

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Mohammed Seddik Ben Yahia-Jijel



Faculté des Sciences Exactes et Informatique  
Département de Mathématiques

N d'ordre : .....

N de séries : .....

### **Mémoire**

Présenté pour l'obtention du diplôme de

### **Master**

**Spécialité** Mathématiques Appliquées

**Option** EDP et applications

### **Thème**

**Analyse des systèmes dynamiques non linéaires**  
**Application : Problème proie-prédateur**

Présenté par

**Deffas Linda**

**Hamoud Rachida**

Devant le jury composé de

Président	<b>T. Haddad</b>	Prof.	Université de Jijel
Encadreur	<b>W. Khellaf</b>	M.C.B.	Université de Jijel
Examineur	<b>A. Nasri</b>	M.C.A.	Université de Jijel

**Promotion 2018/2019**

# Remerciements

En préambule à ce mémoire nous remercions **ALLAH** qui nous a aidé et nous a donné la patience et le courage durant ces longues années d'étude.

Nous souhaitons adresser nos remerciements les plus sincères aux personnes qui nous ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire et particulièrement notre encadreur **W. Khellaf**. D'avoir voulu proposer et assurer la direction de ce mémoire, pour sa confiance et ses conseils judicieux et sa totale disponibilité.

Nous tenons à remercier sincèrement les membres de jury **T. Haddad** et **A. Nasri** qui ont accepté de jurer notre travail.

On n'oublie pas nos parents, membres de nos familles pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

*Merci à tous et à toutes.*

# Dédicace

*Je dédie ce travail de fin d'études.*

*À mes chers parents ma mère et mon père*

*Pour leur patience, leur amour, leur soutien et leurs*

*encouragement.*

*À mes frères.*

*À toute ma famille.*

*À mon binome Rachida et toute sa famille*

*À mes amies et mes camarades.*

*À tous qui m'ont aidé de près ou de loin.*

*À tous mes enseignants depuis le primaire jusqu'à maintenant.*

*Enfin, je dédie ce mémoire à ceux qui m'aiment et surtout ceux que j'aime.*

**Linda**

## Dédicace

*Je dédie ce travail à ceux qui m'ont donné leur amour, m'ont appris la persévérance, le goût de la victoire et la joie de tous les jours.*

*À la mémoire de mon père \*saleh\* qui a fait de moi ce que je suis aujourd'hui par ses sacrifices , qu Allah te garde dans son vaste paradis.*

*À mon mère \*yamina\* pour son soutien moral et ses encouragements.*

*À ma grand-mère \*saada\* sauvé Dieu.*

*À mes frères : Yousef, Nadjib, Mohammed, Radhwane, Fares.*

*À ma soeur Hania , ma soeur Ratiba et son mari et ses enfants chacun son nom.*

*À toute ma famille*

*À mon binome Linda et toute sa famille*

*À mes amis de promotion*

*À tous mes enseignants depuis le primaire jusqu'à maintenant.*

*Enfin, je dédie ce mémoire à ceux qui m'aiment et surtout ceux que j'aime.*

**Rachida**

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1 Systèmes dynamiques et stabilité</b>	<b>13</b>
1.1 Notations et définitions . . . . .	13
1.1.1 Théorème d'existence et d'unicité . . . . .	14
1.1.2 Flot et trajectoires . . . . .	16
1.1.3 Classifications des solutions des systèmes dynamiques . . . . .	19
1.2 Stabilité des systèmes dynamiques . . . . .	20
1.2.1 Stabilité des systèmes linéaires . . . . .	21
1.2.2 Stabilité des systèmes non linéaires Linéarisation . . . . .	22
1.2.3 Classification des points singuliers . . . . .	24
1.2.4 Fonction de Lyapunov . . . . .	25
1.3 Sous-variété centrale et formes normales . . . . .	26
1.3.1 Sous-variété centrale . . . . .	27
1.3.2 Formes normales . . . . .	28
1.4 Types des bifurcations . . . . .	30
1.4.1 Bifurcations locales . . . . .	31
1.4.2 Bifurcations globales . . . . .	31
1.4.3 Codimension d'une bifurcation . . . . .	32
1.4.4 Bifurcations dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	32

---

<b>2</b>	<b>Étude d'un modèle proie-prédateur avec une réponse fonctionnelle de type Holling IV</b>	<b>44</b>
2.1	Présentation du modèle mathématique . . . . .	46
2.2	Étude de la persistance du modèle . . . . .	46
2.3	Stabilité locale et bifurcations . . . . .	49
2.3.1	Étude de la stabilité des points d'équilibre triviaux . . . . .	51
2.3.2	Étude la stabilité des points d'équilibre intérieurs . . . . .	56
<b>3</b>	<b>Étude de cycle limite</b>	<b>61</b>
3.1	Cycle limite . . . . .	61
3.1.1	Absence de cycle limite . . . . .	61
3.2	Existence de cycle limite . . . . .	65
3.2.1	Unicité de cycle limite . . . . .	67
	<b>Bibliographie</b>	<b>75</b>

