République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Jijel
Faculté des Sciences exactes et sciences de la nature et de la vie
Département de Mathématiques
Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées

N°d'ordre :
Série :

MEMOIRE

Présenté à la Faculté Des Sciences exactes
Et sciences de la nature et de la vie
Département De Mathématiques
Pour l'obtention du diplôme de

MAGISTER
Spécialité : Mathématiques
Option : *Analyse*

Thème

La Théorie de Nevanlinna *p*-adique et Ses Applications à la distribution des valeurs

Par

BOUDJERIDA NADJET

Soutenue le : 17/06/2010
Devant le jury **:**

Président :	**A. Aibeche**	**Prof.**	Univ. Sétif
Rapporteur :	**T. Zerzaihi**	**MC.**	Univ. Jijel
Examinateurs :			
	M. Denche	**Prof.**	Univ. Constantine
	D. Azzam-Laouir	**Prof.**	Univ. Jijel
	W. Chikouche	**MC.**	Univ. Jijel
Invité :	**A. Boutabaa**	**MC.**	Univ. Blaise-Pascal (France)

2009-2010

Remerciement

Je remercie Dieu qui m'a donné la force et le courage pour réaliser ce mémoire.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur T.Zerzaihi maître de conférences et chef du département de Mathématiques à l'université de Jijel, qui fut Pour moi un encadreur du mémoire et qui a su me laisser une marge de la liberté de traiter ce sujet qui à réussi à me guider dans ce travail, et à me donner toute la motivation nécessaire pour arriver à la fin de cette épreuve. Merci encore de m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions.

J' adresse toute ma gratitude à Monsieur A.Boutabaa maître de conférences à l'université Blaise Pascal à Clermont-Ferrand (France) de m'avoir accompagné sur ce domaine, de m'apporter tout son aide, ses précieux conseils, sa patience. Merci de m'avoir montré l'exemple dans la préparation
Et la rédaction de notre travail.

J'aimerais profiter de l'occasion pour remercier sincèrement Monsieur A.Escassut À l'université Blaise Pascal à Clermont-Ferrand (France) pour sa gentillesse, sa force et qui a toujours répondu à mes questions durant la période de préparation de ce travail.

Je remercie plus particulièrement, Monsieur A.Aibeche professeur à l'université de Sétif d'avoir accepté la tâche du président du jury.

Aussi je remercie les membres du jury
Monsieur M.Denche professeur à l'université de Constrantine
Madame D.Azzam-Laouir professeure à l'université de Jijel
Madame W.Chikouche maître de conférences à l'université de Jijel

Pour m'avoir honoré par leur évaluation de mon travail entant qu'examinateurs.

J'exprime tous mes remerciements à l'ensemble des membres du Laboratoire de Mathématiques pour leur sympathie. Plus particulièrement, l'équipe de magister pour toute leur aide et les bons moments passés ensemble.
Sans oublier à remercie l'équipe de travail p-adique pour leur gentillesse, leur efficacité Et leur précieuse indication documentaire.
Je tiens à remercier tous (tes) mes amis (es) qui m'ont aidé de loin ou de prés ou qui m'ont encouragé dans la réalisation de ce travail

Dédicace

Avec le temps, certains collègues sont devenus des amis

J'aimerais leur dire, je vous aime et combien j'ai apprécié leur présence. En Plus particulièrement, RABIAA qui m'a donné le sens de l'amitié et qui m'a considéré comme une sœur. Merci pour tous mes plus beaux moments partagés au labo et dans la vie.

Un tout grand merci à mes parents et à toute ma famille surtout ma mère pour leur aide, leur amour et leur encouragement et à cause de votre amour, j'arrive à ce que je suis. Envoyez-vous une appréciation complète et le respect et la gratitude. Je les dis sans honte combien je vous aime.

Je remercie également toutes les personnes, amis (es) de la famille et connaissances qui m'ont toujours fait part de leurs plus fermes encouragements.

Je voudrais exprimer particulièrement toute mon amitié à ma collègue de travail SAMIA. Merci pour la gentillesse, ton rire était tellement communicatif, tu es la meilleur. Merci Samia pour tous ces moments passés ensemble.

Enfin, je remercie ceux qui ont veillé sur moi depuis toujours, ceux qui m'ont fait confiance et qui ont accepté mes choix sans pour autant toujours forcément les comprendre. Merci encore à mes parents, pour tous ce que vous faites pour moi.

Nadjet

Table des matières

0 Introduction Générale **3**

1 Notions de base en analyse p-adique **7**

1.1 Corps Normés 7

1.1.1 Propriétés élémentaires d'un corps non-Archimédien 9

1.2 Corps des nombres p-adiques 11

1.2.1 Valuation p-adique 11

1.2.2 Norme p-adique 14

1.2.3 Complétion de $\mathbb{Q}$ 17

1.2.4 Propriétés Analytiques et Topologiques du corps des nombres p-adiques 22

1.3 $\mathbb{C}_p$-Corps des nombres complexes p-adiques 27

1.4 Fonctions Analytiques sur $\mathbb{C}_p$ 29

1.4.1 Dérivée des Fonctions Analytiques 31

1.4.2 Zéros des fonctions analytiques 33

1.4.3 Polygone de Valuation 38

2 Théorie de Nevanlinna p-adique des fonctions méromorphes **41**

2.1 Fonctions méromorphes p-adiques 41

2.1.1 Formule de Jensen 43

2.2 Analogue p-adique du Premier Théorème Fondamental de Nevanlinna . . . 45

2.2.1 Fonction Caractéristique de Nevanlinna 46

2.3 Propriétés classiques de la Théorie de Nevanlinna liées aux fonctions méromorphes et leurs dérivées 52

2.4 Analogue p-adique du Deuxième Théorème Fondamental de Nevanlinna . 55

3 Application de la théorie de Nevanlinna dans un disque ouvert 57

4 Factorisation des fonctions analytiques p-adiques et la distribution des valeurs 64

Chapitre 0

Introduction Générale

Avant tout, le corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$ est une extension du corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$. Ces nombres sont utilisés en théorie des nombres pour calculer modulo une puissance d'un nombre premier p. Les nombres p-adiques ont été découverts au début du vingtième siècle par le mathématicien Kurt Hensel (1861-1941). La principale motivation qui a donné naissance au corps des nombres p-adiques est le fait qui'il est muni d'une *norme non-archimédienne* $|.|_p$ où p est un nombre premier selon la quelle l'ensemble des entiers naturels est borné. On obtient alors une analyse différente de l'analyse usuelle, qu'on appelle *analyse p-adique*.

Si les applications de l'analyse p-adiques ont été jusque ici principalement en théorie des nombres, en géométrie arithmétique et en approximation diophantienne, elle est aussi utilisée en théorie des probabilités, en mécanique newtonienne, en mécanique quantique, en physique statistique etc...

Parmi les propriétés spécifiques de l'analyse p-adique, on peut citer par exemple le fait qu'une série converge si et selement si son terme général tend vers zéro.

Beaucoup d'études ont été faites au cours de ces dernières décennies sur les fonctions méromorphes complexes. Elle concernent les problèmes de distribution des zéros de fonc-

tions méromorphes complexes ainsi que des problèmes d'unicité pour de telles fonctions satisfaisant certaines équations différentielles ou fonctionnelles.

Il est naturel d'examiner ces problèmes de distribution de valeurs pour différents types de fonctions méromorphes ultra-métriques dans $\mathbb{K}$ ou dans un disque ouvert contenu dans $\mathbb{K}$.

Parmi les méthodes utilisées dans ces études *la Théorie de Nevanlinna p-adique* occupe une place centrale. Elle a été introduite en 1989 par A. Boutabaa [9]. Au départ les applications concernaient des fonctions méromorphes dans tout le corps $\mathbb{K}$, mais en 2001, A. Boutabaa et A. Escassut ont généralisé cette théorie aux fonctions méromorphes dans un disque ouvert contenu dans $\mathbb{K}$, en tenant compte du problème de Lazard [22]. Un autre intérêt de la Théorie de Nevanlinna est son application aux équations différentielles, où on démontre des résultats qu'on ne saurait obtenir au seul moyen de la fonction de valuation, ainsi on établit l'analogue p-adique d'un théorème classique de Yosida [28].

Plus exactement, ces travaux sont en relation avec ceux éffectués ces dernières années dans la théorie de distributions de valeurs (complexes ou p-adiques) pour des fonctions méromorphes ultra-métriques (ex : $\mathbb{K} = \mathbb{C}_p$). Ces travaux ont été exposés notamment aux dernièrs congrès d'analyse p-adique $\Big($Clermont-Ferrand (2004), Concepción (2006-Chili) et Lansing (2008-EEUU)$\Big)$. Les chercheurs les plus en vue dans ce domaine sont A.Boutabaa, A.Escassut, C.C.Yang (Hong Kong), Ta Thi Hoai An (Vietnam), Peichu Hu (Chine), W.Cherry et Min Ru (Texas), Pitman Wong, Julie Wang (Taiwan)...

Ce travail est basé sur la distributions de valeurs des fonctions méromorphes p-adiques, et consacré à la théorie de Nevanlinna p-adique, introduite par .A. Boutabaa [9].

Ce mémoire est réparati sur l'introduction générale et trois chapitres ;

Dans le premier chapitre, on commence par donner quelques rappels des notions fon-

damentales du corps non-Archimédien muni d'une norme non-Archimédienne. Ensuite on construit le corps des nombres p-adique $\mathbb{Q}_p$ qui est le complété de $\mathbb{Q}$ muni de la norme p-adique (non-Archimédienne) $|.|_p$, et on étudie les propriétés analytiques et topologiques de ce corps. Et comme la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ n'est pas un espace complet, nous avons besoin de le compléter pour former un corps plus grand noté $\mathbb{C}_p$ complet et algebriquement clos, et on présente aussi les fonctions analytiques et leurs distributions de zéros (dans le corps $\mathbb{C}_p$ et dans un disque). On termine ce chapitre par une partie importante qui est le *Polygone de valuation* [1] qui détermine la distribution des zéros des fonctions analytiques et il joue un grand rôle pour établir la *formule de Jensen.*

Dans le deuxième chapitre, nous avons défini les fonctions méromorphes p-adique et une autre version de *la formule de Jensen* qui est utilisée pour fournir une majoration du nombre de solution de l'équation $f(x) = 0$ dans un disque fermé dans le cas des fonctions analytiques. Puis, on construit la fonction *caractéristique de Nevanlinna* $T(r, f)$ qui soit positive et prolonge $\log |f|(r)$ quand f est analytique, et on étudie ses propriétés classiques et arithmétiques (addition, multiplication, décomposition,...) liées aux fonctions méromorphes.

Le but principal de ce chapitre est de définir les outils de base de la théorie de Nevanlinna, cette théorie associe à chaque fonction méromorphe trois fonctions de r ; $T(r, f)$, $m(r, f)$-la fonction de *compensation* et $N(r, f)$-la fonction qui *compte les pôles* des fonctions méromorphes avec leur multiplicité. La théorie de Nevanlinna est compose de deux théorèmes fondamentaux ; le premier est seulement la reformulation de *la formule de Jensen* qui fournit la taille du nombre des racines de l'équation $f(x) = a$, valable pour tout $a \in \mathbb{C}_p$; le deuxiéme montre qu'en général, $m(r, f)$ est petit par rapport à $T(r, f)$, et en conséquence $N(r, f)$ approche $T(r, f)$. Ce théorème est utilisé dans le problèmes *d'en-*

sembles d'unicité (URS) pour les fonctions entières (resp.méromorphes) p-adiques [6], et aussi le problème *d'ensembles d'unicité* sans multiplicité(URSCM) [10].

Le chapitre 3, consiste à appliquer le premier théorème de Nevanlinna dans un disque ouvert contenu dans un corps sphériquement complet et l'extension algébrique clos de $\mathbb{C}_p$ pour obtenir d'autre resultat sur le théorème de *Valiron* avec de nouvelles conditions sur un disque.

Enfin, dans Le chapitre 4, on aborde la question de factorisation des fonctions analytiques p-adiques et on applique la théorie de Nevanlinna pour constriure une fonction entière p-adique *pseudo-première* f, telle que pour tout $\beta \in \mathbb{C}_p$, $f - \beta$ admet un nombre fini de zéros multiples.

Chapitre 1

Notions de base en analyse p-adique

Ce chapitre a pour but d'introduire les outils nécessaires dont on aura besoin dans la suite. Nous rappelons des notations et propriétés classiques de base p-adique et quelques résultats fondamontaux sur les fonctions analytiques et méromorphes p-adiques. le plus intéressant de ce chapitre est d'étudier la distribution des zéros sur un disque fermé, et le lien qui existe entre le *polygone de valuation* et les zéros des fonctions analytiques.

1.1 Corps Normés

Dans cette partie, on va rappeler quelques définitions et propriétés élémentaires qui concernent les corps normés.

Définition 1.1 *Soit $\mathbb{K}$ un corps. On appelle une norme sur $\mathbb{K}$ toute application $||.||$de $\mathbb{K}$ dans $[0, +\infty[$ telle que*

1) $\forall x \in \mathbb{K}$, $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $\forall x, y \in \mathbb{K}, ||xy|| = ||x||\ ||y||$

3) $\forall x, y \in \mathbb{K}, ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *(Inégalité Triangulaire).*

Associée à une norme, on a une distance en posant $d(x, y) = ||x - y||$, qui fait donc de $\mathbb{K}$ un espace métrique.

Il y a toujours sur un corps $\mathbb{K}$ au moins une norme, à savoir l'application qui à x non nul associe 1, et à zéro associe zéro (norme triviale).

Sur $\mathbb{Q}$, on a de plus la norme usuelle $||x|| = |x|_\infty$ et la distance $d(x, y) = |x - y|_\infty$.

Il y a un outil intéressant qui permet de définir d'autres normes sur $\mathbb{Q}$ et qui sont équivalentes à $|.|_\infty$.

Proposition 1.1 [19] *L'égalité* $||x|| = |x|_\infty^\alpha$ *définit une norme sur* $\mathbb{Q}$ *si et seulement si* $\alpha \leq 1$.

Définition 1.2 *On dit que la norme* $||.||$ *est non-Archimédienne si au lieu de* 3)*, on a*

$$4)\ \forall x, y \in \mathbb{K} :\ ||x + y|| \leq \max\left\{||x||, ||y||\right\}\ \ (\textit{Inégalité Triangulaire Forte }).$$

et il est claire que 4) $\Rightarrow$ 3).

Définition 1.3 *Soit* $\mathbb{K}$ *un corps. On appelle corps valué, tout couple de la forme* $(\mathbb{K}, ||.||)$ *où* $\mathbb{K}$ *est un corps et* $||.||$ *est une norme sur* $\mathbb{K}$*. et on appelle la distance induite sur* $\mathbb{K}$ *par* $||.||$*, la distance* $d_{||.||}$ *sur* $\mathbb{K}$ *définie par*

$$\forall x, y \in \mathbb{K} :\ d_{||.||}(x, y) = ||x - y||$$

Si $||.||$ *vérifie* 4)*, alors*

$$\forall x, y, z \in \mathbb{K} :\ d_{||.||}(x, z) \leq \max\left(d_{||.||}(x, y), d_{||.||}(y, z)\right)$$

La distance induite par cette norme est appelée distance ultra-métrique.

Définition 1.4 *Lorsque* $\mathbb{K}$ *muni de la norme non Archimédienne, on dit que* $\mathbb{K}$ *est un corps valué non-Archimédienne. Dans le cas contraire, on dit que* $\mathbb{K}$ *est un corps valué Archimédien.*

1.1.1 Propriétés élémentaires d'un corps non-Archimédien

Dans la suite, on note par $(\mathbb{K}, ||.||)$ un corps valué (non-Archimédien).

Théorème 1.1 [19] ***(Caractéristique des corps non-Archimédiens)***
Soit $||.||$ un norme non-Archimédien sur le corps $\mathbb{K}$, on a

$$||.|| \ \ \textit{non-Archimédien} \Longleftrightarrow ||n|| \leq 1, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Proposition 1.2 [19] *Soient a et x deux éléments d'un corps non-Archimédien $(\mathbb{K}, ||.||)$, on a*

$$||x - a|| < ||a|| \Longrightarrow ||x|| = ||a||.$$

Démonstration. Soient $a, x \in \mathbb{K}$, par l'inégalité ultra-métrique on a pour $||x-a|| < ||a||$

$$\begin{aligned} ||x|| = ||x - a + a|| &\leq \max\left\{||x - a||, ||a||\right\} = ||a|| \\ ||a|| = ||x - x + a|| &\leq \max\left\{||a - x||, ||x||\right\} \end{aligned}$$

si $\max\left\{||x - a||, ||x||\right\} = ||x||$, on a le résultat. L'autre variante est contradiction avec l'hypothèse. □

Conséquence. (*Interprétation Géométrique*)

Dans un espace ultra-métrique tous les triangles sont isocèles

$$||x - y|| \neq ||y - z|| \implies ||x - z|| = \max\left\{||x - y||, ||y - z||\right\}, \ \forall x, y, z \in \mathbb{K}.$$

Théorème 1.2 [1] [19] *Soient $||.||_1$ et $||.||_2$ deux normes sur $\mathbb{K}$, alors $||.||_1$ et $||.||_2$ sont équivalentes si et seulement s'il existe un réel positif α tel que*

$$\forall x \in \mathbb{K} \ \ ||.||_1 = ||.||_2^{\alpha}.$$

Définition 1.5 *On dit qu'un corps non-Archimédien $\mathbb{K}$ est sphériquement complet si pour toute suite de disques emboité, l'intersection est non vide.*

Définition 1.6 *On dit qu'un corps non-Archimédien $\mathbb{K}$ est algébriquement clos si chaque polynôme $P(x)$ dans $\mathbb{K}[x]$ admet des racines dans $\mathbb{K}$.*
Autrement dit, chacun de ces polynômes se décompose en facteurs linéaires dans $\mathbb{K}[x]$.

Proposition 1.3 (25) *Si $\mathbb{K}$ est complet et séparable alors la complétion de sa clôture algébrique n'est pas sphériquement complet.*

Théorème 1.3 [16] *Soit $\mathbb{K}$ un corps non-Archimédien algébriquement clos alors $\mathbb{K}$ admet une extension algébriquement clos sphériquement complète.*

Notation. Puisque $\mathbb{K}$ satisfait les hypothèses du théorième 1.3, il admet une extension algébriquement clos sphériquement comlète. On note $\widehat{\mathbb{K}}$ cette extension de $\mathbb{K}$ et on note $\widehat{D}^{-}(a, R)$ le disque ouvert $\{x \in \widehat{\mathbb{K}} : ||x - a|| < R\}$ contenu dans $\widehat{\mathbb{K}}$.

Nous allons terminer cette section par une caractéristique d' espace archimédien et non-Archimédien.

Proposition 1.4 [19]***(espace Archimédien)***
Une norme $||.||$ sur un corps $\mathbb{K}$ est dite Archimédienne si

$$\forall x, y \in \mathbb{K}, x \neq 0, \exists n \in \mathbb{N} : ||nx|| > ||y||.$$

Autrement dit,

$$\sup\{||n||, n \in \mathbb{N}\} = +\infty.$$

L'espace muni de cette norme est un espace Archimédien.

