REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SIENTIFIQUE
LABORATOIRE DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES (L.M.P.A)
UNIVERSITE DE JIJEL

N°d'ordre :
Série :

MEMOIRE

Présenté à la Faculté des Sciences Exactes
et Sciences de la nature et de la vie
Département De Mathématiques
Pour l'obtention du diplôme de

MAGISTER
Spécialité : Mathématiques
Option : *Analyse*

Thème

La Théorie de Nevanlinna ultra-métrique et Ses applications aux équations fonctionnelles aux q-différences

Par

MEDJERAB SAMIA

Soutenue le : 17/06/2010

Devant le jury :

Président :	**M. Denche**	**Prof.**	Univ. Constantine
Rapporteur :	**T. Zerzaihi**	**MC.**	Univ. Jijel
Examinateurs :			
	A. Aibeche	**Prof.**	Univ. Sétif
	D. Azzam-Laouir	**Prof.**	Univ. Jijel
	W. Chikouche	**MC.**	Univ. Jijel
Invité :	**A. Boutabaa**	**MC.**	Univ. Blaise-Pascal (France)

2009-2010

Remerciements

Je remercie Dieu de m'avoir accordé la volonté et le courage pour réaliser mon mémoire.

Je remercie vivement mon encadreur. Monsieur T.Zerzaihi maître de conférences et chef du département de Mathématiques à l'université de Jijel pour son aide, sa disponibilité, ses précieux conseils et pour l'infinie patience qu'il m'a accordé pendant la réalisation de ce travail malgré ses charges nombreuses.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur A.Boutabaa maître de conférences à l'université Blaise Pascal à Clermont-Ferrand (France) pour l'intérêt qu'il a porté à ce mémoire et pour sa précieuse écoute et ses encouragements chaleureux tout au long de ce travail. Merci encore de votre extraordinaire disponibilité au travail qui fait de toi un exemple.

Ma gratitude et mes remerciements s'adressent aussi à Monsieur A.Escassut à l'université Blaise Pascal à Clermont-Ferrand (France) pour son aide précieuse afin d'achever ce travail, pour sa fraicheur d'esprit, son aide inestimable et ses conseils.

Je remercie Monsieur M.Denche professeur à l'université de Constantine d'avoir immédiatement accepté la tâche du président du jury.

Sans oublier de remercier les membres du jury Monsieur A.Aibeche professeur à l'université de Sétif, Madame D.Azzam-Laouir professeur à l'université de Jijel et Madame W.Chikouche maître de conférences à l'université de Jijel, qui ont bien voulu accepter d'examiner ce modeste travail.

Je tiens à adresser mes remerciements à tous les membres du Laboratoire de Mathématiques de l'université de Jijel et à tous les enseignants qui ont contribués à ma formation.

Je tiens à témoigner mes meilleurs sentiments à mes amis (es), mes collègues de Magister. Mes remerciements seraient incomplet si je ne citais pas l'équipe de travail p-adique chacun son nom, pour leur gentillesse et leur précieuse indication documentaire.

Enfin, merci à toute personne qui m'a encouragé afin de terminer ce travail.

Table des matières

Chapitre 0

Introduction Générale

Ce mémoire est consacré au domaine de la distribution de valeurs des fonctions méromorphes. On se propose d'étudier des propriétés des fonctions méromorphes dans un corps ultra-métrique complet, algébriquement clos et de caractéristique 0, qui sera noté $\mathbb{K}$. Ce corps est muni d'une valeur absolue ultra-métrique. Elle induit une distance ultra-métrique sur l'espace en question. Ce qui entraîne des propriétés spécifiques, parfois différentes de celle qu'on connaît dans l'analyse réelle, par exemple si $\mathbb{K} = \mathbb{C}_p$-le complété de la clôture algébrique du corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$ muni de la valeur absolue p-adique $|.|_p$, où p est un nombre premier fixe, on obtient une analyse différente qu'on appelle analyse p-adique.

Beaucoup d'études ont été faites au cours de ces dernières décennies sur la distribution de valeurs des fonctions méromorphes complexes, notamment de la part de G. Gundersen, G. Frank, C.C.Yang, Ping Li [23],...,etc. Les problèmes étudiés concernent d'une part la répartition des zéros de fonctions méromorphes complexes et d'autres part, les problèmes d'unicité pour des fonctions méromorphes complexes satisfaisant certaines équations fonctionnelles.

Il est naturel d'examiner des problèmes analogues de distribution de zéros pour différents types de fonctions méromorphes dans $\mathbb{K}$ ou dans un disque ouvert contenu dans $\mathbb{K}$.

De même, des problèmes d'unicité pour des fonctions méromorphes dans $\mathbb{K}$ ou dans un disque ouvert de $\mathbb{K}$ [7], [5].

Parmi les méthodes utilisées dans les problèmes de distributions de valeurs, on cite la *Théorie de Nevanlinna ultra-métrique*, qui joue un rôle majeur dans ce domaine. Elle contient beaucoup d'interprétations géométriques et possède des relations importantes avec la théorie des nombres.

La *Théorie de Nevanlinna ultra-métrique* a été introduite en 1989 par A. Boutabaa [3], [1]. Elle s'applique à des fonctions méromorphes dans tout le corps $\mathbb{K}$. En 2001, A. Boutabaa et A. Escassut ont appliqué cette théorie aux fonctions méromorphes dans un disque ouvert contenu dans $\mathbb{K}$, en tenant compte du problème de Lazard.

La plus grande partie de ce mémoire concerne la théorie de Nevanlinna ultra-métrique et ses applications aux équations fonctionnelles. On définit la fonction *caractéristique de Nevanlinna* et on montre, sans aucune restriction des résultats analogues à ceux de Nevanlinna [26].

Ce travail est réparti sur l'introduction et trois chapitres :

Le premier chapitre est composé de deux parties ; la première consiste à rappeler les notions de base d'un *corps ultra-métrique* (la valeurs absolue ultra-métrique)et ses propriétés fondamentales analytiques et topologiques. Puis, on construit le corps des nombres p-adique $\mathbb{Q}_p$ qui est le complété de $\mathbb{Q}$ muni de la valeur absolue p-adique $|.|_p$, où p est un nombre premier. Ce corps utilise les techniques des séries entières dans la théorie des nombres. Comme $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clos et pour faire convenablement de l'analyse, nous avons besoin de le compléter pour former le corps $\mathbb{C}_p$ complet et algebriquement clos et qui joue le rôle de $\mathbb{C}$ en analyse classique.

La deuxième partie donne les propriétés classiques liées aux fonctions analytiques dans le corps $\mathbb{C}_p$ et dans un disque, on étudie l'analogue ultra-métrique de leur problème de distribution de zéros, connue en analyse ultra-métrique par le *polygone de Valuation* qui joue un rôle important pour établir la *formule de Jensen.*

Dans le chapitre 2, on s'intéresse à la distribution des zéros de fonctions méromorphes et on définit quatre fonctions ; $Z(r, f)$ est la fonction qui *compte les zéros* des fonctions méromorphes avec leurs multiplicités, $N(r, f)$ est la fonction qui *compte les pôles* des fonctions méromorphes avec leurs multiplicités, la fonction de *compensation* $m(r, f) = \log^+ r$ et la fonction *caractéristique de Nevanlinna* $T(r, f) = N(r, f) + m(r, f)$ qui est positive et prolonge $\log |f|(r)$ quand f est analytique, et on étudie aussi les propriétés arithmétiques classiques (addition, multiplication, décomposition,...) des fonctions méromorphes.

Ces fonctions sont utilisé pour donner une version ultra-métrique de la formule de Jensen et le *premier théorème fondamental de Nevanlinna ultra-métrique* qui est seulement une reformulation de la *formule de Jensen.* Il fournit la taille du nombre de racines de l'équation $f(x) = a$, valable pour tout $a \in \mathbb{C}_p$. Puis on donne la version ultra-métrique du *deuxième théorème fondamental de Nevanlinna.* Il montre qu'en général, $m(r, f)$ est petit par rapport à $T(r, f)$, et en conséquence $N(r, f)$ approche $T(r, f)$, avec tous les détails des démonstrations. Ce théorème est appliqué pour résoudre les problèmes d'ensembles d'unicité pour des fonctions méromorphes dans $\mathbb{K}$ ou dans un disque ouvert de $\mathbb{K}$ (URS, URSCM, URSIM) [5]

Enfin, dans le troisième chapitre, on s'intéresse à l'application de cette théorie aux équations fonctionnelles q-différences qui consiste à résoudre l'équation

$$\sum_{i=0}^{s} A_i(x)\, f(q^i x) = B(x)$$

où $A_0(x), ..., A_s(x)$ sont des éléments de $\mathbb{K}(X)$ tels que $A_0(x)\, A_s(x) \neq 0$ et $B(x) \in \mathbb{K}[x]$.

Dans le cas ultra-métrique, on utilise les résultats du premier théorème de Nevanlinna pour caractériser la taille de cette solution méromorphes et d'étudier le comportement et la croissance de la solution.

La démonstration est relativement longue et nous destinguons deux cas ; dans le premier, on suppose que $A_0(x), ..., A_s(x)$ sont constants, et $B(x) \in \mathbb{K}[X]$. Dans le second cas, on suppose que $B(x), A_0(x), ..., A_s(x)$ sont des fonctions rationnelles et $A_0(x), ..., A_s(x)$ ne sont pas tous constants, et on obtient des résultats pour chaque cas.

Chapitre 1

Corps valués ultra-métriques corps des nombres p-adiques

Ce chapitre a pour but d'introduire les outils nécessaires dont on aura besoin dans la suite. On va rappeler les outils de base pour l'analyse ultra-métrique et donner des propriétés déjà connues des fonctions analytiques ultra-métriques (dans un disque ou dans le corps tout entier). La partie importante de ce chapitre sera consacrée à la distribution des zéros sur un disque fermé. Particulièrement, on étudiera le lien qui existe entre le *polygone de valuation* et les zéros des fonctions analytiques.

1.1 Valeurs absolues ultra-métriques

On a besoin de rappeler quelques définitions et propriétés basiques qui concernent le corps ultra-métrique.

Définition 1.1 *Soit* $\mathbb{K}$ *un corps. Une valeur absolue sur* $\mathbb{K}$ *est une application de* $\mathbb{K}$ *dans* $[0, +\infty[$ *telle que*

a) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b) $\forall x, y \in \mathbb{K}, |xy| = |x||y|$

c) $\forall x, y \in \mathbb{K}, |x + y| \leq |x| + |y|$ *(inégalité triangulaire).*

Associée à une valeur absolue, on a une distance en posant $d(x,y) = |x-y|$, qui fait donc de $\mathbb{K}$ un espace métrique.

On dit que la valeur absolue $|.|$ est *ultra-métrique*, si au lieu de c), on a

c') $|x+y| \leq \max(|x|,|y|)$ (*inégalité triangulaire forte ou ultra-métrique*).

Il est clair que $c') \Rightarrow c)$.

Une valeur absolue ultra-métrique est *non-archimédienne.*

Exemples. $\big($***De valeurs absolues ultra-métriques***$\big)$

1. Tout corps est muni d'au moins une valeur absolue ultra-métrique à savoir l'application $|.| : \mathbb{K} \longrightarrow [0,+\infty[$ définie par : $|x| = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x = 0 \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$

2. Soit $\mathbb{K}\big[[X]\big]$ le corps des séries formelles à une variable sur $\mathbb{K}$ pour tout $f \in \mathbb{K}\big[[X]\big]$, et $f \neq 0$, on a

$$f(x) = \sum_{n \geq n_0} a_n x^n, \quad a_{n_0} \neq 0$$

on pose $v(f) = n_0$, $v(0) = +\infty$, avec

$$\begin{cases} v(f) = +\infty, \Leftrightarrow f = 0 \\ v(fg) = v(f) + v(g), \forall f, g \in \mathbb{K} \\ v(f+g) \geq \min\{v(f), v(g)\}, \forall f, g \in \mathbb{K} \end{cases}$$

Si l'on pose $|f| = a^{-v(f)}$, $a > 0$. On définit une valeur absolue ultra-métrique sur le corps $\mathbb{K}\big[[X]\big]$.

1.2 Propriétés élémentaires d'un corps ultra-métrique

Dans la suite, on note $(\mathbb{K}, |.|)$ un corps valué ultra-métrique.

Théorème 1.1 [27] ***(caractéristique du corps ultra-métrique)***
Soit $|.|$ une valeur absolue sur le corps $\mathbb{K}$, on a

$$|.| \text{ } v.a.ultra\text{-}métrique \Longleftrightarrow |n| \leq 1, \, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Proposition 1.1 [16] *Soient a et x deux éléments d'un corps ultra-métrique $(\mathbb{K}, |.|)$, on a*

$$| \, x - a \, |<| \, a \, |\Longrightarrow| \, x \, |=| \, a \, | \, .$$

Démonstration. Soient $a, x \in \mathbb{K}$, par l'inégalité ultra-métrique, on a pour $|x - a| < |a|$

$$\begin{aligned} | \, x \, |=| \, x - a + a \, | &\leq \max\left\{ \, | \, x - a \, |, | \, a \, | \, \right\} =| \, a \, | \\ | \, a \, |=| \, x - x + a \, | &\leq \max\left\{ \, | \, a - x \, |, | \, x \, | \, \right\} \end{aligned}$$

si $\max\left\{ \, | \, x - a \, |, | \, x \, | \, \right\} = |x|$, on a le résultat. L'autre variante est contradiction avec l'hypothèse. □

***Conséquence.* (*Interprétation Géométrique*)**

Dans un espace ultra-métrique tous les triangles sont isocèls

$$| \, x - y \, |\neq| \, y - z \, | \quad \Longrightarrow \quad | \, x - z \, |= \max\left\{ \, | \, x - y \, |, | \, y - z \, | \, \right\}, \;\; \forall x, y, z \in \mathbb{K}.$$

Propriétés Topologiques.

Proposition 1.2 [27] [20]

P.1 *Le cercle est un ensemble ouvert.*

P.2 *Un disque $D(a, r)$ est un ensemble à la fois ouvert et fermé.*

P.3 *Tout point b de $D(a, r)$ est un centre de $D(a, r)$.*
(Tout point d'un disque est un centre de ce disque.)

P.4 *Soient $D(a, r)$ et $D(b, r)$ deux disques de $\mathbb{K}$, alors ils sont disjoints ou l'un est inclus dans l'autre.*

Démonstration.

P.1 Soit $a \in \mathbb{K}$, et $r \in]0, +\infty[$. Pour montrer que $C(a, r)$ est un ensemble ouvert, on prend $x \in C(a, r), \rho < r$, alors par la proposition 1.1, on a

$$y \in D(x, \rho) \Rightarrow |x - y| < \rho < r = |x - a|$$

$$|y - a| = |x - a| = r.$$

donc $y \in D(a, r)$. Ce qui montrer que $C(a, r)$ est un ensemble ouvert.

P.2 *i*) Tout disque ouvert $D^-(a, r)$ est ouvert dans un espace métrique. D'autre part pour démontrer que $D^-(a, r)$ est fermé dans $\mathbb{K}$, on montre que

$$C_{\mathbb{K}}^{D^-(a,r)} = \{x \in \mathbb{K}, |x - a| \geq r\}.$$

est un ensemble ouvert.

Le fait que $C_{\mathbb{K}}^{D^-(a,r)} = C(r, a) \cup D$,où $D = \{x \in \mathbb{K}, |x - a|_p > r\}$

L'ensemble D est ouvert puisque $D = C_{\mathbb{K}}^{D^+(a,r)}$ et $C(a, r)$ sont ouverts, d'après **P.1**.

Alors l'union de deux ensembles ouverts est ouvert .

Donc $D^-(a, r)$ est fermé

ii) Tout disque fermé $D^+(a, r)$ est un ensemble fermé dans tout espace métrique. D'autre part, on a

$$D^+(a, r) = D^-(a, r) \cup C(a, r)$$

et l'union de deux ensembles ouverts est ouvert, alors $D^+(a, r)$ est ouvert.

P.3 Soit $x \in D^-(a, r)$, on montre que $D^-(a, r) = D^-(x, r)$

pour tout $y \in D^-(a, r) \Rightarrow |y - a| < r$, mais

$$|y - x| = |y - a + a - x| \leq \max\{|y - a|, |a - x|\} < r$$

d'où $y \in D^-(x, r)$, donc $D^-(a, r) \subset D^-(x, r)$

De la même façon, on montre que $D^-(x, r) \subset D^-(a, r)$

Donc $D^-(a,r) = D^-(x,r)$.

On refait les étapes précédentes pour montrer $D^+(a,r) = D^+(x,r), \forall x \in D^+(a,r)$.

P.4 Soient $D(a,r)$ et $D(b,\rho)$ deux disques de $\mathbb{K}$. On montre que

$$D(a,r) \cap D(b,\rho) \neq \phi \implies D(a,r) \subset D(b,\rho) \text{ où } D(b,\rho) \subset D(a,r).$$

Soit $r < \rho$ et pour $x \in D(a,r) \cap D(b,\rho)$, par **P.3**. On a $D(a,r) = D(x,r)$ et $D(b,\rho) = D(x,\rho)$ mais $D(x,r) \subset D(x,\rho)$, d'où $D(a,r) \subset D(b,\rho)$.

Lorsque on suppose que $\rho < r$, on trouve que $D(b,\rho) \subset D(a,r)$. □

Conséquence. *Le cercle $C(a,r)$ est un ensemble fermé.*

En effet. On sait que $C(r,a) = D^+(a,r) \cap C_{\mathbb{K}}^{D^-(a,r)}$ alors $D^+(a,r)$ est un ensemble fermé et $C_{\mathbb{K}}^{D^-(a,r)}$ est fermé. Donc $C(a,r)$ est l'intersection de deux ensembles fermés est un ensemble fermé.

Définition 1.2 *On dit qu'un espace ultra-métrique $\mathbb{K}$ est sphériquement complet si pour toute suite de disques emboité, l'intersection est non vide.*

Définition 1.3 *On dit qu'un espace ultra-métrique $\mathbb{K}$ est algébriquement clôs si chaque polynôme $P(x)$ dans $\mathbb{K}[X]$ admet des racines dans $\mathbb{K}$.*
Autrement dit, chacun de ces polynômes se décompose en facteurs linéaires dans $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 1.3 [27] *Si $\mathbb{K}$ est complet et séparable alors la complétion de sa clôture algébrique n'est pas sphériquement complet.*

On termine cette section, par une caractérisation des corps archimédiens.

Proposition 1.4 [27] ***(corps archimédien)***
Une valeur absolue $|.|$ sur un corps $\mathbb{K}$ est dite archimédienne si

$$\forall x, y \in \mathbb{K}, x \neq 0, \exists n \in \mathbb{N} : |nx| > |y|.$$

Autrement dit,

$$\sup\{|n|, n \in \mathbb{Z}\} = +\infty.$$

un corps muni de cette valeur absolue est archimédien.