---

# TABLE DES FIGURES

1.1	Diagramme de la stabilité. . . . .	22
1.2	Illustration du portrait de phase local . . . . .	24
1.3	Types des secteurs. . . . .	25
1.4	Portrait de phase d'un système linéaire hyperbolique, de dimension 3. . . . .	26
1.5	Diagramme de la bifurcation fourche. . . . .	34
1.6	Diagramme de la bifurcation noeud-col . . . . .	35
1.7	Diagramme de la bifurcation transcritique . . . . .	35
1.8	Diagramme de la bifurcation de Hopf . . . . .	36
1.9	Cascade de bifurcations pour $f(x) = rx(1 - x)$ . . . . .	37
1.10	Bifurcation homocline : Pour des petites valeur de paramètres . . . . .	38
1.11	Portrait de phase de système (1.24) pour $a = -1$ . . . . .	40
1.12	Portrait de phase de système (1.24) pour $a = 0$ . . . . .	41
1.13	Portrait de phase de système (1.24) pour $a = 1$ . . . . .	41
1.14	Partition de l'espace des paramètres. . . . .	43
2.1	Portrait de phase du système (2.2) où $\mu^2 - 4aD^2 = 0$ mais $\frac{\mu}{2D} < k < \frac{\mu}{D}$ . . . . .	57
2.2	Portrait de phase du système (2.2) où $\mu^2 - 4aD^2 = 0$ mais $k > \frac{\mu}{D}$ . . . . .	57
3.1	Portrait de phase du système (2.2) où $4aD^2 < \mu^2 < \frac{16}{3}aD^2$ et $x_1 < k < x_2$ . . . . .	64
3.2	Portrait de phase du système (2.2) où $\mu^2 > \frac{16}{3}aD^2$ et $x_3 < k < x_2$ . . . . .	66
3.3	Système(3.4) possède au plus un cycle limite. . . . .	69
3.4	Portrait de $\Phi(y) = F(x)$ dans $\Omega_4$ ou $k \leq \frac{\mu}{D}$ . . . . .	71

3.5 Portrait de phase du système (2.2) où  $4aD^2 < \mu^2 < \frac{16}{3}aD^2$  et  $x_2 < k < x_3$  . . . . 73



---

# INTRODUCTION

D'une manière générale, les modèles mathématiques constituent des outils de compréhension du fonctionnement des systèmes naturels et de prédiction de leurs évolutions. Nous nous intéresserons ici au traitement de systèmes dynamiques continus et déterministes, c'est-à-dire régis par des systèmes d'équations différentielles ordinaires. Ces modèles sont essentiellement utilisés dans le cadre d'études de dynamique de populations et des écosystèmes, mais les techniques sont également applicables à des systèmes moléculaires, ou, en élargissant le champ, à des modèles spatiaux, d'épidémiologie notamment [1, 3].

**Dynamiques de population** Nous allons nous intéresser à certains systèmes d'équations différentielles ordinaires autonomes (EDA) modélisant des problèmes bio-écologiques de type Kolmogorov :

$$\frac{dX_i}{dt} = X_i F_i(X, \alpha_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

où  $n$  désigne le nombre d'espèces considérées,  $X_i$  est la densité de la  $i$ ème espèce,  $X = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $F_i$  décrit le taux de croissance de la  $i$ ème espèce et un vecteur  $\alpha_i$  de paramètre de contrôle. Les modèles proie-prédateur qui vont être étudiés sont régis par deux principes. Le premier est que la dynamique de la population peut être décomposée en processus de naissance ou en processus de mortalité,

$$\frac{dX}{dt} = \text{croissance-mortalité.}$$

Le deuxième principe est la conservation de la masse (Linzburg 1998) qui dit que la croissance du prédateur est une fonction directe de ce qu'il a mangé. Par ailleurs nous supposons que

l'espèce du niveau  $i$  est l'unique prédateur de l'espèce du niveau  $i - 1$ .

### Modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra

Une des premières descriptions de la dynamique d'une population se trouve vers la fin du 18<sup>ème</sup> siècle quand Maltus (1798) introduisit ce qui est connu aujourd'hui sous le nom de "croissance Maltusienne" : une population augmente exponentiellement tant que ses ressources ne sont pas limitantes. En désignant par  $X(t)$  l'abondance de la population au temps  $t$  cette croissance peut-être décrite par l'équation différentielle,

$$\frac{dX(t)}{dt} = rX(t),$$

où  $r$  est le taux de croissance.

L'idée qu'une ressource limitante peut arrêter la croissance d'une population a été introduite empiriquement par Verhulst (1838) dans ce qui est appelé aujourd'hui le modèle de croissance logistique,

$$\frac{dX}{dt} = rX\left(1 - \frac{X}{K}\right).$$

La capacité de soutien  $K$  désigne une abondance limite au dessus de laquelle la croissance de la population devient négative, tandis qu'au dessous, la croissance est positive.  $K$  représente donc une valeur d'équilibre vers laquelle l'abondance de la population converge.  $K$  peut aussi être interprété comme une mesure des ressources disponibles.