Remarque 1.1 *une norme Archimédienne n'est jamais équivalente à une norme non-Archimédienne.*

1.2 Corps des nombres p-adiques

1.2.1 Valuation p-adique

Définition 1.7 *Soit p un nombre premier, on appelle valuation p-adique d'un entier rationnel non nul $x \in \mathbb{Z}^*$ notée $v_p(x)$ le plus grand entier positif tel que $p^{v_p(x)}$ dévise x.*

$$\begin{aligned} v_p : \mathbb{Z}^* &\longrightarrow \mathbb{Z}^+ \\ x &\longrightarrow v_p(x) = \max\{\alpha \in \mathbb{Z}^+ : p^\alpha | x\} \end{aligned}$$

donc

$$x = c\, p^{v_p(x)}, \quad (c, p) = 1.$$

Remarque.

1. *On pose, par convention que*
$$v_p(0) = +\infty.$$

2. *Si*
$$x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^* \Longrightarrow v_p(x) = v_p\Big(\frac{a}{b}\Big) = v_p(a) - v_p(b).$$

   En effet
$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^* \quad \Longrightarrow \quad (a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* \Longrightarrow \begin{cases} a = c_1\, p^{v_p(a)}, & (c_1, p) = 1 \\ b = c_2\, p^{v_p(b)}, & (c_2, p) = 1 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{c_1\, p^{v_p(a)}}{c_2\, p^{v_p(b)}} = \frac{c_1}{c_2}\, p^{v_p(a) - v_p(b)}, \ (c_1, c_2, p) = 1$$

   Alors
$$v_p(x) = v_p\Big(\frac{a}{b}\Big) = v_p(a) - v_p(b).$$

Exemples.

$a = p^2 + p^3 + 2p^4$, pour $p > 2$, $v_p(a) = 2$.

$b = 3p^3 + 2p^4 + p^6$, pour $p > 2$, $v_p(b) = 3$.

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{p^2 + p^3 + 2p^4}{3p^3 + 2p^4 + p^6}$, pour $p > 2$, $v_p\Big(\dfrac{a}{b}\Big) = 2 - 3 = -1$.

On a les propriétés suivantes de la valuation p-adique.

Proposition 1.5 [5] *Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$, on a*

i) $v_p(1) = 0, \forall$ *p-premier.*

ii) $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b),\ \forall a, b \in \mathbb{Z}^*$

iii) $v_p(a+b) \geq \min\big\{v_p(a), v_p(b)\big\},\ \forall a, b \in \mathbb{Z}^*$.

Démonstration.

i) Evident d'après l'écriture $1 = p^0\ , \forall p - premier$.

ii) Soient $\quad a \in \mathbb{Z}^* : a = p^\alpha\, n_1$ où $(p, n_1) = 1, v_p(a) = \alpha$

$b \in \mathbb{Z}^* : b = p^\beta\, n_2$ où $(p, n_2) = 1, v_p(b) = \beta$

on a $\quad ab = p^{\alpha+\beta}\ n_1 n_2$ où $(p, n_1 n_2) = 1, v_p(ab) = \alpha + \beta$

D'où, on a *ii)*.

iii) Selon les notations de *ii)*, on a pour tout $a, b \in \mathbb{Z}^*$

$$a + b = p^\alpha\, n_1 + p^\beta\, n_2 \text{ où } v_p(a) = \alpha,\ v_p(b) = \beta$$

On distingue deux cas

1. On suppose que $\alpha \leq \beta$, on trouve que

$$a + b = p^\alpha(n_1 + p^{\beta-\alpha}\, n_2) = p^\alpha n_3$$

si $(p, n_3) = 1$, on a $v_p(a+b) = \alpha = \big\{v_p(a), v_p(b)\big\}$. Sinon $v_p(a+b) > \big\{v_p(a), v_p(b)\big\}$.

2. On suppose maintenant que $\beta \leq \alpha$, on trouve que

$$v_p(a+b) > \min\{v_p(a), v_p(b)\} = \beta$$

Par 1 et 2, $v_p(a+b) \geq \big\{v_p(a), v_p(b)\big\},\ \forall a, b \in \mathbb{Z}^*$

D'où l'inégalité *iii)*.

Ce qui termine la démonstration. $\square$

Il est facile de généralise les propriétés de la proposition 1.5 pour tout élément $x \in \mathbb{Q}^*$ (c-à-d pour $x = \dfrac{a}{b}$ où $b \neq 0$).

Exemple. La valuation p-adique de la suite $a_n = n!$ est

$$v_p(n!) = \frac{n - S_p(n)}{p-1}, \forall n \geq 0.$$

où $S_p(n)$ désigne la somme des chiffres de l'écriture de n en base p.

En effet, on a $\quad n! = \prod_{k=1}^{n} k$, alors

$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{n} v(k)$, tel que $k = a_i p^i + ... + a_j p^j \quad$ où $a_i \neq 0$ et $v(k) = i$. Donc

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{n} i.$$

Alors

$$\begin{aligned}
k &= p^i + (a_i - 1)p^i + \sum_{l=i+1}^{j} a_l p^l \\
k-1 &= p^i - 1 + (a_i - 1)p^i + ... + a_j p^j \\
&= (p-1)\sum_{l=0}^{i-1} p^l + (a_i - 1)p^i + \sum_{l=i+1}^{j} a_l p^l \\
S_p(k-1) &= (p-1)\sum_{l=0}^{i-1} 1 + (a_i - 1) + \sum_{l=i+1}^{j} a_l \\
&= i(p-1) + a_i + \sum_{l=i+1}^{j} a_l - 1 \\
&= i(p-1) + S_p(k) - 1.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
S_p(k) = i &= \frac{S_p(k-1) - S_p(k) + 1}{p-1} \\
v_p(n!) &= \sum_{k=1}^{n} i = \frac{1}{p-1}\sum_{k=1}^{n}\Big[S_p(k-1) - S_p(k) + 1\Big] \\
&= \sum_{k=1}^{n} i = \frac{1}{p-1}\Big[\sum_{k=1}^{n} S_p(k-1) - \sum_{k=1}^{n} S_p(k) + n\Big] \\
&= \frac{n - S_p(n)}{p-1}.
\end{aligned}$$

1.2.2 Norme p-adique

Soient x un nombre rationnel, p un nombre premier, On définit l'application $|.|_p$ de $\mathbb{Q}$ dans $[0, +\infty[$ par

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Où $v_p(x)$ représente la valuation p-adique de x.

Proposition 1.6 [2] [3] *L'application $x \longmapsto |x|_p$ est une norme non-Archimédiènne sur $\mathbb{Q}$ (appelée la norme p-adique).*

Démonstration.

On démontre d'abord que l'application $|.|_p$ est une norme sur $\mathbb{Q}$.

1) On a

$$\begin{aligned} |x|_p = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad p^{-v_p(x)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -v_p(x) = -\infty \\ &\Leftrightarrow \quad v_p(x) = +\infty \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0. \end{aligned}$$

2) Soient $x, y \in \mathbb{Q}$

Si $x = 0$ ou $y = 0$ on a l'égalité. Sinon pour $|x|_p = p^{-v_p(x)}$ et $|y|_p = p^{-v_p(y)}$ on a

$$|xy|_p = p^{-v_p(xy)} = p^{-v_p(x)} \, p^{-v_p(y)} = |x|_p \, |y|_p.$$

3) Soient x et y dans $\mathbb{Q}^*$ telle que $x = \dfrac{a}{b}, y = \dfrac{c}{d}$, $a, c \in \mathbb{Z}$ et $b, d \in \mathbb{Z}^*$, on a

$$x + y = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\begin{aligned}
v_p(x+y) &= v_p(ad+bc) - v_p(bd) \\
&= v_p(ad+bc) - v_p(b) + v_p(d) \\
&\geq \min\{v_p(a)+v_p(d), v_p(b)+v_p(c)\} - v_p(b) + v_p(d) \\
&\geq \min\{v_p(a)-v_p(b), v_p(c)-v_p(d)\} \\
&\geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
|x+y|_p = p^{-v_p(x+y)} &\leq p^{-\min\left\{v_p(x), v_p(y)\right\}} \\
&\leq p^{\max\left\{-v_p(x), -v_p(y)\right\}} \\
&\leq \max\left\{p^{-v_p(x)}, p^{-v_p(y)}\right\} \\
&= \max\left\{|x|_p, |y|_p\right\}
\end{aligned}$$

D'où l'application $x \to |x|_p = p^{-v_p(x)}$ est une norme non Archimédienne sur $\mathbb{Q}$ (c'est la norme p-adique). $\square$

Remarques.

1. *Si p un nombre premier, tout entier a s'écrit sous la forme $c\,p^n$, où n représente la valuation p-adique et $(c,p)=1$, donc*

$$\forall a \in \mathbb{Z} : |a|_p \leq p^{-n} \leq 1$$

ce qui implique que $\mathbb{Z}$ est un ensemble borné pour tout norme p-adique $|.|_p$.

2. *Une remarque immédiate est que l'on a*

$$|x+y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\} \text{ si } |x|_p \neq |y|_p, \ \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

3. *La norme p-adique $|.|_p$ prend ses valeurs dans l'ensemble discrète $\left\{p^n,\, n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{0\right\}$.*

4. *La distance induite par la norme p-adique $d_p(x,y) = |x-y|_p$ est une distance ultramétrique, car elle vérifie l'inégalité*

$$d_p(x,y) \leq \max\{d_p(x,z), d_p(z,y)\}, \ \forall x, y, z \in \mathbb{Q}.$$

Le résultat suivant donne la relation entre les différentes normes p-adiques d'un même élément non nul x de $\mathbb{Q}$.

Proposition 1.7 [4] [19]***(formule du produit)***
Pour tout $x \in \mathbb{Q}^*$, on a

$$|x|_\infty \prod_{p\text{-}premier} |x|_p = 1$$

Cette formule est la formule du produit.

Remarque. *On peut définir sur le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ trois types de normes*

1. *Norme triviale*

$$|x| = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

2. *Norme usuelle*

$$|x|_\infty = \max(x, -x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

3. *Norme p-adique définie précédente $|.|_p$.*

Toute norme (non-triviale) sur $\mathbb{Q}$ est équivalente soit à la norme euclidienne $|.|_\infty$, soit à une norme p-adique $|.|_p$.

Théorème 1.4 [19] ***(Théorème d'Ostrowki)*** *Toute norme non triviale $||.||$ sur $\mathbb{Q}$ équivalente à la norme Archimédienne $|.|_\infty$ ou à une certaine norme p-adique $|.|_p$.*

1.2.3 Complétion de $\mathbb{Q}$

L'espace métrique $\mathbb{Q}$ muni de la distance p-adique $|.|_p$ n'est pas complet.

On va donner un exemple de suite de Cauchy divergente pour $p = 5$. On définit deux suites d'entiers a_n et x_n par

$$\begin{aligned} x_0 &= a_0 = 2 \\ x_1 &= a_0 + a_1 5 \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= a_0 + ... + a_{n-1}5^{n-1} \\ x_n &= x_{n-1} + a_n 5^n \end{aligned}$$

on détermine $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, et par la congruence $x_n^2 + 1 \equiv 0[5^n]$.

(x_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ car

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1}{5^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Cependant, elle ne converger vers $x \in \mathbb{Q}$, puisque si elle avait une limite $x \in \mathbb{Q}$, on aurait $x^2 + 1 = 0$.

Puisque $\mathbb{Q}$ n'est pas complet pour $|.|_p$, on le complète et on obtient un espace complet que l'on note $\mathbb{Q}_p$ et qui s'appelle le corps des nombres p-adiques. On rappelle le procédé de complétion (qui est valable pour un espace métrique quelconque). Soit E l'ensemble des suites de Cauchy d'éléments de $\mathbb{Q}$ (pour la valeur absolue $|.|_p$). On plonge $\mathbb{Q}$ dans E en associant à $x \in \mathbb{Q}$ la suite constante et égale à x.

On définit sur E une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ de la façon suivante

Si $u = (u_n)_{n\geq 0}$ et $v = (v_n)_{n\geq 0}$ sont deux éléments de E, on a $u\mathcal{R}v$ si et seulement si $|u_n - v_n|_p$ tend vers zéro si n tend vers l'infini. On montre alors que sur l'espace quotient

$\mathbb{Q}_p = E/\mathcal{R}$, on peut prolonger la distance sur E, et que cet espace métrique quotient est un espace complet, qui contient $\mathbb{Q}$ comme sous espace dense dans $\mathbb{Q}_p$. Nous verrons plus tard une manière bien plus tangible de se représenter $\mathbb{Q}_p$. Nous indiquons comment prolonger la valeur absolue définie sur $\mathbb{Q}$ à tout $\mathbb{Q}_p$. Soit x un élément de $\mathbb{Q}_p$ et x_n une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{Q}$, de limite x pour la distance p-adique. On vérifie que $|x_n|_p$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{R}$, de sorte que cette suite admet une limite, que l'on voit de plus être indépendante de la suite x_n de limite x choisie. On pose alors $|x|_p = \lim_{n\to+\infty} |x_n|_p$.

Pour un nombre premier p, on définit la norme p-adique sur $\mathbb{Q}_p$ comme suit.

Proposition 1.8 [4]***(norme p-adique de $\mathbb{Q}_p$)***
L'ensemble $\mathbb{Q}_p$ est un corps commutatif, et l'application qui à x associe $|x|_p$ est une norme ultra-métrique sur $\mathbb{Q}_p$. Pour tout x dans $\mathbb{Q}_p^*$, on peut écrire $|x|_p = p^{-v_p(x)}$ où $v_p(x)$ est un élément de $\mathbb{Z}$, ce nombre est la valuation p-adique de x.
Par convention, on pose $|0|_p = 0$, avec $v_p(0) = +\infty$.
En quelque sorte, plus x est divisible par p, plus sa norme p-adique est petite.

Entiers p-adiques

Une partie intéressante de ce corps est l'ensemble des éléments de norme p-adique inférieure ou égale à 1, que l'on note $\mathbb{Z}_p$.

Définition 1.8 ***(entiers p-adiques)***
On dit que $x \in \mathbb{Q}_p$ est un entier p-adique si son expansion canonique p-adique ne contient que des puissances positives de p. Autrement dit, la valuation p-adique de x est positive.
L'ensemble des entiers p-adiques se note

$$\mathbb{Z}_p = \left\{x \in \mathbb{Q}_p,\ \ x = \sum_{n\geq 0} a_n p^n\right\}$$

avec $a_n \in \{0, ..., p-1\}$ pour tout n. Ce développement est unique et s'appelle le développement de Hensel de x. On peut représenter un entier p-adique $x \in \mathbb{Z}_p$ par $x = ...a_2a_1a_0$.

Remarque. *La partie $\mathbb{Z}_p$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}_p$. On peut représenter un entier p-adique par une suite de chiffres à gauche de la virgule, tandis que les autres éléments de*

$\mathbb{Q}_p$, eux auront un nombre fini de chiffres à droite de la virgule. Cette écriture fonctionne en somme à l'inverse de ce qu'on a l'habitude de rencontrer dans l'écriture des nombres réels.

Théorème 1.5 [19] *L'ensemble $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adiques*

$$\mathbb{Z}_p = \left\{x \in \mathbb{Q}_p, v_p(x) \geq 0\right\} = \{x \in \mathbb{Q}_p, |x|_p \leq 1\}$$

$\mathbb{Z}_p$ représente le disque de l'unité de rayon 1 et de centre 0 (il s'appelle anneau des entiers p-adiques).

Proposition 1.9 [4] *Le corps quotient de $\mathbb{Z}_p$ par son unique idéal maximal $p\mathbb{Z}_p$ est isomorphe au corps $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}_p$, c'est le corps résiduel, ou corps des restes de $\mathbb{Q}_p$.*

Théorème 1.6 [4] *L'ensemble $\mathbb{Z}_p$ muni de la topologie associée à la distance p-adique est un ensemble compact.*

Définition 1.9 *Soit x un nombre p-adique. on note $\mathbb{Z}_p^*$ l'ensemble des entiers p-adique inversibles dans $\mathbb{Z}_p$. c'est-à-dire*

$$\mathbb{Z}_p^* = \left\{\sum_{n\geq 0} a_n p^n, a_0 \neq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{Q}_p, |x|_p = 1\right\}$$

On dit que x est inversible ou unitaire, et $\mathbb{Z}_p$ le groupe des unités p-adiques.

Conséquence. *Soit x un nombre p-adique et $|x|_p = p^{-n}$ alors x admet une unique représentation*

$$x = p^n u \ , \ u \in \mathbb{Z}_p^*.$$

En effet, pour $x \in \mathbb{Q}_p$, on a

$$\begin{aligned} |x|_p = p^{-n} \quad &\Rightarrow \quad x = p^n u, (p,u) = 1 \\ &\Rightarrow \quad x = p^n \underbrace{(a_0 + a_1 p + ...)}_{u}, \quad a_0 \neq 0 \end{aligned}$$

où $|u|_p = |a_0 + a_1 p + ...|_p = 1 \in \mathbb{Z}_p^*$.

Remarque. *L'inverse de p n'est pas un entier p-adique.*

Lemme 1.1 [4] [19]

i) $\mathbb{N}$ *est dense dans* $\mathbb{Z}_p$.

ii) $\mathbb{Z}$ *est dense dans* $\mathbb{Z}_p$, *i.e.* $\forall x \in \mathbb{Q} : |x|_p \leq 1, \forall \in \mathbb{N}$, *il existe un entier* $\alpha \in \mathbb{Z}$ *tel que*

$$|\alpha - x|_p \leq p^{-n} \quad \text{où} \quad \alpha \in \{0, 1, ..., p^n - 1\} \quad \text{est unique.}$$

Démonstration.

i) Voir [4].

ii) Soit $x \in \mathbb{Q} : x = \dfrac{a}{b}$ où $(a, b) = 1$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$. Pour $|x|_p \leq 1$, on a

$$|x|_p = \left|\frac{a}{b}\right|_p \leq 1 \Longleftrightarrow p^{v_p(b) - v_p(a)} \leq 1.$$

D'où $(p, b) = 1$ et $(p^n, b) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Donc il existe $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, tel que $m_1 b + m_2 p^n = 1$, on choisit, $\alpha = a\, m_1 \in \mathbb{Z}$, alors

$$\begin{aligned} |\alpha - x|_p &= \left|\frac{a}{b}(m_1 b - 1)\right|_p = \left|\frac{a}{b}\right|_p |m_1 b - 1|_p \\ &\leq |m_1 b - 1|_p = |m_2 p^n|_p \\ &= |m_2|_p p^{-n} \leq p^{-n} \end{aligned}$$

Pour n assez-grand, on a $\forall x \in \mathbb{Z}_p$, $\exists \alpha \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} |\alpha - x|_p = 0$. D'où $\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{Z}_p$.

Unicité. On suppose que $\alpha \in \{0, 1, ..., p^n - 1\}$ et $\beta \in \{0, 1, ..., p^n - 1\}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{Z}_p, |\alpha - \beta|_p = |\alpha - x + x - \beta|_p \leq \max\{|\alpha - x|_p, |\beta - x|_p\} \leq p^{-n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

En passant à la limite, on obtient $\alpha = \beta$. □

Lemme 1.2 [19] *Soient* $x \in \mathbb{Q}_p$, $k \in \mathbb{Z}$, *alors*

$$\{y \in \mathbb{Q}_p, |y - x|_p \leq p^k\} = x + p^{-k}\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p.$$

Théorème 1.7 [19] *L'ensemble des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$ est défini par l'ensemble des sériés*

$$\mathbb{Q}_p = \Big\{\sum_{n\geq k} a_n p^n, k \in \mathbb{Z}, a_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_n < p\Big\}.$$

Remarque. *Cette écriture représente $x \in \mathbb{Q}_p$ comme fraction dans la base p avec une infinité de chiffre avant le point et un nombre fini de chiffre après le point c'est-à-dire*

$$\forall x \in \mathbb{Q}_p, \quad x = ...a_2a_1a_0.a_{-1}...a_{-m}$$

c'est la forme canonique de $x \in \mathbb{Q}_p$.