Remarque. *une valeur absolue archimédienne n'est jamais équivalente à une valeur absolue non-archimédienne.*

Il y a toujours sur un corps $\mathbb{K}$, au moins une valeur absolue, à savoir l'application qui à x non nul associe 1, et à zéro associe zéro (valeur absolue triviale).
Sur $\mathbb{Q}$, on a de plus la valeur absolue ordinaire $|x|_\infty = \max(x, -x)$ que nous appellerons aussi valeur absolue usuelle.

Valuation p-adique.

Nous allons nous intéresser à d'autres valeurs absolues de $\mathbb{Q}$, associées à un nombre premier $p \geq 2$.
Soit $a \in \mathbb{Z}$. On écrit $a = c\,p^m$, avec $m \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{Z}$, et $(p, c) = 1$ $\big($ou $p \nmid c\big)$.
Nous noterons alors $v_p(a) = m$, où m est le plus grand entier positif (ou nul) tel que $p^{v_p(a)}$ dévise a. Ce nombre s'appelle la *valuation p-adique* de a. Donc on a

$$a = c\,p^{v_p(a)}, \text{ avec } (p, c) = 1.$$

Par convention, on pose $v_p(0) = +\infty$.

Exemples.

$a = p^2 + p^3 + 2p^4$, pour $p > 2$, $v_p(a) = 2$.

$24 = 2p + 2p^2$, pour $p = 3$, $v_p(24) = 1$.

$17 = 2 + 2p + p^2$ pour $p = 3$, $v_p(17) = 0$.

On a les propriétés suivantes de la valuation p-adique.

Proposition 1.5 [27] [20] *Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$, on a*

i) $v_p(1) = 0, \forall p - premier.$

ii) $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b),\ \forall a, b \in \mathbb{Z}^*.$

iii) $v_p(a + b) \geq \min\big\{v_p(a), v_p(b)\big\},\ \forall a, b \in \mathbb{Z}^*.$

Soit $x \in \mathbb{Q}^*$, on écrit $x = \dfrac{a}{b}$ tel que $(a, b) = 1$ et $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*$.
Nous posons $v_p\left(\dfrac{a}{b}\right) = v_p(a) - v_p(b) \in \mathbb{Z}$, avec $v_p(0) = +\infty$. On vérifie immédiatement que l'application

$$\begin{array}{rcl} v_p : \mathbb{Q}^* & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \longrightarrow & v_p(x) \end{array}$$

admet les mêmes propriétés de la proposition 1.5 pour tout élément $x \in \mathbb{Q}^*$, et aussi que la quantité $v_p(x)$ est indépendante de la représentation de x sous la forme $\dfrac{a}{b}$ choisie, car si on écrit $x = \dfrac{ac}{bc}$ on trouve la même valeur de $v_p(x) = v_p(ac) - v_p(bc)$.

Nous allons définir sur $\mathbb{Q}$ une valeur absolue pour chaque p-premier.

Proposition 1.6 [20] [17] *On définit l'application $|.|_p$ de $\mathbb{Q}$ dans $[0, +\infty[$ par*

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)}, & si\ x \neq 0 \\ 0, & si\ x = 0. \end{cases}$$

Cette application est une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$, appelée valeur absolue p-adique. Elle vérifie en plus l'inégalité

$$|x + y|_p \leq \max\left\{|x|_p, |y|_p\right\}, \forall x, y \in \mathbb{Q} \ \ (\textit{inégalité ultra-métrique})$$

L'application qui à $x \in \mathbb{Q}$ associe $v_p(x)$ est la valuation p-adique sur $\mathbb{Q}$.

Remarques

1. *Une remarque immédiate est que l'on a*

$$|x + y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\} \ si\ |x|_p \neq |y|_p,\ \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

2. *La valeur p-adique $|.|_p$ prend ses valeurs dans l'ensemble discrète $\left\{p^n,\ n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{0\right\}$ et définit une norme non-archimédienne sur le corps $\mathbb{Q}$;c-à-d $|n|_p \leq 1, \forall n \in \mathbb{Z}$.*

3. *La distance induite par la valeur absolue p-adique $d_p(x, y) = |x - y|_p$ est une distance ultra-métrique, car elle vérifie l'inégalité*

$$d_p(x, y) \leq \max\{d_p(x, z), d_p(z, y)\},\ \forall x, y, z \in \mathbb{Q}.$$

1.3 Nombres p-adiques

L'espace métrique $\mathbb{Q}$ muni de la distance p-adique $|.|_p$ n'est pas complet.

On va donner un exemple de suite de Cauchy diverge pour $p = 5$.

On définit deux suites d'entiers a_n et x_n par $x_n = x_{n-1} + a_n 5^n$ et $x_0 = a_0 = 2$. On détermine $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, et par la congruence $x_n^2 + 1 \equiv 0[5^n]$.

$(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ car

$$|x_n - x_{n-1}|_p \leq \frac{1}{5^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Cependant, elle ne peut converger vers $x \in \mathbb{Q}$, puisque si elle avait une limite $x \in \mathbb{Q}$, on aurait $x^2 + 1 = 0$.

1.3.1 Complétion de $\mathbb{Q}$

Puisque $\mathbb{Q}$ n'est pas complet pour $|.|_p$, on le complète et on obtient un corps complet que l'on note $\mathbb{Q}_p$ et qui s'appelle le corps des nombres p-adiques.

Le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques peut alors être défini comme la complétion de l'espace métrique $\Big(\mathbb{Q},\, d_p\Big)$. Ses éléments sont les classes d'équivalences des suites de Cauchy, où deux suites $u = (u_n)_{n\geq 0}$ et $v = (v_n)_{n\geq 0}$ sont dites équivalentes ($u\mathcal{R}v$) si $|u_n - v_n|_p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

De cette façon, on obtient un espace métrique complet qui est aussi un corps et qui contient $\mathbb{Q}$ comme sous espace dense dans $\mathbb{Q}_p$.

Nous indiquons comment prolonger la valeur absolue définie sur $\mathbb{Q}$ à tout $\mathbb{Q}_p$.

Soit x un élément de $\mathbb{Q}_p$ et x_n une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{Q}$, de limite x pour la distance p-adique. On vérifie que $|x_n|_p$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{R}$, de sorte que cette suite admet une limite, que l'on voit de plus être indépendante de la suite x_n de limite x choisie. On pose alors $|x|_p = \lim\limits_{n\to+\infty} |x_n|_p$. Cette construction permet de comprendre pourquoi $\mathbb{Q}_p$ est un analogue arithmétique de $\mathbb{R}$.

Pour un nombre premier donné p, on définit la valeur p-adique sur $\mathbb{Q}_p$ comme suit.

Proposition 1.7 [20] ***(Valeur p-adique de $\mathbb{Q}_p$)***
L'ensemble $\mathbb{Q}_p$ est un corps commutatif, et l'application qui à x associe $|x|_p$ est une valeur absolue ultra-métrique sur $\mathbb{Q}_p$. Pour tout x dans $\mathbb{Q}_p^*$, on définit

$$|x|_p \quad = \quad \begin{cases} p^{-v_p(x)}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

où $v_p(x)$ est un élément de $\mathbb{Z}$, ce nombre est la valuation p-adique de x.
En quelque sorte, plus x est divisible par p, plus sa valeur p-adique est petite.

Exemple. Pour

$$x = \frac{63}{550} = 2^{-1} \times 3^2 \times 5^{-2} \times 7 \times 11^{-1}$$

On a $|x|_2 = 2,\ |x|_3 = \frac{1}{9},\quad |x|_5 = 25,\quad |x|_7 = \frac{1}{7},\quad |x|_{11} = 11$, et pour tout autre nombre premier $|x|_p = 1$.

Dans la suite, on commence par définir l'anneau des entiers p-adiques $\mathbb{Z}_p$, puis on construit le corps des fractions de cet anneau pour obtenir le corps des nombres p-adiques.

Définition 1.4 ***(décomposition canonique de Hensel)***
Soit p un nombre premier. Tout élément non nul x de $\mathbb{Q}_p$ (et en particulier tout élément de $\mathbb{Q}$) s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{n \geq k} a_n\, p^n$$

où a_n sont des nombres entiers compris entre 0 et $p-1$. Cette écriture est la décomposition canonique de x comme nombre p-adique.

Cette série est convergente suivant la métrique p-adique. On note $\mathbb{Z}_p$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{Q}_p$ tels que $k \geq 0$ et on l'appelle ensemble des *entiers p-adiques*.

Remarque. *La partie $\mathbb{Z}_p$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}_p$. On peut représenter un entier p-adique par une suite infinie de chiffres en base p à gauche du point (i.e. $x = ...a_2a_1a_0.$),* *tandis que les autres éléments de $\mathbb{Q}_p$, eux auront un nombre fini de chiffres à droite du point. Cette écriture fonctionne en somme à l'inverse de ce qu'on a l'habitude de rencontrer dans l'écriture des nombres réels.*

Théorème 1.2 [27] *L'ensemble des entiers p-adiques*

$$\mathbb{Z}_p = \Big\{x \in \mathbb{Q}_p, v_p(x) \geq 0\Big\} = \{x \in \mathbb{Q}_p, |x|_p \leq 1\}$$

$\mathbb{Z}_p$ représente le disque de l'unité de rayon 1 et de centre 0.

Lemme 1.1 [20] [27]

i) $\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{Z}_p$.

ii) $\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{Z}_p$, i.e. $\forall x \in \mathbb{Q} : |x|_p \leq 1, \forall \in \mathbb{N}$, il existe un entier unique $\alpha \in \mathbb{Z}$

$$\text{tel que } \ |\alpha - x|_p \ \ \leq \ \ p^{-n} \ \text{ où } \alpha \in \{0, 1, ..., p^n - 1\}$$

Théorème 1.3 [27] *L'ensemble des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$ est défini par l'ensemble des sériés formelles avec des puissances de p*

$$\mathbb{Q}_p = \Big\{\sum_{n \geq k} a_n p^n, k \in \mathbb{Z}, a_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_n < p\Big\}.$$

1.3.2 Propriétés Analytiques et Topologiques des nombres p-adiques

Dans cette section, on étudie seulement les propriétés élémentaires analytiques des nombres p-adiques qui concernent la convergence des suites et des séries définies dans $\mathbb{Q}_p$, et de faire une étude des propriétés topologiques sur les disques de $\mathbb{Q}_p$.

Propriétés Analytiques

Le corps des nombres p-adiques est analogue au corps des nombres réels sur plusieurs espects, mais le corps $\mathbb{Q}_p$ possède des propriétés différentes de celles du corps des réels $\mathbb{R}$. Le point le plus intéressant dans cette partie est la convergence des suites et des séries dans l'espace $\big(\mathbb{Q}_p, |.|_p\big)$.

Théorème 1.4 [20] *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite de* $\mathbb{Q}_p$ *. Alors* $(u_n)_{n\geq 0}$ *est une suite convergente si et seulement si*

$$\lim_{n\to+\infty} |u_{n+1} - u_n|_p = 0$$

Autrement dit, $(u_n)_{n\geq 0}$ *est une suite de Cauchy.*

Maintenant, soit la série $\sum\limits_{k\geq 0} u_k, u_k \in \mathbb{Q}_p$. On sait que la série $\sum\limits_{k\geq 0} u_k$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ converge dans $\mathbb{Q}_p$. La série est converge absolument dans $\mathbb{Q}_p$ si et seulement si $\sum\limits_{k\geq 0} |u_k|_p$ converge dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.8 [27] *Soit la série* $\sum\limits_{k\geq 1} |u_k|_p$,$u_k \in \mathbb{Q}_p$*, on a*

$$\sum_{k\geq 1} |u_k|_p \quad \textit{converge dans } \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{k\geq 0} u_k \quad \textit{converge dans } \mathbb{Q}_p.$$

Proposition 1.9 [27] *Soit* $(u_n)_{n\geq}$ *est une suite dans* $\mathbb{Q}_p$*, si* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ *dans* $\mathbb{Q}_p$*, on a*

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} |u_n|_p = 0. \\ \textit{ou bien} \\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |u_n|_p = |u|_p \ \big(\textit{la suite } (|u_n|_p)_{n\geq 0} \textit{ est stationnaire à partir d'un rang } n_0\big). \end{cases}$$

Exemples.

1. Le fait que $v_p(n!) = \dfrac{n - S_p(n)}{p-1}$, où $S_p(n)$ désigne la somme des chiffres de l'écriture de n en base p. Il en résulte que $v_p(n!)$ tend vers l'infini, et $\lim\limits_{n\to+\infty} |n!| = \lim\limits_{n\to+\infty} p^{-v_p(n!)} = 0$, donc la série de terme général $n!$ converge, i.e la somme $\sum\limits_{n\geq 0} n!$ existe dans $\mathbb{Q}_p$.
2. $\sum\limits_{n\geq 0} p^n = \dfrac{1}{p-1}$ converge dans $\mathbb{Q}_p$, car $\lim\limits_{n\to+\infty} |p^n|_p = \lim\limits_{n\to+\infty} p^{-n} = 0$.
3. $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{p^n}$ diverge dans $\mathbb{Q}_p$, car $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{1}{p^n}\right|_p = \lim\limits_{n\to+\infty} p^n \neq 0$.

Propriétés Topologiques.

Soit $a \in \mathbb{Q}_p$ et $R > 0$, Nous posons

$D^+(a, R) = \{x \in \mathbb{Q}_p, |x - a|_p \leq R\}$: Le disque fermé de centre a et rayon R.

$D^-(a, R) = \{x \in \mathbb{Q}_p, |x - a|_p < R\}$: Le disque ouvert de centre a et rayon R.

$D(a, R)$: L'un ou l'autre de ces deux disques.

$C(a, R) = \{x \in \mathbb{Q}_p, |x - a|_p = R\}$: Le cercle dans $\mathbb{Q}_p$ de centre a et rayon R.

Soient $a, b \in \mathbb{Q}_p$ et $0 < r < R$, on a les propriétés suivantes.

Proposition 1.10 [27]

P.1 *Le cercle est un ensemble ouvert et fermé.*

P.2 *Un disque $D(a, r)$ est un ensemble à la fois ouvert et fermé.*

P.3 *Tout point b de $D(a, r)$ est un centre de $D(a, r)$.*
(Tout point d'un disque est un centre de ce disque.)

P.4 *Soient $D(a, r)$ et $D(b, r)$ deux disques de $\mathbb{Q}_p$, alors ils sont disjoints ou l'un est inclus dans l'autre.*

Proposition 1.11 [16] *Le corps $\mathbb{Q}_p$ possède les propriétés suivantes*

i) $\mathbb{Q}_p$ *complet et séparable.*

ii) $\mathbb{Q}_p$ *localement compact.*

iii) $\mathbb{Q}_p$ *n'est pas algébriquement clos.*

iv) $\mathbb{Q}_p$ *n'est pas sphériquement complet.*

1.4 $\mathbb{C}_p$-Corps des nombres complexes p-adiques

Soit p un nombre premier. Soit $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques muni de la valeur absolue $|x|_p = p^{-v_p(x)}$, et $v_p(\mathbb{Q}_p^*) = \mathbb{Z}$.
On peut montrer que la clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$ munie de l'unique valeur absolue p-adique $|.|_p$ prolongeant celle de $\mathbb{Q}_p$ n'est pas complet. On désigne par $\mathbb{C}_p$-le complété de $\left(\overline{\mathbb{Q}}_p, |.|_p\right)$ appelé le corps des nombres complexes p-adiques.

Proposition 1.12 [27] *Le corps $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clos pour tout p-premier.*

Pour faire convenablement de l'analyse, il est donc logique de considéré une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, que l'on note $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et qui n'est pas complet, donc nous avons besoin de le compléter pour former un plus grand corps complet algébriquement clôs noté $\mathbb{C}_p$ (pour plus de détail, voir [20]). On montre que l'on peut prolonger la valeur absolue à ce corps, qui possède aussi une valeur absolue p-adique, que l'on note toujours $|.|_p$.

Proposition 1.13 [32] *Le corps $\mathbb{C}_p$ possède les propriétés suivantes*

i) $\mathbb{C}_p$ *algébriquement clos.*

ii) $\mathbb{C}_p$ *n'est pas localement compact et n'est pas sphériquement complet.*

iii) l'ensemble des valeurs p-adiques de $\mathbb{C}_p$ est égal à $\{p^q,\ q \in \mathbb{Q}\}$.

iv) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p \subset \overline{\mathbb{Q}}_p \subset \mathbb{C}_p$.

1.5 Fonctions Analytiques d'un corps ultra-métrique

On note $\mathbb{K}$ un corps ultra-métrique complet, algébriqument clos et de caractéristique nulle muni d'une valeur absolue ultra-métrique $|.|$.

Définition 1.5 ***(fonction entière)***
On dit qu'une fonction $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ est entière si elle est de la forme

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x-a)^n, \ \ a_n \in \mathbb{K}$$

où x et a sont des nombres de $\mathbb{K}$.

Considérons maintenant une série entière de terme général $a_n x^n$, avec $a_n \in \mathbb{K}$. Cette série est donc convergente si et seulement si $a_n x^n$ tend vers zéro dans $\mathbb{K}$.

Remarque. *L'ensemble $A = \{r \in [0, +\infty[, |a_n| r^n \longrightarrow 0\}$ est un ensemble non vide.*

Définition 1.6 *Dans tous les cas, on note $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ (Formule d'Hadamard), le rayon de convergence de de la série entière $\sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$, si A est borné. Sinon on pose $R = +\infty$.*

Comme dans le cas classique, les propriétés de R sont aussi les mêmes dans le cas ultra-métrique, si R est non nul, la série converge pour x dans $\mathbb{K}$, tel que $|x| < R$, pour $|x| > R$ elle diverge. En général, on peut rien dire en ce qui concerne la convergence sur le cercle $|x| = R$. Le disque $D^-(0, R)$ est appelé le disque de convergence.

Exemples.

1. Soit $b \in \mathbb{K}$ non nul, la série $\sum\limits_{n\geq 0} b^n x^n$ pour disque de convergence $D^-(0, |b|^{-1})$ est sa somme est $\dfrac{1}{1-bx}$
2. La série logarithme $\log x = \sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}$ a pour disque de convergence $D^-(0, 1)$. En effet, le fait que $\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right|^{\frac{1}{n}} = |n|^{-\dfrac{1}{n}}$, donc le rayon de convergence est égal à $R = 1/\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\ |n|^{-\dfrac{1}{n}} = 1,\ \forall n \geq 1$.