En faite, il existe autre mécanisme qui empêche la population de croître exponentiellement : le cas où elle est consommée par une autre population excédant son taux de croissance. Une telle interaction proie-prédateur a été décrite originellement par deux chercheurs travaillant indépendamment, Lotka (1924) et Volterra (1926). En désignant par  $Y(t)$  l'abondance de cette deuxième population, le prédateur, l'interaction est décrite par les équations différentielles,

$$\frac{dX}{dt} = rX - aXY,$$

$$\frac{dY}{dt} = eaXY - \mu Y,$$

où  $a$  représente le taux d'attaque,  $e$  l'efficacité de conversion (pourcentage de la biomasse consommée qui est convertie en biomasse de prédateur) et  $\mu$  le taux de mortalité du prédateur. Ce système va faire des cycles éternels qui passent périodiquement par les valeurs initiales des abondances de la proie et du prédateur.

## Formulation générale d'un système proie-prédateur

Depuis le modèle de Lotka-volterra, de nombreuses études ont contribué à exprimer de différentes manières les taux de croissance des populations et leurs interactions. Les systèmes proie-prédateur ainsi générés exhibent des dynamiques très variées.

Soit la formulation très générale d'un système proie-prédateur

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = f(X) - YF(X, Y), \\ \frac{dY}{dt} = YG(X, Y). \end{cases}$$

où  $X(t)$  et  $Y(t)$  désignent respectivement les densités de proies et de prédateurs à l'instant  $t$ .

Dans un système généralisé, trois fonctions sont à spécifier :

- $f(X)$  : le taux de croissance de la population de la proie en l'absence de prédateurs.
- $F(X, Y)$  : la réponse fonctionnelle du prédateur, c'est à dire le nombre de proies consommées par unité de temps par un prédateur.
- $G(X, Y)$  : la réponse numérique du prédateur décrivant la production de prédateur, c'est à dire le taux de conversion de la proie en prédateur.

Les formes particulières choisies pour ces trois fonctions contiennent une quantité importante d'informations biologiques et sont déterminantes pour la dynamique du système étudié.

Plus précisément, la classe de modèles proie-prédateur en dimension deux à laquelle nous nous intéressons est :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = X(r_1 - b_1X) - C(X)Y, \\ \frac{dY}{dt} = Y(r_2 - \frac{a_2Y}{X}). \end{cases} \quad (1)$$

où  $C(X)$  est la réponse fonctionnelle du prédateur et que nous définirons plus loin.

On voit dans la première équation de (1) qu'en absence du prédateur, la proie a une croissance logistique avec un taux de croissance  $r_1$  et un niveau d'équilibre ou une capacité de soutien  $\frac{r_1}{b_1}$ . Le prédateur a une croissance logistique de taux  $r_2$  et un niveau d'équilibre  $\frac{r_2X(t)}{a_2}$  proportionnel à l'abondance de la proie.

Tout réponse fonctionnelle du prédateur doit vérifier les conditions biologique :

- i)  $C(0) = 0$  car il n'y aura pas de consommation s'il n'y a pas de proie,
- ii)  $\forall X \geq 0, C' \geq 0$ , puisque si l'abondance de la proie augmente, alors la consommation

augmente,

iii)  $\exists M \geq 0$ , fini, tel que  $0 \leq C(X) \leq M$ , pour tout  $X \geq 0$ , car la population proie est bornée, ainsi que le nombre de proie consommées par prédateur par unité de temps.

La réponse fonctionnelle  $C(X)$  du modèle (1) a été, dans la littérature, classée en quatre types, voir Holling (1965), Klebanoff (1992), Hsu et Huang (1995), Ruan et Xiao (2001), et plus récemment Q. Wang, Fan et K.Wang (2003).

**type I** :  $C(X) = mX$ .

On a une relation linéaire entre le taux de consommation du prédateur et la densité de la proie, autrement dit la prédation est proportionnelle à l'abondance de la proie, Cette réponse fonctionnelle a été utilisée, simultanément, par Lokta en 1925 dans l'étude d'une réaction chimique et par Volterra en 1926 pour modéliser des interactions proie-prédateur. Avec cette fonction, le système (1) est connu sous le nom de modèle de Leslie-Gower car la seconde équation de (1) a été, pour la première fois, proposée par Leslie et Gxer en 1960. En fait, le terme  $\frac{Y}{aX}$  est dit de Leslie-Gower, il mesure la perte de  $Y$  due à la rareté de sa proie favorite  $X$ .

**Type II** :  $C(X) = \frac{mX}{X+k}$

C'est probablement la réponse fonctionnelle la plus observée dans la nature. Le taux de consommation du prédateur décroît uniformément en fonction de son niveau de satiété. Cette décélération est due à la durée de la consommation et de la digestion. Le temps que met un prédateur pour consommer sa proie est constant, alors que celui mis pour capturer la proie est fonction de l'abondance de la proie. Cette fonction a été utilisée, pour la première fois, par Michaelis et Menten, en 1913, dans l'étude des réactions enzymatique. En suite, en 1959, Holling a, le premier, utilisé cette fonction comme réponse fonctionnelle dans le cas des prédateurs vertébrés. C'est pourquoi cette fonction est dite de Holling type II ou de Michaelis-Menten. Le modèle, quant à lui, a été proposé par Tanner en 1959. Et dans la littérature, le modèle (1), avec cette réponse fonctionnelle, est appelé modèle de Holling-Tanner ou de May qui a analysé ce modèle en 1974.