Proposition 1.10 [19] *Le corps $\mathbb{Q}_p$ est l'ensemble des fractions de $\mathbb{Z}_p$.*

$$\mathbb{Q}_p = \Big\{\frac{a}{b}, \quad (a,b) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^*\Big\}$$

Proposition 1.11 [4] *Soit $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adique et v_p sa valuation p-adique, on définit*

$$\begin{aligned} |\mathbb{Q}_p^*| &= \big\{|x|, x \neq 0\big\} \quad \textit{un sous -groupe de } (\mathbb{R}_+^*, \bullet). \\ v(\mathbb{Q}_p^*) &= \mathbb{Z} = \big\{v(x), x \neq 0\big\} \quad \textit{un sous-groupe discret de } (\mathbb{R}, +). \end{aligned}$$

Commentaire. *Le groupe des valeurs de $\mathbb{Q}_p^*$, que l'on note $|\mathbb{Q}_p^*|$ est l'ensemble des valeurs prises par la valeur absolue sur les éléments non nuls du corps, c'est donc l'ensemble des puissances dans $\mathbb{Z}$ de p.*

On va montrer que toute classe d'équivalence de suite de Cauchy $x \in \mathbb{Q}_p$ contient un représentant canonique unique, pour cela on a le lemme suivant.

Théorème 1.8 [19] [25] *Si la classe d'équivalence $x \in \mathbb{Q}_p$ vérifie la condition $|x|_p \leq 1$, alors elle possède un seul représentant $(x_n)_{n\geq 0}$ (suite de Cauchy) qui satisfait*

i) $x_n \in \mathbb{Z}_p, 0 \leq x_n \leq p^n - 1$.

ii) $x_{n+1} \equiv x_n (\mod p^{n+1})$.

1.2.4 Propriétés Analytiques et Topologiques du corps des nombres p-adiques

Dans cette section, on étudie seulement les propriétés élémentaires analytiques du corps des nombres p-adiques qui concernent la convergence des suites et des séries définies dans $\mathbb{Q}_p$, et de faire une étude des propriétés topologiques sur les disques de $\mathbb{Q}_p$.

Propriétés Analytiques

Le corps des nombres p-adiques est analogue au corps des nombres réels sur plusieurs aspects, mais le corps $\mathbb{Q}_p$ possède des propriétés intéressantes différentes de celles du corps des réels $\mathbb{R}$. Le point le plus intéressant dans cette partie est la convergence des suites et des séries dans l'espace $\big(\mathbb{Q}_p, |.|_p\big)$.

Théorème 1.9 [3] [4] *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{Q}_p$. Alors $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite convergente si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0$$

Autrement dit, $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy.

Démonstration.

Ceci provient du fait que la distance p-adique est ultra-métrique. Si la suite a_n est de Cauchy, il est immédiat que la propriété est vérifiée. Dans la réciproque la situation devient différente de celle qui prévaut dans le cas réel ou complexe, par exemple. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe n_0 tel que, si $m \geq n_0$, on ait $|a_{m+1} - a_m|_p < \varepsilon$.

Faisons l'hypothèse de récurrence que pour $n \geq N_0$, et $h \in \mathbb{N}$, on ait $|a_{n+h} - a_n|_p < \varepsilon$.

L'hypothèse de récurrence est vraie si $h = 1$. Si on suppose la propriété vraie pour h, il vient

$$\begin{aligned} |a_{n+h+1} - a_n|_p &= |a_{n+h+1} - a_{n+h} + a_{n+h} - an|_p \\ &\leq \max\big\{|a_{n+h+1} - a_{n+h}|_p, |a_{n+h} - a_n|_p\big\} \end{aligned}$$

et par suite on a

$$|a_{n+h+1} - a_n|_p < \max\{\varepsilon, \varepsilon\} = \varepsilon$$

Ce qui montre que $|a_{n+h} - a_n|_p < \varepsilon$ pour tout $n \geq 0$, et tout $h \in \mathbb{N}$, et donc la suite est de Cauchy. $\square$

Maintenant, soit la série $\sum\limits_{k\geq 0} a_k, a_k \in \mathbb{Q}_p$. On sait que la série $\sum\limits_{k\geq 0} a_k$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ converge dans $\mathbb{Q}_p$. La série est converge absolument dans $\mathbb{Q}_p$ si et seulement si $\sum\limits_{k\geq 0} |a_k|$ converge dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.12 [19] *Soit la série* $\sum\limits_{k\geq 1} |a_k|_p,\ a_k \in \mathbb{Q}_p$ *on a*

$$\sum_{k\geq 1} |a_k|_p \quad \textit{converge dans } \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{k\geq 0} a_k \quad \textit{converge dans } \mathbb{Q}_p.$$

Démonstration. Soit $\sum\limits_{k\geq 1} |a_k|_p,\ a_k \in \mathbb{Q}_p$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 1} |a_k|_p \text{ converge dans } \mathbb{R} \quad &\Rightarrow \quad \forall \varepsilon, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0 \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|_p < \varepsilon \\
&\Rightarrow \quad |\mathcal{S}_n - \mathcal{S}_m|_p < \varepsilon \ \ (\forall n, m \geq n_0) \\
&\Rightarrow \quad \mathcal{S}_n \text{ est de cauchy dans } \ \mathbb{Q}_p, \text{ et } \mathbb{Q}_p \text{ complet} \\
&\Rightarrow \quad \mathcal{S}_n \text{ convergente dans } \mathbb{Q}_p \\
&\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ converge dans } \mathbb{Q}_p
\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. $\square$

Proposition 1.13 [19] *Soit* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ *une série dans* $\mathbb{Q}_p$ *on a*

$$\sum_{n\geq 0} a_n \ \ \textit{converge dans } \ \mathbb{Q}_p \Longleftrightarrow (a_n) \ \ \textit{converge vers } 0 \ \textit{ dans } \mathbb{Q}_p.$$

De plus

$$\Big|\sum_{n\geq 0} a_n\Big|_p \leq \max_{n\geq 0} |a_n|_p.$$

Proposition 1.14 [1] [19] *Soit* $(a_n)_{n\geq}$ *est une suite dans* $\mathbb{Q}_p$*, si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *dans* $\mathbb{Q}_p$ *on a*

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} |a_n|_p = 0. \\ \textit{ou bien} \\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n|_p = |a|_p \ \big(\textit{la suite } (|a_n|_p)_{n\geq 0} \textit{ est stationnaire à partir d'un rang } n_0\big). \end{cases}$$

Exemples.

1. $\sum\limits_{n\geq 0} n!$ converge dans $\mathbb{Q}_p$.Car $\lim\limits_{n\to+\infty} |n!|_p = \lim\limits_{n\to+\infty} p^{-v_p(n!)} = \lim\limits_{n\to+\infty} p^{-\frac{n-S_p(n)}{p-1}} = 0$
   où $S_p(n)$ désigne la somme des chiffres de l'écriture de n en base p.
2. $\sum\limits_{n\geq 0} p^n = \dfrac{1}{p-1}$ converge dans $\mathbb{Q}_p$, car $\lim\limits_{n\to+\infty} |p^n|_p = \lim\limits_{n\to+\infty} p^{-n} = 0$.
3. $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{p^n}$ diverge dans $\mathbb{Q}_p$, car $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{1}{p^n}\right|_p = \lim\limits_{n\to+\infty} p^n \neq 0$.

Propriétés Topologiques.

Soit $a \in \mathbb{Q}_p$ et $R > 0$, Nous posons

$D^+(a,R) = \{x \in \mathbb{Q}_p, |x-a|_p \leq R\}$: Le disque fermé de centre a et rayon R.

$D^-(a,R) = \{x \in \mathbb{Q}_p, |x-a|_p < R\}$: Le disque ouvert de centre a et rayon R.

$D(a,R)$: L'un ou l'autre de ces deux disques.

$C(a,R) = \{x \in \mathbb{Q}_p, |x-a|_p = R\}$: Le cercle dans $\mathbb{K}$ de centre a et rayon R.

Proposition 1.15 [4] [19] *Soient* $a, b \in \mathbb{Q}_p$ *et* $0 < r < R$*, on a les propriétés suivantes*

P.1. *Le cercle est un ensemble ouvert.*

P.2. *Un disque* $D(a,r)$ *est un ensemble à la fois ouvert et fermé.*

P.3. *Tout point* b *de* $D(a,r)$ *est un centre de* $D(a,r)$*.*
(Tout point d'un disque est un centre de ce disque)

P.4. *Soient* $D(a,r)$ *et* $D(b,r)$ *deux disques de* $\mathbb{Q}_p$*, alors ils sont disjoints ou l'un est inclus dans l'autre.*

Démonstration.

P.1. Soit $a \in \mathbb{Q}_p$, et $r \in]0, +\infty[$. Pour montrer que $C(a,r)$ est un ensemble ouvert on prend $x \in C(a,r), \rho < r$, alors par la proposition 1.2, on a

$$y \in D^-(x,\rho) \Rightarrow |x-y|_p < \rho < r = |x-a|_p$$

$$|y-a|_p = |x-a|_p = r.$$

donc $y \in C(a,r)$. Ce qui montrer que $C(a,r)$ est un ensemble ouvert.

P.2. $i)$ Tout disque ouvert $D^-(a,r)$ est ouvert dans un espace métrique. D'autre part pour démontrer que $D^-(a,r)$ est fermé dans $\mathbb{Q}_p$, on montre que

$$C_{\mathbb{Q}_p}^{D^-(a,r)} = \left\{x \in \mathbb{Q}_p, |x-a|_p \geq r\right\}.$$

est ensemble ouvert.

Le fait que $C_{\mathbb{Q}_p}^{D^-(a,r)} = C(r,a) \cup D$, où $D = \left\{x \in \mathbb{Q}_p, |x-a|_p > r\right\}$

L'ensemble D est ouvert puisque $D = C_{\mathbb{Q}_p}^{D^+(a,r)}$ et $C(a,r)$ sont ouverts d'après $P.1$.

Alors l'union de deux ensembles ouverts est ouvert .

Donc $D^-(a,r)$ est fermé

$ii)$ Tout disque fermé $D^+(a,r)$ est un ensemble fermé dans tout espace métrique. D'autre part, on a

$$D^+(a,r) = D^-(a,r) \cup C(a,r)$$

et l'union de deux ensembles ouverts est ouvert, alors $D^+(a,r)$ est ouvert.

P.3. Soit $x \in D^-(a,r)$, on montre que $D^-(a,r) = D^-(x,r)$

pour tout $y \in D^-(a,r) \Rightarrow |y-a|_p < r$, mais

$$|y-x|_p = |y-a+a-x|_p \leq \max\left\{|y-a|_p, |a-x|_p\right\} < r$$

d'où $y \in D^-(x,r)$, donc $D^-(a,r) \subset D^-(x,r)$

De la même façon, on montre que $D^-(x,r) \subset D^-(a,r)$

Donc $D^-(a,r) = D^-(x,r)$.

On refait les étapes précédentes pour montrer $D^+(a,r) = D^+(x,r), \forall \in D^+(x,r)$.

P.4. Soient $D(a,r)$ et $D(b,\rho)$ deux disques de $\mathbb{Q}_p$. On montre que

$$D(a,r) \cap D(b,\rho) \neq \phi \implies D(a,r) \subset D(b,\rho) \text{ où } D(b,\rho) \subset D(a,r).$$

Soit $r < \rho$ et pour $x \in D(a,r) \cap D(b,\rho)$, par $P.3$. On a $D(a,r) = D(x,r)$ et $D(b,\rho) = D(x,\rho)$ mais $D(x,r) \subset D(x,\rho)$, d'où $D(a,r) \subset D(b,\rho)$.

Lorsque on suppose que $\rho < r$, on trouve que $D(b,\rho) \subset D(a,r)$. □

Conséquence. *Le cercle $C(a,r)$ est un ensemble fermé*

(on a $C(r,a) = D^+(a,r) \cap C_{\mathbb{Q}_p}^{D^-(a,r)}$)

Proposition 1.16 [4] [25] *Le corps $\mathbb{Q}_p$ possède les propriétés suivantes*

1. *$\mathbb{Q}_p$ complet et séparable.*
2. *$\mathbb{Q}_p$ localement compact.*
3. *$\mathbb{Q}_p$ n'est pas sphériquement complet .*

1.3 $\mathbb{C}_p$-Corps des nombres complexes p-adiques

On définit la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ que l'on note $\overline{\mathbb{Q}}_p$. La norme p-adique s'étend de manière unique à $\overline{\mathbb{Q}}_p$ si l'on impose $|p| = p^{-1}$. Mais $\overline{\mathbb{Q}}_p$ n'est pas complet pour cette norme. On complété donc $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et l'on obtient un corps complet et algébriquement clos $\mathbb{C}_p$.

Proposition 1.17 [4] *Le corps $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clos pour tout p-premier.*

En effet. Par exemple on considère le polynôme $P(x) = x^2 - p \in \mathbb{Q}_p[x]$. Supposons que $P(x)$ admet des racines dans $\mathbb{Q}_p$, donc

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = p.$$

Alors

$$|x^2|_p = |x|_p^2 = |p|_p = p^{-1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} |x|_p^2 = p^{-1} \quad &\Rightarrow \quad |x|_p = p^{-\frac{1}{2}} \\ &\Rightarrow \quad v_p(x) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Contradiction avec $v_p(x) \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Q}_p$. Donc $P(x)$ n'a pas des racines dans $\mathbb{Q}_p$ (i.e : $\sqrt{\pm p} \notin \mathbb{Q}_p$). Ce qui prouve que $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clos. $\square$

Pour faire convenablement de l'analyse, il est donc logique de considéré une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, que l'on note $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et qui n'est pas complet, donc nous avons besoin de le compléter pour former un plus grand corps complet algébriquement clôs note $\mathbb{C}_p$ (Pour plus de détail, voir [4]). On montre que l'on peut prolonger la norme à ce corps, qui possède aussi une norme p-adique, que l'on note toujours $|.|_p$.

Définition 1.10 ***(norme p-adique de $\mathbb{C}_p$)***
Le corps des nombres complexes p-adique noté $\mathbb{C}_p$ est défini comme le complété de corps $\overline{\mathbb{Q}}_p$ par rapport à la norme p-adique $|.|_p$, de la même façon lorsqu'on a construit $\mathbb{Q}_p$. On prolonge la norme p-adique de $\overline{\mathbb{Q}}_p$ à $\mathbb{C}_p$, en posant pour tout $x \in \mathbb{C}_p$

$$|x|_p = \lim_{n\to\infty} |x_n|_p$$

avec $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{Q}_p$ qui est dans la classe d'équivalence de x.

Notations. On note $O(\mathbb{C}_p)$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}_p$ de valeur absolue inférieure ou égale à un $\Big($i.e. $O(\mathbb{C}_p) = \big\{x \in \mathbb{C}_p, |x|_p \leq 1\big\}\Big)$, c'est un anneau commutatif unitaire qui contient $\mathbb{Z}_p$ et que l'on appelle l'anneau des entiers de $\mathbb{C}_p$.

L'ensemble de ses éléments inversibles $\mathcal{O}(\mathbb{C}_p)$ est l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}_p$ de module un $\Big($i.e. $\mathcal{O}(\mathbb{C}_p) = \big\{x \in \mathbb{C}_p, |x|_p = 1\big\}\Big)$. L'anneau $\mathcal{O}(\mathbb{C}_p)$ possède donc un unique idéal maximal, qui est l'ensemble des éléments $\{x \in \mathbb{C}_p, |x|_p \leq 1\}$ noté $\mathcal{M}_p$. Le quotient de $O(\mathbb{C}_p)$ par $\mathcal{M}_p$ est un corps. Le corps résiduel de $\mathbb{C}_p$ est isomorphe à la clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_p$ de $\overline{\mathbb{F}}$.

Le groupe des valeurs de $\mathbb{C}_p^*$ $\Big($i.e. $|\mathbb{C}_p^*| = \big\{|x|_p,\ x \in \mathbb{C}_p^*,\ x \neq 0\big\}\Big)$ est l'ensemble des puissances rationnelles de p.

Proposition 1.18 [2] [4] *Le corps $\mathbb{C}_p$ n'est pas localement compact.*

Exemple. Considérons l'équation $x^n - p = 0$, et soit x_n l'une quelconque de ses racines. Montrons que de cette suite, on ne peut extraire une sous suite convergente, bien qu'elle soit bornée, puisque clairement x_n est de valeur absolue inférieure ou égale à un. On a

$$|x_n|_p = p^{-\frac{1}{n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n|_p = \lim_{n\to\infty} p^{-\frac{1}{n}} = 1.$$

Pour tout n, $|x_n|_p < 1$. Soit x_{n_m} une suite extraire convergente et y sa limite, alors $|y|_p = 1$, mais alors $|x_{n_m} - y|_p = \max(|x_{n_m}|_p, |y|_p) = |y|_p = 1$, et ceci est contradiction, car cette quantité doit tendre vers zéro.

Proposition 1.19 [2] [4] *Le corps $\mathbb{C}_p$ possède les propriétés suivantes*

i) $\mathbb{C}_p$ *n'est pas sphériquement complet.*

ii) $\mathbb{C}_p$ *algébriquement clos.*

iii) L'ensemble valeurs de la norme de $\mathbb{C}_p$ est égal $\{p^q,\ q \in \mathbb{Q}\}$.

iv) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p \subset \overline{\mathbb{Q}}_p \subset \mathbb{C}_p$.

Remarque. *Les définitions et les propriétés des suites et des séries dans $\mathbb{Q}_p$ sont toutes prolongées dans $\mathbb{C}_p$.*

1.4 Fonctions Analytiques sur $\mathbb{C}_p$

Définition 1.11 ***(fonction entière)***
On dit qu'une fonction $f : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$ est entière si elle est de la forme

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n, \ \ a_n \in \mathbb{C}_p$$

où x et a sont des nombres complexes p-adiques.

Considérons maintenant une série entière de terme général $a_n x^n$, avec $a_n \in \mathbb{C}_p$. Cette série est donc convergente si et seulement si $a_n x^n$ tend vers zéro dans $\mathbb{C}_p$.

Remarque. *L'ensemble $A = \{r \in [0, +\infty[, |a_n|_p r^n \longrightarrow 0\}$ est un ensemble non vide.*

Définition 1.12 *On appelle* rayon de convergence *noté R de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ la borne supérieure de A si A est majoré. Sinon on pose $R = +\infty$.*

Les résultats suivants sont analogues à ceux dans le cas $\mathbb{C}$.

Proposition 1.20 [4] [17] *Soit $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, alors*

i) Si $a_n \in \mathbb{C}_p^*$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|_p}{|a_n|_p} = L$, on a $R = \dfrac{1}{L}$ (Formule d'Alembert).

ii) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|_p} = L$, on a $R = \dfrac{1}{L}$ (Formule de Cauchy).

iii) Dans tous les cas, on a $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\geq 0} \sqrt[n]{|a_n|_p}}$ (Formule d'Hadamard).

La démonstration est analogue à celle dans le cas complexe.

Comme dans $\mathbb{C}$, les cas limites $L = 0$ et $L = \infty$ conduisent aussi au bon résultat sur le rayon de convergence.

Les propriétés de R sont aussi les mêmes, si R est non nul, la série converge pour $x \in \mathbb{C}_p$, tel que $|x|_p < R$. Pour $|x|_p > R$, elle diverge. En général, on peut rien dire en ce qui concerne la convergence sur le cercle $|x|_p = R$.