Définition 1.7 *On dira qu'une fonction $f : D^+(0, r) \longrightarrow \mathbb{K}$ est analytique sur $D^+(a, r)$ pour tout r, $0 < r < R$, s'il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, telle que $|a_n|r^n \longrightarrow 0$, et pour tout $x \in D^+(0, r)$, on a $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$.*

Définition 1.8 *une fonction $f : D^-(0, r) \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite analytique sur $D^-(0, r)$ si pour tout $r, 0 < \rho < r$, la restriction de f à $D^+(0, \rho)$ est une fonction analytique sur $D^+(0, \rho)$.*

Proposition 1.14 [32] *Pour qu'une fonction $f : D^-(0, r) \longrightarrow \mathbb{K}$ soit analytique sur $D^-(0, r)$ il faut et il suffit qu'il existe une suite unique $(a_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ satisfaisant $|a_n|r^n \longrightarrow 0$ pour $r, 0 < r < R$, et telle que pour $x \in D^-(0, r)$, on a $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$.*

Notations. *$\mathcal{A}(\mathbb{K})$ est l'anneau des fonctions entières dans $\mathbb{K}$ (c-à-d les séries de Taylor de rayon de convergence infini).*

De même, on note $\mathcal{A}(D^-(0, R))$ l'ensemble des fonctions analytiques dans $D^-(0, R)$. i.e une $\mathbb{K}$-algébre des séries formelles $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ convergentes dans $D^-(0, R)$.

Théorème 1.5 [27] *Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathcal{A}(D^-(0, R))$. Alors f est bornée dans $D^-(0, R)$ si et seulement si la suite $(|a_n|R^n)_{n\geq 0}$ est aussi bornée, c'est-à-dire si $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup |a_n|R^n < +\infty$. De plus, si f est bornée, alors $\|f\|_{D^-(0,R)} = \sup\limits_{n\geq 0} |a_n|R^n$.*

Théorème 1.6 [20] [32] ***(Dérivées des fonctions analytiques)***

i) L'ensemble des fonctions analytiques sur $D^+(0,R)\big($ resp. $D^-(0,R)\big)$ noté $\mathcal{A}(D^+(0,R))$ $\big($resp. $\mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

ii) Si $f(x)=\sum\limits_{n\geq 0}a_nx^n \in \mathcal{A}(D^+(0,R))\big($ resp. $\mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$ est continue et dérivable sur $D(0,R)$ alors sa dérivée f' appartient aussi à $\mathcal{A}(D^+(0,R))\big($ resp. $\mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$ tel que $f'(x)=\sum\limits_{n\geq 1}na_nx^{n-1}$.

Plus généralement, si $R>0$, alors la série f est une fonction indéfiniment dérivable sur le disque de convergence de f, et on a $f^{(k)}(x)=\sum\limits_{n\geq k}C_n^k\,a_nx^{n-k}$.

iii) Le rayon de convergence de f' est égal au rayon de convergence de f.

Proposition 1.15 [32] *Les fonctions analytiques sur un disque fermé de $\mathbb{K}$ (ex : $\mathbb{K}=\mathbb{C}_p$) forment un anneau commutatif, intègre, stable par dérivation (ce qui n'est pas le cas dans $\mathbb{C}$).*

1.5.1 Zéros des fonctions analytiques

Définition 1.9 *Soit $f\in\mathcal{A}(D^-(0,R))$, pour chaque $x\in D^-(0,R)$ on a $f(x)=\sum\limits_{n\geq 0}a_nx^n$. De plus, si $f(\alpha)=0$, α est un zéro et il existe $\beta\in\mathbb{N}^*$ unique tel que $f(x)=(x-\alpha)^\beta g(x)$, $\forall x\in D^-(0,R)$, où $g\in D^-(0,R)$ et $g(\alpha)\neq 0$.*

Proposition 1.16 [32] *Une fonction analytique non nulle sur un disque vérifie le principe de zéros isolés, c'est à dire, que si b est un zéro de f, il existe un disque de centre b, de rayon assez petit, où la fonction f n'admet comme zéro que b.*

Définition 1.10 *Soit $f\in\mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $f\in\mathcal{A}(D^-(0,R))$) et soit $\alpha\in\mathbb{K}$ ($\alpha\in D^-(0,R)$). Soit $r\in]0,+\infty[$ tel que $D(\alpha,r)\subset\mathbb{K}$ $\Big($resp. soit $r\in]0,R[$ tel que $D^+(\alpha,r)\subset D^-(0,R)\Big)$ et $f(x)=\sum\limits_{n\geq q}b_n(x-\alpha)^n, \forall x\in D(\alpha,r)$ et $b_q\neq 0,\ q>0$. On dit dans ce cas, que α est un zéro de f d'ordre de multiplicité q.*

Si f admet α comme zéro d'ordre q, on posera $w_\alpha(f)=q$. Si $f(\alpha)\neq 0$, on posera simplement $w_\alpha(f)=0$.

Proposition 1.17 [10] ***(égalité de Cauchy)***

Soient $0<r<R$ et $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\in\mathcal{A}(D^+(0,r))$ telles que $|a_n|r^n$ ait pour limite 0, L'application

$$f\longmapsto |f|(r)=\max_{n\geq 0}|a_n|r^n \ \ \textit{\textbf{(module maximun)}}$$

est une norme ultra-métrique sur $\mathcal{A}(D^+(0,r))$*, et on a*

$$\max_{x\in D^+(0,r)}|f(x)| \quad = \quad |f|(r)$$

cette relation est appelée égalité de Cauchy.

Le graphe de la fonction $\log r \mapsto \log|f|(r)$ est appelé *polygone de valuation* de f.

Proposition 1.18 *L'espace* $\mathcal{A}(D^+(0,R))$ *que l'on munit de la norme décrit plus haut est un espace complet. Autrement dit, il s'agit d'un espace de Banach ultra-métrique.*

Proposition 1.19 [20] [19] *On suppose que* $f \in \mathcal{A}(D^+(0,r))$, $0 < r < R$*, alors*

i) La fonction $|f|(r)$ *est croissante.*

ii) La fonction $|f|(r)$ *est continue.*

iii) Si la fonction f *a un zéro* b *dans le disque* $D^+(0,r)$*, la fonction* $|f|(r)$ *est strictement croissante si* $r > |b|$.

Théorème 1.7 [3] [10] ***(spécificité ultra-métrique)***
Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$*, pour tout* $r \in]0,+\infty[$ $\big($*resp.* $r \in]0,R[\big)$*. On a*

$$|f'|(r) \leq \frac{1}{r}|f|(r).$$

Démonstration.

Il suffit de montrer que pour $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$

$$\log\Big|\frac{f'}{f}\Big|(r) \leq -\log r, \quad \forall r \in]0,+\infty[\ \big(resp.\ \forall r \in]0,R[\big).$$

En effet.

Si $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$, on a $f'(x) = \sum\limits_{n\geq 0} n a_n x^{n-1}$, d'où

$$\begin{aligned} |f'|(r) = \max_{n\geq 0}|n||a_n|r^{n-1} \quad &= \quad \frac{1}{r}\max_{n\geq 0}|n||a_n|r^n, \ \ \forall r \in]0,+\infty[\ \big(resp.\ \forall r \in]0,R[\big) \\ &\leq \quad \frac{1}{r}\max_{n\geq 0}|a_n|r^n = \frac{1}{r}|f|(r), \ \ \forall r \in]0,+\infty[\ \big(resp.\ \forall r \in]0,R[\big) \end{aligned}$$

d'où

$$\log\Big|\frac{f'}{f}\Big|(r) \leq -\log r, \quad \forall r \in]0,+\infty[\ \big(resp. \forall r \in]0,R[\big).$$

Ce qui termine la démonstration $\square$

Théorème 1.8 [10] *Soit* $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $a_n \in \mathbb{K}$, $\forall x \in D^+(0,R)$ *appartenant à* $\mathcal{A}(D^+(0,R))$, *et* s *un indice tel que* $|f|(r) = |a_s|r^s$ *et* $|a_j|r^j < |a_s|r^s$ *pour* $j > s$ *(le plus grande indice) alors*

i) Si $s \geq 1$, *alors la fonction* f *a exactement* s *zéros dans* $D^+(0,R)$ *compte les multiplicités.*

ii) La fonction f *n'a aucun zéro dans* $D^+(0,R)$ *si et seulement si* $s = 0$ *et sa valeur absolue est constante dans ce disque.*
Soit l *le plus petit indice tel que* $|f|(r) = |a_l|r^l$ *et* $|a_j|r^j < |a_l|r^l$ *pour* $j < l$ *alors*

a) l *le nombre des zéros de* f *dans* $D^-(0,R)$.

b) $s - l$ *le nombre des zéros de* f *sur le cercle* $C(0,R)$.

Nous allons maintenant regarder l'image d'un disque par une fonction analytique.

Proposition 1.20 [10] [18] *Soit* $D(0,r), 0 < r < R$ *un disque de* $\mathbb{K}$, *et* f *une fonction analytique non constante sur* $D(0,r)$. *L'image de* $D(0,r)$ *par* f *est un disque de* $\mathbb{K}$, *de même nature que* $D(0,r)$ *(circonférence ou non).*

1.5.2 Polygone de Valuation

Soit la fonction analytique dans $D^+(0,r), 0 < r < R$, représentée par la suite convergente $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $a_0 \neq 0$ et nous voyons ce que le résultat précédent nous donne sur la fonction

$$\begin{aligned} \varphi_f : I =]-\infty, \log R[\ &\longrightarrow \ \mathbb{R} \\ \log r \ &\longrightarrow \ \varphi_f(\log r) = \log|f|(r) = \max_{n\geq 0}\{\log|a_n| + n\log r\} \end{aligned}$$

Pour chaque n nous construisons le graph $\gamma_n(\log r)$ qui décrit $\log|a_n| + n\log r$ comme fonction de $\log r$. Soit $\gamma_n(r,f)$ le bord de l'intersection des demi-plans situés sous les droites $\gamma_n(\log r)$ de la pente n. Alors dans chaque segement $[\log r_k, \log r_{k+1}]$, $0 < \log r_k < \log r_{k+1} < R$, il existe un nombre fini de $\gamma_n(\log r)$ qui interviennent dans $\gamma_n(r,f)$. On déduit que $\gamma_n(r,f)$ est une ligne polygonale qui s'appelle le *polygone de valuation* de la fonction f. Nous appellons le point $\log r > 0$ où $\gamma_n(r, f)$ un sommet des points critiques de f. Chaque segement fini $[\log r_k, \log r_{k+1}]$ ne contient qu'un nombre fini de points critiques de f, et on sait que si $\log r$ n'est pas un point critique de f, alors $|f(x)| = a^{-\gamma_n(r,f)}, a > 0$, et s'il est un point critique, on a $\log |a_n| + n \log r$ atteints leurs maximum au moins à deux valeurs de n, alors $|f|(r) = a^{-\gamma_n(r,f)}, a > 0$. Donc

$$\log |f|(r) = \max_{n\geq 0}\{\log |a_n| + n \log r\}.$$

Proposition 1.21 [11] [32] *La fonction φ_f vérifient les propriétés suivantes*

i) C'est une fonction convexe, croissante et continue affine par morceaux.

ii) Si f a un zéro b dans $D^-(0, r), 0 < r < R$, la fonction φ_f est strictement croissante pour $\log r > \log |b|$

iii) φ_f admet des dérivées à droite $\dfrac{d^+\varphi_f}{d(\log r)}$ et à gauche $\dfrac{d^-\varphi_f}{d(\log r)}$ en tout point $\log r \in I$ *et on a*

$$\frac{d^+\varphi_f}{d(\log r)} = s \text{ le plus grande entier t.q} : \varphi_f(\log r) = \log |a_s| + s \log r$$

où s est le nombre des zéros de f dans le disque fermé $D^+(0, r)$.

$$\frac{d^-\varphi_f}{d(\log r)} = l \text{ le plus petit entier t.q} : \varphi_f(\log r) = \log |a_l| + l \log r$$

où l est le nombre des zéros de f dans le disque ouvert $D^-(0, r)$.

Donc $s - l$ est le nombre des zéros de f sur le cercle $C(0, r)$.

Exemples.

1. Soit $\mathbb{K}$ un corps ultra-métrique muni d'une valeur absolue ultra-métrique $|.|$.

   On considère un polynôme

   $$P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n, \quad a_i \in \mathbb{K}, i = 0, ..., n \text{ et } a_0, a_n \neq 0$$

   On suppose que P est scindé dans $\mathbb{K}$, on peut écrire

   $P(x) = a_n \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i),\ \alpha_i \in \mathbb{K}, \forall i = 1, ..., n,$ où α_i sont des zéros de P

pour r assez grand, tels que $|\alpha_i| \leq r, \forall i$, on a donc

$$\begin{aligned} |P|(r) &= |a_n|\prod_{i=1}^{n}|(x-\alpha_i)|(r) \\ &= |a_n|\prod_{i=1}^{n}\max(|x|,|\alpha_i|) = |a_n|\prod_{i=1}^{n}\max(r,|\alpha_i|) = |a_n|r^n \end{aligned}$$

donc le polygone de valuation de P donne,

$$\log|P|(r) = \log|a_n| + n\log r$$

et $l = s = n$, donc toutes les racines de P sont dans le disque $D^+(0, r)$.

2. La fonction exponentielle n'a aucun zéro.

   En effet, la fonction $\exp x = \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$, pour tout $x \in D^-(0, p^{-\frac{1}{p-1}})$ (disque de convergence)

   On pose $|\exp|(r) = \max_{n\geq 0}|a_n|r^n = \max_{n\geq 0}|\frac{1}{n!}|r^n$

   i) <u>Pour $n > 0$ et $0 < r < p^{-\frac{1}{p-1}}$</u>, on a

   $$|a_n|r^n = |\frac{1}{n!}|r^n = p^{\frac{n-S_p(n)}{p-1}}r^n < p^{\frac{n-S_p(n)}{p-1}}p^{-\frac{n}{p-1}} = p^{-\frac{S_p(n)}{p-1}} < 1,\ \forall n > 0.$$

   ii) <u>Pour $n = 0$</u>, on a $|a_0| = 1$.

   Donc $\log|\exp|(r) = \log|a_0| = 0$. D'où $s = l = 0$, ceci signifie que la fonction exponentielle n'a aucun zéro.

Chapitre 2

Théorie de Nevanlinna ultra-métrique

Parmi les méthodes utilisées dans les problèmes de distributions de valeurs, on cite la *Thèorie de Nevanlinna ultra-métrique.* Cette théorie s'exprime par deux théorèmes fondamentaux. Dans ce chapitre, nous s'intéresse de la version ultra-métrique de la *formule de Jensen* qu'on utiliser pour obtenir le premier théorème fondamental de Nevanlinna ; ce théorème fournit la taille du nombre de zéros. Le deuxième théorème est l'un des théorèmes les plus utilisés dans la théorie de distribution de valeurs.

2.1 Fonctions méromorphes d'un corps ultra-métrique

Nous considérons dans cette section les fonctions méromorphes qui sont définie sur $\mathbb{K}$ (resp. sur un disque ouvert $D^{-}(0,R)$) sauf aux points de singularités isolées qui sont des pôles. Une telle fonction f peut s'écrire $f = \dfrac{h}{g}$ où $h, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $D^{-}(0,R)$).

Notations. On note $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{M}(D^{-}(0,R))$) le corps des fonctions méromorphes dans $\mathbb{K}$ (resp. dans $D^{-}(0,R)$), c'est-à-dire le corps des fractions de $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. de $\mathcal{A}(D^{-}(0,R))$).

La valeur absolue $|.|(r)$ qui définie dans $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\Big($resp. dans $\mathcal{A}(D^-(0,R))\Big)$ quand $r \in]0,+\infty[$ (resp. $r \in]0,R[$), s'étend d'une manière naturelle à $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\Big($resp. à $\mathcal{M}(D^-(0,R))\Big)$, en posant $|f|(r) = \dfrac{|h|(r)}{|g|(r)}$ quand $h, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\Big($resp. $h, g \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\Big)$.

Le théorème suivant énonce une spécificité ultra-métrique.

Théorème 2.1 [3] [8] ***(spécificité ultra-métrique)***
Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$) pour tout $r \in]0,+\infty[$ (resp. $r \in]0,R[$), on a

$$\frac{|f'|(r)}{|f|(r)} \leq \frac{1}{r}$$

Démonstration.
Si l'on écrit $f = \dfrac{h}{l}$ avec $h, l \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $h, l \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$ sans zéros communs, pour $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r \in]0,R[\big)$, on a

$$\frac{f'}{f} = \frac{h'l - hl'}{hl}$$

$$\Big|\frac{f'}{f}\Big|(r) = \Big|\frac{h'l - hl'}{hl}\Big|(r) = \frac{|h'l - hl'|(r)}{|hl|(r)}$$

et comme $\quad |h'l - hl'|(r) \leq \max\big\{|h'l|(r), |hl'|(r)\big\}$, on a

$$\frac{|f'|(r)}{|f|(r)} \leq \max\Big\{\frac{|h'|(r)|l|(r)}{|h|(r)|l|(r)}, \frac{|h|(r)|l'|(r)}{|h|(r)|l|(r)}\Big\} \leq \max\Big\{\frac{|h'|(r)}{|h|(r)}, \frac{|l'|(r)}{|l|(r)}\Big\}.$$

On sait que $\dfrac{|h'|(r)}{|h|(r)} \leq \dfrac{1}{r}$ et $\dfrac{|l'|(r)}{|l|(r)} \leq \dfrac{1}{r}$. D'où l'inégalité. $\square$

2.1.1 Formule de Jensen

Pour $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0, et pour $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r \in]0,R[$ $\big)$ et $\alpha \in D^+(0,r)$. On note

$$z(\rho, f) = \sum_{\substack{|\alpha|=\rho \\ f(\alpha)=0}} \max\big(0, w_\alpha(f)\big) \;\text{ et }\; p(\rho, f) = z(\rho, \frac{1}{f})$$

c'est-à-dire que $z(\rho, f)$ $\big($resp. $p(\rho, f)\big)$ est le *nombre de zéros* (resp. *pôles*) de f sur le cercle $C(0, \rho)$, chaque zéro (resp. pôle) est compté autant de fois que son ordre de multiplicité. $w_\alpha(f)$ est l'entier relatif i_α de $\mathbb{Z}$, tel que $f(x) = \sum\limits_{i \geq i_\alpha} a_i(x-\alpha)^i$ avec $a_{i_\alpha} \neq 0$.

La formule qu'on donne dans le théorème suivant est la version ultra-métrique de la *formule de Jensen* qu'on utiliser assez fréquemment tout au long de notre travail.

Théorème 2.2 [1] [5] *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$ $\big)$, *telle que* $f(0) \neq 0, \infty$ *et pour* $r \in]0, +\infty[$ $\big($*resp.* $r \in]0, R[\big)$, *on a*

$$\log|f|(r) = \log|f(0)| + \sum_{|\alpha| \leq r} \Big\{ z(|\alpha|, f) - z(|\alpha|, \frac{1}{f}) \Big\} \log \frac{r}{|\alpha|}.$$

Démonstration.

