \ et\ z(1) = 0. \tag{5.35}$$

Comme les conditions aux limites sont regiliéres, alors il existe une fonction de Green $G(x,s)$ qui nous permet de présenter la solution de ce problème comme suit

$$z(x) = \int_0^1 G(x,s)\frac{f(s)}{a(t,s)}ds.$$

Or

$$v(x) = A^{-1}(t)f(x) = z'(x) = \int_0^1 G'(x,s)\frac{f(s)}{a(t,s)}ds,$$

$$v'(x) = \int_0^1 G''(x,s)\frac{f(s)}{a(t,s)}ds.$$

Considérons l'opérateur $\Phi(t)A^{-1}(t)$. d'aprés la formule (5.5) , on a

$$\Phi(t)A^{-1}(t)f(x) = \Phi_1(t)v(x) + \Phi_2(t)v'(x),$$

$$= \Phi_1(t)\int_0^1 G'(x,s)\frac{f(s)}{a(t,s)}ds + \Phi_2(t)\int_0^1 G''(x,s)\frac{f(s)}{a(t,s)}ds.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\|\Phi(t)A^{-1}(t)f(x)\|_{L_2} &= \left\|\Phi_1(t)\int_0^1 G'(x,s)\frac{f(s)}{a(t,s)}ds + \Phi_2(t)\int_0^1 G''(x,s)\frac{f(s)}{a(t,s)}ds\right\|_{L_2},\\
&\leq \left\|\Phi_1(t)\int_0^1 G'(x,s)\frac{f(s)}{a(t,s)}ds\right\|_{L_2} + \left\|\Phi_2(t)\int_0^1 G''(x,s)\frac{f(s)}{a(t,s)}ds\right\|_{L_2},\\
&= \left[\int_0^1 \left|\Phi_1(t)\int_0^1 G'(x,s)\frac{f(s)}{a(t,s)}ds\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_0^1 \left|\Phi_2(t)\int_0^1 G''(x,s)\frac{f(s)}{a(t,s)}ds\right|^2\right]^{\frac{1}{2}},\\
&\leq \sup_{0<t\leq 1}|\Phi_1(t)|\left[\int_0^1\int_0^1 \left|\frac{G'(x,s)}{a(t,s)}\right|^2|f(s)|^2dsdx\right]^{\frac{1}{2}} +\\
&+ \sup_{0<t\leq 1}|\Phi_2(t)|\left[\int_0^1\int_0^1 \left|\frac{G''(x,s)}{a(t,s)}\right|^2|f(s)|^2dsdx\right]^{\frac{1}{2}},\\
&\leq \sup_{0<t\leq 1}|\Phi_1(t)|\left[\int_0^1 \sup_{0\leq s\leq 1}\left|\frac{G'(x,s)}{a(t,s)}\right|^2dx\int_0^1 |f(s)|^2ds\right]^{\frac{1}{2}} +\\
&+ \sup_{0<t\leq 1}|\Phi_2(t)|\left[\int_0^1 \sup_{0\leq s\leq 1}\left|\frac{G''(x,s)}{a(t,s)}\right|^2dx\int_0^1 |f(s)|^2ds\right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Par suite $\|A^{-1}(t)f(x)\| \leq C\|f\|$ pour tout $f(x) \in L_2$, où

$$C = \max\left(\sup_{0<t\leq 1} |\Phi_1(t)| \left(\int_0^1 \sup_{0\leq s\leq 1} \left| \frac{G'(x,s)}{a(t,s)} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \sup_{0<t\leq 1} |\Phi_2(t)| \left(\int_0^1 \sup_{0\leq s\leq 1} \left| \frac{G''(x,s)}{a(t,s)} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Ce qui montre que l'opérateur $\Phi(t)$ subordonné à l'opérateur $A(t)$. Ce qui achève la démonstration du théorème.

Bibliographie

[1] H. BRÉZIS. *Analyse fonctionnelle.* Masson, Paris, 1983.

[2] R. DAUTRAY, J.L. LIONS. *Analyse mathématique et calcul numérique.* Masson, Paris, 1987.

[3] T. KATO. *Abstract evolution equations of parabolic type in Banach and Hilbert spaces.* Nagoya Math. J.19, 1961, 93 - 125.

[4] S. G. KREIN. *Linear differential equations in Banach space.* Moscow, 1967, English translation, AMS, Providence, 1971.

[5] N. I. LONKIN. *Solving some boundary-value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition.* Differ. Uravn. 13, No. 2, (1977), 294-304.

[6] A. LUNARDI. *Analytic semi groups and optimal regularity in parabolic problems*, Birkhäuser, Boston, 1995.

[7] R. MURRAY. *Théorie et applications de l'analyse.* Paris, 1985.

[8] M. A. NAIMARK. *Linear Differential operators.* 1-2, Ungar, New York (1967-1968).

[9] A. PAZY. *Semigroups of linear operators and applications to partial differntial equations.* Springer Verlag, New York, 1983.

[10] Yu. T. SIL'CHENKO. *Evolutionary equations with non-densely defined operator coefficients.* Sib. Math. Zh., 34, No. 2, (1993), 166 - 169.

[11] Yu. T. SIL'CHENKO. *Differential equation with non-densely defined opeartor coefficients, generating semigroups with singularities.* Sib. Math. Zh., 36, No. 2, (1999), 345-352.

[12] Yu. T. SIL'CHENKO. *Ordinary differential operator with irregular conditions.* Sib. Math. Zh., 40, No. 1, (1999), 183 - 190.

[13] Yu. T. SIL'CHENKO and P. E. SOBOLEVSKII. *Solvability of the cauchy problem for an evolutionary equation in a banach space with non-densely defined operator coefficient generating a semigroup with a singularity.* Sib. Math. Zh., 27, No. 4, (1986), 93-104.

[14] P. E. SOBOLEVSKII. *Equation of parabolic type in Banach space.* Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 1966, 49, 1 - 62.

[15] H., TANABE. *Equations of evolutions.*, Pitman, London, San Fransisco, Malbourne, (1979).

[16] I. V. TIKHONOV. *On the solvability of the problem with a nonlocal condition for a differential equation in a Banach space.* Differ. Uravn. 34, No. 6, (1998), 241-243.

[17] YAGI. A., *On the abstract linear evolution equation of parabolic type.* Osaka J. Math. 14 (1977), 557 - 568.

[18] K. YOSIDA. *Functional analysis.* Springer Verlag, Berlin 1965.

Résumé

La présent travail est consacré à l'étude d'une certaine classe de semi-groupes générés par des opérateurs à domaine non dense dits semi-groupes à singularités et à la génération de ces derniers par une classe d'opérateurs différentiels avec conditions aux limites du type intagrales.

Mots cles : Semi-groupe à singularités, Génération de semi-groupe, Problème de Cauchy, Equation parabolique.

Abstract

In this work we study some class of semigroups generated by non-densely operator said semigroups with a sungilaritys and generating of these by a class of differential operators with boundary conditions of Type intagrales.

Keywords : semigroup with a sungilarity, generation of semigroup, Cauchy problem, Parabolic equation.

ملخص

نقوم في هذا العمل بدراسة نوع من أنصاف الزمر مولدة بمؤثرات خطية معرفة على مجالات غير كثيفة تسمى أنصاف الزمر الشاذة، نولد هذه الأخيرة في عملنا هذا بواسطة صنف من المؤثرات التفاضلية ذات شروط حدية تكاملية.

الكلمات الفاتحة: نصف زمرة شاذة، توليد نصف زمرة، مسألة كوشي، معادلة تكافئية.