Exemples.

1. Soit $b \in \mathbb{C}_p^*$, la série $\sum_{n\geq 0} b^n x^n = \dfrac{1}{1-bx}$ dans le disque de convergence $D^-(0, |b|_p^{-1})$.
2. La série exponentielle $\exp x = \sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$ est analytique sur le disque de convergence $D^-(0, p^{\frac{-1}{p-1}})$.

   En effet. le fait que $v_p(n!) = \frac{n-S_p(n)}{p-1}$ permet de montre que le rayon de convergence est $p^{\frac{-1}{p-1}}$, et la même formule que la série ne converge pas sur le cercle de centre 0 et rayon $p^{\frac{-1}{p-1}}$. Donc $\exp x$ n'est pas une fonction entière.

Définition 1.13 *On dira qu'une fonction $f : D^+(a, R) \longrightarrow \mathbb{C}_p$ est analytique sur $D^+(a, R)$. Pour tout r, $0 < r < R$, s'il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{C}_p$ telle que $|a_n|_p r^n \longrightarrow 0$, et pour tout $x \in D^+(a, r)$ on a $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$.*

Définition 1.14 *une fonction $f : D^-(a, R) \longrightarrow \mathbb{C}_p$ est dite analytique sur $D^-(a, R)$ si pour tout r, $0 < r < R$, la restriction de f à $D^+(a, r)$ est une fonction analytique sur $D^+(a, r)$.*

Remarque. *Toute fonction analytique sur $\mathbb{C}_p$ (i.e. $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$) est appelée fonction entière.*

Proposition 1.21 [1] *Pour qu'une fonction $f : D^-(a, R) \longrightarrow \mathbb{C}_p$ soit analytique sur $D^-(a, R)$ il faut et il suffit qu'il existe une suite unique $(a_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{C}_p$ satisfaisant $|a_n|_p r^n \longrightarrow 0$ pour $r, 0 < r < R$, et pour $x \in D^-(a, R)$ on a $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$.*

Théorème 1.10 [17] *Soit* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \in \mathcal{A}(D^-(a,R))$. *Alors* f *est bornée dans* $D^-(a,R)$ *si et seulement si la suite* $(|a_n|_p R^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est aussi bornée, c'est-à-dire si* $\limsup_{n\to+\infty} |a_n|_p R^n < +\infty$. *De plus, si* f *est bornée, alors* $\|f\|_{D^-(a,R)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|_p R^n$.

Notation. On note $\mathcal{A}(D^-(a,R))$ (resp. $\mathcal{A}(D^+(a,R))$) l'ensembles des fonctions analytiques sur le disque $D^-(a,R)$ (resp. $D^+(a,R)$). Et $\mathcal{A}_b(D^-(a,R))$ l'ensemble de séries entières bornées qui convergent dans $D^-(a,R)$ et on les appelle fonctions analytiques bornées dans le disque $D^-(a,R)$. De même, on note $\mathcal{A}_u(D^-(a,R))$ l'ensemble $\mathcal{A}(D^-(a,R))\backslash\mathcal{A}_b(D^-(a,R))$ et on les appelle fonctions non bornées dans le disque $D^-(a,R)$.

1.4.1 Dérivée des Fonctions Analytiques

Maintenant, on donne quelques appels à propos des propriétès des fonctions analytiques.

Théorème 1.11 [1] [4]

i) L'ensemble $\mathcal{A}(D^+(a,R))\big($ *resp.*$\mathcal{A}(D^-(a,R))\big)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{C}_p$.

ii) Si $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ *est un élément* $\mathcal{A}(D^+(a,R))\big($ *resp.*$\mathcal{A}(D^-(a,R))\big)$ *est continue et dérivable sur* $D(a,R)$ *alors sa dérivé* $f' \in \mathcal{A}(D^+(a,R))\big($ *resp.*$f' \in \mathcal{A}(D^-(a,R))\big)$ *tel que* $f'(x) = \sum_{n\geq 1} na_n(x-a)^{n-1}$.
Plus généralement, si $R > 0$, *alors la série* f *est une fonction indéfiniment dérivable sur le disque de convergence de* f, *on a* $f^{(k)}(x) = \sum_{n\geq k} a_n C_n^k (x-a)^{n-k}$.

iii) Le rayon de convergence de f' *est égal au rayon de convergence de* f.

Démonstration.

i) et *iii)* Il est facile de vérifier que $\mathcal{A}(D^+(a,R))\big($ resp.$\mathcal{A}(D^-(a,R))\big)$ pour tout $0 < r < R$ est une espace vectoriel sur $\mathbb{C}_p$, et la rayon de convergence de f' est égal au rayon de convergence de f.

ii) 1. Soit x un élément fixé de $D^+(a,R)$, et soit $h \in \mathbb{C}_p$ tel que $x+h \in D^+(a,R)$

on a

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n\big[(x+h-a)^n-(x-a)^n\big] \\ &= h\sum_{n\geq 0} a_n\big[(x+h-a)^{n-1}+(x+h-a)^{n-2}(x-a)+... \\ &+ (x+h-a)(x-a)^{n-2}+(x-a)^{n-1}\big] \end{aligned}$$

la somme de droite est majorée en valeur absolue par $\max\limits_{n\geq 1}|a_n|_pR^{n-1}$ qui est fini car $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|_pR^{n-1}=0$, on a donc $\quad |f(x+h)-f(x)| \leq |h|\max\limits_{n\geq 1}|a_n|_pR^{n-1}$ et $\lim\limits_{n\to\infty}|f(x+h)-f(x)|_p=0$. D'où la continuité de f sur $D^+(a,R)$.

Maintenant, posons $g(x)=\sum\limits_{n\geq 0} n\ a_n(x-a)^{n-1}, g\in\mathcal{A}(D^+(a,R))$ car pour tout $n\geq 1$, on a $0\leq |n\ a_n|_pr^{n-1}\leq |a_n|_pR^{n-1}\longrightarrow 0$, lorsque $n\longrightarrow +\infty$ mais

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h-a)-f(x)}{h}-g(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n\big[(x+h-a)^{n-1}+(x+h-a)^{n-2}(x-a)+... \\ &+ (x+h-a)(x-a)^{n-2}+(x-a)^{n-1}-n(x-a)^{n-1}\big] \\ &= h\big(\text{somme majorée en valeur absolue par}\max_{n\geq 2}|a_n|_pR^{n-2}\big) \end{aligned}$$

donc $f'(x)=g(x)=\sum\limits_{n\geq 1} na_n(x-a)^{n-1}$, et $f'\in\mathcal{A}(D^+(a,R))$.

2. Soit $x\in D^-(a,R)$ et $R>0$, tel que $x\in D^+(a,R)$ f étant analytique sur $D^+(a,R)$, elle est d'après 1 continue et dérivable sur $D^+(a,R)$ et donc continue et dérivable en x et on a $f'(x)=\sum\limits_{n\geq 1} na_n(x-a)^{n-1}$. Donc f est continue et dérivable sur $D^-(a,R)$, sa dérivée f' est un élément de $\mathcal{A}(D^-(a,r))$ car $f'\in\mathcal{A}(D^+(a,R))$ pour $R>0$.

Par récurrence, on montre l'égalité $f^k(x)=\sum\limits_{n\geq k} a_nC_n^k(x-a)^{n-k}$. □

Proposition 1.22 [4] *Les fonctions analytiques sur un disque fermé de $\mathbb{C}_p$ forment un anneau commutatif, intègre, stable par dérivation.*

Théorème 1.12 [17] *Une fonction $f\in\mathcal{A}(D^-(0,r))$ a une dérivée identiquement nulle si et seulement si f est une constante.*

1.4.2 Zéros des fonctions analytiques

Dans cette partie, nous allons étudier le comportement des zéros des séries entières convergentes sur un disque férme.

Définition 1.15 *Soit $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$ une fonction non nulle. Pour chaque $x \in D^-(0,R)$ on a $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$. De plus, si $f(\alpha) = 0$, α est un zéro isolé et il existe $\beta \in \mathbb{N}$ unique tel que f peut être écrite, dans $D^-(0,R)$ sous la forme $(x-\alpha)^\beta g(x)$ où $g \in D^-(0,R)$ et $g(\alpha) \neq 0$.*

Proposition 1.23 [4] [14] *Une fonction analytique non nulle sur un disque vérifie le principe de zéros isolés c'est à dire que si b est un zéro de f, il existe un disque de centre b, de rayon assez petit, où la fonction f n'admet comme zéro que b.*

Définition 1.16 *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ (resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$) et soit $\alpha \in \mathbb{C}_p$ ($\alpha \in D^-(0,R)$). Soit $r \in [0,+\infty[$ tel que $D(\alpha,r) \subset \mathbb{C}_p$ (resp. soit $r \in]0,R[$ tel que $D(\alpha,r) \subset D^-(0,R)$) et $f(x) = \sum_{n=q}^{\infty} b_n (x-\alpha)^n$ pour tout $x \in D(\alpha,r)$ où $b_q(\alpha) \neq 0$, et $q > 0$, on dit dans ce cas, que α est un zéro de f d'ordre de multiplicité q. q sera appelé l'ordre de multiplicité de α.*

Si f admet α comme zéro d'ordre q, on posera $w_\alpha(f) = q$. Si $f(\alpha) \neq 0$, on posera simplement $w_\alpha(f) = 0$.

Proposition 1.24 [1] [4] [14] ***(égalité de Cauchy)***
Soient $0 < r < R$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathcal{A}(D^+(0,r))$ telles que $|a_n|_p r^n \to 0$. L'application

$$f \longmapsto |f|(r) = \max_{n\geq 0} |a_n|_p r^n \quad \textbf{\textit{(module maximun)}}$$

est une norme (valeur absolue) ultra-métrique sur $\mathcal{A}(D^+(0,r))$ et on a

$$\max_{x\in D^+(0,r)} |f(x)|_p \quad = \quad |f|(r) \tag{1.1}$$

*cette relation est appelée **égalité de Cauchy**.*

Démonstration.

i) Le module maximum existe car la suite $|a_n|_p r^n$ a pour limite 0, est bornée.

Le fait que $|.|(r)$ soit une norme est trés facile à vérifier (voir [1]). et on a l'inégalité ultra-métrique

$$\begin{aligned} |f+g|(r) &= \max_{n\geq 0}|a_n+b_n|_p r^n \\ &\leq \max_{n\geq 0}\{\max_{n\geq 0}|a_n|_p r^n, \max_{n\geq 0}|b_n|_p r^n\} \\ &= \max_{n\geq 0}\{|f|(r), |g|(r)\} \end{aligned}$$

ii) Si $f \equiv 0$ l'égalité (2.3) est trivialement vérifié. Supposons que $f \equiv 0$, pour tout $x \in D^+(0,r)$, on a

$$|f(x)| = |\sum_{n\geq 0} a_n x^n| \leq \max_{n\geq 0}|a_n|_p |x|_p^n \leq \max_{n\geq 0}|a_n|_p r^n = |f|(x)$$

d'où $\max_{n\geq 0}|f(x)| \leq |f|(r)$.

Pour montrer l'autre inégalité rappelons qu'on note $|\mathbb{C}_p^*|$ l'ensemble $\{p^{v(x)}/x \in \mathbb{C}_p^*\}$ où v est la valuation de $\mathbb{C}_p$. On montre que $|\mathbb{C}_p^*| = \{p^y, y \in \mathbb{Q}\}$ et que c'est un sous groupe du groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^*, \bullet)$ (voir [1]).

1) Supposons maintenant que $r \in |\mathbb{C}_p^*|$ et soit $b \in |\mathbb{C}_p|$ tel que $|b|_p = r$. Comme $|a_n|_p r^n \to 0$, il existe n_0 vérifiant $|a_{n_0}|_p r^{n_0} = \max_{n\geq 0}|a_n|_p r^n$ et $|a_m|_p r^m < \max_{n\geq 0}|a_n|_p r^n$ pour $m > n_0$. posons $c_n = \dfrac{a_n b^n}{a_{n_0} b^{n^0}}$, pour $n \geq 0$ et $g(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$, on a

$$f(x) = a_{n_0} b^{n_0} g\Big(\frac{x-a}{b}\Big), \quad x \in D^+(0,r) \tag{1.2}$$

Posons $P(x) = \sum_{0\leq n\leq n_0} c_n x^n$. On a $|c_n|_p = \dfrac{|a_n|_p r^n}{|a_{n_0|_p} r^{n_0}}, \forall n \geq 0$. d'où $\sup_{n\geq 0}|c_n|_p = |c_{n_0}|_p = 1$ et $c_m < 1, \forall m > n_0$, donc g et P sont des fonctions analytiques sur $D^+(0,1)$ et on a

$$|g|(1) = |P|(1) = 1 \text{ et } |g-P|(1) < 1.$$

De $|P|(1) = 1$ on déduit que l'image $\overline{P}(x)$ de $P(x)$ dans $\overline{\mathbb{F}_p}[x]$ n'est pas nulle. Comme $\overline{\mathbb{F}_p}$-la clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$ est infini, il existe $\overline{y} \in \overline{\mathbb{F}_p}$ tel que $\overline{P}(y) \neq 0$.

Soit $y \in \overline{y}$ on a

$$\begin{aligned} |P(x)| &= 1 \\ |g(y) - P(y)| &\leq |g - P| < 1 \end{aligned}$$

Alors

$$|g(y)| = |P(y) + g(y) - P(y)| \leq \max\{|P(y)|, |g(y) - P(y)|\} = 1 \tag{1.3}$$

Posons $x_0 = by + a, x_0 \in D^+(a, r)$, et en vertu de (1.4) on a

$$f(x_0) = a_{n_0} b^{n_0} g(y) \tag{1.4}$$

De (1.5) et (1.6) on a

$$|f(x_0)| = |a_{n_0}|_p |b^{n_0}|_p = |a_{n_0}|_p r^{n_0} = |f|(r).$$

2) Si $r \notin |\mathbb{C}_p^*|$, soit $(r_k)_{k \geq 0}$ une suite croissante d'éléments de $|\mathbb{C}_p^*|$, telle que $\lim\limits_{k \to +\infty} r_k = r$ (une telle suite existe car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$).

Pour tout $k \geq 0$, il existe $x_{0,k} \in D^+(a, r_k)$ tel que $|f(x_{0,k})| = |f|(r_k)$, d'où

$|f|(r_k) \leq \max\limits_{x \in D^+(a,r)} |f(x)|$ et $|f|(r) = \lim\limits_{k \to \infty} |f|(r_k) \leq \max\limits_{x \in D^+(a,r)} |f(x)|$ □

Proposition 1.25 [1][4] *L'espace $\mathcal{A}(D^+(a, R))$ que l'on muni de la norme $|.|(r)$ est un espace complet. Autrement dit, il s'agit d'un espace de Banach p-adique.*

Proposition 1.26 [4] [14] *On suppose que $f \in \mathcal{A}(D^+(0, r))$, $0 < r < R$ non nulle, alors*

i) La fonction $|f|(r)$ est croissante.

ii) Si la fonction f a un zéro b dans le disque $D^+(0, r)$, la fonction $|f|(r)$ est strictement croissante si $r > |b|_p$.

iii) La fonction $|f|(r)$ est continue.

Démonstration.

i) On a déjà vu que $|f|(r)$ est la borne supérieure de $|f(x)|$ sur le disque $D^+(0,r)$, ce qui donne le résultat immédiatement.

ii) Soit $r_0 > |b|_p$. On a $|f|(r_0) = |a_s|_p r_0^s$, pour $s \geq 1$, en raison de la présence d'au moins un zéro dans le disque $D^+(0,r_0)$. Comme $a_s \neq 0$, si $r > r_0$, on a $|a_s|_p r^s > |a_s|_p r_0^s$, donc $|f|(r) = \max\limits_{k\geq 0}|a_k|_p r^k \geq |a_s|_p r^s > |a_s|_p r_0^s = |f|(r_0)$.

iii) Fixons $\beta \in]0,r[$ (dans $]0,r]$ si $f \in \mathcal{A}(D(0,R))$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|_p\beta^n = 0$, de sorte qu'il existe N entier tel que $\max\limits_{n\geq N}|a_n|_p\beta^n = \max\limits_{n\in\mathbb{N}}|a_n|_p\beta^n$. Donc si $t \in [0,\beta]$, on a $\max\limits_{n\geq N}|a_n|_p t^n = \max\limits_{n\in\mathbb{N}}|a_n|_p t^n = |f|(t)$. Comme la fonction $t \longmapsto \max\limits_{n\leq N}|a_n|_p t^n$ est clairement continue, on a démontré le résultat. □

Théorème 1.13 [8] [14] ***(spécificité ultra-métrique)***
Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ $\big($resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$, pour tout $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r \in]0,R[\big)$, on a

$$|f'|(r) \leq \frac{1}{r}|f|(r).$$

Démonstration. On a $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ alors $f'(x) = \sum\limits_{n\geq 0} n a_n x^{n-1}$, pour tout $r > 0$

$$\begin{aligned} |f'|(r) &= \max_{n\geq 1}|na_n|_p r^{n-1} = \frac{1}{r}\max_{n\geq 1}|na_n|_p r^n \\ &\leq \frac{1}{r}\max_{n\geq 0}|a_n|_p r^n \\ &= \frac{1}{r}|f|(r) \end{aligned}$$

□

Théorème 1.14 [17] *Soit $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$ et soient $r_1, r_2 \in]0,R[$ tels que $r_1 < r_2$. Si la fonction f admet q zéros dans le disque $D^-(0,r_1)$, en prenant en compte les multiplicités, et si f n'admet pas de zéros dans la couronne $\Gamma(0,r_1,r_2)$, alors*

$$\frac{|f|(r_2)}{|f|(r_1)} = \big(\frac{r_2}{r_1}\big)^q.$$

Lemme 1.3 [4] *Soit $P(x) = b_0 + ... + b_s x^s$ un polynôme de $\mathbb{C}_p[x]$*
On suppose que $|P|(r) = \max\limits_{0\leq i\leq s}|b_i|_p r^i = |b_s|_p r^s$, on dit alors que le polynôme P a toutes ses racines dans $D^+(0,r)$.

Théorème 1.15 [4] *Soit $f \in \mathcal{A}(D^+(0,R))$. Soient l et s le plus petit et le plus grand indices tels que $|f|(r) = |a_l|_p r^l = |a_s|_p r^s$. On a*

1) *Si $s \geq 1$, alors la fonction f a exactement s zéros dans $D^+(0,R)$ compte tenu des multiplicités.*
2) *La fonction f n'a aucun zéro dans $D^+(0,R)$ si seulement et si $s = 0$. Alors sa norme est constante dans ce disque.*
3) *l le nombre des zéros de f dans $D^-(0,R)$*
4) *$s - l$ le nombre des zéros de f sur le cercle $C(0,R)$.*

D'après les Théorèmes (1.9) et (1.14), les corollaires suivants sont immédiats.

Corollaire 1.1 [16] [17] *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ non constante. alors f admet au moins un zéro dans $\mathbb{C}_p$. De plus, si f n'est pas un polynôme, f a une infinité de zéros dans $\mathbb{C}_p$.*

Corollaire 1.2 [16] *Si $f \in \mathcal{A}_u(D^-(a,R))$, alors f a une infinité de zéros dans $D^-(a,R)$.*

Remarque. *Une fonction $f \in \mathcal{A}_b(D^-(a,R))$ peut aussi avoir une infinité de zéros dans $D^-(a,R)$.*

Pour énoncer le théorème (1.15) on aura besoin de la définition suivante.