La démonstration de cette formule est facile elle est conséquence des propriétés de *polygone de valuation.*

1. Le point de départ ici est le fait que $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$ $\big)$, telle que $f(0) \neq 0$. Le *polygone de valuation* de f donne pour $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$

$$\log|f|(r) \;=\; \log|f(0)| + \sum_{|\alpha| \leq r} z(|\alpha|, f) \log \frac{r}{|\alpha|} \qquad (2.1)$$

Pour montrer l'égalité (2.1), soient $0 < r_1 < r_2 < ... < r_k < ... < r$ et $0 = n_0 < n_1 < n_2 < ... < n_k < ... < n$.

On pose $\log|f|(r) = \max\limits_{n \geq 0}\{\log|a_n| + n \log r\} =$, on a

$$\begin{array}{rrcl}
0 < r_1 : & \log|f|(r_1) & = & \log|f(0)| = \log|a_0| \\
r_1 < r_2 : & \log|f|(r_2) & = & \log|a_{n_1}| + n_1 \log r \\
 & & \vdots & \\
 & & \vdots & \\
r_{k-1} < r_k : & \log|f|(r_k) & = & \log|a_{n_{k-1}}| + n_{k-1} \log r \\
r_k < r : & \log|f|(r) & = & \log|a_{n_k}| + n_k \log r.
\end{array}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\log|f|(r) &= \Big[\log|f|(r)-\log|f|(r_k)\Big]+\Big[\log|f|(r_k)-\log|f|(r_{k-1})\Big]+...+\Big[\log|f|(r_2)\\
&- \log|f|(r_1)\Big]+\log|f|(r_1)\\
&= \Big[\log|a_{n_k}|+n_k\log r-\log|a_{n_k}|-n_k\log r_k\Big]+\Big[\log|a_{n_{k-1}}|+n_{k-1}\log r_k\\
&- \log|a_{n_{k-1}}|-n_{k-1}\log r_{k-1}\Big]+...+\Big[\log|a_{n_1}|+n_1\log r_2-\log|a_{n_1}|\\
&- n_1\log r_1\Big]+\log|f(0)|\\
&= n_k\log\frac{r}{r_k}+n_{k-1}\log\frac{r_k}{r_{k-1}}+...+n_1\log\frac{r_2}{r_1}+\log|f(0)|\\
&= n_k\log\frac{r}{r_k}+n_{k-1}(\log\frac{r}{r_{k-1}}-\log\frac{r}{r_k})+...+n_1(\log\frac{r}{r_1}-\log\frac{r}{r_2})+\log|f(0)|\\
&= (n_k-n_{k-1})\log\frac{r}{r_k}+(n_{k-1}-n_{k-2})\log\frac{r}{r_{k-1}}+...+(n_2-n_1)\log\frac{r}{r_2}\\
&+ (n_1-n_0)\log\frac{r}{r_1}+\log|f(0)|\\
&= \sum_{i=1}^{k}(n_i-n_{i-1})\log\frac{r}{r_i}++\log|f(0)|
\end{aligned}$$

où (n_i-n_{i-1}) le nombre des zéros de f sur le cercle $C(0,r_i)$

donc $\log|f|(r)=\log|f(0)|+\sum\limits_{0<|\alpha|\le r} z(|\alpha|,f)\log\dfrac{r}{|\alpha|}$.

2. Soient $f\in\mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f\in\mathcal{M}(D^-(0,R))$), $f(0)\neq 0,\infty$.

   On pose $f=\dfrac{h}{g}$ où $h,g\in\mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $h,g\in\mathcal{M}(D^-(0,R))$). Soit α (resp. β) un zéro de h (resp. de g), on a

$$\begin{aligned}
\log|f|(r) &= \log\Big|\frac{h}{g}\Big|(r)\\
&= \log|h|(r)-\log|g|(r)\\
&= \log|h(0)|+\sum_{0<|\alpha|\le r}z(|\alpha|,h)\log\frac{r}{|\alpha|}-\log|g(0)|-\sum_{0<|\beta|\le r}z(|\beta|,g)\log\frac{r}{|\beta|}\\
&= \log\Big|\frac{h(0)}{g(0)}\Big|+\sum_{0<|\alpha|\le r}z(|\alpha|,f)\log\frac{r}{|\alpha|}-\sum_{0<|\beta|\le r}z(|\beta|,\frac{1}{f})\log\frac{r}{|\beta|}\\
&= \log|f(0)|+\sum_{0<|\alpha|\le r}z(|\alpha|,f)\log\frac{r}{|\alpha|}-\sum_{0<|\beta|\le r}z(|\beta|,\frac{1}{f})\log\frac{r}{|\beta|}.
\end{aligned}$$

□

2.2 Premier Théorème Fondamental de Nevanlinna ultra-métrique

Pour toute $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ non nulle, et pour $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $\forall r \in]0,R[\big)$, on pose

$$Z(r,f) = \sum_{\substack{|\alpha|\leq r \\ w_\alpha(f)>0}} z(|\alpha|,f)\ \log\frac{r}{|\alpha|}.$$

La *fonction de comptage des zéros* de f dans $D^+(0,r)$ avec un *ordre de multiplicité.*

$$\overline{Z}(r,f) = \sum_{|\alpha|\leq r} \log\frac{r}{|\alpha|}$$

La *fonction de comptage des zéros* de f dans $D^+(0,r)$ *sans prendre en compte les multiplicités.*

$$N(r,f) = \sum_{|\alpha|\leq r} p(|\alpha|,f)\ \log\frac{r}{|\alpha|} = Z(r,\frac{1}{f})$$

La *fonction de comptage des pôles* de f dans $D^+(0,r)$ avec *ordre de multiplicité.*

Par les notations précédentes, on définit une autre version ultra-métrique plus simple de la *formule de Jensen* qui déjà bien cunnue dans le théorème 2.2.

Proposition 2.1 [5]***(autre version-Formule de Jensen)***
Soit $R > 0$, et soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors

$$\log|f|(r) \quad = \quad Z(r,f) - N(r,f) + \log|f(0)|,\ \ \forall r \in]0,+\infty[\ \big(resp.\ \forall r \in]0,R[\big) \tag{2.2}$$

Remarque. *Pour $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$ et $f(0) \neq 0$, on a*

$$\log|f|(r) = Z(r,f) + \log|f(0)|,\ \ \forall r \in]0,+\infty[\ \big(resp.\ \forall r \in]0,R[\big)$$

Qui s'écrit $Z(r,f) \leq \log|f|(r)$ et fournit une majoration du nombre de solution de l'équation $f(x) = 0$ dans le disque $D^+(0,r)$.

2.2.1 Fonction Caractéristique de Nevanlinna

Si pour $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$) et r assez grand, la fonction $\log r \mapsto \log|f|(r)$ est positive, convexe et croissante, cette propriété n'est plus vraie pour les fonctions $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$)
Le problème est donc de construire une fonction $r \mapsto T(r,f)$ qui conserve ces propriétés et prolonge $\log|f|(r)$, quand f est analytique.

On définit

$$m(r,f) = \log^+|f|(r) = \max\big\{0, \log|f|(r)\big\}.$$

La *fonction de compensation.* On a aussi

$$\log|f|(r) = \log^+|f|(r) - \log^+\left|\frac{1}{f}\right|(r) = m(r,f) - m\Big(r, \frac{1}{f}\Big).$$

Enfin, on définit la *fonction de Nevanlinna* (appelée aussi la *fonction caractéristique*) de f, quand f n'a ni zéro ni pôle en 0, par

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f).$$

Remarque. *Remarquons que les fonctions $m(r,f), N(r,f)$ et $T(r,f)$ ne changent pas à une constante près, si on change l'origine. Par conséquent, si une fonction f admet un zéro ou un pôle en 0, on peut réaliser un changement d'origine pour redéfinir les fonctions précédentes.*

Tout au long de ce travail, on supposera que la fonction f intervenant dans les fonctions $m(r,f), N(r,f)$ et $T(r,f)$ n'a pas de zéro en 0, si $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$ et n'a ni zéro ni pôle en 0, si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$.

On va essayer de donner une forme plus simple que la formule de Jensen (2.2).

$$\begin{aligned}
\log|f(0)| &= N\big(r,f\big) - Z\big(r,f\big) + \log|f|(r), \quad \forall r \in]0,+\infty[\ \big(resp.\ \forall r \in]0,R[\big) \\
&= N\big(r,f\big) - N\Big(r,\frac{1}{f}\Big) + m\big(r,f\big) - m\Big(r,\frac{1}{f}\Big), \ \forall r \in]0,+\infty[\ \big(resp.\ \forall r \in]0,R[\big) \\
&= T\big(r,f\big) - T\Big(r,\frac{1}{f}\Big), \ \forall r \in]0,+\infty[\ \big(resp.\ \forall r \in]0,R[\big).
\end{aligned}$$

Donc la formule (2.2) devient

$$T\Big(r,\frac{1}{f}\Big) = T\big(r,f\big) - \log|f(0)|, \ \forall r \in]0,+\infty[\ \big(resp.\ \forall r \in]0,R[\big) \tag{2.3}$$

Avant de donner quelques propriétés liées à la *Théorie de Nevanlinna*, on introduira les notations suivantes.

Notations. Soit ϕ, φ et ψ trois fonctions réelles définies dans un intervalle $I =]0,+\infty[$ $\big($resp. $I =]0,R[\big)$ et soit $r \in I$. S'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $\phi(r) \le \psi(r) + c\varphi(r)$, on écrira simplement $\phi(r) \le \psi(r) + O(\varphi(r))$. Si $|\phi(r) - \psi(r)|$ est bornée par une fonction de la forme $c\varphi(r)$, on écrira $\phi(r) = \psi(r) + O(\varphi(r))$.

Si $\lim\limits_{r\to+\infty}|\phi(r) - \psi(r)| = 0$ $\big($resp. $\lim\limits_{r\to R}|\phi(r) - \psi(r)| = 0\big)$, on écrira $\phi(r) = \psi(r) + o(\varphi(r))$.

Exemple. Soit $P(x) = \sum\limits_{n=1}^{q} a_n x^n \in \mathbb{K}[X]$. Alors $Z(r,P) = deg(P)\log r + O(1), \ \forall r \in]0,+\infty[$. En effet, soit $\big\{\alpha_1, ..., \alpha_t\big\}$ l'ensemble des zéros de P où $t \le q$, et soient $s_1, ..., s_t$ les ordres de multiplicité respectifs. Supposons $A = \max\limits_{1\le j\le t}|\alpha_j|$. Si $r \in]0,+\infty[$, on a

$$Z(r,P) = \sum_{j=1}^{t} s_j \log\frac{r}{|\alpha_j|} = \sum_{j=1}^{t} s_j \log\frac{r}{A} + \sum_{j=1}^{t} s_j \log\frac{A}{|\alpha_j|} = \sum_{j=1}^{t} s_j(\log r - \log A) + \sum_{j=1}^{t} s_j \log\frac{A}{|\alpha_j|}$$

mais $\sum\limits_{j=1}^{t} s_j = q$ et $\sum\limits_{j=1}^{t} s_j(\log\dfrac{A}{|\alpha_j|} - \log A) = O(1)$. Par conséquent

$$Z(r,P) = q\log r + O(1) = deg(P)\log r + O(1).$$

Proposition 2.2 [1] *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ n'ayant ni zéros ni pôles en 0. Il est facil de vérifier que*

$$0 \le Z(r,f) \le T(r,f) \ \ et \ \ 0 \le N(r,f) \le T(r,f), \ \ \forall r \in]0,+\infty[\ \big(resp.\ \forall r \in]0,R[\big).$$

Les propriétés arithmétiques sont assez semblables à celles connues dans $\mathbb{C}$. Toutefois les deux propriétés 1.i) et 3.iii) si dessous sont spécifiques à l'analyse ultra-métrique.

Théorème 2.3 [3] [5] *Soient* $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f, g \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ *n'ayant ni zéro ni pôle en* 0. *Alors*

1. *i)* $m(r, f+g) \le \max\big\{m(r,f), m(r,g)\big\} + O(1),\ \forall r \in]0,+\infty[\ \ \big($*resp.* $\forall r \in]0,R[\big)$

   ii) $m(r, f-a) = m(r,f) + O(1),\ \forall a \in \mathbb{K},\ \forall r \in]0,+\infty[\ \ \big($*resp.* $\forall r \in]0,R[\big)$

   iii) $m(r, fg) \le m(r,f) + m(r,g) + O(1),\ \forall r \in]0,+\infty[\ \ \big($*resp.* $\forall r \in]0,R[\big)$

   iv) $m(r, af) = m(r,f) + O(1), \forall a \in \mathbb{K},\ \forall r \in]0,+\infty[\ \ \big($*resp.* $\forall r \in]0,R[\big)$.

2. *i)* $N(r, f+g) \le N(r,f) + N(r,g) + O(1)\ \ \forall r \in]0,+\infty[\ \ \big($*resp.* $\forall r \in]0,R[\big)$

   ii) $N(r, fg) \le N(r,f) + N(r,g) + O(1)\ \ \forall r \in]0,+\infty[\ \ \big($*resp.* $\forall r \in]0,R[\big)$.

3. *i)* $T(r, fg) \le T(r,f) + T(r,g) + O(1),\ \forall r \in]0,+\infty[\ \ \big($*resp.* $\forall r \in]0,R[\big)$

   ii) $T(r, f+g) \le T(r,f) + T(r,g) + O(1),\ \forall r \in]0,+\infty[\ \ \big($*resp.* $\forall r \in]0,R[\big)$

   De plus, si $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f, g \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$

   iii) $T(r, f+g) \le \max\Big\{T(r,f), T(r,g)\Big\} + O(1),\ \forall r \in]0,+\infty[\ \ \big($*resp.* $\forall r \in]0,R[\big)$

Démonstration.

1. Puisque $|.|(r)$ est une valeur absolue ultra-métrique pour $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. Pour $\mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$, elle satisfaite l'inégalité triangulaire ultra-métrique, c'est-à-dire que

$$|f+g|(r) \le \max\{|f|(r), |g|(r)\}$$

et aussi

$$|fg|(r) = |f|(r)|g|(r).$$

Par conséquent, grâce à la croissance de la fonction logarithmique, on déduit sans difficulté $i), iii)$ et $iv)$.

Si $|f|(r) > |a|$, pour r assez grand (resp. assez proche de R), on a $|f-a|(r) = \max\big\{|f|(r), |a|\big\} = |f|(r)$, d'où $m(r, f-a) = m(r,f)$. Alors que, si $|f|(r) \le |a|$, on a $|f-a|(r) \le \max\big\{|f|(r), |a|\big\} \le |a|$, ce qui entraine $|m(r, f-a) - m(r,f)| \le$

$\{m(r, f-a), m(r, f)\} \leq \log^+ |a|$, et ainsi $m(r, f-a) = m(r, f) + O(1)$, alors on a $ii)$.

2. Les inégalités $i)$ et $ii)$ sont vérifies tant que l'ordre de pôles de $f+g$ (ou fg) au point x_0 est au plus égal à la somme d'ordres de pôles de f et g au point x_0.

   D'où

$$\begin{aligned} Z(r, \frac{1}{f+g}) &\leq Z(r, \frac{1}{f}) + Z(r, \frac{1}{g}) \\ Z(r, \frac{1}{fg}) &\leq Z(r, \frac{1}{f}) + Z(r, \frac{1}{g}). \end{aligned}$$

3. $i)$ d'après l'inégalité $i)$ de 1 et par 2, on déduit que

$$\begin{aligned} m(r, f+g) + N(r, f+g) &\leq \max\{m(r, f), m(r, g)\} + N(r, f) + N(r, g) + O(1) \\ &\leq m(r, f) + m(r, g) + N(r, f) + N(r, g) + O(1) \end{aligned}$$

   d'où $\quad T(r, f+g) \leq T(r, f) + T(r, g) + O(1)$.

   $ii)$ De même, d'après la propriété $iii)$ de 1, on déduit que

$$m(r, fg) + N(r, fg) \leq m(r, f) + m(r, g) + N(r, f) + N(r, g) + O(1).$$

   D'où $\quad T(r, fg) \leq T(r, f) + T(r, g) + O(1)$.

   $iii)$ Puisque $N(r, f) = N(r, g) = 0$, l'inégalité est immédiatement déduite de la propriété $i)$ de 1 . □

Comme corollaire du théorème 2.3, on a

Corollaire 2.1 [10] *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))\big)$, $f(0) \neq 0, \infty$, *on a*

$$T(r, \frac{1}{f}) = T(r, f) + O(1), \;\; \forall r \in]0, +\infty[\;\big(\textit{resp.}\, \forall r \in]0, R[\big)$$

et si $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ *et* $f(0) \neq a$. *On a*

$$\begin{aligned} T(r, af) &= T(r, f) + O(1), \;\; \forall r \in]0, +\infty[\;\big(\textit{resp.}\, \forall r \in]0, R[\big) \\ \textit{et}\;\; T(r, f-a) &= T(r, f) + O(1), \;\; \forall r \in]0, +\infty[\;\big(\textit{resp.}\, \forall r \in]0, R[\big). \end{aligned}$$

Démonstration. Sachant que les pôles de f, af et $f - a$ sont les même, les égalités sont évidentes d'aprés $i) - ii)$, $iv)$ de $1, 2$ et par 3 du théorème 2.3.

Corollaire 2.2 [8] *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^{-}(0,R))\big)$ telle que $f(0) \neq 0, \infty$. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{K}$, tels que $ad - bc \neq 0$. Soit $\tau(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, on suppose que $\tau(0) \neq 0, \infty$. Alors*

$$T(r, \tau \circ f) = T(r, f) + O(1), \quad \forall r \in]0, +\infty[\ \big(resp. \ \forall r \in]0, R[\big).$$

Commentaire. *Le corollaire précédent signifie en quelque sorte que la fonction de Nevanlinna est invariable par τ (les fonctions de Mobius).*

Le théorème suivant donne l'analogue p-adique du *premier théorème fondamental de Nevanlinna*, ce théorème se démontre de façon analogue au cas classique (voir [31]) et il est une conséquence de la *formule de Jensen.*

Question. *Quelle-est "la taille" de ensemble des points $x \in \mathbb{K}$ où la fonction f prend la valeur $a \in \mathbb{K}$ ou des valeurs "proches" de a ?*

Théorème 2.4 [3] ***(Premier Théorème Fondamental de Nevanlinna)***
Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^{-}(0,R))\big)$ tels que $f(0) \neq 0, \infty$, pour tout $a \in \mathbb{K}$ et $f(0) \neq a$, on a

$$T\Big(r, \frac{1}{f-a}\Big) \;=\; T\big(r, f\big) + O(1), \quad \forall r \in]0, +\infty[\ \big(resp. \ \forall r \in]0, +\infty[\big) \tag{2.4}$$

Démonstration.