**Type III** :  $C(X) = \frac{mX^n}{X^n+k}$ ,  $n \geq 2$ .

Cette réponse fonctionnelle est sinusoidale et tend vers une valeur asymptotique quand la densité de la proie augmente. On obtient une réponse fonctionnelle de type III lorsque l'on prend en compte le temps que met le prédateur pour s'occuper de la proie capturée ou lorsque 'il varie ses proies selon leur densité, autrement dit, si la population d'une proie précise diminue, le prédateur attendra que la densité augmente en reportant son attention sur une autre population. La forme générale de cette fonction a été introduite par Kararinov et Van Der Driessche

(1978). Lorsque  $n = 2$ , cette réponse fonctionnelle est connue sous le nom de Holling type III.

$$\text{Type IV : } C(X) = \frac{mX^2}{(X+k_1)(X+k_2)}.$$

C'est une fonction qui donne lieu à une courbe sinusoïdale. On l'utilise lorsque le prédateur présente un certain comportement d'apprentissage qui démontre qu'au-dessous d'un seuil de la densité de  $X$ , le prédateur ne consomme pas sa proie en grande quantité. Cependant au-dessus de ce seuil, les prédateurs augmentent leur taux de consommation jusqu'à ce que soit atteint un certain niveau de saturation.

Dans notre étude, nous considérons un modèle de Holling avec une réponse fonctionnelle de type IV, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{xy}{a+x^2}, \\ \frac{dy}{dt} = y\left(\frac{\mu x}{a+x^2} - D\right). \end{cases}$$

Le but de l'analyse de ces modèles est l'étude de la survie des espèces (ce qu'on appelle **persistance** ou plus souvent **permanence**) du bornage du système ou du système **dissipatif** (pour que le modèle soit biologiquement réaliste), de la coexistence stable ou instable (cycle limite) et de l'extinction d'une ou plusieurs espèces. Le concept de la persistance est un concept important des modèles proie-prédateur, il implique la survie à long terme des espèces pour des données initiales quelconques. La permanence signifie persistance plus dissipativité, en plus de la survie à long terme, elle tient compte aussi des limites de la croissance des espèces. En 1986, Butler, Freedman et Waltman ont donné des définitions pour la persistance faible, forte et uniforme, pour les systèmes dynamiques, dans un espace métrique localement compact.

On peut trouver chez Freedman et Waltman(1984), Waltman(1989), Freedman et Moson(1990) et Huston et Schmilt(1992), toute une théorie sur la persistance/permanence des systèmes autonomes [8].

Dans la suite, nous rappelons les définitions analytiques des trois principales :

**Définition 0.0.1.** Une espèce de densité  $X_i$  est dite faiblement persistante si

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} X_i(t) > 0.$$

**Définition 0.0.2.** Une espèce de densité  $X_i$  est dite fortement persistante si

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} X_i(t) > 0.$$

**Définition 0.0.3.** Une espèce de densité  $X_i$  est dite uniformément persistante si

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} X_i(t) \geq \varepsilon > 0.$$

Il est évident, à partir de ces définitions, que la persistance uniforme implique la persistance forte et que celle-ci implique la persistance faible. En règle générale, quand on parle de persistance il s'agit de la persistance forte. On dit qu'une population de densité  $X_i$  persiste si  $X_i(0) > 0$  et s'il y a persistance forte. Et on dit qu'un système persiste lorsque chaque composante du système persiste.

Un système est dit **dissipatif** lorsque toutes les espèces qui le composent sont uniformément bornées par leur environnement, c'est à dire :

**Définition 0.0.4.** *Un système est dit **dissipatif** lorsque pour toute population  $X_i$ , il existe  $M_i > 0$ , fini, tel que*

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} X_i(t) \leq M_i.$$

**Définition 0.0.5.** *Un système est dit **permanent** s'il est uniformément persistant et dissipatif.*

## Présentation du travail

Ce mémoire est une analyse approfondie d'un système dynamique non-linéaire qui modélise un problème proie-prédateur.

Cette analyse est basé sur l'article de **Shigui Ruan** et **Dongmei Xiao**.

### ”Global analyse in a predator-prey system with nonmonotonic function response [18]”.

Le travail, dans ce mémoire se présentera de la manière suivante.

Nous donnerons une analyse détaillée des systèmes dynamiques et de leur stabilité dans le **chapitre 1** nous présentons le théorème d'existence et d'unicité, et les résultats sur l'équivalence topologique entre les système linéaires et leur système linéarisé. En suit, nous donnerons l'algorithme suivit pour calculer la forme normal pour les points d'équilibre non-hyperbolique, afin de donner une classification des bifurcation.