Définition 1.17 *Une suite $(a_n)_{n\geq 0} \subset]0,R[$ est appelée suite à distance croissante si la suite $|a_{n+1} - a_n|$ est strictement croissante et si $(a_n)_{n\geq 0}$ a une limite dans $\mathbb{R}_+^*$.*

Théorème 1.16 [16] [17] *Soit $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$. L'ensemble des zéros de f dans le disque $D^-(0,R)$ est une suite de zéros simples à distance croissante si et seulement si la suite $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|_p$ l'est aussi. De plus, si la propriété précédente est satisfaite , alors la suite de zéros de f dans le disque $D^-(0,R)$ est une suite $(\gamma)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $|\gamma_n|_p = \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|_p$ et $\lim_{n\to\infty} |\gamma_n|_p = R$.*

Proposition 1.27 [16] *Soit $D(0,r), 0 < r < R$ un disque de $\mathbb{C}_p$, et f une fonction analytique non constante sur $D(0,r)$. L'image de $D(0,r)$ par f est un disque de $\mathbb{C}_p$, de même nature que $D(0,r)$ (circonférence ou non).*

1.4.3 Polygone de Valuation

Supposons maintenant que la fonction entière $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ non constante de rayon de convergence $R \neq 0$, On va voir ce que devient le résultat précédent nous donne sur la fonction $r \longrightarrow |f|(r)$ pour $r \in [0, +\infty[$. Supposons que $a_0 \neq 0$, pour $|x|$ assez petit, on aura $|f(x)| = |a_0|_p$ et donc $|f|(r) = |a_0|_p = cte$, pour r assez petit. À partir du moment où il va exister un indice $k > 0$, tel que $|a_k|_p(r^k) = |a_0|_p$. Soit r_1 la première valeur de r telle que ce phénomène se réalise, et s_1 la plus grande valeur de k telle que $|a_k|_p r_1^k = |a_0|_p$. Alors f a exactement s_1 zéros sur le cercle $|x|_p = r_1$, et aucun dans le disque $D^-(0, r_1)$. On a $|f|(r) = |a_{s_1}|_p r^{s_1}$ pour $r \geq r_1$, et assez proche de r_1. En général se termine quand il existe une valeur $k > s_1$ et un $r > r_1$ tels que $|a_k|_p r^k = |a_{s_1}|_p r^{s_1}$, soit r_2 la première valeur de r telle qu'il en soit ainsi, et s_2 le plus grand des entiers $k > s_1$ tels que $|a_k|_p r_2^k = |a_{s_1}|_p r_2^{s_1}$. Alors, sur le cercle $|x|_p = r_2$, f a $s_2 - s_1$ zéros, et aucun dans la couronne ouverte de centre 0 et de rayon r_1, r_2. On a $|f|(r) = |a_{s_1}| r^{s_1}$ pour $r \in [r_1, r_2]$. On poursuit si on peut le procédé, et on trouve donc ainsi les cercles où se trouvent les zéros de f, de rayons r_k (suite finie ou infinie), le nombre des zéros sur ces cercles ($s_k - s_{k-1}$), et en plus, on a le fait que la fonction $|f|(r)$ est continue et monomiale par morceaux, c'est-à-dire que sur $[r_k, r_{k+1}]$, il existe une constante c_k et un entier s_k tels que $|f|(r) = c_k r^{s_k}$. Les rayons r_k s'appellent les rayons exceptionnels pour la fonction entière f.

Propriété importante Si $x \in \mathbb{C}_p$ est différent d'un rayon exceptionnel, et si $|x|_p = r$, on a $|f(x)| = |f|(r)$. En effet, si $r \in]r_k, r_{k+1}[$ par exemple, le terme $|a_{s_k}|_p |x|_p^{s_1}$ est le terme maximal parmi les $|a_n|x|^n$, et c'est le seul. On fabrique maintenant une fonction

$$\begin{aligned} \varphi_f : I =]-\infty, \log R[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ \log r &\longrightarrow \varphi_f(\log r) = \log |f|(r) = \max_{n\geq 0}\{\log |a_n|_p + n \log r\} \end{aligned}$$

Cette fonction est appelle *la polygone de valuation* de f.

Proposition 1.28 [4] *La fonction φ_f vérifie les propriétés suivantes*

i) C'est une fonction croissante continue affine par morceaux, elle est convexe.

ii) Si f a un zéro b dans $D^-(0,R)$,φ_f est strictement croissante pour $\log r > \log |b|_p$

iii) φ_f admet des dérivées à droite $\dfrac{d^+\varphi_f}{d(\log r)}$ et à gauche $\dfrac{d^-\varphi_f}{d(\log r)}$ en tout point $\log r \in I$ et on a

$$\frac{d^+\varphi_f}{d(\log r)} = s \text{ plus grande entier } t.q : \varphi_f(\log r) = \log |a_s|_p + s \log r$$

où s est le nombre des zéros de f dans le disque fermé $D^+(0,r)$.

$$\frac{d^-\varphi_f}{d(\log r)} = l \text{ plus petit entier } t.q : \varphi_f(\log r) = \log |a_l|_p + l \log r$$

où l est le nombre des zéros de f dans le disque ouvert $D^-(0,r)$.

Donc $s-l$ est le nombre des zéros de f sur le cercle $C(0,r)$.

Exemple.

Soit $P(x) = \underbrace{2p+p^4}_{a_0} + \underbrace{(p+p^5)}_{a_1}x + \underbrace{(p^2+p^3)}_{a_2}x^2$

calcul $|P|(r_1)$

Pour $r = \frac{1}{p}$

$$\begin{aligned} |a_0|(r) &= \frac{1}{p} \\ |a_1|(r) &= \frac{1}{p}.\frac{1}{p} = \frac{1}{p^2} \\ |a_2|(r) &= \frac{1}{p^2}\big(\frac{1}{p}\big)^2 = \frac{1}{p^4} \end{aligned}$$

$|P|(r) = \max\limits_{n\geq 0} |a_n|_p r^n = |a_0|_p r^0 = \frac{1}{p}$, donc $\varphi_f(\log r) = \log |a_0|_p = \frac{1}{p}$

Alors P n'a aucun zéro sur le cecle $C(0,\frac{1}{p})$

Pour $r = \frac{1}{p^2}$

$$\begin{aligned} |a_0|(r) &= \frac{1}{p} \\ |a_1|(r) &= \frac{1}{p}\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^3} \\ |a_2|(r) &= \frac{1}{p^2}\big(\frac{1}{p^2}\big)^2 = \frac{1}{p^6} \end{aligned}$$

$|P|(r) = \max_{n\geq 0} |a_n|_p r^n = |a_0|_p r^0 = \frac{1}{p}$

Donc P n'a aucun zéro sur le cecle $C(0, \frac{1}{p^2})$

Pour $r = 1$

$$\begin{aligned} |a_0|(r) &= \frac{1}{p} \\ |a_1|(r) &= \frac{1}{p} \\ |a_2|(r) &= \frac{1}{p^2} \end{aligned}$$

$|P|(r) = \max_{n\geq 0} |a_n|_p r^n = |a_1|_p r^1 = \frac{1}{p}$

Alors P a un zéro sur le cecle $C(0, 1)$

Chapitre 2

Théorie de Nevanlinna p-adique des fonctions méromorphes

Parmi les méthodes utilisées dans les problème de distribution de valeurs (complexe et aussi p-adique) la théorie de Nevanlinna, elle joue un role majeur dans ce domaine.

Dans ce chapitre on applique la théorie de Nevanlinna p-adique due à A. Boutabba [8] à des fonctions méromorphes dans tout le corps $\mathbb{C}_p$ (resp, dans $D^-(0,R)$) et elle s'exprime par deux théorèmes fondamentaux, en passant par l'incontournable de la formule de *Jensen*.

2.1 Fonctions méromorphes p-adiques

Nous considérons dans cette section les fonctions méromorphes qui définis sur $\mathbb{C}_p$ (resp. $D^-(0,R)$) sauf aux points de singularités isolées qui sont des pôles. En particulier, etant donné une fonction f méromorphe dans $\mathbb{C}_p$(resp. $D^-(0,R)$), on peut l'exprime sous la forme $f = \dfrac{h}{g}$ tel que $h, g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$(resp. $\mathcal{A}(D^-(0,R))$) sans zéros communs.

Notations.

On note $\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ (resp. $\mathcal{M}(D^-(0,R))$) le corps des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}_p$ (resp. dans $D^-(0,R)$), c'est-à-dire le corps de fraction de $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ (resp. de $\mathcal{A}(D^-(0,R))$).

On désigne par $\mathcal{M}_b(D^-(0,R))[X]$ l'anneau des polynômes à une variable coefficients dans $\mathcal{M}_b(D^-(0,R))$ et on note $\mathcal{M}_b(D^-(0,R))(X)$ le corps des fractions de $\mathcal{M}_b(D^-(0,R))[X]$.

La valeur absolue $|.|(r)$ définie sur $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ (resp. sur $\mathcal{A}(D^-(0,R))$) quand $r \in]0,+\infty[$ (resp. $r \in]0,R[$), s'étend d'une manière naturelle à $\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ (resp. à $\mathcal{M}(D^-(0,R))$) en posant $|f|(r) = \dfrac{|h|(r)}{|g|(r)}$ quand $h, g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$(resp. $h, g \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$).

Définition 2.1 *On dit que $f(x) \in \mathcal{M}_b(D^-(0,R))(X)$ irréductible si $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ où $g(x)$ et $h(x)$ sont des éléments premiers entre eux dans $\mathcal{M}_b(D^-(0,R))[X]$, et on pose $deg\, f(x) = \max\{deg\, g(x), deg\, h(x)\}$.*

Théorème 2.1 [14] [15] [16] *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$) n'ayant ni zéros ni pôles dans $\mathbb{C}_p$ (resp.$D^-(0,R)$), alors f est une constante.*

Le théorème suivant énonce une spécificité ultra-métrique.

Théorème 2.2 [10]***(spécificité ultra-métrique)***
Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$) pour tout $r \in]0,+\infty[$ (resp. $r \in]0,R[$), on a

$$\frac{|f'|(r)}{|f|(r)} \leq \frac{1}{r}.$$

Démonstration.
Posons $f = \dfrac{h}{g}$ où $h, g \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$, pour $r \in]0,+\infty[$ (resp. $r \in]0,R[$) on a
$\dfrac{|f'|(r)}{|f|(r)} = \dfrac{|h'g - hg'|(r)}{|hg|(r)}$, et comme $|h'g - hg'|(r) \leq \max\{|h'g|(r), |hg'|(r)\}$
Ce qui entraine que
$\dfrac{|f'|(r)}{|f|(r)} \leq \max\left\{\dfrac{|h'|(r)}{|h|(r)}, \dfrac{|g'|(r)}{|g|(r)}\right\}$ alors d'après le théorème 1.12, on a
$\dfrac{|h'|(r)}{|h|(r)} \leq \dfrac{1}{r}$ et $\dfrac{|g'|(r)}{|g|(r)} \leq \dfrac{1}{r}$, alors $\dfrac{|f'|(r)}{|f|(r)} \leq \dfrac{1}{r}$.
Ce qui termine la démonstration. □

2.1.1 Formule de Jensen

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0, pour $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r \in]0,R[\ \big)$ et $\alpha \in D^-(0,r)$, On note

$$z(|\alpha|_p, f) = \sum_{\substack{0<|\alpha|_p\leq r \\ f(\alpha)=0}} \max\big(0, w_\alpha(f)\big) \ \text{ et } \ p(|\alpha|_p, f) = z(|\alpha|_p, \frac{1}{f}).$$

c'est-à-dire que $z(|\alpha|_p, f)$ $\big($resp. $p(|\alpha|_p, f)\big)$ est le nombre de zéros (resp. pôles) de f sur le cercle $C(0, |\alpha|_p)$, chaque zéro (resp. pôle) est compté autant de fois que son ordre de multiplicité. $w_\alpha(f)$ est l'entier relatif $i_\alpha \in \mathbb{Z}$, tel que $f(x) = \sum\limits_{i\geq i_\alpha} a_i(x-\alpha)^i$ avec $a_{i_\alpha} \neq 0$.

La formule qu'on donne dans le théorème suivant est la version p-adique de la fameuse Formule de *Jensen* qu'on utiliser assez fréquemment tout au long de notre travail.

Théorème 2.3 [10] [14] [18] *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$ $\big)$, telle que $f(0) \neq 0, \infty$ et pour $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r \in]0,R[\big)$, on a*

$$\log|f|(r) = \log|f(0)| + \sum_{|\alpha|_p\leq r} \Big\{ z(|\alpha|_p, f) - z(|\alpha|_p, \frac{1}{f}) \Big\} \log\frac{r}{|\alpha|_p}.$$

Démonstration. La démonstration de cette formule est facile elle est conséquence des propriétés de Polygone de valuation.

1. Le point de départ ici est le fait que $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ $\big($resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$ $\big)$, telle que $f(0) \neq 0$, le Polygone de valuation de f donne pour tout $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r \in]0,R[\big)$

$$\log|f|(r) \ = \ \log|f(0)| + \sum_{\substack{|\alpha|_p\leq r \\ f(\alpha)=0}} w_\alpha(f) \log\frac{r}{|\alpha|_p} \tag{2.1}$$

   où $w_\alpha(f)$ est l'ordre de multiplicité de α, en tant que zéro de f.

   Pour montrer l'égalité (2.1), soient $0 < r_1 < r_2 < ... < r_k < ... < r$ et

   $0 = n_0 < n_1 < n_2 < ... < n_k < ... < n$, on a $\log|f|(r) = \max\limits_{n_i\geq 0}\{\log|a_{n_i}|_p + n_i \log r\}$

telles que

$$\begin{aligned}
0 < r_1 : \quad \log|f|(r_1) &= \log|f(0)| = \log|a_0|_p \\
r_1 < r_2 : \quad \log|f|(r_2) &= \log|a_{n_1}|_p + n_1 \log r \\
&\vdots \\
r_{k-1} < r_k : \quad \log|f|(r_k) &= \log|a_{n_{k-1}}|_p + n_{k-1} \log r \\
r_k < r : \quad \log|f|(r) &= \log|a_{n_k}|_p + n_k \log r.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\log|f|(r) &= \Big[\log|f|(r) - \log|f|(r_k)\Big] + \Big[\log|f|(r_k) - \log|f|(r_{k-1})\Big] + ... + \Big[\log|f|(r_2) \\
&- \log|f|(r_1)\Big] + \log|f|(r_1) \\
&= \Big[\log|a_{n_k}|_p + n_k \log r - \log|a_{n_k}|_p - n_k \log r_k\Big] + \Big[\log|a_{n_{k-1}}|_p + n_{k-1} \log r_k \\
&- \log|a_{n_{k-1}}|_p - n_{k-1} \log r_{k-1}\Big] + ... + \Big[\log|a_{n_1}|_p + n_1 \log r_2 - \log|a_{n_1}|_p \\
&- n_1 \log r_1\Big] + \log|f(0)| \\
&= n_k \log \frac{r}{r_k} + n_{k-1} \log \frac{r_k}{r_{k-1}} + ... + n_1 \log \frac{r_2}{r_1} + \log|f(0)| \\
&= n_k \log \frac{r}{r_k} + n_{k-1}(\log \frac{r}{r_{k-1}} - \log \frac{r}{r_k}) + ... + n_1(\log \frac{r}{r_1} - \log \frac{r}{r_2}) + \log|f(0)| \\
&= (n_k - n_{k-1}) \log \frac{r}{r_k} + (n_{k-1} - n_{k-2}) \log \frac{r}{r_{k-1}} + ... + (n_2 - n_1) \log \frac{r}{r_2} \\
&+ (n_1 - n_0) \log \frac{r}{r_1} + \log|f(0)| \\
&= \sum_{i=1}^{k} (n_i - n_{i-1}) \log \frac{r}{r_i} + \log|f(0)|
\end{aligned}$$

Où $(n_i - n_{i-1})$ le nombre des zéros de f sur le cercle $|x| = r_i$

donc $\quad \log|f|(r) = \log|f(0)| + \sum_{0<|\alpha|_p \leq r} w_\alpha(f) \log \frac{r}{|\alpha|_p}.$

2. Le cas générale : Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$), telle que $f(0) \neq 0, \infty$ Soit α zéro de f et β pôle de f On pose $f = \dfrac{h}{g}$ telle que $h, g \in \mathbb{C}_p$ (resp. $h, g \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$ on a

$$\begin{aligned}
\log|f|(r) &= \log\Big|\frac{h}{g}\Big|(r) \\
&= \log|h|(r) - \log|g|(r) \\
&= \log|h(0)| + \sum_{0<|\alpha|_p\leq r} w_\alpha(h)\log\frac{r}{|\alpha|_p} - \log|g(0)| - \sum_{0<|\beta|_p\leq r} w_\beta(g)\log\frac{r}{|\beta|_p} \\
&= \log\Big|\frac{h(0)}{g(0)}\Big|(r) + \sum_{0<|\alpha|_p\leq r} w_\alpha(h)\log\frac{r}{|\alpha|_p} - \sum_{0<|\beta|_p\leq r} w_\beta(g)\log\frac{r}{|\beta|_p}.
\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. □

2.2 Analogue p-adique du Premier Théorème Fondamental de Nevanlinna

Pour toute $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ non nulle et pour $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $\forall r \in]0,R[\big)$, on pose

$$Z(r,f) = \sum_{\substack{0<|\alpha|_p\leq r \\ w_\alpha(f)>0}} w_\alpha(f)\ \log\frac{r}{|\alpha|_p}.$$

La *fonction de comptage des zéros* de f dans $D^+(0,r)$ avec un ordre de multiplicité.

$$\overline{Z}(r,f) = \sum_{0<|\alpha|_p\leq r} \log\frac{r}{|\alpha|_p}$$

La *fonction de comptage des zéros* de f dans $D^+(0,r)$ sans prendre en compte les multiplicités.

$$N(r,f) = Z(r,\frac{1}{f})$$

La fonction de *comptage des pôles* de f dans $D^+(0,r)$ avec ordre de multiplicité.

Par les définitions précédentes, on définit une autre version p-adique plus simple de la formule de *Jensen* qui déjà bien cunnue dans théorème 2.3.

Proposition 2.1 [11]***(autre version-Formule de Jensen)***
Soit $R > 0$, et soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors

$$\log|f|(r) \;=\; Z(r,f) - N(r,f) + \log|f(0)| \;\; \forall r \in]0,+\infty[\;\; \big(resp. \;\; \forall r \in]0,R[\big) \quad (2.2)$$

Remarque. *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ $\big($resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$ et $f(0) \neq 0$, on a*

$$\log|f|(r) = Z(r,f) + \log|f(0)| \;\; \forall r \in]0,+\infty[\;\; \big(resp. \;\; \forall r \in]0,R[\big)$$

Qui s'écrit $Z(r,f) \leq \log|f|(r)$ et fournit une majoration du nombre de solution de l'équation $f(x) = 0$ dans le disque $|x|_p \leq r$.

2.2.1 Fonction Caractéristique de Nevanlinna

Puisque la fonction $r \longrightarrow \log|f|(r)$ quand $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ n'est plus positive et peut même tendre vers $-\infty$ quand $r \to +\infty$.

Donc le problème est de construire une fonction $r \longrightarrow T(r,f)$ (*fonction caractéristique de Nevanlinna*) qui soit positive et prolonge $\log|f|(r)$, quand $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$.

Pour $x > 0$, on pose $\log^+(x) = \max\{0, \log x\}$, telle que log est une fonction logarithmique réelle de base p.