La démonstration est facile, elle est une conséquence des formules du corollaire 2.2.

Commentaire. *Comme la fonction $T(r, f)$ ne dépend pas de a, on peut dire que la fonction f prend chaque valeur a avec une même multiplicité.*

On a besoin de la notation suivante.

Notation. Pour tout nombre fini $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et $f(0) \neq a$. On note $m(r, a)$, $N(r, a)$ et $T(r, a)$ au lieu de $m\Big(r, \dfrac{1}{f-a}\Big)$, $N\Big(r, \dfrac{1}{f-a}\Big)$ et $T\Big(r, \dfrac{1}{f-a}\Big)$ respectivement.

Suite à cette notation, le théorème 2.4 de Nevanlinna écrit sous forme plus simple

$$T(r,a) = T(r,f) + O(1), \quad \forall r \in]0,+\infty[\ \big(resp. \ \forall r \in]0,R[\big).$$

On montre aussi les résultats suivants

Proposition 2.3 [3] *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, $f(0) \neq 0, \infty$. On a les équivalences suivantes*

i) f est une constante $\Leftrightarrow T(r,f) = o(log\, r), \quad r \to +\infty$.

ii) $f \in \mathbb{K}(X) \Leftrightarrow T(r,f) = O(log\, r), \quad r \to +\infty$.

iii) f est non constante $\Leftrightarrow \exists c \in R, \exists A > 0$ t.q

$$T(r,f) \geq log\, r + c, \quad \forall r > A.$$

Démonstration.

i) Si $f = a \in \mathbb{K}$ et $a \neq 0$, on a $T(r,f) = \log^+ |f|(r) = o(\log r)$, pour tout $r > 0$.

En effet, pour tout $r > 0$

$$T(r,f) = \max\big\{0, \log|f|(r)\big\} = \max\big\{0, \log|a|\big\} = \begin{cases} \log|a|, & \text{si } \log|a| > 0 \\ 0, & \text{si } \log|a| \leq 0 \end{cases}$$

D'où $\displaystyle \lim_{r \to +\infty} \frac{T(r,f)}{\log r} = 0.$, i.e. $T(r,f) = \log^+|f|(r) = o(\log r)$.

Pour la réciproque, on distingue deux cas

1. f n'a aucun pôle, car si x en était un on aurait

$$T(r,f) \geq N(r,f) = \sum_{|\alpha| \leq r} p(|\alpha|, f) \ \log \frac{r}{|\alpha|} \geq \sum_{|\alpha| \leq r} \log \frac{r}{|\alpha|} \geq \log \frac{r}{|\alpha|}$$

d'où pour $r > 0$

$$\frac{-T(r,f)}{\log r} \leq \frac{-\log r + \log|\alpha|}{\log r} = \frac{\log|\alpha|}{\log r} - 1.$$

En passant à la limite, on a $0 \leq -1$, ce qui est absurde. D'où f n'a aucun pôle.

D'autre part, on sait que $T\Big(r, \dfrac{1}{f}\Big) = T(r,f) + O(1) = o(\log r)$.

2. f n'a aucun zéro, car si x en était un on aurait

$$T\Big(r, \frac{1}{f}\Big) \geq N\Big(r, \frac{1}{f}\Big) = \sum_{|\alpha| \leq r} p\Big(|\alpha|, \frac{1}{f}\Big) \ \log \frac{r}{|\alpha|} = \sum_{|\alpha| \leq r} z(|\alpha|, f) \log \frac{r}{|\alpha|} \geq \sum_{|\alpha| \leq r} \log \frac{r}{|\alpha|} \geq \log \frac{r}{|\alpha|}$$

d'où pour $r > 0$

$$\frac{-T\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r} \leq \frac{-\log r + \log|\alpha|}{\log r} = \frac{\log|\alpha|}{\log r} - 1.$$

En passant à la limite, on a $0 \leq -1$, ce qui est absurde. D'où f n'a aucun zéro.

Donc f est une constante.

(ii) Si $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x),\ Q(x) \in \mathbb{K}[X]$ sont tels que $P(0) \neq 0$ et $Q(0) \neq 0$ et si $k = deg\ \ P$ et $l = deg\ \ Q$, on a au voisinage de $+\infty$

$$\begin{aligned} \log|P|(r) &= k\log r + O(1) \\ \log|Q|(r) &= l\log r + O(1) \end{aligned}$$

d'où $\quad \log|f|(r) = \log|P|(r) - \log|Q|(r) = (k-l)\log r + O(1).$

On a aussi

$$\begin{aligned} m(r,f) = \log^+|f|(r) &= \max\left\{0, (k-l)\log r\right\} + O(1) \\ &= \begin{cases} O(1), & \text{si } \ (k-l)\log r < 0 \\ (k-l)\log r + O(1), & \text{sinon.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} O(1), & \text{si } k < l \\ (k-l)\log r + O(1), & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

D'autr part

$$N(r,f) = \sum_{|\alpha|\leq r} p(|\alpha|, f)\log\frac{r}{|\alpha|} = \sum_{|\alpha|\leq r} z(|\alpha|, Q)\log\frac{r}{|\alpha|} = l\log\frac{r}{|\alpha|} = l\log r + O(1)$$

d'où

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f) = \begin{cases} l\log r + O(1), & \text{si } k < l \\ k\log r + O(1), & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{i.e. } \ T(r,f) = O(\log r).$$

Réciproquement, si $T(r,f) = O(\log r)$, il existe $\alpha > 0$ tel que $0 \leq \dfrac{T(r,f)}{\log r} \leq \alpha$, pour

r tend vers infini. Soit $n(r) = \sum\limits_{|\alpha|\leq r} p(|\alpha|, f)$. On a pour $r > 0$

$$\begin{aligned} N(r^2, f) = \sum_{|\alpha|\leq r^2} p(|\alpha|^2, f)\ \log\frac{r^2}{|\alpha|} \quad &\geq \quad \sum_{|\alpha|\leq r} p(|\alpha|, f)\log\frac{r^2}{|\alpha|} \\ &\geq \quad \sum_{|\alpha|\leq r} p(|\alpha|, f)\big\{2\log r - \log|\alpha|\big\} \\ &\geq \quad \sum_{|\alpha|\leq r} p(|\alpha|, f)\ \log r = n(r)\ \log r. \end{aligned}$$

D'où $\quad T(r^2, f) \geq N(r^2, f) \geq n(r)\ \log r \geq 0$, et

$$\alpha \geq \frac{T(r^2, f)}{2\log r} \geq \frac{N(r^2, f)}{2\log r} \geq \frac{n(r)\log r}{2\log r} = \frac{n(r)}{2}$$

on trouve que

$$2\alpha \geq \frac{2T(r^2, f)}{2\log r} \geq n(r).$$

Comme $n(r)$ est une fonction croissante de r, $n(r)$ a une limite quand $r \to +\infty$ et on a $\lim\limits_{r\to+\infty} n(r) \leq 2\alpha < +\infty$. Donc f n'a qu'un nombre fini de pôles dans $\mathbb{K}$.

D'autre part, on a $T\Big(r, \dfrac{1}{f}\Big) = T(r, f) + O(1)$, il existe $\beta > 0$ tel que $0 \leq \dfrac{T\Big(r, \dfrac{1}{f}\Big)}{\log r} \leq \beta$, pour r tend vers infini. Soit $m(r) = \sum\limits_{|\alpha|\leq r} z(|\alpha|, f)$. On a pour $r > 0$

$$\begin{aligned} N\Big(r^2, \frac{1}{f}\Big) = \sum_{|\alpha|\leq r^2} z(|\alpha|^2, f)\ \log\frac{r^2}{|\alpha|} \quad &\geq \quad \sum_{|\alpha|\leq r} z(|\alpha|, f)\log\frac{r^2}{|\alpha|} \\ &\geq \quad \sum_{|\alpha|\leq r} z(|\alpha|, f)\big\{2\log r - \log|\alpha|\big\} \\ &\geq \quad \sum_{|\alpha|\leq r} z(|\alpha|, f)\ \log r = m(r)\ \log r. \end{aligned}$$

Et

$$2\beta \geq \frac{2T(r^2, f)}{2\log r} \geq m(r)$$

comme $m(r)$ est une fonction croissante de r, $m(r)$ a une limite quand $r \to +\infty$ et on a $\lim\limits_{r\to+\infty} m(r) \leq 2\beta < +\infty$. Donc f n'a qu'un nombre fini de zéros dans $\mathbb{K}$. D'où $f \in \mathbb{K}(X)$.

iii) Si f est non constante, f admet au moins un zéro ou un pôle. Vu les relations du corolaire 2.1 et quitte à considérer $\frac{1}{f}$, on peut supposer que f a un pôle $a \neq 0$, d'où

$$T(r,f) \geq N(r,f) = \sum_{|\alpha|\leq r} p(|\alpha|,f) \log \frac{r}{|\alpha|} \geq \log \frac{r}{|a|} = \log r - \log |a|.$$

La réciproque est évidente. car s'il existe $c \in \mathbb{R}$ et $A > 0$: $T(r,f) \geq \log r + c$ pour $r > A$, on a

$$\begin{aligned} T(r,f) &\geq \log r + c \\ \frac{T(r,f)}{\log r} &\geq 1 + \frac{c}{\log r} \end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{T(r,\varphi)}{\log r} \neq 0$ d'où $T(r,f) \neq o(\log r)$.

D'aprés i), la fonction f est non constante. □

On donne une autre version de la *fonction caractéristique de Nevanlinna.*

Théorème 2.5 [14] *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$, $f(0) \neq 0, \infty$. *Alors*

$$T(r,f) = \max\big\{Z(r,f) + \log|f(0)|, N(r,f)\big\}, \quad \forall r \in]0,+\infty[\;\; \big(\textit{resp.}\ \forall r \in]0,R[\big).$$

Démonstration. Pour $r \in]0,+\infty[$ $\big($*resp.* $r \in]0,R[\big)$, on a

$$\begin{aligned} \log|f|(r) &= Z(r,f) - N(r,f) + \log|f(0)| \\ \log|f|(r) + N(r,f) &= Z(r,f) + \log|f(0)|. \end{aligned}$$

Donc $\max\big\{Z(r,f) + \log|f(0)|, N(r,f)\big\} = \max\big\{N(r,f) + \log|f|(r), N(r,f)\big\}$

$$= \max\big\{0, \log|f|(r)\big\} + N(r,f)$$

$$= m(r,f) + N(r,f) = T(r,f).$$

Ce qui termine la démonstration □

Exemple. Soit $P(x) = \sum_{n=1}^{q} a_n x^n \in \mathbb{K}[X]$ et $Q(x) = \sum_{n=1}^{s} b_n x^n \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes premiers entre eux. Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(x)$, alors $T(r,F) = deg(F)\log r + O(1),\ \forall r \in]0,+\infty[$ où $deg(F) = \max\Big\{deg(P), deg(Q)\Big\}$.

En effet, soient $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ et $\{\beta_j\}_{j\in J}$ l'ensemble des zéros de P et Q respectivement. Supposons $B = \max_{i,j}\{|\alpha_i|, |\beta_j|\}$. D'aprés l'exemple précédent, pour $r \in]0,+\infty[$, on a $Z(r,P) = deg(P)\log r + O(1)$ et $Z(r,Q) = deg(Q)\log r + O(1)$. Par conséquent

$$\begin{aligned} T(r,F) = \max\Big\{Z(r,P) + \log|P(0)|, Z(r,Q)\Big\} &= \max\Big\{deg(P), deg(Q)\Big\}\log r + O(1) \\ &= deg(F)\log r + O(1). \end{aligned}$$

On donne une conséquence du *premier théorème fondamental de Nevanlinna.*

Corollaire 2.3 [10] [14] *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$ non nulle en 0. Alors*

$$T(r,f) = Z(r,f) + O(1), \quad \forall r \in]0,+\infty[\ \ \big(resp.\ \forall r \in]0,R[\big).$$

De plus, $\exists \rho \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $\rho \in]0,R[\big)$ tel que si $a \in \mathbb{K}$ et $f(0) \neq a$, on a

$$Z(r,f) = Z(r,f-a), \quad \forall r \in]\rho,+\infty[\ \ \big(resp.\ \forall r \in]\rho,R[\big).$$

Proposition 2.4 [10] *Soit $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$, tels que $f(0) \neq 0,\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $h, l \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$ telles que $f = \dfrac{h}{l}$ vérifiant*

$$Z(r,h) \leq Z(r,f) + \varepsilon \ \ et \ \ Z(r,l) \leq N(r,f) + \varepsilon, \quad \forall r \in]0,R[.$$

Corollaire 2.4 *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$, $f(0) \neq 0,\infty$. Il exist $h, l \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $h, l \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ telles que $f = \dfrac{h}{l}$ vérifant*

$$\max\big\{T(r,h), T(r,l)\big\} \leq T(r,f) + O(1), \quad \forall r \in]0,+\infty[\ \ \big(resp.\ \forall r \in]0,R[\big).$$

Démonstration.

i) Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, il exist $h, l \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ telles que $f = \dfrac{h}{l}$ et $Z(r,h) = Z(r,f) + O(1)$ et

$Z(r,l) = N(r,f) + O(1), \quad \forall r \in]0,+\infty[.$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\max\big\{Z(r,h), Z(r,l)\big\} \leq \max\big\{Z(r,f), N(r,f)\big\} + O(1) &= \max\big\{N(r,\frac{1}{f}), N(r,f)\big\} + O(1)\\ &\leq \max\big\{T(r,\frac{1}{f}), T(r,f)\big\} + O(1)\\ &= T(r,f) + O(1).\end{aligned}$$

$ii)$ Maintenant, si $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$, d'aprés la proposition précédente, pour $\varepsilon > 0$ fixe, il existe $h, l \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$, telles que $f = \dfrac{h}{l}$ et

$$Z(r,h) \leq Z(r,f) + \varepsilon \ \text{ et } \ Z(r,l) \leq N(r,f) + \varepsilon, \quad \forall r \in]0,R[.$$

$$\begin{aligned}\max\big\{Z(r,h), Z(r,l)\big\} &\leq \max\big\{Z(r,f), N(r,f)\big\} + \varepsilon \quad \forall r \in]0,R[\\ &\leq T(r,f) + \varepsilon \quad \forall r \in]0,R[.\end{aligned}$$

D'aprés le corollaire 2.3, on a

$$Z(r,h) = T(r,h) + O(1) \ \text{ et } \ Z(r,l) = T(r,l) + O(1), \quad \forall r \in]0,+\infty[\ \big(\textit{resp.}\ \forall r \in]0,R[\big).$$

D'où $\quad \max\big\{T(r,h), T(r,l)\big\} = \max\big\{Z(r,h), Z(r,l)\big\} \leq T(r,f) + O(1)$, pour tout $r \in]0,+\infty[\ \big($resp. $\forall r \in]0,R[\big)$. □

En vue de démontrer d'autres résultats, nous posons pour $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ telle que $f(0) \neq 0, \infty$ et soit $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r \in]0,R[\big)$, pour $|\alpha| \leq r$.

Posons

$$\overline{p}(|\alpha|, f) = \sum_{\substack{|\alpha|=r\\ w_\alpha(f)<0}} 1 : \textit{le nombre de pôles de } f \textit{ sans prendre en compte}$$

les multiplicités sur le cercle $|\alpha| = r$.

Et

$$\overline{N}(r,f) = \sum_{|\alpha|\leq r} \overline{p}(|\alpha|, f) \log\frac{r}{|\alpha|} = \overline{Z}\Big(r, \frac{1}{f}\Big).$$

2.3 Propriétés classiques de la Théorie de Nevanlinna ultra-métrique liées aux fonctions méromorphes et leurs dérivées

On montre quelques propriétés de la *Théorie de Nevanlinna*, qui établissent des liens entre des fonctions méromorphes et leurs dérivées.

Théorème 2.6 [7] *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ *telle que* $f^{(k)}(k \in \mathbb{N})$ *n'a ni zéro ni pôle en* 0. *Alors*

$$\begin{aligned} i)\ N(r, f^{(k)}) &= N(r,f) + k\overline{N}(r,f) - \log r + O(1) \\ ii)\ Z(r, f^{(k)}) &\leq Z(r,f) + k\overline{N}(r,f) + O(1) \\ iii)\ T(r, f^{(k)}) &\leq T(r,f) + k\overline{N}(r,f) - \log r + O(1) \leq (k+1)T(r,f) - \log r + O(1). \end{aligned}$$

Nous avons besoin du lemme suivant

Lemme 2.1 [3] *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$, $f = \dfrac{h}{g}$ *où* $h, g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ $\big($*resp.* $h, g \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$ *n'ont pas de zéro commun. Posons* $H_0 = h$ *et* $H_n = gH'_{n-1} - ng'H_{n-1}$ *pour* $n \geq 1$. *On a*

i) $f^{(n)} = \dfrac{H_n}{g^{n+1}}$

ii) Tout zéro d'ordre $m(m \geq 1)$ *de* g *est un zéro d'ordre* $n(m-1)$ *de* H_n *et un pôle d'ordre* $m + n$ *de* $f^{(n)}$.

La démonstration se fait par récurrence sur n.

Corollaire 2.5 [3] *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ *et* $f(0) \neq 0, \infty$. *On a*

$$\begin{aligned} m\Big(r, \frac{f'}{f}\Big) &= 0, \quad \forall r \in]0, +\infty[\ \big(resp. \forall r \in]0, R[\big) \\ m\Big(r, \frac{f'}{f}\Big) &\geq \log r, \quad \forall r \in]0, +\infty[\ \big(resp. \forall r \in]0, R[\big). \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$. On a

$$m\Big(r, \frac{f'}{f}\Big) = \log^+ \Big|\frac{f'}{f}\Big|(r) = \max\Big\{0, \log\Big|\frac{f'}{f}\Big|(r)\Big\} = 0, \quad \forall r \in]0, +\infty[\ \big(resp.\ \forall r \in]0, R[\big).$$

Par les résultats classiques pour les fonctions méromorphes, il est bien connu que pour chaque $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $\forall r \in]0,R[\big)$

$$\log\left|\frac{f'}{f}\right|(r) \leq -\log r$$

d'où $\quad m\Big(r,\dfrac{f}{f'}\Big) = \log^+\left|\dfrac{f}{f'}\right|(r) = \max\left\{0, \log\left|\dfrac{f'}{f}\right|(r)\right\} \geq \log r.$ $\square$

***Démonstration du Théorème* 2.6**

$i)$ Pour obtenir la première inégalité il suffit voir que chaque pôle α de f d'ordre s est un pôle de $f^{(k)}$ d'ordre $s+k$.