Dans le **chapitre 2** nous présentation le modèle (2.2). Nous établissons la permanence du modèle en contristent un ensemble invariant attracteur. En suit, nous analyserons la stabilité locale et les bifurcations.

Finalement, dans le dernier chapitre, nous donnerons une étude des cycles limites. Nous établissons des conditions sous les quelles, On l'absence de cycle limite, en utilisant le critère de Dulac. Nous montrons sous certaines conditions l'existence de cycle limite grâce au théorème de Poincaré-Bendixson.

---

---

# CHAPITRE 1

---

## SYSTÈMES DYNAMIQUES ET STABILITÉ

Dans ce première chapitre, nous nous intéressons aux systèmes dynamiques, terminologie regroupant les systèmes d'équations différentielles ordinaires (EDO) et les systèmes d'évolution discrets [4, 15, 16].

### 1.1 Notations et définitions

On note  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  un élément de  $\mathbb{R}^n$ , sa norme  $\|x\|_{\mathbb{R}^n}$  sera l'une quelconque des normes usuelles sur  $\mathbb{R}^n$ .

Soient  $D, U$  et  $V$  des ouverts de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction **continu**.

Pour tout  $(t, x) \in D$ , on notera  $f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_n(t, x))$  où chaque fonction  $f_i$  est continue de  $D$  dans  $\mathbb{R}$ .

La notation  $(a, b)$  recouvre tous les intervalles de  $\mathbb{R}$  de la forme  $[a, b], ]a, b], [a, b[$  ou  $]a, b[$ .

#### Définition 1.1.1. (*Systèmes dynamiques*)

On appelle système dynamique un système physique représentable par une équation différentiable de la forme (**cas continu**) :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^p. \quad (1.1)$$

Avec  $f$  un champ de vecteurs,  $\mathbb{R}^n$  est l'espace des phases,  $\mathbb{R}^p$  est l'espace des paramètres et  $t$  la variable temporelle.



Ou par des applications (**cas discret**) :

$$x_{k+1} = f(x_k, \mu), \quad x_k \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^p, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

Avec  $f$  la fonction de récurrence,  $\mathbb{R}^n$  est l'espace des phases,  $\mathbb{R}^p$  est l'espace des paramètres.

**Définition 1.1.2.** Lorsque le champ de vecteurs  $f$  ne dépend pas explicitement du temps, on dit que le système dynamique est autonome, et on a :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.3)$$

**Remarque 1.1.1.** Par un changement de variable approprié, on peut toujours transformer un système dynamique non autonome de dimension  $n$  en un système dynamique autonome équivalent de dimension  $n + 1$ .

### 1.1.1 Théorème d'existence et d'unicité

**Définition 1.1.3.** 1) Une solution de l'équation (1.1) est un couple  $(\varphi, J)$  où  $J$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  est une fonction dérivable sur  $J$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  telle que  $(t, \varphi(t)) \in D$  pour tout  $t \in J$  et  $\frac{d\varphi_i(t)}{dt} = f_i(t, \varphi(t))$ ,  $\forall t \in J, \forall i = 1, \dots, n$ .

2) Soient  $x : I_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\tilde{x} : \tilde{I}_x \rightarrow \mathbb{R}^n$  des solutions de (1.3). On dit que  $\tilde{x}$  est un prolongement de  $x$  si  $I_x \subset \tilde{I}_x$  et  $\tilde{x}|_{I_x} = x$ .

3) On dit qu'une solution  $x : I_x \rightarrow \mathbb{R}^n$  est maximale si  $x$  n'admet pas de prolongement  $\tilde{x} : \tilde{I}_x \rightarrow \mathbb{R}^n$  avec  $I_x \subsetneq \tilde{I}_x$ .

**Remarque 1.1.2.** On remarque que  $f$  et  $\varphi$  étant deux fonctions continues, par composition  $\varphi' = (\varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_n)$  est également continue sur  $J$  et  $\varphi$  est de classe  $C^1$  sur  $J$ .

**Définition 1.1.4.** Soit  $(t_0, x_0) \in D$ . Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (\text{PC})$$

consiste à déterminer un couple  $(\varphi, J)$  où  $J$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant  $t_0$  et  $\varphi$  est une fonction dérivable de  $J$  dans  $\mathbb{R}^n$ , telle que

- 1)  $(t, \varphi(t)) \in D$  pour tout  $t \in J$ .
- 2)  $\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(t, \varphi(t))$ , pour tout  $t \in J$  et  $\varphi(t_0) = x_0$ .

**Remarque 1.1.3.** Si on suppose que  $\varphi$  est une solution de (1.3) alors on peut l'obtenir à l'aide d'une équation intégrale

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds. \quad (1.4)$$

Réciproquement, toute fonction  $\varphi$  vérifiant (1.1.5) est bien une solution de classe  $C^1$  de (PC). Donc l'équivalence entre les deux formulations (PC) et (1.1.5).