On a

$$m(r,f) = \log^+|f|(r) = \max\big\{0, \log|f|(r)\big\}.$$

La *fonction de compensation*

et

$$\log|f|(r) = \log^+|f|(r) - \log^+|\frac{1}{f}|(r) = m(r,f) - m(r,\frac{1}{f}).$$

Enfin, on définit la fonction de Nevanlinna (appelée aussi la fonction *caractéristique de Nevanlinna*) de f, quand f n'a ni zéro ni pôle en 0, par

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f).$$

Remarque. *Remarquons que les fonctions $m(r,f), N(r,f)$ et $T(r,f)$ ne changent pas à une constante près, si on change l'origine. Par conséquent, si une fonction f admet un zéro ou un pôle en 0, on peut réaliser un changement d'origine pour redéfinir les fonctions précédentes.*

Tout au long de ce travail, on supposera que la fonction f intervenant dans les fonctions $m(r,f), N(r,f)$ et $T(r,f)$ n'a pas de zéro en 0, si $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ $\big($resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$ et n'a ni zéro ni pôle en 0, si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$.

Comme une coséquence immédiate de la définition précédent, on a le corollaire suivant

Corollaire 2.1 [8] *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ $\big($resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$, $f(0) \neq 0$. Alors*

$$T(r,f) = Z(r,f) + O(1) \quad \forall r \in]0,+\infty[\ \big(resp.\ \forall r \in]0,R[\big)$$

De plus, $\exists \rho \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $\exists \rho \in]0,R[\big)$ tel que $a \in \mathbb{C}_p$ et $f(0) \neq a$, on a

$$Z(r,f) = Z(r,f-a) \quad \forall r \in]\rho,+\infty[\ \big(resp.\ \forall r \in]\rho,R[\big)$$

On va essayer de donner une forme plus simple que la formule de Jensen (2.2).

$$\begin{aligned}
\log|f(0)| &= N\big(r,f\big) - Z\big(r,f\big) + \log|f|(r), \quad \forall r \in]0,+\infty[\ \big(resp.\ \forall r \in]0,R[\big) \\
&= N\big(r,f\big) - N\Big(r,\frac{1}{f}\Big) + m\big(r,f\big) - m\Big(r,\frac{1}{f}\Big), \ \forall r \in]0,+\infty[\ \big(resp.\ \forall r \in]0,R[\big) \\
&= T\big(r,f\big) - T\Big(r,\frac{1}{f}\Big), \ \forall r \in]0,+\infty[\ \big(resp.\ \forall r \in]0,R[\big).
\end{aligned}$$

Donc la formule (2.2) devient

$$T\Big(r,\frac{1}{f}\Big) = T\big(r,f\big) - \log|f(0)|, \ \forall r \in]0,+\infty[\ \big(resp.\ \forall r \in]0,R[\big) \tag{2.3}$$

Avant de donner quelques propriétés liées à la Théorie de Nevanlinna, on introduira les notations suivantes.

Notations. Soit ϕ, φ et ψ trois fonctions réelles définies dans un intervalle $I =]0, +\infty[$ $\big($resp. $I =]0, R[\big)$ et soit $r \in I$. S'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $\phi(r) \leq \psi(r) + c\varphi(r)$, on écrira simplement $\phi(r) \leq \psi(r) + O(\varphi(r))$. Si $|\phi(r) - \psi(r)|$ est bornée par une fonction de la forme $c\varphi(r)$, on écrira $\phi(r) = \psi(r) + O(\varphi(r))$.

Si $\lim\limits_{r \to +\infty} |\phi(r) - \psi(r)| = 0$ $\big($resp. $\lim\limits_{r \to R} |\phi(r) - \psi(r)| = 0\big)$, on écrira $\phi(r) = \psi(r) + o(\varphi(r))$.

Exemple. Soit $P(x) = \sum\limits_{n=1}^{q} a_n x^n \in \mathbb{K}[x]$. Alors $Z(r, P) = deg(P) \log r + O(1)$ pour r assez grand dans $]0, +\infty[$.

En effet, soit $\big\{\alpha_1, ..., \alpha_t\big\}$ l'ensemble des zéros de P où $t \leq q$, et soient $s_1, ..., s_t$ les ordres de multiplicité respectifs.

Supposons $A = \max\limits_{1 \leq j \leq t} |\alpha_j|$. Si $r \in]0, +\infty[$, on a

$$Z(r, P) = \sum_{j=1}^{t} s_j \log \frac{r}{|\alpha_j|} = \sum_{j=1}^{t} s_j \log \frac{r}{A} + \sum_{j=1}^{t} s_j \log \frac{A}{|\alpha_j|} = \sum_{j=1}^{t} s_j \log r - \log A + \sum_{j=1}^{t} s_j \log \frac{A}{|\alpha_j|}.$$

Mais $\sum\limits_{j=1}^{t} s_j = q$ et $\sum\limits_{j=1}^{t} s_j \log \dfrac{A}{|\alpha_j|} - \log A = O(1)$. Alors $Z(r, P) = deg(P) \log r + O(1)$.

Pour le cas $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$, on a le théorème suivant.

Théorème 2.4 [16] *Soit $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$ n'ayant ni zéros ni pôles en 0.Alors $f \in \mathcal{M}_b(D^-(0, R))$ si seulement si $T(r, f)$ est bornée dans $]0, R[$.*

Proposition 2.2 [6] [7] *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))\big)$ n'ayant ni zéros ni pôles en 0. Il est facil de vérifier que*

$$0 \leq Z(r, f) \leq T(r, f) \ \ et \ \ 0 \leq N(r, f) \leq T(r, f), \ \ \forall r \in]0, +\infty[\ \big(resp. \ \forall r \in]0, R[\big).$$

Les propriétés opératoires sont assez semblables à celles connues dans $\mathbb{C}$. Toutefois les deux propriétés $1.i)$ et $3.iii)$ si dessous sont spécifiques à l'analyse ultra-métrique.

Théorème 2.5 [8] [16] *Soient $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ $\big($resp. $f, g \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ non identiquement nulle et n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors*

1. *i)* $m(r, f+g) \leq \max\big\{m(r,f), m(r,g)\big\} + O(1),\ \forall r \in]0,+\infty[$ $\big($*resp.* $\forall r \in]0,R[\big)$

   ii) $m(r, f-a) = m(r,f) + O(1),\ \forall a \in \mathbb{C}_p,\ \forall r \in]0,+\infty[$ $\big($*resp.* $\forall r \in]0,R[\big)$

   iii) $m(r, fg) \leq m(r,f) + m(r,g) + O(1),\ \forall r \in]0,+\infty[$ $\big($*resp.* $\forall r \in]0,R[\big)$

   iv) $m(r, af) = m(r,f) + O(1),\ \forall r \in]0,+\infty[$ $\big($*resp.* $\forall r \in]0,R[\big)$.

2. *i)* $N(r, f+g) \leq N(r,f) + N(r,g) + O(1),\ \forall r \in]0,+\infty[$ $\big($*resp.* $\forall r \in]0,R[\big)$

   ii) $N(r, fg) \leq N(r,f) + N(r,g) + O(1),\ \forall r \in]0,+\infty[$ $\big($*resp.* $\forall r \in]0,R[\big)$

3. *i)* $T(r, fg) \leq T(r,f) + T(r,g) + O(1),\ \forall r \in]0,+\infty[$ $\big($*resp.* $\forall r \in]0,R[\big)$

   ii) $T(r, f+g) \leq T(r,f) + T(r,g) + O(1),\ \forall r \in]0,+\infty[$ $\big($*resp.* $\forall r \in]0,R[\big)$

   De plus, si $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ $\big($*resp.* $f, g \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$

   iii) $T(r, f+g) \leq \max\Big\{T(r,f), T(r,g)\Big\} + O(1),\ \forall r \in]0,+\infty[$ $\big($*resp.* $\forall r \in]0,R[\big)$

Démonstration.

1. Puisque $|.|(r)$ est une valeur absolue ultra-métrique pour $\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ $\big($resp. Pour $\mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ elle satisfait l'inégalité triangulaire ultra-métrique, c'est-à-dire que

$$|f+g|(r) \leq \max\{|f|(r), |g|(r)\}.$$

   Et aussi

$$|fg|(r) = |f|(r)|g|(r).$$

   Par conséquent, grâce à la croissance de la fonction logarithmique on déduit sans difficulté $i), iii)$ et $iv)$.

   Si $|f|(r) > |a|_p$, pour r assez grand (resp. assez proche de R), on a

   $|f-a|(r) = \max\big\{|f|(r), |a|_p\big\} = |f|(r)$, d'où $m(r, f-a) = m(r,f)$.

   Si $|f|(r) \leq |a|_p$, on a

   $|f-a|(r) \leq \max\big\{|f|(r), |a|_p\big\} \leq |a|_p$, ce qui entraine

   $|m(r, f-a) - m(r,f)| \leq \big\{m(r,f-a), m(r,f)\big\} \leq \log^+ |a|_p$, et ainsi

   $m(r, f-a) = m(r,f) + O(1)$ et alors $ii)$.

2. Les inégalités $i)$ et $ii)$ sont vérifiées tant que l'ordre de pôles de $f+g$ (ou fg) au point x_0 est au plus égal à la somme d'ordres de pôles de f et g au point x_0.

   D'où

$$\begin{aligned} Z(r,\frac{1}{f+g}) &\leq Z(r,\frac{1}{f})+Z(r,\frac{1}{g});\\ Z(r,\frac{1}{fg}) &\leq Z(r,\frac{1}{f})+Z(r,\frac{1}{g}). \end{aligned}$$

3. $i)$ d'aprés l'inégalité $i)$ de 1 et par 2, on déduit que

$$\begin{aligned} m(r,f+g)+N(r,f+g) &\leq \max\big\{m(r,f),m(r,g)\big\}+N(r,f)+N(r,g)+O(1);\\ &\leq m(r,f)+m(r,g)+N(r,f)+N(r,g)+O(1). \end{aligned}$$

   D'où $\quad T(r,f+g)\leq T(r,f)+T(r,g)+O(1).$

   $ii)$ De même, d'aprés la propriété $iii)$ de 1, on déduit que

$$m(r,fg)+N(r,fg) \leq m(r,f)+m(r,g)+N(r,f)+N(r,g)+O(1).$$

   D'où $\quad T(r,fg)\leq T(r,f)+T(r,g)+O(1).$

   $iii)$ Puisque $N(r,f)=N(r,g)=0$, l'inégalité est immédiatement déduite de la propriété $i)$ de 1 . □

Comme corollaire du théorème précédent on a

Corollaire 2.2 [8] *Soit $f\in\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ $\big($resp. $f\in\mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ non identiquement nulle et $f(0)\neq 0,\infty$. Alors on a*

$$T(r,\frac{1}{f})=T(r,f)+O(1),\ \ \forall r\in]0,+\infty[\ \big(\textit{resp. } \forall r\in]0,R[\big).$$

Et si $a\in\mathbb{C}_p^*$ et $f(0)\neq a$. Alors on a

$$\begin{aligned} T(r,af) &= T(r,f)+O(1),\ \ \forall r\in]0,+\infty[\ \big(\textit{resp. } \forall r\in]0,R[\big)\\ \textit{et } T(r,f-a) &= T(r,f)+O(1),\ \ \forall r\in]0,+\infty[\ \big(\textit{resp. } \forall r\in]0,R[\big). \end{aligned}$$

On donne l'analogue p-adique du Premier Théorème fondamental de Nevanlinna (le théorème 2.6). Ce théorème démontre de façon analogue au cas classique (voir [17]) et il est une conséquence de la *formule de Jensen.*

Question. *Quelle-est "la taille" de ensemble des points $x \in \mathbb{C}_p$ où la fonction $f(x)$ prend la valeur a ou des valeurs "proches" de a ?*

Théorème 2.6 [8] ***(Premier Théorème Fondamental de Nevanlinna)***
Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ tels que $f(0) \neq 0, \infty$. Pour tout $a \in \mathbb{C}_p$ et $f(0) \neq a$, on a

$$T\Big(r, \frac{1}{f-a}\Big) \;=\; T\big(r, f\big) + O(1), \quad \forall r \in]0, +\infty[\;\; \big(resp.\ \forall r \in]0, R[\big) \tag{2.4}$$

Démonstration.

La démonstration est facile, elle est une conséquence des formules du corollaire 2.2.

Commentaire. *Comme la fonction $T(r, f)$ ne dépend pas de a, on peut dire que la fonction f prend chaque valeur a avec une même multiplicité.*

On a besoin de la notation suivante.

Notation. Pour tout nombre fini $a \in \mathbb{C}_p^*$, on note $m(r, a)$, $N(r, a)$ et $T(r, a)$ au lieu de $m\Big(r, \dfrac{1}{f-a}\Big)$, $N\Big(r, \dfrac{1}{f-a}\Big)$ et $T\Big(r, \dfrac{1}{f-a}\Big)$ respectivement.

Suite à cette notation, le lemme 2.1 de Nevanlinna écrit sous forme plus simple

$$T(r, a) = T(r, f) + O(1), \quad \forall r \in]0, +\infty[\;\; \big(resp.\ \forall r \in]0, R[\big).$$

On montre aussi les résultats suivants.

Proposition 2.3 [8] *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$, $f(0) \neq 0, \infty$. On a les équivalences suivantes*

i) *f est une constante $\Leftrightarrow T(r, f) = o(log\ r), \quad r \to +\infty$.*

ii) *$f \in \mathbb{C}_p(X) \Leftrightarrow T(r, f) = O(log\ r), \quad r \to +\infty$.*

iii) *f est non constante $\Leftrightarrow \exists c \in R, \exists A > 0$ t.q $\;T(r, f) \geq log\ r + c, \quad \forall r > A$.*

En vue de démontre d'autres résultats, nous posons $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ telle que $f(0) \neq 0, \infty$ et soit $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$, pour $|\alpha|_p \leq r$. Posons

$$\overline{p}(r,f) = \sum_{\substack{|x|_p = r \\ w_\alpha(f) < 0}} 1 : \text{le nombre de pôles de } f \text{ sans prendre en compte}$$

les multiplicités sur le cercle $|x|_p = r$.

et

$$\overline{N}(r,f) = \overline{Z}\Big(r, \frac{1}{f}\Big).$$

2.3 Propriétés classiques de la Théorie de Nevanlinna liées aux fonctions méromorphes et leurs dérivées

On montre quelques propriétés de la Théorie de Nevanlinna, qui établissent des liens entre des fonctions méromorphes et leurs dérivées.

Théorème 2.7 [8] [11] *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ telle que $f^{(k)} (k \in \mathbb{N})$ n'a ni zéro ni pôle en 0. Alors*

$$\begin{aligned}
i)\ N(r, f^{(k)}) &= N(r,f) + k\overline{N}(r,f) - \log r + O(1) \\
ii)\ Z(r, f^{(k)}) &\leq Z(r,f) + k\overline{N}(r,f) + O(1) \\
iii)\ T(r, f^{(k)}) &\leq T(r,f) + k\overline{N}(r,f) - \log r + O(1) \leq (k+1)T(r,f) - \log r + O(1).
\end{aligned}$$

Nous avons besoins du lemme suivant

Lemme 2.1 [8]*Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$, $f = \dfrac{h}{g}$ où $h, g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ $\big($resp. $h, g \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$ n'ont pas de zéro commun. Posons $H_0 = h$ et $H_n = gH'_{n-1} - ng'H_{n-1}$ pour $n \geq 1$. On a*

i) $f^{(n)} = \dfrac{H_n}{g^{n+1}}$

ii) Tout zéro d'ordre $m (m \geq 1)$ de g est un zéro d'ordre $n(m-1)$ de H_n et un pôle d'ordre $m+n$ de $f^{(n)}$.

Lemme 2.2 [8] *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$, telle que $f(0) \neq 0, \infty$. On a*

$$\begin{aligned} m\Big(r, \frac{f'}{f}\Big) &= 0, \quad \forall r \in]0,+\infty[\ \big(resp. \forall r \in]0,R[\big) \\ m\Big(r, \frac{f}{f'}\Big) &\geq \log r, \quad \forall r \in]0,+\infty[\ \big(resp. \forall r \in]0,R[\big). \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$. On a

$$m\Big(r, \frac{f'}{f}\Big) = \log^+ \Big|\frac{f'}{f}\Big|(r) = \max\Big\{0, \log\Big|\frac{f'}{f}\Big|(r)\Big\} = 0, \quad \forall r \in]0,+\infty[\ \big(resp. \ \forall r \in]0,R[\big).$$

Par les résultats classiques pour les fonctions méromorphes, il est bien connu que pour chaque $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $\forall r \in]0,R[\big)$

$$\log\Big|\frac{f'}{f}\Big|(r) \leq -\log r$$

d'où $\quad m\Big(r, \frac{f}{f'}\Big) = \log^+ \Big|\frac{f}{f'}\Big|(r) = \max\Big\{0, \log\Big|\frac{f'}{f}\Big|(r)\Big\} \geq \log r.$ $\square$

Démonstration du Théorème 2.5

i) Pour obtenir la première inégalité il suffit voir que chaque pôle α de f d'ordre s est un pôle de $f^{(k)}$ d'ordre $s+k$.

ii) Montrons maintemant la deuxième inégalité. Soit $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r \in]0,R[\big)$. Par la formule (2.2), on a

$$\begin{aligned} Z(r,f') - N(r,f') + \log|f'(0)| &= \log|f'|(r) \\ Z(r,f) - N(r,f) + \log|f(0)| &= \log|f|(r). \end{aligned}$$

D'aprés le théorème 2.2, on a $|f'|(r) \leq \frac{1}{r}|f|(r)$ et donc, en considérant la croissance de la fonction logarithmique, on obtient

$$\log|f'|(r) \leq \log|f|(r) - \log r$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
Z(r,f') &= \log|f'|(r) + N(r,f') - \log|f'(0)| \\
&\leq \log|f|(r) + N(r,f') - \log|f'(0)| - \log r \\
&\leq Z(r,f) + N(r,f') - N(r,f) + \log|f(0)| - \log|f'(0)| - \log r \\
&\leq Z(r,f) + N(r,f') - N(r,f) - \log r + O(1).
\end{aligned}$$

Mais, d'aprés la première inégalité i), on a

$$\begin{aligned}
N(r,f') - N(r,f) &= \overline{N}(r,f) - \log r + O(1) \\
Z(r,f') &\leq Z(r,f) + \overline{N}(r,f) - \log r + O(1).
\end{aligned}$$

La généralisation de cette inégalité est obtenue par récurrence. Supposons que l'inégalité précédente est vraie pour tout $k \leq n$. Alors

$$Z(r,f^{(n+1)}) = Z(r,(f^{(n)})') \leq Z(r,f^{(n)}) + \overline{N}(r,f^{(n)}) - \log r + O(1)$$

et donc

$$Z(r,f^{(n+1)}) \leq Z(r,f) + n\overline{N}(r,f) + \overline{N}(r,f^{(n)}) - \log r + O(1)$$

puisque $\overline{N}(r,f^{(n)}) = \overline{N}(r,f)$, on a

$$Z(r,f^{(n+1)}) \leq Z(r,f) + (n+1)\overline{N}(r,f) - \log r + O(1).$$

Pour montrer la troisième inégalité, on a

$$\begin{aligned}
T(r,f^{(k)}) &= N(r,f^{(k)}) + m(r,f^{(k)}) \\
&= N(r,f) + k\overline{N}(r,f) + m(r,f^{(k)}) - \log r + O(1) \\
&= N(r,f) + k\overline{N}(r,f) + m\Big(r, \frac{f^{(k)}}{f^{(k-1)}} ... \frac{f'}{f} f\Big) - \log r + O(1) \\
&\leq N(r,f) + k\overline{N}(r,f) + m\Big(r, \frac{f^{(k)}}{f^{(k-1)}}\Big) + ... + m\Big(r, \frac{f'}{f}\Big) + m(r,f) - \log r + O(1) \\
&= T(r,f) + k\overline{N}(r,f) - \log r + O(1).
\end{aligned}$$

Puisque $\overline{N}(r,f) \leq N(r,f) \leq T(r,f) + O(1), \quad \forall r \in]0,+\infty[$ $\big(resp. \forall r \in]0,R[\big)$, on a

$$T(r,f^{(k)}) \leq (k+1)T(r,f) - \log r + O(1) \leq (k+1)T(r,f) + O(1).$$

ce qui termine la démonstration. □

Remarque. *La deuxième inégalité du théorème 2.5 n'est pas valable si on considère des fonctions méromorphes dans* $\mathbb{C}$.