$ii)$ Montrons maintemant la deuxième inégalité. Soit $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r \in]0,R[\big)$. Par la formule (2.2), on a

$$\begin{aligned} Z(r,f') - N(r,f') + \log|f'(0)| &= \log|f'|(r) \\ Z(r,f) - N(r,f) + \log|f(0)| &= \log|f|(r). \end{aligned}$$

Mais, d'aprés le théorème 2.1, on a $|f'|(r) \leq \dfrac{1}{r}|f|(r)$ et donc, en considérant la croissance de la fonction logarithmique, on obtient

$$\log|f'|(r) \leq \log|f|(r) - \log r$$

par conséquent

$$\begin{aligned} Z(r,f') &= \log|f'|(r) + N(r,f') - \log|f'(0)| \\ &\leq \log|f|(r) + N(r,f') - \log|f'(0)| - \log r \\ &\leq Z(r,f) + N(r,f') - N(r,f) + \log|f(0)| - \log|f'(0)| - \log r \\ &\leq Z(r,f) + N(r,f') - N(r,f) - \log r + O(1). \end{aligned}$$

Mais, d'aprés la première inégalité $i)$, on a

$$\begin{aligned} N(r,f') - N(r,f) &= \overline{N}(r,f) - \log r + O(1) \\ Z(r,f') &\leq Z(r,f) + \overline{N}(r,f) - \log r + O(1). \end{aligned}$$

La généralisation de cette inégalité est obtenue par récurrence. Supposons que l'inégalité précédente est vraie pour tout $k \leq n$. Alors

$$Z(r, f^{(n+1)}) = Z(r, (f^{(n)})') \leq Z(r, f^{(n)}) + \overline{N}(r, f^{(n)}) - \log r + O(1)$$

et donc

$$Z(r, f^{(n+1)}) \leq Z(r, f) + n\overline{N}(r, f) + \overline{N}(r, f^{(n)}) - \log r + O(1)$$

puisque $\overline{N}(r, f^{(n)}) = \overline{N}(r, f)$, on a

$$Z(r, f^{(n+1)}) \leq Z(r, f) + (n+1)\overline{N}(r, f) - \log r + O(1).$$

Pour montrer la troisième inégalité, on a

$$\begin{aligned}
T(r, f^{(k)}) &= N(r, f^{(k)}) + m(r, f^{(k)}) \\
&= N(r, f) + k\overline{N}(r, f) + m(r, f^{(k)}) - \log r + O(1) \\
&= N(r, f) + k\overline{N}(r, f) + m\Big(r, \frac{f^{(k)}}{f^{(k-1)}} ... \frac{f'}{f} f\Big) - \log r + O(1) \\
&\leq N(r, f) + k\overline{N}(r, f) + m\Big(r, \frac{f^{(k)}}{f^{(k-1)}}\Big) + ... + m\Big(r, \frac{f'}{f}\Big) + m(r, f) - \log r + O(1) \\
&= T(r, f) + k\overline{N}(r, f) - \log r + O(1).
\end{aligned}$$

Puisque $\overline{N}(r, f) \leq N(r, f) \leq T(r, f) + O(1), \quad \forall r \in]0, +\infty[\ \big(resp. \forall r \in]0, R[\big)$, on a

$$T(r, f^{(k)}) \leq (k+1)T(r, f) - \log r + O(1) \leq (k+1)T(r, f) + O(1). \qquad \square$$

Remarque. *La deuxième inégalité du théorème 2.6 n'est pas valable si on considère des fonctions méromorphes dans* $\mathbb{C}$.

Voici un contre-exemple.

Soit $f(x) = e^{\sin x}$. Il est facile de voir que $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ n'a pas de zéros dans $\mathbb{C}$. Donc

$$Z(r, f) = 0, \forall r \in]0, +\infty[.$$

Puisque $f'(x) = \cos x \ e^{\sin x}$, on a $\lim_{r \to +\infty} Z(r, f') = \lim_{r \to +\infty} Z(r, \cos x \ e^{\sin x}) = +\infty$. Par conséquent, $\lim_{r \to +\infty} Z(r, f') - Z(r, f) = +\infty$, ce qui contredit l'inégalité du théorème 2.6.

2.4 Deuxième Théorème Fondamental de Nevanlinna ultra-métrique

Dans la section précédente, on définit une fonction caractéristique de Nevanlinna $T(r,f)$ et pour tout $a \in \mathbb{K}$, nous avons $m(r,a) + N(r,a) = T(r,f) + O(1)$. Il résulte que la somme $m(r,a) + N(r,a)$ est indépendante de a, c'est le résultat du *premier théorème fondamental de Nevanlinna.*

Le *deuxième théorème fondamental de Nevanlinna* est l'un des théorèmes les plus utilisés dans la théorie de distribution de valeurs. La Version ultra-métrique de ce théorème a été introduite par **A. Boutabaa** [3], elle s'applique à des fonctions méromorphes dans tout le corps ultra-métrique $\mathbb{K}$

Théorème 2.7 [3] ***(Inégalité Fondamentale)***
Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$, f non constante. Soient $a_1, ..., a_q$ des éléments distincts de $\mathbb{C}_p$ et $\delta \in \mathbb{R}$ tels que $|a_i - a_j| \geq \delta$ pour $1 \leq i \neq j \leq q$. On suppose que $f(0) \neq 0, \infty$ et $f(0) \neq a_i$ pour tout i, $1 \leq i \leq q$. Alors

$$m(r,f) + \sum_{i=1}^{q} m(r,a_i) \leq 2T(r,f) - N_1(r) - \log r + S(r), \quad \forall r \in]0,+\infty[\quad (2.5)$$

où $N_1(r)$ est une fonction positive et

$$\begin{aligned} N_1(r) &= N(r,f) + N(r,\frac{1}{f'}) - \overline{N}(r,f) \\ S(r) &= m(r,\frac{f'}{f}) + m\Big\{r, \sum_{i=1}^{q} \frac{f'}{f-a_i}\Big\} + q\log^+\frac{1}{\delta} + O(1) \end{aligned}$$

avec $\log^+ \frac{1}{\delta} = \max\big\{0, \log\frac{1}{\delta}\big\}$.

Démonstration.
On considère $g = \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{f-a_i}$. Montrons que

$$m(r,g) \geq \sum_{i=1}^{q} m(r,a_i) - q\log^+\frac{1}{\delta}, \quad \forall r \in]0,+\infty[\quad (2.6)$$

Nous distinguons deux cas

1. Si $|f-a_j|(r)<\delta$, pour un certain j, alors on a pour $i\neq j$ et pour tout $r\in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r\in]0,R[\big)$

$$\begin{aligned}\log|g|(r) &= \log\Big|\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{f-a_i}\Big|(r)\\ &= \log\max_{i=1,q}\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r)=\log\Big|\frac{1}{f-a_j}\Big|(r)\end{aligned}$$

et on a aussi que

$$\begin{aligned}\log^+\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r) &= \max\Big\{0,\log\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r)\Big\}\\ &= \begin{cases}\log\Big|\dfrac{1}{f-a_i}\Big|(r)\leq\log\dfrac{1}{\delta}, & \text{si }\ \log\dfrac{1}{\delta}>0\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned}$$

Donc

$$\log^+\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r)\leq\log^+\frac{1}{\delta}$$

pour $i\neq j$, il suit que

$$\begin{aligned}\log^+|g|(r) &= \log^+\Big|\frac{1}{f-a_j}\Big|(r)\\ &= \sum_{i=1}^{q}\log^+\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r)-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{q}\log^+\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r)\\ &\geq \sum_{i=1}^{q}\log^+\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r)-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{q}\log^+\frac{1}{\delta}\\ &= \sum_{i=1}^{q}\log^+\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r)-(q-1)\log^+\frac{1}{\delta}\\ &\geq \sum_{i=1}^{q}\log^+\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r)-q\log^+\frac{1}{\delta}\end{aligned}$$

alors $\qquad m(r,g)\geq\sum_{i=1}^{q}m(r,a_i)-q\log^+\dfrac{1}{\delta}.$

2. Si $|f-a_i|(r)\geq\delta$ pour $i\in\{1...q\}$ et pour tout $r\in]0,+\infty[$. On a

$$\log^+\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r)=\max\Big\{0,\log\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r)\Big\}\leq\max\Big\{0,\log\frac{1}{\delta}\Big\}=\log^+\frac{1}{\delta}$$

pour tout $1 \leq i \leq q$, on a

$$\begin{aligned}\log^+|g|(r) \geq 0 \Leftrightarrow \log^+|g|(r) &\geq \sum_{i=1}^{q} \log^+\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r) - \sum_{i=1}^{q} \log^+\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r)\\ &\geq \sum_{i=1}^{q} \log^+\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r) - \sum_{i=1}^{q} \log^+ \frac{1}{\delta}\\ &= \sum_{i=1}^{q} \log^+\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r) - q\log^+ \frac{1}{\delta}.\end{aligned}$$

D'où

$$m(r,g) = \log^+|g|(r) \geq \sum_{i=1}^{q} \log^+\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r) - q\log^+\frac{1}{\delta} = \sum_{i=1}^{q} m(r,a_i) - q\log^+\frac{1}{\delta}.$$

La relation (2.6) est donc démontrée.

D'autre part, on a pour tout $r \in]0,+\infty[$

$$\begin{aligned}m(r,g) &= m\Big(r,\frac{1}{f}\,\frac{f}{f'}\,f'\,g\Big)\\ &\leq m\Big(r,\frac{1}{f}\Big) + m\Big(r,\frac{f}{f'}\Big) + m(r,f'g)\\ &= T(r,f) - N\Big(r,\frac{1}{f}\Big) + T\Big(r,\frac{f'}{f}\Big) - N\Big(r,\frac{f}{f'}\Big) + m(r,f'g) + O(1).\end{aligned}$$

La relation (2.6) nous donne

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{q} m(r,a_i) &\leq m(r,g) + q\log^+\frac{1}{\delta}\\ m(r,f) + \sum_{i=1}^{q} m(r,a_i) &\leq m(r,f) + m(r,g) + q\log^+\frac{1}{\delta}\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}m(r,f) + \sum_{i=1}^{q} m(r,a_i) &\leq m(r,f) + T(r,f) - N\Big(r,\frac{1}{f}\Big) + T\Big(r,\frac{f'}{f}\Big) - N\Big(r,\frac{f}{f'}\Big)\\ &\qquad + m(r,f'g) + q\log^+\frac{1}{\delta} + O(1)\\ &\leq 2T(r,f) - N\Big(r,\frac{1}{f}\Big) - N(r,f) - N\Big(r,\frac{f}{f'}\Big) + N\Big(r,\frac{f'}{f}\Big) +\\ &\qquad m\Big(r,\frac{f'}{f}\Big) + m(r,f'g) + q\log^+\frac{1}{\delta} + O(1).\end{aligned}$$

Le résultat demande découle, alors du fait que

$$N\Big(r,\frac{f'}{f}\Big)-N\Big(r,\frac{f}{f'}\Big)=N\Big(r,\frac{1}{f}\Big)-N(r,f)+N(r,f')-N\Big(r,\frac{1}{f'}\Big)+O(1) \qquad (2.7)$$

On sait que

$$N(r,f')-N(r,f)=\overline{N}(r,f)-\log r+O(1).$$

La formule (2.7) devient

$$N\Big(r,\frac{f'}{f}\Big)-N\Big(r,\frac{f}{f'}\Big)=\overline{N}(r,f)+N\Big(r,\frac{1}{f}\Big)-N\Big(r,\frac{1}{f'}\Big)-\log r+O(1)$$

alors

$$\begin{aligned} m(r,f)+\sum_{i=1}^{q} m(r,a_i) \;\; &\leq \;\; 2T(r,f)+\Big\{N(r,f)+N\Big(r,\frac{1}{f'}\Big)-\overline{N}\Big(r,\frac{1}{f}\Big)\Big\} \\ &\quad +m\Big(r,\frac{f'}{f}\Big)+m\Big\{r,\sum_{i=1}^{q}\frac{f'}{f-a_i}\Big\}+q\log^{+}\frac{1}{\delta}-\log r+O(1). \end{aligned}$$

D'où l'inégalité fondamentale (2.5). □

Maintenant, nous avons besoins d'estimer $S(r)$.

Corollaire 2.6 [3]***(estimation de*** $S(r)$***)*** *la quantité* $S(r)$ *du théorème* 2.6 *vérifie*

$$S(r)=O(1), \quad \textit{quand } r\to+\infty.$$

Démonstration.

Pour tout $r\in]0,+\infty[$, on a

$$\begin{aligned} S(r) &= m\Big(r,\frac{f'}{f}\Big)+m\Big\{r,\sum_{i=1}^{q}\frac{f'}{f-a_i}\Big\}+q\log^{+}\frac{1}{\delta}-\log r+O(1) \\ &= m\Big(r,\frac{f'}{f}\Big)+m\Big(r,\frac{F'}{F}\Big)+O(1) \end{aligned}$$

avec $F=\prod_{i=1}^{q}(f-a_i)$, et en utilisant le corollaire 2.5, $m\Big(r,\frac{F'}{F}\Big)=m\Big(r,\frac{f'}{f}\Big)=0$, quand $r\to+\infty$, alors $S(r)=O(1)$, quand $r\to+\infty$. □

Remarque. *La formule* (2.5) *devient sous la forme*

$$m(r,f)+\sum_{i=1}^{q}m(r,a_i)\leq 2T(r,f)-N_1(r)-\log r+O(1),\quad \forall r\in]0,+\infty[\qquad (2.8)$$

Les notations suivantes sont nécessaires pour énoncer une conséquence du théorème 2.8.

Notations.

Soit $f\in\mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f\in\mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ non constante et pout tout $a\in\mathbb{K}$ tels que $f(0)\neq 0,\infty$ et $f(0)\neq a$. On pose

$$\begin{aligned}
\delta(a) &= \lim_{r\longrightarrow+\infty}\inf\frac{m(r,a)}{T(r,f)}=1-\lim_{r\longrightarrow+\infty}\sup\frac{N(r,a)}{T(r,f)}=\lim_{r\longrightarrow+\infty}\left\{\inf_{r\leq R}\frac{m(r,a)}{T(r,f)}\right\}\\
\Theta(a) &= 1-\lim_{r\longrightarrow+\infty}\sup\frac{\overline{N}(r,a)}{T(r,f)}=1-\lim_{r\longrightarrow+\infty}\left\{\sup_{r\leq R}\frac{\overline{N}(r,a)}{T(r,f)}\right\}\\
\theta(a) &= \lim_{r\longrightarrow+\infty}\inf\frac{N(r,a)-\overline{N}(r,a)}{T(r,f)}=\lim_{r\longrightarrow+\infty}\left\{\inf_{r\leq R}\frac{N(r,a)-\overline{N}(r,a)}{T(r,f)}\right\}.
\end{aligned}$$

La quantité $\delta(a)$ est appelée le défaut de a. $\theta(a)$ est appelée l'indice de multiplicité de a.

Théorème 2.8 [3] ***(Deuxième Théorème Fondamental de Nevanlinna)***
Soient $a_1,...,a_q$ ($q\geq 2$). Soit $f\in\mathcal{M}(\mathbb{K})$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0 et telle que f' et $f-a_i$ ne sont pas nulles en 0. Alors

$$(q-1)T(r,f)\leq\sum_{i=1}^{q}N(r,a_i)+\overline{N}(r,f)-N_0\Big(r,\frac{1}{f'}\Big)-\log r+O(1),\ \forall r\in]0,+\infty[\qquad (2.9)$$

où $N_0\Big(r,\dfrac{1}{f'}\Big)$ est obtenu à partir de $N\Big(r,\dfrac{1}{f'}\Big)$ en omettant les termes correspondants aux zéros de f' qui sont des zéros de $f-a_i$ pour $1\leq i\leq q$.

Démonstration.

En ajoutant $N(r,f)+\sum\limits_{i=1}^{q}N(r,a_i)$ aux deux membres de l'inégalité (2.8), on a pour tout $r\in]0,+\infty[$

$$\begin{aligned}
N(r,f)+m(r,f)+\sum_{i=1}^{q}N(r,a_i)+\sum_{i=1}^{q}m(r,a_i) &\leq N(r,f)+\sum_{i=1}^{q}N(r,a_i)+2T(r,f)\\
&\quad -N_1(r)-\log r+O(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(r,f)+\sum_{i=1}^{q}T(r,a_i) &\leq N(r,f)+\sum_{i=1}^{q}N(r,a_i)+2T(r,f)\\
&\quad -N_1(r)-\log r+O(1)\\
T(r,f)+\sum_{i=1}^{q}T(r,f) &\leq N(r,f)+\sum_{i=1}^{q}N(r,a_i)+2T(r,f)\\
&\quad -N_1(r)-\log r+O(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(q+1)T(r,f) &\leq N(r,f)+\sum_{i=1}^{q}N(r,a_i)+2T(r,f)-N_1(r)-\log r+O(1)\\
(q-1)T(r,f) &\leq \sum_{i=1}^{q}N(r,a_i)-N\Big(r,\frac{1}{f'}\Big)+\overline{N}(r,f)-\log r+O(1)
\end{aligned}$$

En remarquant que tout zéro de $f-a_i$ d'ordre m est un zéro de f' d'ordre $m-1$, on déduit que

$$\sum_{i=1}^{q}N(r,a_i)-N(r,\frac{1}{f'})=\sum_{i=1}^{q}\overline{N}(r,a_i)-N_0\Big(r,\frac{1}{f'}\Big)$$

où $N_0\Big(r,\frac{1}{f'}\Big)$ est obtenu à partir de $N\Big(r,\frac{1}{f'}\Big)$ en omettant les termes correspondants aux zéros de f' qui sont des zéros de $f-a_i$ pour $1\leq i\leq q$, il résulte que

$$(q-1)T(r,f)\leq\sum_{i=1}^{q}\overline{N}(r,a_i)+\overline{N}(r,f)-N_0\Big(r,\frac{1}{f}\Big)-\log r+O(1).$$

Comme $\overline{N}(r,a_i)\leq N(r,a_i)$ pour tout $1\leq i\leq q$, on a

$$(q-1)T(r,f)\leq\sum_{i=1}^{q}N(r,a_i)+\overline{N}(r,f)-N_0\Big(r,\frac{1}{f}\Big)-\log r+O(1).$$

D'où l'inégalité. □

Remarque. *Le terme $-\log r$ qui figure dans le théorème précédent est d'une grande utilité dans l'étude des ensembles d'unicité pour les fonctions entières dans un corps ultra-métrique de caractéristique nulle, ou pour les fonctions méromorphes dans le corps tout entier. Il permet d'avoir des résultats plus fins que ceux obtenus dans $\mathbb{C}$. Remarquons que ce terme n'a aucun intérêt quand il s'agit d'étudier ces problèmes dans un disque $D^{-}(0,R)$.*

On a le résultat suivant.