**Définition 1.1.5.** On appelle solution locale du problème la donnée d'un couple  $(J_0, \Phi)$  où  $J_0$  est un intervalle qui est voisinage de  $t_0$  dans  $J$  et  $\Phi$  est une fonction appartenant à  $C^1(J_0)$  tel que

$$\frac{d\varphi}{dt} = f(t, \Phi(t))$$

pour tout  $t \in J_0$  et

$$\Phi(t_0) = x_0$$

**Définition 1.1.6.** On dit que  $(J_0, \Phi)$  est solution global du problème dans  $J$  (on que  $\Phi$  est solution du problème si  $(J_0, \Phi)$  est une solution locale et si  $J_0 = J$

On donne maintenant le théorème d'existence et d'unicité suivant :

**Théorème 1.1.1. (Cauchy-Lipschitz)**

Soit  $(t_0, x_0) \in D$  et soit  $a > 0$  et  $b > 0$  tels que le cylindre  $C = \{|t - t_0| \leq a, \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} \leq b\}$  soit inclus dans  $D$ . on note

$$M = \sup_{(t,x) \in C} \|f(t,x)\|_{\mathbb{R}^n} \quad \text{et} \quad \alpha = \min(a, \frac{b}{M}),$$

telle que  $f$  est continue et lipschitzienne en  $x$ .

Alors il **existe** une unique solution **maximale**  $\phi$  du problème de Cauchy (PC) sur l'intervalle  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ .

On donne aussi un lemme technique qui sera très utile dans la suite.

**Lemme 1.1.2. (Lemme de Gronwall)**

Soit  $\phi$  une fonction absolument continue vérifiant l'inégalité différentielle suivante :

$$\frac{d\phi}{dt} + \alpha_1 \phi(t) \leq \alpha_2, \quad t > 0, \quad ((\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha_1 \neq 0),$$

alors, pour tout  $t \geq \tilde{T} \geq 0$ , on a :

$$\phi(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \left( \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \phi(\tilde{T}) \right) e^{-\alpha_1(t-\tilde{T})}.$$

**Démonstration**

On a :

$$\frac{d\phi}{dt} + \alpha_1\phi(t) \leq \alpha_2, \quad t > 0,$$

multiplions les deux côtés par  $e^{\alpha_1 t}$

$$\left(\frac{d\phi}{dt} + \alpha_1\phi(t)\right)e^{\alpha_1 t} \leq \alpha_2 e^{\alpha_1 t},$$

$$\left(\frac{d\phi}{dt} + \alpha_1\phi(t) - \alpha_2\right)e^{\alpha_1 t} \leq 0,$$

$$\frac{d\phi}{dt}e^{\alpha_1 t} + \alpha_1\phi(t)e^{\alpha_1 t} - \alpha_2 e^{\alpha_1 t} \leq 0,$$

$$\frac{d}{dt}(\phi(t)e^{\alpha_1 t}) - \frac{d}{dt}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}e^{\alpha_1 t} \leq 0,$$

ou de manière équivalente

$$\frac{d}{dt}\left(\left(\phi(t) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)e^{\alpha_1 t}\right) \leq 0.$$

Donc, la fonction  $\left(\left(\phi(t) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)e^{\alpha_1 t}\right)$  a une dérivée négative et elle est donc décroissante pour  $t \geq 0$ . Par conséquent, pour tout  $t \geq \tilde{T} \geq 0$ .

$$\left(\phi(t) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)e^{\alpha_1 t} \leq \left(\phi(\tilde{T}) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)e^{\alpha_1 \tilde{T}},$$

d'où, il résulte

$$\phi(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \phi(\tilde{T})\right)e^{-\alpha_1(t-\tilde{T})},$$

pour  $\tilde{T} = 0$ , cette expression devient :

$$\phi(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(1 - e^{-\alpha_1 t}) + \phi(0)e^{-\alpha_1 t}.$$

ce qui démontre l'inégalité de l'énoncé. ■

**Définition 1.1.7. (Système déterministe)**

Soit  $U$  l'ensemble des conditions initiales et  $x_0 \in U$ . Alors, si pour tout  $x_0$ ,  $x(t, x_0)$  existe et est unique, le système est dit déterministe.

**1.1.2 Flot et trajectoires**

Soit le système dynamique autonome :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.5}$$

**Définition 1.1.8.** L'application  $(t, x) \rightarrow \phi(t, x)$  est appelée le flot du champ de vecteurs  $f$  (ou de l'équation (1.5))

telle que, l'application partielle à  $x$  fixé,  $t \rightarrow \phi(t, x)$  est une solution maximale de l'équation.

Pour une étude qualitative de l'équation différentielle, il est important d'étudier plutôt l'autre application partielle,  $\phi : x \rightarrow \phi(t, x)$ , pour  $t$  fixé. De façon imagée,  $\phi_t(x)$  est la position à l'instant  $t$  d'un corps transporté par l'équation différentielle qui se trouvait à la position  $x$  en  $t = 0$ .

**Remarque 1.1.4.** Si  $f$  est linéaire, i.e,  $f(x) = Ax$ ,  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ , le flot est donné par l'exponentielle de  $A$  :

$$\phi_t(x) = e^{tA}x, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Ainsi, le flot est une généralisation de l'exponentielle d'une matrice. Il possède des propriétés similaires.