Voici un contre-exemple.

Soit $f(x) = e^{\sin x}$. Il est facile de voir que $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ n'a pas de zéros dans $\mathbb{C}$. Donc

$$Z(r,f) = 0, \forall r \in]0,+\infty[.$$

Puisque $f'(x) = \cos x \ e^{\sin x}$, on a $\lim\limits_{r\to+\infty} Z(r,f') = \lim\limits_{r\to+\infty} Z(r, \cos x \ e^{\sin x}) = +\infty$. Par conséquent, $\lim\limits_{r\to+\infty} Z(r,f') - Z(r,f) = +\infty$, ce qui contredit l'inégalité du théorème 2.5.

2.4 Analogue p-adique du Deuxième Théorème Fondamental de Nevanlinna

Dans la section précédente, on définit une fonction caractéristique de Nevanlinna $T(r,f)$ et pour tout $a \in \mathbb{C}_p$, nous avons $m(r,a) + N(r,a) = T(r,f) + O(1)$. Il s'ensuit que la somme $m(r,a) + N(r,a)$ est indépendante de a, c'est le résultat du premier théorème fondamental de Nevanlinna.

Le Deuxième Théorème Fondamental de Nevanlinna est l'un des théorèmes les plus utilisés dans la théorie de distribution de valeurs. La version p-adique a été d'abord introduite par A.Boutabaa [8], en considérant un corps ultra-métrique tout entier, et ensuite A.Boutabaa et A.Escassut [12] on étendu ce théorème à $D^-(0,R)$. Dans la suite on donne une version du deuxième théorème de Nevanlinna .

Théorème 2.8 [8] [11] ***(Deuxième Théorème Fondamental de Nevanlinna)*** *Soient $a_1, ..., a_n$ ($n \geq 2$) des points distincts de $\mathbb{C}_p$. Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ (resp.$f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$) n'ayant ni zéro ni pôle en 0 et telle que f' et $f - a_i$ ne sont pas nulles en 0. Alors*

$$(n-1)T(r,f) \leq \sum_{i=1}^{n} \overline{Z}(r, f - a_i) \quad + \quad \overline{N}(r,f) - Z(r, f' : f(x) \neq a_i \ \forall i = 1...n) - \log r + O(1)$$
$$\forall r \in]0, +\infty[(resp. \forall r \in]0, R[)$$

où $Z(r, f' : f(x) \neq a_i \ \forall i = 1...n)$ la fonction de comptage des zéros de f' à l'exception de ceux qui sont des zéros de la $f - a_i$ pour $i = 1...n$.

Remarque. *Le terme $-\log r$ qui figure dans le théorème précédent est d'une grande utilité dans l'étude des ensembles d'unicité pour les fonctions entières dans un corps ultramétrique de caractéristique nulle, ou pour les fonctions méromorphes dans le corps tout entier. Il permet d'avoir des résultats plus fins que ceux obtenus dans $\mathbb{C}$. Remarquons que ce terme n'a aucun intérêt quand il s'agit d'étudier ces problèmes dans un disque $D^-(0,R)$.*

Le terme $-\log r$ est trés utile quand $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$. Par contre, il devient sans effet quand $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$. On utilisera cette propriété assez fréquemment sourtout si on permet d'améliorer les résultats obtenus dans $\mathbb{C}$ par rapport à l'unicité des fonctions.

Chapitre 3

Application de la théorie de Nevanlinna dans un disque ouvert

L'objectif de ce chapitre est d'établir une application des résultats du premier théorème de Nevanlinna p-adique pour obtenir un autre resultat du théorème de *Valiron* sur un disque ouvert contenu dans un corps sphériquement complet avec de nouvelles conditions. Nous commençons par donner la version p-adique du théorème de *Valiron*

Théorème (Valiron) Soit $F \in \mathbb{C}_p(X)$, F irréductible de degré l. Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$. On suppose que les fonctions f et Fof n'ont ni zéro ni pôle à l'origine. On a

$$T(r, Fof) = lT(r, f) + O(1) \ \ \forall r \in]0, +\infty[.$$

Dans notre travail, soit $\widehat{\mathbb{C}_p}$ un corps sphériquement complet et extension algébrique clos de $\mathbb{C}_p$, que l'on note toujours $\mathbb{C}_p$. On montre que l'égalité du théorème reste valable pour F une fonction méromorphe bornée dans un disque ouvert dans $\mathbb{C}_p$ et $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$.

Pour la démonstraton de ce résultats, on destingue deux cas :

Cas particulier. On suppose que $F(X) \in \mathcal{A}_b(D^-(0, R))[X]$.

Cas général. On suppose que $F(X) = \dfrac{G(X)}{H(X)}$, où $G(X), H(X) \in \mathcal{A}_b(D^-(0, R))[X]$ sans zéros communs.

Maintenant, on généralise le résultat du premier théorème de Nevanlinna p-adique sur le disque $D^-(0,R)$. En utilisent les mêmes notions et définitions de base de cette théorie qui nous allons déjà définit dans le chapitre 2.

Théorème 3.1 *Soit $F(X) \in \mathcal{M}_b(D^-(0,R))(X)$ une fraction rationnelle, irréductible de degré $l \geq 1$. Soit $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$. On suppose que f et $F \circ f$ n'ont ni zéro ni un pôle au point 0. On a*

$$T(r, F \circ f) = lT(r,f) + \mathrm{O}(1), \forall r \in]0,R[\qquad (*)$$

Démonstration. Soit $\widehat{\mathbb{C}_p}$ un corps sphériquement complet et l'extension algébriquement clos de $\mathbb{C}_p$, que l'on note $\mathbb{C}_p$. Soit $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$, on a $f \in \mathcal{M}(\widehat{D}^-(0,R))$ qui a les mêmes zéros et pôles. Donc les quantités $Z(r,f)$, $N(r,f)$ et $T(r,f)$ dans $D^-(0,R)$ sont les mêmes dans $\widehat{D}^-(0,R)$. On suppose sans perte de généralité, que le corps $\mathbb{C}_p$ est sphériquement complet.

De plus, si $f \in \mathcal{M}_b(D^-(0,R))$, on a $F \circ f \in \mathcal{M}_b(D^-(0,R))$. Dans ce cas, par la Proposition 2.1, les quantités $T(r,f)$ et $T(F \circ f)$ sont bornées. Donc l'égalité $(*)$ est évidente.

Dans la suite, on suppose que f non-bornée.

I) <u>Cas particulier</u>. On suppose que $F(X) \in \mathcal{A}_b(D^-(0,R))[X]$, on a

$F(X) = a_0(x) + a_1(x)X + ... + a_l(x)X^l$, $a_i(x) \in \mathcal{A}_b(D^-(0,R))$, $i = 0,...,l$ et $a_l(x) \not\equiv 0$. Comme le corps $\mathbb{C}_p$ est sphériquement complet, on suppose que les $a_i(x)$ n'ont pas de zéros communs dans $D^-(0,R)$.

Donc $F \circ f(x) = a_0(x) + a_1(x)f(x) + ... + a_l(x)f(x)^l$.

Le fait que $a_i(x)$ sont bornés et n'ont pas de zéros communs dans $D^-(0,R)$, on obtient

$$N(r, F \circ f) - lN(r,f) \;=\; O(1), \quad \forall r \in]0,R[\qquad (3.1)$$

Les fonctions $a_i(x), i = 0, ..., l$ sont bornées, il existe $\alpha > 0$ et $A > 1$ telle que $a_i(x) \not\equiv 0, i = 0, ..., l$, en particulier $a_l(x)$, satisfaite

$$\alpha \leq |a_i|(r) \quad < \quad A, \quad \forall r \in]0, R[. \tag{3.2}$$

Soit $r \in]0, R[$,on considére deux cas.

$i)$ On suppose que $|f|(r) \geq \frac{A}{\alpha} > 0$. Donc, par (3.2) on a

$$|F \circ f|(r) = \max_{0 \leq i \leq l} |a_i f^i|(r) = |a_l f^l|(r)$$

$$\log |F \circ f|(r) = \log |a_l f^l|(r) = \log \big(|a_l||f|^l\big)(r) = \log |a_l|(r) + l \log |f|(r).$$

Dans ce cas, on a $\log^+ |f|(r) = \max\{0, \log |f|(r)\} = \log |f|(r)$ et $\log^+ |F \circ f|(r) = \max\{0, \log |F \circ f|(r))\} = \log |F \circ f|(r)$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \log^+ |F \circ f|(r) - l \log^+ |f|(r) &= \log |F \circ f|(r) - l \log |f|(r) \\ &= \log |a_l|(r) + l \log |f|(r) - l \log |f|(r) \end{aligned}$$

$$\log^+ |F \circ f|(r) - l \log^+ |f|(r) \quad = \quad \log |a_l|(r) \tag{3.3}$$

$ii)$ On suppose que $|f|(r) < \frac{A}{\alpha}$.

On a $0 \leq \log^+ |f|(r) = \max\{0, \log |f|(r)\} < \log \frac{A}{\alpha}$.

$$\begin{aligned} \log |F \circ f|(r) &\leq \max_{0 \leq i \leq l} \{\log |a_i|(r) + i \log |f|(r)\} \\ &= \log |a_l|(r) + l \log |f|(r) < \log A + l \log \frac{A}{\alpha} \\ &< \log \frac{A^{l+1}}{\alpha^l} \end{aligned}$$

Donc $0 \leq \log^+ |F \circ f|(r) \leq \log \dfrac{A^{l+1}}{\alpha^l}$. Par conséquent

$$-\log(\frac{A}{\alpha})^l \quad \leq \quad \log^+ |F \circ f|(r) - l \log^+ |f|(r) \leq \log \frac{A^{l+1}}{\alpha^l} \tag{3.4}$$

par (3.3) et (3.4), on obtient

$$\log^+ |F \circ f|(r) - l \log^+ |f|(r) \quad = \quad O(1), \quad \forall r \in]0, R[\tag{3.5}$$

Par addition (3.1) et (3.5), on obtient l'égalité $(*)$ dans ce cas.

II) **Cas général.** On suppose que $F(X) = \dfrac{G(X)}{H(X)}$, où $G(X), H(X) \in \mathcal{A}_b(D^-(0,R))[X]$ sans zéros communs. Par la proposition 2.1, on a

$$T(r, \frac{1}{F \circ f}) = T(r, F \circ f) + O(1).$$

Donc, on remplace $F(X)$ par $\dfrac{1}{F(X)}$, et on suppose que $deg\ G(X) \leq deg\ H(X)$. Posons $G(X) = a_0(x) + a_1(x)X + ... + a_l(x)X^l$ et $H(X) = b_0(x) + b_1(x)X + ... + b_k(x)X^k$, où $a_0(x), a_1(x), ..., a_l(x), b_0(x), b_1, ..., b_k(x) \in \mathcal{M}_b(D^-(0,R))$, tel que $a_l(x)b_k(x) \not\equiv 0$. Comme le corps $\mathbb{C}_p$ est sphériquement complet, nous supposons que $a_l(x)$ et $b_k(x)$ n'ont pas de zéros communs, et comme les polynômes $G(X)$ et $H(X)$ sont relativement premier dans $\mathcal{A}_b(D^-(0,R))[X]$, il existe des polynômes $U(X), V(X) \in \mathcal{A}_b(D^-(0,R))[X]$ tel que

$U(X) = u_0(x) + u_1(x)X + ... + u_s(x)X^s, V(X) = v_0(x) + v_1(x)X + ... + v_t(x)X^t$

où $u_s(x)v_t(x) \not\equiv 0$, et il existe $c(x) \in \mathcal{A}_b(D^-(0,R))$, $c(x) \not\equiv 0$, tel que

$$U(X)G(X) + V(X)H(X) \quad = \quad c(x) \tag{3.6}$$

Soit $\mathcal{E} = \{a_0(x), a_1(x), ..., a_l(x), b_0(x), b_1(x), ..., b_k(x), u_0(x), u_1(x), ..., u_s(x)$ $v_0(x), v_1(x), ..., v_t(x), c(x)\}$. Comme $\mathcal{E}$ est une sous ensemble fini dans $\mathcal{A}_b(D^-(0,R))$ il existe $\alpha > 0$ et $A > 1$ tel que pour tout $\varepsilon(x) \in \mathcal{E}$, on a

$$\alpha \quad \leq \quad |\varepsilon|(r) < A, \quad \forall r \in]0, R[\tag{3.7}$$

$i)$ On suppose que $|f|(r) \geq \frac{A}{\alpha}$, d'aprés $\mathbf{I} - i)$, on a

$$\log |G \circ f|(r) \quad = \quad l \log |f|(r) + \log |a_l|(r) \tag{3.8}$$

$$\log |H \circ f|(r) \quad = \quad k \log |f|(r) + \log |b_k|(r) \tag{3.9}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\log|F\circ f|(r) = \log\Big|\frac{G\circ f}{H\circ f}\Big|(r) &= \log\Big|G\circ f\Big|(r) - \log\Big|H\circ f\Big|(r)\\
&= \log\Big|\frac{a_l}{b_k}\Big|(r) + (l-k)\log|f|(r)\\
&< \log|a_l|(r) + (l-k)\log|f|(r)\\
&< \log\frac{A}{\alpha} + (l-k)\log\frac{A}{\alpha} = \log(\frac{A}{\alpha})^{l-k+1}\\
&< \log\frac{A}{\alpha} \qquad\qquad \text{car } l\leq k
\end{aligned}$$

Donc $\quad 0\leq \log^+|F\circ f|(r) < \log\frac{A}{\alpha}$.

On utilise la formule (3.9), on a

$$\begin{aligned}
\log|\frac{1}{H\circ f}|(r) = -\log|H\circ f|(r) &= -k\log|f|(r) - \log|b_k|(r)\\
&< -k\log(\frac{A}{\alpha}) - \log\alpha = \log\frac{\alpha^{k-1}}{A^k}
\end{aligned}$$

et $\quad \log^+|\frac{1}{H\circ f}|(r) = 0.$

Nous avons

$$0\leq \log^+|F\circ f|(r) - \log^+\Big|\frac{1}{H\circ f}\Big|(r) \;<\; \log\frac{A}{\alpha} \tag{3.10}$$

ii) On Suppose maintenant que $|f|(r) < \frac{A}{\alpha}$. Donc, par $\mathbf{I}-ii$), on a

$$\log|G\circ f|(r) \;<\; \log\frac{A^{l+1}}{\alpha^l} \tag{3.11}$$

$$\log|H\circ f|(r) \;<\; \log\frac{A^{k+1}}{\alpha^k} \tag{3.12}$$

$$\log|U\circ f|(r) \;<\; \log\frac{A^{S+1}}{\alpha^S} \tag{3.13}$$

$$\log|V\circ f|(r) \;<\; \log\frac{A^{t+1}}{\alpha^t} \tag{3.14}$$

- On suppose que $|f|(r) < \dfrac{A}{\alpha}$, on a $|H\circ f|(r) \geq \left(\dfrac{\alpha}{A}\right)^{t+1}$.

alors $\qquad 0\leq \log^+|\frac{1}{H\circ f}|(r) \leq \log\left(\frac{\alpha}{A}\right)^{t+1}$ et

$$\begin{aligned}
\log^+|F\circ f|(r) &= \log^+|G\circ f\frac{1}{H\circ f}|(r)\\
&\leq \log\frac{A^{l+1}}{\alpha^l} + \log\frac{A^{t+1}}{\alpha^t}
\end{aligned}$$

Donc $0 \leq \log^+ |F \circ f|(r) \leq \log \dfrac{A^{l+k+2}}{\alpha^{l+k+1}}$.

par conséquent

$$\log \left(\frac{\alpha}{A}\right)^{t+1} \leq \log^+ |F \circ f|(r) - \log^+ |\frac{1}{H \circ f}|(r) \quad \leq \quad \log \frac{A^{l+k+2}}{\alpha^{l+k+1}} \quad (3.15)$$

- Supposons maintenant que, $|f|(r) < \dfrac{A}{\alpha}$ on a $|H \circ f|(r) < (\dfrac{\alpha}{A})^{t+1}$.

Alors $|(V \circ f)(H \circ f)|(r) = |(V \circ f)|(r)|(H \circ f)|(r) < \dfrac{A^{t+1}}{\alpha^t} \dfrac{\alpha^{t+1}}{A^{t+1}} = \alpha$

à partir de (3.6) et (3.7), on deduit que

$$|U \circ f|(r)|G \circ f|(r) = |c|r$$

Ainsi, par les relations (3.6) et (3.11), on a

$$\log \left(\frac{\alpha}{A}\right)^{s+1} < \log |c|r - \log |U \circ f|(r)|G \circ f|(r) \leq \log \frac{A^{l+1}}{\alpha^l}$$

nous avons aussi

$$\log^+ |\frac{1}{H \circ f}|(r) \quad = \quad \log |\frac{1}{H \circ f}|(r) > \log \left(\frac{A}{\alpha}\right)^{t+1} \quad (3.16)$$

alors, nous avons $\log |F \circ f|(r) = \log |G \circ f|(r) - \log |H \circ f|(r)$ donc

$$\begin{aligned} \log^+ |F \circ f|(r) &= \max\{\log |G \circ f|(r), \log |H \circ f|(r)\} - \log |H \circ f|(r) \\ &= \max\{\log |G \circ f|(r), \log |H \circ f|(r)\} + \log |\frac{1}{H \circ f}|(r) \end{aligned}$$

Alors, par(3.16), nous avons

$$\log^+ |F \circ f|(r) - \log^+ |\frac{1}{H \circ f}|(r) = \max\{\log |G \circ f|(r), \log |H \circ f|(r)\}$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} \log |G \circ f|(r) &= \log |F \circ f|(r) + \log |H \circ f|(r) \\ &= \log |F \circ f|(r) - \log |\frac{1}{H \circ f}|(r) \\ &= \log |F \circ f|(r) - \log^+ |\frac{1}{H \circ f}|(r) \\ &\leq \log^+ |F \circ f|(r) - \log^+ |\frac{1}{H \circ f}|(r) \end{aligned}$$

Donc, en vertude (3.11), (3.12) et (3.13), on a

$$\log \frac{\alpha^{s+1}}{A^s} \quad \leq \quad \log^+ |F \circ f|(r) - \log^+ |\frac{1}{H \circ f}|(r) \leq \log \frac{A^{l+1}}{\alpha^l} \tag{3.17}$$

Maintenant, par (3.10), (3.15) et (3.17), nous avons

$$\log^+ |F \circ f|(r) - \log^+ |\frac{1}{H \circ f}|(r) \quad = \quad 0(1), \ \ \forall r \in]0, R[\tag{3.18}$$

D'autre part, nous avons

$$F \circ f(x) = \frac{G \circ f(x)}{H \circ f(x)} = \frac{a_0(x) + a_1(x)f(x) + ... + a_l(x)f(x)^l}{b_0(x) + b_1(x)f(x) + ... + b_k(x)f(x)^k}, \ \text{ avec } l \leq k$$

En utilisant le fait que $a_l(x)$ et $b_k(x)$ n'ont pas de zéros communs, on peut facilement se que les pôles de $F \circ f$ résultat des pôles de f qui sont communs zéros de $b_l(x), b_{l+1}(x), .., b_k(x)$ et de les zéros de $H \circ f$ qui ne sont pas des zéros $G \circ f$, mais, par la formule (3.6), toutes les communes de zéro $G \circ f$ et $H \circ f$ est aussi un zéro du $c(x)$ et $b_l(x), b_{l+1}(x), .., b_k(x)$ et $c(x)$ sont des éléments de $\mathcal{M}_b(D^-(0, R))$, on en déduit que

$$N(r, F \circ f) \quad = \quad N(r, \frac{1}{H \circ f}) + O(1), \ \ \forall r \in]0, R[\tag{3.19}$$

Ou, d'après les relations (3.18) et (3.19), nous avons

$$\begin{aligned} T(r, F \circ f) \quad &= \quad T(r, \frac{1}{H \circ f}) = T(r, H \circ f) + O(1) \\ &= \quad kT(r, f) + O(1), \ \ \forall r \in]0, R[\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration □

Comme un cas particulier du théorème 3.1 Nous avons le résultat suivant

Corollaire 3.1 [8] *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))\big)$ telle que $f(0) \neq 0, \infty$. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}_p^*$ tels que $ad - bc \neq 0$. Soit $\tau(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, on suppose que $\tau(0) \neq 0, \infty$. Alors*

$$T(r, \tau \circ f) = T(r, f) + O(1), \quad \forall r \in]0, +\infty[\ \ \big(resp. \ \forall r \in]0, R[\big)$$

où τ les fonctions de Mobius

Chapitre 4

Factorisation des fonctions analytiques p-adiques et la distribution des valeurs

Dans ce chapitre, on utilise les propriétés de *polygone de valuation* qui étudient la distribution de zéros des fonctions analytiques. Il joue le rôle de la *fonction caractéristique de Nevanlinna* $T(r, f) = \log^+ |f|(r)$, et on applique la théorie de Nevanlinna aux fonctions analytiques pour resouder le problème suivant.