Corollaire 2.7 [3] *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^{-}(0,R))\big)$ non constante, alors l'ensemble des valeurs $a \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ pour les quelles $\Theta(a) > 0$ est au plus dénombrable, on a*

$$\sum_{a} \delta(a) + \theta(a) \leq \sum_{a} \Theta(a) \leq 2 \quad (2.10)$$

La sommation portant sur les a tels que $f(0) \neq a$.

Démonstration.

Par l'inégalité (2.9),on a pour tout $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r \in]0,R[\big)$

$$\begin{aligned}(q-1)T(r,f) &\leq \sum_{i=1}^{q} N(r,a_i) + \overline{N}(r,f) - N_0\Big(r,\frac{1}{f'}\Big) - \log r + O(1)\\ &\leq \sum_{i=1}^{q} N(r,a_i) + \overline{N}(r,f) - \log r + O(1)\end{aligned}$$

en divisant par $T(r,f)$, et en passant à la limite

$$q-1 \leq \frac{\overline{N}(r,f)}{T(r,f)} + \sum_{i=1}^{q} \frac{\overline{N}(r,a_i)}{T(r,f)} - \frac{\log r}{T(r,f)} + O(1)$$

$$q-1 \leq \lim_{r\longrightarrow+\infty} \sup \frac{\overline{N}(r,f)}{T(r,f)} + \sum_{i=1}^{q} \lim_{r\longrightarrow+\infty} \sup \frac{\overline{N}(r,a_i)}{T(r,a_i)} - \lim_{r\longrightarrow+\infty} \inf \frac{\log r}{T(r,f)} + O(1).$$

Donc

$$\begin{aligned}-\Theta(\infty) + \sum_{i=1}^{q} \Big(1-\Theta(a_i)\Big) &\geq q-1\\ -\Big\{\Theta(\infty) + \sum_{i=1}^{q} (\Theta(a_i)\Big\} &\geq -2\\ \Theta(\infty) + \sum_{i=1}^{q} \Theta(a_i) &\leq 2.\end{aligned}$$

Ceci montre que $\Theta(a) > \frac{1}{N}$ pour au plus $2N-1$ valeurs finies distinctes a.

Si l'ensemble des valeurs a telles que $\Theta(a) > 0$ est fini, le théorème est démontré, sinon les valeurs a pour lesquelles $\Theta(a) > 0$ peuvent être rangées en une suite $a_1, a_2, ..., a_i, a_{i_1}, a_{i_1+1}$, $..., a_{i_n}, ...$ de sorte que la suite des $\Theta(a_i)$ soit décroisante et que pour $j \leq i_n$, on ait

$\Theta(a_j) \geq \dfrac{1}{n}$. En posant $a_0 = \infty$, on déduit, pour la suite $(a_i)_{i\geq 0}$ que $\sum\limits_{i=0}^{q} \Theta(a_i) \leq 2$ pour tout q. D'où $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \Theta(a_i) \leq 2$. □

Remarque.

L'inégalité çi-dessus est la meilleure possible. En effet on montre que pour tout ε, $0 < \varepsilon < 2$, il existe une fonction $f_\varepsilon \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ pour laquelle $\sum\limits_a \Theta(a) > \varepsilon$.

Car pour $0 < \varepsilon < 2$, il existe $n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varepsilon < 1 + \dfrac{n-1}{n}$ et si l'on considère alors la fonction $f_\varepsilon(x) = (x-1)^n$, on a au voisinage de $+\infty$.

$m(r, f) = n \log r$, $N(r, f) = \overline{N}(r, f) = 0$. D'où $T(r, f) = n \log r$, $\Theta(f) = 1$ et $N(r, \dfrac{1}{f}) = n \log r$, $\overline{N}(r, \dfrac{1}{f}) = \log r$. $\Theta(0) = 1 - \dfrac{\log r}{n \log r} = \dfrac{n-1}{n}$. Il en résulte que

$$\sum_a \Theta(a) \geq \Theta(0) + \Theta(f) = 1 + \frac{n-1}{n} > \varepsilon.$$

Chapitre 3

Application de la Théorie deNevanlinna ultra-métrique aux équations fonctionnelles aux q-différences

Dans ce chapitre, on donne une application de la théorie de Nevanlinna ultra-métrique pour étudier les solutions méromorphes de l'équation fonctionnelle

$$\sum_{i=0}^{s} A_i(x)\ f(q^i x) = B(x) \qquad (E)$$

où $q \in \mathbb{K}$, $0 < |q| < 1$ et $\mathbb{K}$ un corps ultra-métrique complet et algébriquement clôs, avec $B(x), A_0(x), ..., A_s(x)$, $(s \geq 1)$ des éléments de $\mathbb{K}(X)$, tel que $A_0(x)\ A_s(x) \neq 0$.

D'abort, on montre que si $A_0(x), ..., A_s(x)$ sont constants, et $B(x) \in \mathbb{K}[X]$ alors f est une fonction rationnelle.

Ensuite, on étudie les solutions de cette équation dans un cas plus général, et on donne quelques caractérisations de ces solutions.

Dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation ci-dessus a été étudiée par plusieur auteurs comme **Bergweiler**, **Ishizaki Yanagihara**, **C.C.Yang**, **Heittokangas**, **laine**, **Rieppo**, **Hayman** [31],...

Notre but est de généraliser certains de ces résultats au cas ultra-métrique. Comme dans le cas complexe, notre méthode est basée sur la Théorie de Nevanlinna ultra-métrique.
Nous utilisons les mêmes notions et définitions de base de cette théorie que nous avons déjà définit dans le chapitre 2.

Lemme 3.1 *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ *et* $r > 0$*, on a*

1. $|f(qx)|(r) = |f|(|q|r)$
2. $m(r, f(qx)) = m(|q|r, f)$
3. $N(r, f(qx)) = N(|q|r, f)$
4. $T(r, f(qx)) = T(|q|r, f)$

Démonstration.

1. On a pour tout $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ et $r > 0$

$$|f(qx)|(r) = \sup_{n\geq 0}|a_n\, q^n|\, r^n = \sup_{n\geq 0}|a_n|\, (|q|\, r)^n = |f|(|q|r)$$

Pour $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, il exist $g, h \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ tel que $f = \dfrac{g}{h}$, donc

$$|f(qx)|(r) = \frac{|g(qx)|(r)}{|h(qx)|(r)} = \frac{|g|(|q|r)}{|h|(|q|r)} = |f|(|q|r).$$

2. $m(r, f(qx)) = \log^+|f(qx)|(r) = \log^+|f|(|q|r) = m(|q|r, f)$.

3. Le nombre de pôles de f dans $D^-(0, |q|r) = \{x,\ |x| < |q|r\}$ est égal à le nombre de pôles de $f(qx)$ dans $D^-(0, r) = \{x,\ |x| < r\}$, donc $p(|q||\alpha|, f) = p(|\alpha|, f(qx))$.

Donc

$$\begin{aligned} N(r, f(qx)) = \sum_{|\alpha|\le r} p(|\alpha|, f(qx)) \ \log \frac{r}{|\alpha|} &= \sum_{|\alpha|\le r} p(|q||\alpha|, f) \ \log \frac{r}{|\alpha|} \\ &= \sum_{|\frac{t}{q}|\le r} p(|t|, f) \ \log \frac{r}{|\frac{t}{q}|} \\ &= \sum_{|t|\le |q|r} p(|t|, f) \ \log \frac{|q|r}{|\alpha|} = N(|q|r, f). \end{aligned}$$

4. On a $T(r, f(qx)) = m(r, f(qx)) + N(r, f(qx)) = m(|q|r, f) + N(|q|r, f) = T(|q|r, f)$.

I. Cas des coefficients constants

On considère l'équation fonctionnelle

$$\sum_{i=0}^{s} A_i \ f(q^i x) = B(x) \qquad\qquad (E')$$

où $A_0, ..., A_s$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ tels que $A_0 \ A_s \neq 0$ et $B(x) \in \mathbb{K}[X]$.

Nous démontrons le résultat suivant

Théorème 3.1 *On suppose dans l'équation (E') ci-dessus que $B(x)$ est un polynôme et les coefficients $A_0, ..., A_s$ sont constants. Alors toute solution $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ non constante de l'équation (E') dans $\mathbb{K}$, est une fonction rationnelle ayant au plus un pôle $\alpha = 0$.*

Démonstration.

Soit $\alpha \neq 0$ un pôle de f. D'aprés l'équation (E'), il y a au moins un indice $j_1 \in \{1, ..., s\}$ tel que $\alpha_1 = q^{j_1} \ \alpha \in \mathbb{K}$ est un pôle de f.

En appliquant la méthode à α_1, on déduit qu'il existe $j_2 \in \{1, ..., s\}$ tel que $\alpha_2 = q^{j_2} \ \alpha_1$.

Donc on construit des suites $\alpha_1, \alpha_2, ...$ de pôles de f tendant vers 0. ce qui contredit $\alpha \neq 0$.

D'où f n'a pas de pôles différents de 0.

On suppose que 0 est un pôle de f tel que $f(x) = \dfrac{g(x)}{x^l}$, où $l \in \mathbb{N}^*$ et $g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$, $g(0) \neq 0$.

En remplacant f dans l'équation (E') et on montre que g satisfait une équation du même type, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{s} A_i \frac{g(q^i x)}{q^{il} x^l} = \frac{1}{x^l} \sum_{i=0}^{s} A_i \frac{g(q^i x)}{q^{il}} &= B(x)\\ \sum_{i=0}^{s} \frac{A_i}{A_0} \frac{g(q^i x)}{q^{il}} &= \frac{x^l B(x)}{A_0}, \quad A_0 \neq 0.\end{aligned}$$

Donc sans perte de généralité, on suppose que $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$, on a

$$\begin{aligned}A_0 f(x) &= -\sum_{i=1}^{s} A_i\, f(q^i x) + B(x)\\ f(x) &= -\sum_{i=1}^{s} \frac{A_i}{A_0}\, f(q^i x) + \frac{B(x)}{A_0}\end{aligned}$$

Donc

$$f(x) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i\, f(q^i x) + \beta(x), \text{ où } \alpha_i = \frac{-A_i}{A_0}, i = 1, ..., s \text{ et } \beta(x) = \frac{B(x)}{A_0}. \tag{3.1}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$|f|(|q|^{-k}) \leq \max\{|\beta|(|q|^{-k}), |\alpha_1||f(qx)|(|q|^{-k}), ..., |\alpha_s||f(q^s x)|(|q|^{-k})\}$$

D'après le lemme 3.1, on trouve que

$$|f|(|q|^{-k}) \leq \max\{|\beta|(|q|^{-k}), |\alpha_1||f|(|q|^{1-k}), ..., |\alpha_s||f|(|q|^{s-k})\}$$

puisque $0 < |q| < 1$, on a $|q|^{1-k} \geq ... \geq |q|^{s-k}$, donc $|f|(|q|^{1-k}) \geq ... \geq |f|(|q|^{s-k})$, on déduit

$$\begin{aligned}|f|(|q|^{-k}) &\leq \max\{|\beta|(|q|^{-k}), |\alpha_1||f|(|q|^{1-k}), ..., |\alpha_s||f|(|q|^{1-k})\}\\ |f|(|q|^{-k}) &\leq \max\{|\beta|(|q|^{-k}), \lambda|f|(|q|^{1-k})\}, \text{ et } \lambda = \max_{1 \leq i \leq s} |\alpha_i|. \qquad (3.2)\end{aligned}$$

on a $|q|^{1-k} \leq |q|^{-k}$, donc $|\beta|(|q|^{1-k}) \leq |\beta|(|q|^{-k})$, on déduit

$$\begin{aligned}|f|(|q|^{1-k}) &\leq \max\{|\beta|(|q|^{1-k}), \lambda|f|(|q|^{2-k})\}\\ &\leq \max\{|\beta|(|q|^{-k}), \lambda|f|(|q|^{2-k})\}\end{aligned}$$

d'où

$$|f|(|q|^{-k}) \leq \max\{|\beta|(|q|^{-k}), \lambda^2|f|(|q|^{2-k})\}$$

De la même façon, on trouve que

$$|f|(|q|^{2-k}) \leq \max\{|\beta|(|q|^{2-k}), \lambda|f|(|q|^{3-k})\} \leq \max\{|\beta|(|q|^{-k}), \lambda|f|(|q|^{3-k})\}.$$

Donc

$$\begin{aligned}|f|(|q|^{-k}) &\leq \max\{|\beta|(|q|^{-k}), \lambda^3|f|(|q|^{3-k})\}\\ &\vdots\\ |f|(|q|^{-k}) &\leq \max\{|\beta|(|q|^{-k}), \lambda^k|f|(1)\}\end{aligned}$$

On note $r_k = |q|^{-k}$, donc $k = \dfrac{\log r_k}{\log |q|^{-1}}$, on a l'inégalité

$$\begin{aligned}|f|(r_k) &\leq \max\{|\beta|(r_k), \lambda^k|f|(1)\}\\ \log|f|(r_k) &\leq \max\{\log|\beta|(r_k), k\log\lambda + \log|f|(1)\}\\ &= \max\{\log|\beta|(r_k), \frac{\log\lambda}{\log|q|^{-1}}\ \log r_k + \log|f|(1)\} \qquad (3.3)\end{aligned}$$

$(r_k)_{k\geq 1}$ une suite croissante qui tend vers $+\infty$, et $\beta(x) = \dfrac{B(x)}{a_0} \in \mathbb{K}[X]$, donc $\log|\beta|(r_k) = O(\log r_k)$. D'où $\log|f|(r_k) = O(\log r_k),\ \ k \longrightarrow +\infty$.

On déduit d'aprés l'inégalité (3.3) que $\log|f|(r) = O(\log r),\ r \longrightarrow +\infty$. Donc $T(r,f) = O(\log r)$, d'aprés la proposition 2.3, on a $f \in \mathbb{K}[X]$.

II. Cas des coefficients non-constants

Considérons maintenant le cas plus général, et supposons que dans l'équation l'équation fonctionnelle

$$\sum_{i=0}^{s} A_i(x)\ f(q^i x) = B(x) \qquad (E)$$

les coefficients $B(x), A_0(x), ..., A_s(x)$ sont des fonctions rationnelles tel que $A_0(x)A_s(x) \neq 0$ et $A_0(x), ..., A_s(x)$ ne sont pas tous constant. On observe d'abord qu'on peut prendre $B(x) = 0$ sans perte de généralité. En effet, si $B(x) \neq 0$, nous avons $B(x)\sum_{i=0}^{s} A_i(qx)f(q^{i+1}x) - B(qx)\sum_{i=0}^{s} A_i(x)f(q^i x) = 0$, qui est une équation non triviale, et sans second membre et elle est satisfaite par f. On peut aussi supposer que $A_0(x), ..., A_s(x)$ sont des polynômes. Dans toute la suite, on suppose que l'équation (E) est de la forme

$$\sum_{i=0}^{s} A_i(x)f(q^i x) = 0 \qquad (E'')$$

où $A_0(x), ..., A_s(x)$ $(s \geq 1)$ sont des polynômes de $\mathbb{K}[x]$ tel que $A_0(x)A_s(x) \neq 0$.

Qestion. Cette équation admet-elle des solutions $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ non-rationnelles ?. L'exemple suivant fournit une réponse positive et donne une indication sur le comportement des solutions méromorphes de l'équation (E).

Exemple. Soit $q \in \mathbb{K}$, $0 < |q| < 1$. On considère la fonction

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} q^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n$$

Il est facile de voir que $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})\backslash\mathbb{K}[X]$

En effet, on sait que $0 < |q| < 1$, et

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}\right| = \lim_{n\to\infty}|q^n| = \lim_{n\to\infty}|q|^n = 0.$$

Donc $R = +\infty$, d'où $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})\backslash\mathbb{K}[X]$.

On a aussi $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})\backslash\mathbb{K}[X]$ est une solution de l'équation

$$f(x) - xf(qx) = x$$

En effet

$$\begin{aligned}
f(x) - xf(qx) &= \sum_{n\geq 1} q^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n - x\sum_{n\geq 1} q^{\frac{n(n-1)}{2}} q^n\, x^n \\
&= \sum_{n\geq 1} q^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n - \sum_{n\geq 1} q^{\frac{n(n-1)}{2}} q^n\, x^{n+1} \\
&= x + \sum_{n\geq 2} q^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n - \sum_{n\geq 1} q^{\frac{n(n+1)}{2}} x^{n+1} \\
&= x + \sum_{n\geq 1} q^{\frac{n(n+1)}{2}} x^{n+1} - \sum_{n\geq 1} q^{\frac{n(n+1)}{2}} x^{n+1} \\
&= x + \sum_{n\geq 1} \left[q^{\frac{n(n+1)}{2}} - q^{\frac{n(n+1)}{2}}\right] x^{n+1} = x.
\end{aligned}$$

D'aprés la proposition 2.3, on a $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})\backslash\mathbb{K}[X] \Leftrightarrow T(r,f) \neq O(\log r),\quad r \longrightarrow +\infty$

$$\Leftrightarrow \quad \log r = \circ(T(r,f)),\quad r \longrightarrow +\infty.$$

En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite de nombres positifs $(r_k)_{k\geq 1}$, tels que $r_k = |q|^{(\frac{1}{2}-k)}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ fixe, on a

$$|a_n| r_k = |q|^{\frac{n(n-1)}{2}} |q|^{\frac{n(1-2k)}{2}} = |q|^{\frac{n(n-2k)}{2}},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

on déduit que

$$\begin{aligned}
|f|(r_k) = \max_{n\geq 1} |a_n|\, r_k &= \max_{n\geq 1} |q|^{\frac{n(n-2k)}{2}} \\
&= \max_{n\geq 1} |q|^{\frac{n^2-2nk+k^2-k^2}{2}} = \max_{n\geq 1} |q|^{\frac{(n-k)^2-k^2}{2}} \\
&= |q|^{\frac{-k^2}{2}} \max_{n\geq 1} |q|^{\frac{(n-k)^2}{2}} = |q|^{\frac{-k^2}{2}} |q|^{\frac{(k-k)^2}{2}} = |q|^{\frac{-k^2}{2}}.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} r_k = |q|^{(\frac{1}{2}-k)} &\Leftrightarrow -\log r_k = (\frac{1}{2} - k)\ \log |q|^{-1} \\ &\Leftrightarrow \log r_k = (k - \frac{1}{2})\ \log |q|^{-1} \\ &\Leftrightarrow k = \frac{\log r_k}{\log |q|^{-1}} + \frac{1}{2} = \frac{2\log r_k + \log |q|^{-1}}{2\log |q|^{-1}}. \end{aligned}$$

Donc $\log |f|(r_k) = \log |q|^{\dfrac{-k^2}{2}} = \dfrac{k^2}{2} \log |q|^{-1}$

$$= \frac{4(\log r_k)^2 + 4(\log r_k)\log |q|^{-1} + (\log |q|^{-1})^2}{2 \times (2\log |q|^{-1})^2} \log |q|^{-1}$$

$$= \frac{4(\log r_k)^2 + 4(\log r_k)\log |q|^{-1} + (\log |q|^{-1})^2}{8\log |q|^{-1}}.$$

On a $T(r_k, f) = O((\log r_k)^2),\ k \to +\infty$ et $(\log r_k)^2 = O(T(r_k, f)),\ k \to +\infty$

En effet

$T(r_k, f) = N(r_k, f) + \log^+ |f|(r_k)$, puisque $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$, le terme $N(r_k, f) = 0$.