**Proposition 1.1.3.** La formule du flot peut aussi se lire de la façon suivante :

Si  $x(\cdot)$  est une solution de (1.5), alors

$$x(t) = \phi_{t-t_0}(x(t_0)),$$

pour tout  $t_0$  et  $t$  dans l'intervalle de définition de  $x(\cdot)$ .

**Proposition 1.1.4.** Pour tous  $t, s \in \mathbb{R}$  on a les propriétés suivantes :

1)  $\phi_{-t} \circ \phi_t = id$ , c'est -à-dire  $(\phi)^{-1} = \phi_{-t}$ ,

2)  $\phi_0 = id$ ,

3)  $\frac{\partial \phi_t}{\partial t} = f \circ \phi_t$ ,

4)  $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$ .

**Définition 1.1.9.** On appelle trajectoire passant par  $x_0$  l'ensemble :

$$\vartheta_{x_0} = \{\phi_t(x_0) : t \in I_x\}.$$

Autrement dit, la trajectoire passant par  $x_0$  est la courbe tracée sur  $\mathbb{R}^n$  par la solution maximale de l'équation (1.5) passant par  $x_0$  en  $t = 0$ .

**Définition 1.1.10.** *Considérons le vecteur d'état initial  $x_0$ . Les itérations successives de  $f$  fournissent la suite des états du système discret (1.2) aux instants  $t_k$ .*

$$\begin{cases} x_1 = f(x_0), \\ x_2 = f(x_1) = f^2(x_0), \\ \vdots \\ x_{k+1} = f(x_k) = f^{k+1}(x_0). \end{cases} \quad (1.6)$$

On appelle orbite de  $f$  au point  $x_0$  la suite des états  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  générés par  $f$  dans l'espace d'état.

**Remarque 1.1.5.** *La notion d'orbite en temps discret est équivalente à celle de trajectoire en temps continu.*

**Définition 1.1.11.** *Un ensemble  $A \subset \mathbb{R}^n$  est dit invariant par un champ de vecteur si toute solution  $x(t)$  du système différentiel associé au champ de vecteurs issu de  $A$  vérifie  $x(t) \in A$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  pour lequel cette solution est définie.*

**Remarque 1.1.6.** *la trajectoire d'un système autonome dans l'espace d'état est un ensemble invariant.*

**Définition 1.1.12.** *Soient  $X$  un champ de vecteurs défini sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\Gamma$  l'orbite de  $X$  passant par  $x_0$  Elle est paramétrisée par une solution maximale  $x(t)$  du problème de Cauchy associé :  $\Gamma = \{x(t) | t \in (\alpha, \beta)\}$ .*

- 1) *L'ensemble  $\omega$ -limite de l'orbite (ou de  $x_0$ ) noté  $\omega(x_0)$  est défini par si  $\beta = +\infty$ ,  $\omega(x_0) = \{q \in U | \exists (t_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, t_n \rightarrow +\infty \text{ et } (x(t_n) \rightarrow q)\}$ .*
- 2) *L'ensemble  $\alpha$ -limite de l'orbite (ou de  $x_0$ ) noté  $\alpha(x_0)$  est défini par si  $\alpha = -\infty$ ,  $\alpha(x_0) = \{q \in U | \exists (t_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, t_n \rightarrow -\infty \text{ et } (x(t_n) \rightarrow q)\}$ .*

Tous les points d'une même orbite ont les mêmes ensembles  $\alpha$ -limite et  $\omega$ -limite.

**Définition 1.1.13.** *Soit  $A$  un ensemble compact, fermé de l'espace des phases. On suppose que  $A$  est un ensemble invariant (i.e  $\phi_t(A) = A$  pour tout  $t$ ). On dit que  $A$  est stable si pour tout voisinage  $U$  de  $A$ , il existe un voisinage  $V$  de  $A$  tel que toute solution  $x(x_0, t) := \phi_t(x_0)$  restera dans  $U$  si  $x_0 \in V$ . Si de plus :*

$$\bigcap_{t \geq 0} \phi_t(V) = A,$$

et s'il existe une orbite dense dans  $A$ , alors  $A$  est un **attracteur**.

Lorsque  $A$  est un attracteur, l'ensemble :

$$W = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(V),$$

est appelé le **bassin d'attraction** de  $A$ . C'est l'ensemble des points dont les trajectoires asymptotiques convergent vers  $A$ .

### 1.1.3 Classifications des solutions des systèmes dynamiques

#### Définition 1.1.14. (*Point d'équilibre*)

On appelle point d'équilibre (ou point fixe ou stationnaire ou point critique) de (1.5), le point  $\bar{x}$  de l'espace des phases qui vérifie (1.5) :

$$f(\bar{x}) = 0. \quad (1.7)$$

Par le changement de variable  $\xi = x - \bar{x}$ , on peut ramener le point  $\bar{x}$  à l'origine.

**Remarque 1.1.7.** Une solution d'équilibre correspond à un point fixe dans l'espace d'état. Il n'est pas nécessairement stable, mais lorsqu'il l'est ce point représente un attracteur.