Problème. Peut-on construire une fonction *pseudo-première* p-adique f telle que
Pour tout $\beta \in \mathbb{C}_p$, $f - \beta$ admet un nombre fini de zéros multiples?

On commence par donner les définitions et les propositons préliminaires pour les fonctions entières p-adiques pseudo premières. On note $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ l'anneau des fonctions entières dans $\mathbb{C}_p$, et $\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ le corps des fonctions méromorphes dans tout $\mathbb{C}_p$.

Définition 4.1 *Soit $f, f_1, f_2, ..., f_n \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ telles que $f = f_1 \circ f_2 \circ f_2, ..., \circ f_n$*
On dit qu'on a là une factorisation de f et que $f_1, f_2, ..., f_n$ sont des facteurs de f.

Définition 4.2 *$f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ est dite première si, dans toute factorisation de f, tous les facteurs, sauf au plus un, sont des fractions rationnelles de degré un.*

Définition 4.3 *$f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ est dite Pseudo-première si dans toute factorisation tous les facteurs, sauf au plus un, sont des fraction rationnelles.*

Corollaire 4.1 *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{C}_p[X]$. On suppose que dans une infinité de disque de centre 0 et de rayon arbitrairement grand, f admet un nombre de zéro égal au produit de deux nombre premiers (non nécessairement distincts). Alors ou bien f est première, ou bien elle se factorise sous la forme de facteurs premiers.*

On donne maintenant notre résultat principal dans ce chapitre.

Théorème 4.1 *Toute fonction entière p-adique f telle que*
Pour tout $\beta \in \mathbb{C}_p, f - \beta$ n'a qu'un nombre fini de zéro multiples est pseudo-première.

Démonstration.

Soient $g, h \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{C}_p[X]$ tel que $f = g \circ h$ n'est pas pseudo-première

Alors g' admet au moins un zéro $\alpha \in \mathbb{C}_p$ tel que

$$g'(\alpha) \quad = \quad 0 \tag{4.1}$$

Alors l'equation $h(x) - \alpha = 0$ admet une infinité de solutions c'est-à-dire

l'ensemble $h^{-1}(\alpha)$ est infini.

Soit $\beta = g(\alpha) \in \mathbb{C}_p$ pour tout $\omega \in h^{-1}(\alpha)$, on a

$(f - \beta)(\omega) = f(\omega) - \beta = g \circ h(\omega) - \beta = g(\alpha) - \beta = 0$

et $f'(\omega) = g'(h(\omega))h'(\omega) = g'(\alpha)h'(\omega) = 0$ (d'aprés (4.1)) Donc tous les éléments de $h^{-1}(\alpha)$ sont des zéros multiples de $f - \beta$.

ce qui contredit l'hypothèse. $\square$

Construction d'une fonction pseudo-première

Dans la suite, on donne une proposition qui vérifier les conditions du théorème présédent.

Proposition 4.1 ***(Construction d'un fonction pseudo-première)***
Soit $(a_n)_n$ une suite d'élements de $\mathbb{C}_p^*$ telle que
$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|_p < \left|\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\right|_p$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|_p = +\infty$
Alors $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est une fonction entière sur $\mathbb{C}_p$. Les zéros α_n de f peuvent être rangés en une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ telle que $\left|\alpha_n\right|_p = \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|_p$.

Démonstration.

1) Montrons que $\overline{\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}}\sqrt{|a_n|_p} = 0$

Soit $\varepsilon > 0, \exists n_0$ t.q $n \geqslant n_0 \Longrightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|_p < \varepsilon$ car $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|_p = 0$

Soit $n \geqslant n_0$, on a $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \times ... \times \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \times a_{n_0} \Longrightarrow |a_n|_p^{\frac{1}{n}} < \varepsilon^{\frac{n-n_0}{n}}|a_{n_0}|_p^{\frac{1}{n}}$

D'où $\overline{\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}}|a_n|_p^{\frac{1}{n}} \leq \varepsilon, \quad \forall\varepsilon > 0$

Donc $\overline{\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}}|a_n|_p^{\frac{1}{n}} = 0$ et f entière.

2) $\quad |f|(r) = \sup\limits_{k\geq}|a_k|_p\, r^k$.

Posons $r_n = \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|_p$.

Montrons que $|f|(r_n) = |a_k|_p\, r^k$ pour les seules valeurs $k = n-1$ et $k = n$

On a $\frac{|a_n|_p\, r_n^n}{|a_{n-1}|_p\, r_n^{n-1}} = \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|_p r_n = 1$. D'où $|a_n|_p\, r_n^n = |a_{n-1}|_p\, r_n^{n-1}$

- Si $0 \leq k < n-1$. $\quad \frac{|a_k|_p\, r_n^k}{|a_n|_p\, r_n^n} = \left|\frac{a_k}{a_n}\right|_p \frac{1}{r_n^{n-k}} = \underbrace{\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|_p \times ... \times \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|_p}_{<r_n^{n-k}} \frac{1}{r_n^{n-k}} < 1$

$$\Longrightarrow |a_k|_p r_n^k < |a_n|_p\, r_n^n$$

- Si $k > n$. $\quad \frac{|a_k|_p\, r_n^k}{|a_{n-1}|_p\, r_n^{n-1}} = \left|\frac{a_k}{a_{n-1}}\right|_p r_n^{k+1-n} < \underbrace{\left|\frac{a_k}{a_{n-1}}\right|_p \times \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|_p \times ... \times \left|\frac{a_{k-1}}{a_k}\right|_p}_{k+1-n facteur} = 1$

$$\Longrightarrow |a_k|_p\, r_n^k < |a_{n-1}|_p\, r_n^{n-1}$$

Donc le cercle $C(0, r_n)$ contient un seul zéro α_n de f, d'où $|\alpha_n|_p = r_n = \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|_p$

3) Pour montrer que f n'a pas d'autre zéro que les α_n, on va montrer que si $r_n < r < r_{n+1}$ alors $|f|(r) = \sup_{k\geq 0} |a_k|_p\, r^k$ est atteint pour la seule valeur $k = n$.

En effet

- Si $0 \leq k < n$. $\quad |a_k|_p\, r^k = \underbrace{\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|_p \times \ldots \times \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|_p}_{<r_n^{n-k}} |a_n|_p\, r^k$

$$\Longrightarrow |a_k|_p\, r^k < |a_n|_p\, r_n^{n-k} r^k < |a_n|_p\, r^n$$

- Si $k > n$. $\quad \dfrac{|a_k|_p\, r^k}{|a_n|_p\, r^n} = \left|\dfrac{a_k}{a_n}\right|_p r^{k-n} < \left|\dfrac{a_k}{a_n}\right|_p r_{n+1}^{k-n}$

$$\Longrightarrow \ldots < \left|\frac{a_k}{a_n}\right|_p \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|_p^{k-1} < \underbrace{\left|\frac{a_k}{a_n}\right|_p \times \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|_p \times \left|\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\right|_p \times \ldots \times \left|\frac{a_{k-1}}{a_k}\right|_p}_{k-n\, facteur}$$

D'où $\quad \dfrac{|a_k|_p\, r^k}{|a_n|_p\, r^n} < 1 \quad$ i.e $|a_k|_p\, r^k < |a_n|_p\, r^n$. $\square$

Lemme 4.1 *La fonction construite plus hant vérifie la propriété $\beta \in \mathbb{C}_p$, $\quad f(x) - \beta$ n'a qu'un nombre fini de zéro multiples (tous les autres étant simples).*

Démonstration. $\exists r_0 > 0$ telle que

$$r \geq r_0 \Longrightarrow |f - \beta|(r) = |f|(r)$$

Donc les eventuels zéros multiples appartiennent à $D(0, r_0)$, d'où leur nombre fini.

Conclusion

Dans notre travail nous avons présenté quelques résultats importants qui concernent l'application de *la théorie de Nevanlinna p-adique* aux fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}_p$-le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, ou dans un disque ouvert contenu dans $\mathbb{C}_p$.

Notre premier résultat consiste à établir une version p-adique du théorème de *Valiron* généralisant ainsi des résultats de **A. Boutabaa**.

Le deuxième résultat consiste à construire une fonction f entière *pseudo-première*.

Notations

Nous utilisons les notations suivantes aux ce travail

$\mathbb{K}, ||.||, |.|_\infty$	Page **6,7**
$(\mathbb{K}, ||.||), \mathbb{K}[x]$	Page **8**
$v_p(.), (\mathbb{Q}, |.|_p), d_{||.||}(x,y), d_p$	Page **9,14,15**
$(\mathbb{Q}_p, |.|_p), \mathbb{Z}_p$	Page **17,18**
$\mathbb{F}_p$	Page **19**
$D^+(a,R), D^-(a,R), D(a,R), C(a,R)$	Page **24**
$\mathbb{C}_p, \mathbb{C}_p^*, \overline{\mathbb{Q}}_p$	Page **27,28**
$O(\mathbb{C}_p), \mathcal{O}(\mathbb{C}_p)$	Page **28**
$\mathcal{A}(D(a,R)), \mathcal{A}_b(D(a,R)), \mathcal{A}_u(D(a,R)), \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$	Page **31**
$|.|(r)$	Page **33,34**
$\log |.|(r)$	Page **38**
$\mathcal{M}(\mathbb{K}), \mathcal{M}(D(0,R)), \mathcal{M}_b(D(0,R)), \mathcal{M}_u(D(0,R))$	Page **41**
$z(|\alpha|_p, .), p(|\alpha|_p, .)$	Page **43**
$Z(r,.), \overline{Z}(r,.), N(r,.), \log^+$	Page **45**
$T(r,.), m(r,f), O(.), o(.)$	Page **46,47,48**
$\overline{N}(r,.), \overline{p}(r,.)$	Page **52**
$\tau(.)$	Page **63**

Bibliographie

[1] **Amice. Y**, Les nombres p-adiques, *presses Universitaires de France (1975).*

[2] **Baker A.J**, An introduction to p-adic Numbers and p-adic Analysis. *Departement of Mathématics, University of Glasgow, G128QW, Scotland (2004).*

[3] **Bertrin. Diarra**, Analyse p-adique. *Cours DEA-Algèbre commutative FAST-Université du Mali. Décembre 1999-Mars 2000.*

[4] **Bézévin J.P**, Dynamique des fractions rationnelles p-adiques. *23 mai 2005.*

[5] **Bézévin J.P and Boutabaa. A**, Decomposition of p-adic meromorphic functions. *Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 2, no 1(1995) pp51-60.*

[6] **Boutabaa. A**, Applications de la théorie de Nevanlinna p-adique, *Collectanea Mathematica 42(1), 75-93(1991).*

[7] **Boutabaa. A**, On some p-adic functional equations, *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics (Marcel Dekker)(1997).*

[8] **Boutabaa. A**, Théorie de Nevanlinna p-adique, *Manuscripta Math.67, 251-269(1990)*

[9] **Boutabaa. A,** Sur les courbes holomorphes p-adiques. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. V, no 1(1996), pp29-52.*

[10] **Boutabaa. A. et EscassuT. A**, On uniquenss of p-adic meromorphic functions, *Proc. Amer. Math. soc. 126(9), 2557-2568(1998).*

[11] **Boutabaa. A. et EscassuT. A**, Urs and Ursim for p-adic meromorphic functions inside a disc, *Proc. of the Edinburgh Mathematical Society 44, 485-504(2001).*

[12] **Boutabaa. A. et Escassut. A,** Applications of the p-adic Nevanlinna theory to functional equations Annales de lInstitut Fourier, *T.50 (3),p751-766. (2000).*

[13] **Brekke. L, P.G.O. Freund**. p-Adic Numbers in Physics. *Phys. Rep. 233 : 1-66, 1993.*

[14] **Escassut. A,** Analytic Elements in p-adic Analysis, *Word Scientific Publishing (1995).*

[15] **Escassut. A, Tutschke W. et Yang C. C**,Some Topics on Value Distribution and Differentiability in Complex and p-adic Analysis, *Mathematics Monograph Series 11, Science Press Beijing (2008).*

[16] **Jacqueline. A.O.F**, Distribution de valeurs des fonctions méromorphes ultramétriques, application de la theorie de Nevanlinna, *Thèse de Doctorat, Université Blaise Pascal (2002).*

[17] **Hayman. W. k**, Meromerphic functions, *Clarendon Press, Oxford.(1964).*

[18] **Katok. S**, Real and p-adic analysis, *cours notes for Math 497 C,Mass program, Fall 2000 (2001).*

[19] **Koblitz. N**, P-adic Analysis and Zeta Functions, *Springer-Verlag (1984).*

[20] **Khoai. H.H,** Sur la theorie de Nevanlinna p-adique, *Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 15(1987-1988), P. 35-40.*

[21] **Khrennikov. A,** Non-Archimedean Analysis : *Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1997.*

[22] **Lazard. M**, Les zéros des fonctions analytiques sur un corps valué complet, *IHES, Publications Math´ematiques n.14, p.47-75 (1962).*

[23] **Malmquist. J**, Sur les fonctions à un nombre fini de branches définies par les équations différentielles du premier ordre. *Acta Mathematica 36, p.297-343 (1913).*

[24] **Rodrigàñez. C. C**,P-adic Numbers and non-archimedean *Valuation*
URL :http :// www.sunall.mat.Ucm.es.

[25] **Schikhof. W. H**, Ultrametric calculus. An introduction to p-adic analysis, *Combridge University Press (1984).*

[26] **Robert. A,** A Course in p-adic Analysis. *Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, No. 198 (2000).*

[27] **Weil. A,** Sur les fonctions elliptiques p-adiques, *C.R.A.S. Paris 203, p.22-24 (1936).*

[28] **Yosida. K,** Generalization of Malmquists Theorem Japan J. *of Math. 9 (1934).*

ملخص

في هذا البحث تطرقنا إلى إعطاء بعض النتائج الخاصة بتطبيق نظريةNevanlinna على التوابع المرومورفية في حقل p أديكي للأعداد المركبة C_p – متمم الإغلاق الجبري لحقل الأعداد p أديك Q_p، أو في قرص مفتوح محتوي في C_p . ومن دون أي صعوبات تحصلنا على نتائج مماثلة للنظرية الكلاسيكية ل Nevanlinna. هذه النظرية تتألف من نظريتين أساسيتين: الأولى تعطي كتابة التابع المميز ل Nevanlinna $T(r,f)$ بتابع عد الأقطاب $N(r,f)$ و تابع التقريب $m(r,f)$ ؛ *وتبرهن المساواة* $T(r,f)=N(r,f)+m(r,f)$ *أما النظرية* الثانية تقوم بتقريب $N(r,f)$ من $T(r,f)$ هدا يجرنا الى القول ان $m(r,f)$ محدودة مقارنة ب $N(r,f)$.

هدفنا الاول هو دراسة مشكل توزيع القيم للتوابع المرومورفية المحدودة فى قرص مفتوح لإعطاء صيغة ال p أديك على نظرية *Valiron* بشروط جديدة. أما الهدف الثاني يتضمن تطبيق أخر لنظريةNevanlinna من اجل بناء وتشكيل التوابع الصحيحة شبه الأولية التي تملك عدد محدود من الأصفار المضاعفة.

Résumé

Le but de ce travail est de présenter quelques résultats importants qui concernent l'application de la théorie de Nevanlinna p-adique aux fonctions méromorphes dans C_p- le complété de la clôture algébrique de Q_p , ou dans un disque ouvert contenu dans C_p. On montre sans aucune restriction, des résultats parfaitement analogues à ceux de théorie classique de Nevanlinna. Cette théorie se compose de deux "théorèmes fondamentaux" ; le premier donne le rapport entre la fonction caractéristique de Nevanlinna $T(r,f)$, la fonction comptage des pôles $N(r,f)$ et la fonction de compensation $m(r,f)$, il est démontre l'égalité $T(r,f)=N(r,f)+m(r,f)$. On traite quelques propriétés classiques de ces fonctions. Le deuxième théorème montre que la fonction $N(r,f)$ approche $T(r,f)$, ce qui revient à dire que $m(r,f)$ est relativement petite devant $N(r,f)$.

Le résultat de ce travail consiste à étudier un problème de distribution des valeurs des fonctions méromorphes bornées dans un disque ouvert, ce qui a permis d'établir le théorème de *Valiron* dans le cas p-adique. Le deuxième résultat consiste à construire une fonction f entière pseudo-première tel que pour tout $\beta \in C_p$, $f-\beta$ admet un nombre fini de zéros multiples.

Abstract

This work is to present some important results concerning the application of the theory of p-adic Nevanlinna to meromorphic functions in Cp it completed the algebraic closure of Qp, or in an open disk contained in Cp. It is shown without any restriction, results similar to those of classical theory of Nevanlinna. This theory consists of two "fundamental theorems", the first gives the report between the Nevanlinna characteristic function $T(r, f)$, the function counting the poles $N(r, f)$ and the compensation function $m(r, f)$, it demonstrates the equality $T(r, f) = N(r, f) + m(r, f)$. It studies with some classical properties of these functions. The second theorem shows that the function $N(r, f)$ approaches $T(r, f)$, which means that $m(r, f)$ is relatively small compared to $N(r,f)$.

The result of this work is to study a problem of distribution of values of meromorphic functions in a bounded open disk, which has established the *Valiron* theorem in case p-adic. The second result is to construct an entire function f such that pseudo-indecomposable for any $\beta \in C_p$, $f-\beta$ admits a finite number of multiple zeros.