D'aprés l'estimation de $\log |f|(r_k)$, on trouve que $T(r_k, f) = O((\log r_k)^2),\ k \to +\infty$ et $(\log r_k)^2 = O(T(r_k, f)),\ k \to +\infty$.

La suite $(r_k)_{k\geq 0}$ est croissante et tend vers $+\infty$, tel que $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k = r$, on a

$T(r, f) = O((\log r)^2),\ r \to +\infty$ et $(\log r)^2 = O(T(r, f)),\ r \to +\infty$

Théorème 3.2 *Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ est une solution de l'équation (E), alors*

$$T(r,f) = O((\log r)^2),\ r \to +\infty$$

On a besoin des résultats suivants pour la démonstration du théorème 3.2

Proposition 3.1 *Soit f une solution méromorphe dans $\mathbb{K}$ de l'équation (E"). Alors, si α est un pôle non nul de f, il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ et un zéro θ de A_0, $\theta \neq 0$ tels que $\alpha = q^{-m}\theta$ et $w_\theta(A_0) + w_\theta(f) \geq 0$.*

Corollaire 3.1 *Dans l'équation (E''), on suppose que le polynôme $A_0(x)$ est de la forme ax^m, avec $a \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ et $m \in \mathbb{N}$. Alors pour toute solution $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ de l'équation (E'') (sans pôle à l'origine) est une fonction entière.*

Démonstration du théorème 3.2

Comme indiqué ci-dessus, tout le problème est ramené au cas de L'équation (E'')

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ une solution de l'équation (E) tel que $f(0) \neq \infty$.

1. Estimation de $N(r,f)$.

   Si le polynôme $A_0(x)$ est de la forme ax^m, par le corollaire 3.1, la fonction $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ est entière, donc $N(r,f) = 0$. Supposons donc que $A_0(x)$ admet au moins un zéro différent de 0 et soit $\mathcal{Z} = \{x \in \mathbb{K}\backslash\{0\}/A_0 = 0\}$, $\rho = \min\{|x|/x \in \mathcal{Z}\}$.

   Pour tout $r > 0$, assez grand, nous avons $N(r,f) = -\sum_{0<|\alpha|\leq r, f(\alpha)=\infty} w_\alpha(f) \log \dfrac{r}{|\alpha|}$.

   Par la proposition 3.1, on a $\rho \leq \min\{|x|/f(x) = \infty\}$, donc

   $N(r,f) \leq \Big(-\sum_{0<|\alpha|\leq r, f(\alpha)=\infty} w_\alpha(f)\Big) \log \dfrac{r}{\rho}$.

   D'après la proposition 3.1, tout pôle α de f dans $D(0,r)\backslash\{0\}$ est de la forme $\alpha = q^{-n}\beta$, où $\beta \in \mathcal{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Ceci implique que : $n \leq \left[\dfrac{1}{\log|q|} \log \dfrac{\rho}{r}\right]$, (où [t] désigne la partie entière du nombre réel t).

   D'où, tous les pôles α se produisent dans la somme $\sum_{0<|\alpha|\leq r, f(\alpha)=\infty} w_\alpha(f)$ sont à prendre parmi les éléments de l'ensemble $\left\{q^{-n}\beta/\beta \in \mathcal{Z}, 0 \leq n \leq \left[\dfrac{1}{\log|q|} \log \dfrac{\rho}{r}\right]\right\}$, leurs cardinal est borné par $\left[1+\dfrac{1}{\log|q|}\log\dfrac{\rho}{r}\right]\times$ card $\mathcal{Z}$. On a

$N(r,f)\leq\log\dfrac{r}{\rho}\times\left[1+\dfrac{1}{\log|q|}\log\dfrac{\rho}{r}\right]\times$ card $\mathcal{Z}\leq\log\dfrac{r}{\rho}\times\left(1+\dfrac{1}{\log|q|}\log\dfrac{\rho}{r}\right)\times$ card $\mathcal{Z}$

nous avons

(3.4) $N(r,f)=O((\log r)^2), r\to+\infty.$

2. Estimation de $\log|f|(r)$.

   On suppose(sans perte de généralité) que f n'a ni zéro ni un pôle en 0. Il existe $\tau>0$ telle que f n'a ni zéros ni un pôles dans $D(0,\tau)$, donc $|f|(t)$ est constante pour $0\leq t\leq\tau$. D'après l'équation (E"), pour tout $r>0$, on a

   $|f|(r)\leq\max\left\{\left|\dfrac{A_1}{A_0}\right|(r)|f|(|q|r),\left|\dfrac{A_2}{A_0}\right|(r)|f|(|q|^2r),...,\left|\dfrac{A_s}{A_0}\right|(r)|f|(|q|^sr)\right\}.$

   Donc, il existe $\lambda>1$,tel que pour tout $r>0$, on a

   (3.5) $|f|(r)\leq r^{\lambda}\max\left\{|f|(|q|r),|f|(|q|^2r),...,|f|(|q|^sr)\right\}.$

   Maintenant, pour $r>0$ est assez grand, et l'entier $k=\left[\dfrac{\log r-\log\tau}{-\log|q|}\right]+1$ (en particulier, $k\geq s$), par (3.5) on a

   (3.6) $|f|(r)\leq r^{\lambda}\max\left\{|f|(|q|r),|f|(|q|^2r),...,|f|(|q|^sr),...,|f|(|q|^kr)\right\}.$

   On pose

   $$(3.7)\quad\begin{cases}\mu_1 & =|f|(|q|^kr)\\ \mu_2 & =\max\{|f|(|q|^{k-1}r),|f|(|q|^kr)\}\\ & \vdots\\ \mu_{k-1} & =\max\{|f|(|q|^2r),...,|f|(|q|^sr),...,|f|(|q|^kr)\}\\ \mu_k & =\max\{|f|(|q|r),|f|(|q|^2r),...,|f|(|q|^sr,...,|f|(|q|^kr)\}\end{cases}$$

   Donc, (3.6) devient

   (3.8) $|f|(r)\leq r^{\lambda}\mu_k.$

   D'autre part, on a $|q|\tau\leq|q|^kr<r$. Le fait que $|f|(t)$ est constante pour $0\leq t\leq\tau$, on a

   (3.9) $|f|(|q|^kr)=|f|(|q|^{k+1}r)=|f|(|q|^{k+2}r)=...=\mu_1=C=$ constant.

On remplace r dans (3.6), par $|q|r, |q|^2r, ..., |q|^kr$, on obtient

$$(3.10)\quad \begin{cases} |f|(|q|r) & \leq (|q|r)^\lambda \mu_{k-1} \\ |f|(|q|^2r) & \leq (|q|^2r)^\lambda \mu_{k-2} \\ & \vdots \\ |f|(|q|^{k-2}r) & \leq (|q|^{k-2}r)^\lambda \mu_2 \\ |f|(|q|^{k-1}r) & \leq (|q|^{k-1}r)^\lambda \mu_1 \end{cases}$$

Par (3.7) et (3.10), on trouve pour $r > 0$

$$(3.11)\quad \begin{cases} \mu_1 & = C \\ \mu_2 & \leq (|q|^{k-1}r)^\lambda \mu_1 \\ & \vdots \\ \mu_{k-2} & \leq (|q|^2r)^\lambda \mu_{k-2} \\ \mu_{k-1} & \leq (|q|^{k-1}r)^\lambda \mu_{k-1} \end{cases}$$

Par (3.8) et (3.11), nous avons $|f|(r) \leq r^\lambda (r|q|)^\lambda (r|q|^2)^\lambda ... (r|q|^{k-1})^\lambda C$, donc

(3.12) $|f|(r) \leq r^{k\lambda} |q|^{\frac{k(k-1)}{2}\lambda} C$

Il est facile de vérifier

(3.13) $\log^+ |f|(r) = O((\log r)^2), r \to +\infty.$

Enfin, par les relations (3.4) et (3.13), on trouve

(3.14) $T(r, f) = O((\log r)^2), r \to +\infty.$

Ce qui termine la démonstration du théorème 3.2.

CONCLUSION

On a vu que dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, des travaux divers sont dédiés à la résolution des équations fonctionnelles aux q-différences. L'un des buts de notre recherche a été de généraliser certains de ces résultats aux corps ultra-métriques de caractéristique nulle. Comme dans le cas classique, notre méthode est basée sur l'utilisation de la **théorie de Nevanlinna ultra-métrique** pour caractériser la taille des solutions méromophes de l'équation fonctionnelle aux q-différence, et d'étudier le comportement de leur ordre de croissance.

Notations

Nous utilisons les notations suivantes tout au long de ce travail

Bibliographie

[1] **A. Boutabaa**, *Applications de la théorie de Nevanlinna p-adique*, Collectanea Mathematica 42,1 p. 75-93,(1991).

[2] **A. Boutabaa**, *On some p-adic functional equations.* Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics (Marcel Dekker)(1997).

[3] **A. Boutabaa**, *Théorie de Nevanlinna p-adique.* Manuscripta Math.67, 251-269(1990).

[4] **A. Boutabaa**, *Sur les courbes holomorphes p-adiques.* Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. V, no 1(1996), pp29-52.

[5] **A. Boutabaa and A. Escassut**, *Urs and Ursim for p-adic meromorphic functions inside a disc.* Proc. of the Edinburgh Mathematical Society 44, 485-504(2001).

[6] **A. Boutabaa and A. Escassut**, *On uniquenss of p-adic meromorphic functions.* Proceedings of the AMS 126, 9, 2557-2568 (1998).

[7] **A. Boutabaa and A.Escassut**, *Uniqueness of p-adic meromorphic functions.* C. R. Acad. Sci. Paris, t.325, Série I, 1997, pp 571-575.

[8] **A. Boutabaa and A. Escassut**, *Applications of the p-adic Nevanlinna theory to functional equations.* Annales de l'Institut Fourier, T.50(3),p751-766. (2000).

[9] **A. Boutabaa and J.P. Bézivin**, *Decomposition of p-adic meromorphic functions.* Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 2, no 1(1995) pp51-60.

[10] **A. Escassut**, *Analytic Elements in p-adic Analysis.* Word Scientific Publishing (1995).

[11] **A.Escassut**, *P-adic distribution value, in : Some Topics on Value Distribution and Differentiability in complex and p-adic Analysis.* Science Press,2008.

[12] **A. Escassut, W. Tutschke and C. C. Yang**, *Some Topics on Value Distribution and Differentiability in Complex and p-adic Analysis.* Mathematics Monograph Series 11, Science Press Beijing (2008).

[13] **A.F.O. Jacqueline**, *Distribution de valeurs des fonctions meromorphes ultrametriques, application de la theorie de Nevanlinna.* These de Doctorat, Université Blaise Pascal (2002).

[14] **A. Robert**, *A course in p-adic Analysis.* Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, No. 198(2000).

[15] **A. Khrennikov**, *Non-Archimedean Analysis.* Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1997.

[16] **A.J. Baker**, *An intraduction to p-adic Numbers and p-adic Analysis.* Departement of Mathématics, University of Glasgow, G128QW, Scotland (2004).

[17] **B. Diarra**, *Analyse p-adique.* Cours DEA-Algèbre commutative FAST-Université du Mali. Décembre 1999-Mars 2000.

[18] **C.C. Rodrigàñez**, *P-adic Numbers and non-archimedean Valuation.* URL :http :// www.sunall.mat.Ucm.es.

[19] **H.H. Khoai**, *Sur la théorie de Nevanlinna p-adique*, Groupe de travail d'analyse ultramétrique, towe 15(1987-1988),P. 35-40.

[20] **J.P. Bézévin** , *Dynamique des fractions rationnels p-adiques.* Cours DEA de Mathématiques, Université de CAEN. 23 mai 2005.

[21] **J. Heittokangas, I. Laine, J. Rieppo and D. Yang**, *Meromorphic solutions of some linear functional equations.* Aequationes Math. 60(200)p. 148-166.

[22] **L. Brekke**, *P-Adic Numbers in Physics.* Phys. Rep.233, 1-66, 1993.

[23] **L. Ping and C.C. Yang**, *On the unique range set of meromorphic functions.* American Mathematical Society,(1996).

[24] **N. Koblitz**, *P-adic Analysis and Zeta Functions*, Springer-verlag (1984).

[25] **P.C. Hu, C.C. Yang** , *Meromorphic function over non-Archimedean Field.* Kluwer Academic Publishers,2000.

[26] **R. Nevanlinna**, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes.* Paris, 1929.

[27] **S. Katok**, *Real and p-adic analysis.* Cours notes for Math 497 C,Mass program, Fall 2000 (2001).

[28] **W.H. Schikhof**, *Ultrametric calculus. An introduction to p-adic analysis.* Combridge University Press (1984).

[29] **W. Bergweiler, K. Ishizaki and N. Yanagihara**, *Meromorphic solutions of some functional equations*, I.Aequationes Math. 63(2002)p. 140-151.

[30] **W. Bergweiler and W.K .Hayman**, *Zeros of Solutions of a Functional Equation.* Computational Methods and Function Theory Vol. 3No 1(2003)p. 55-78 .

[31] **W. K. Hayman**, *Meromerphic functions.* Clarendon Press, Oxford.(1964).

[32] **Y. Amice**, *Les nombres p-adiques.* Presses Universitaire de France (1975).

ملخص

يخصص هذا العمل لنظرية Nevanlinna في حقل اولتر متري، وبعض تطبيقاتها على التوابع الميرومورفية . وتستند هذه النظرية في حالة الأعداد المركبة على "نظريتين أساسيتين" تكمنان في النظرية الأولى والثانية ل Nevanlinna. لذلك نحن بحاجة لإنشاء المفاهيم في حقل اولتر متري و التحقق من معظم العلاقات والخواص الموجودة في النظرية الكلاسيكية ل Nevanlinna.

النتيجة الرئيسية لهذا العمل هو تطبيق هذه النظرية في دراسة الحلول المرومورفية للمعادلة الفرقية

$$\sum_{i=0}^{s} \mathrm{A_i}(\mathrm{x})\ \mathrm{f}\left(\mathrm{q^i x}\right) = \mathrm{B}(\mathrm{x}),\ \mathrm{q} \in \mathrm{k}, 0\ < \mathrm{q}\ < 1,\ \mathrm{A_0}(\mathrm{x}),..,\mathrm{A_s}(\mathrm{x}), \mathrm{B}(\mathrm{x}) \in \mathrm{k}(\mathrm{x}),\ \mathrm{A_0}(\mathrm{x})\ \mathrm{As}\ (\mathrm{x}) \neq 0.$$

أولا، نفرض أن $A_0(x),..,A_s(x)$ عناصر ثابتة و $B(x) \in \mathrm{k}[x]$ ، بحيث k حقل اولتر متري تام و مغلق جبريا، فان الحلول كسرية .و بعد ذلك، ندرس حلول المعادلة المذكورة أعلاه في الحالة العامة، وإعطاء ميزة التزايد للحلول.

Résumé

Ce travail est consacré à la théorie de Nevanlinna ultra-métrique qui consiste à étudier les fonctions méromorphes. Cette théorie repose dans le cas complexe sur deux théorèmes fondamentaux appelés premier et deuxième théorème fondamental de Nevanlinna. Il est donc question d'établir l'analogue ultra-métrique de la fonction caractéristique *T(r, f)* de Nevanlinna, et de prouver aussi l'analogue de ces deux théorèmes fondamentaux et de donner les relations de défaut de la théorie classique de Nevanlinna ultra-métrique.

Le résultat principal de ce travail est l'application de cette théorie à l'étude des solutions méromorphes de l'équation fonctionnelle

$$\sum_{i=0}^{s} \mathrm{A_i}(\mathrm{x})\ \mathrm{f}\left(\mathrm{q^i x}\right) = \mathrm{B}(\mathrm{x}),\ \textbf{où}\, \mathrm{q} \in \mathrm{k}, 0\ < \mathrm{q}\ < 1,\ \mathrm{A_0}(\mathrm{x}),..,\mathrm{A_s}(\mathrm{x}), \mathrm{B}(\mathrm{x}) \in \mathrm{k}(\mathrm{x}),\ \mathrm{A_0}(\mathrm{x})\ \mathrm{As}\ (\mathrm{x}) \neq 0.$$

D'abord, nous montrons que, si $A_0(x),...,A_s(x)$ sont constants et $B(x) \in \mathrm{k}[x]$ où k est un corps ultra-métrique complet et algébriquement clos, alors les solutions sont des fonctions rationnelles. Ensuite, nous examinons les solutions de l'équation ci-dessus dans un cas plus général et nous donnons quelques caractérisations de l'ordre de croissance de ces solutions.

Abstract

This work is devoted to the theory of Nevanlinna ultra-metric that is to study the meromorphic functions. This theory is based in the complex case on two fundamental theorems called the first and second fundamental theorem of Nevanlinna. So we need to establish the ultra-metric analogue of the characteristic function T (r, f) of Nevanlinna, and also prove the analogue of these two fundamental theorems and give the relations of default of the classical theory of Nevanlinna ultra-metric.

The main result of this work is the application of this theory to the study of meromorphic solutions of functional equation

$$\sum_{i=0}^{s} \mathrm{A_i}(\mathrm{x})\ \mathrm{f}\left(\mathrm{q^i x}\right) = \mathrm{B}(\mathrm{x}),\ \textbf{where}\, \mathrm{q} \in \mathrm{k}, 0\ < \mathrm{q}\ < 1,\ \mathrm{A_0}(\mathrm{x}),..,\mathrm{A_s}(\mathrm{x}), \mathrm{B}(\mathrm{x}) \in \mathrm{k}(\mathrm{x}),\ \mathrm{A_0}(\mathrm{x})\ \mathrm{As}\ (\mathrm{x}) \neq 0.$$

First, we show that, if $A_0(x),...,A_s(x)$ be constants and $B(x) \in \mathrm{k}[x]$, such that k is a complete ultra-metric algebraically closed field, then the solutions are rational functions. Next, we examine solutions of the above equation in a more general case and give some characterizations of the order of growth of these solutions