#### Définition 1.1.15. (*Solutions périodiques*)

Soit  $x(t, x_0)$  la solution d'un système dynamique autonome ou non autonome. Elle représente une solution périodique si et seulement si :

$$\exists \tau > 0, \forall t, \quad x(t + \tau, x_0) = x(t, x_0). \quad (1.8)$$

La plus petite valeur de  $\tau$  si elle existe, est appelée période. On la note généralement  $T$ .

**Remarque 1.1.8.** Une solution périodique d'un système dynamique quelconque est dite solution isolée s'il existe un voisinage ne comporte aucune autre solution périodique. Si de plus le système est autonome, alors la solution isolée est appelée un cycle limite.

#### Définition 1.1.16. (*Solutions quasi périodiques*)

Soit  $x(t, x_0)$  une solution du système dynamique (1.1) et soit  $T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un ensemble fini de réels linéairement indépendants.

On dit que  $x(t, x_0)$  est une solution quasi périodique de (1.1) si elle est périodique pour chacune des périodes  $T_i$  de  $T$ . La solution  $x(t, x_0)$  est également dite  $n$ -périodique.

**Remarque 1.1.9.** *La trajectoire d'une solution  $n$ -périodique est une ligne infinie qui couvre densément un tore de dimension  $n$ .*

### Comportements asymptotiques

Les paragraphes précédents ont introduit quelques définitions relatives aux systèmes dynamiques. Nous allons aborder maintenant, les caractéristiques essentielles de leurs solutions. Cependant il est important de rappeler qu'il n'existe aucune méthode générale d'intégration des systèmes différentiels non linéaires. Il n'est donc pas toujours possible d'en déterminer une solution analytique exacte. Fort heureusement, cela ne constitue plus aujourd'hui une difficulté majeure car une estimation, obtenue par simulation numérique, est souvent suffisante lorsque l'intégration n'est pas possible. Par contre, le comportement asymptotique c'est à dire la connaissance qualitative des solutions est très utile lorsqu'il s'agit par exemple d'en déterminer les évolutions possibles à long terme, la stabilité, les bifurcations ou encore de disposer d'une vue d'ensemble des comportements dynamiques possibles selon l'état, l'excitation ou les paramètres.

#### Définition 1.1.17. (*Solution Chaotique*)

*Une solution chaotique est un comportement asymptotique borné qui n'est ni un point d'équilibre, ni une solution périodique ou quasi périodique.*

## 1.2 Stabilité des systèmes dynamiques

Dans cette section nous nous intéressons à la stabilité d'un système autonome :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.9)$$

#### Définition 1.2.1. (*Notion de la stabilité*)

1) *Nous dirons qu'un équilibre  $\bar{x}$  de (1.9) est stable si pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\forall t_0$  il existe  $\sigma_{t_0, \varepsilon}$  tel que :*

$$\|x_0 - \bar{x}\| \leq \sigma_{t_0} \Rightarrow \|\phi(t, x_0) - \bar{x}\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

2) *Nous dirons qu'un équilibre  $\bar{x}$  de (1.9) est uniformément asymptotiquement stable s'il est uniformément stable et s'il existe un voisinage de  $\bar{x}$  où  $\phi(t, x_0)$  a pour limite  $\bar{x}$ , c'est-à-dire qu'il existe  $\rho > 0$  :  $\|x_0 - \bar{x}\| \leq \rho \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} (\phi(t, x_0)) = \bar{x}$ .*

3) *Un équilibre qui n'est pas uniformément stable est dit instable.*

### 1.2.1 Stabilité des systèmes linéaires

Considérons le cas particulier d'une équation différentielle autonome linéaire

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . L'origine est toujours un équilibre de cette équation (mais il peut y en avoir d'autres tout élément de  $\text{Ker}(A)$  est un équilibre).

**Théorème 1.2.1.** Soit  $\frac{dx}{dt} = Ax$ , soient  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres distinctes de  $A$ .

- 1) L'origine est un équilibre uniformément stable si et seulement si  $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0, \forall i = \overline{1, n}$ .
- 2) L'origine est un équilibre uniformément asymptotiquement stable si et seulement si  $\text{Re}(\lambda_i) < 0, \forall i = \overline{1, n}$ . Dans ce cas on dit que l'origine est un équilibre hyperbolique.
- 3) S'il existe une valeur propre  $\lambda$  telle que  $\text{Re}(\lambda) > 0$ , l'origine est instable.

#### Le cas affine

Considérons maintenant l'équation

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B, \tag{1.10}$$

où  $A \in M_n(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathbb{R}^n$  un vecteur constant.

**Proposition 1.2.2.** La stabilité et la stabilité asymptotique d'un équilibre de l'équation (1.10) sont équivalentes respectivement à celles de l'origine pour l'équation  $\frac{dy}{dt} = Ay$ .

Dans la pratique pour un système de dimension deux on a la remarque suivante :

**Remarque 1.2.1.** Pour une équation différentielle  $\frac{dx}{dt} = Ax$  dans  $\mathbb{R}^2$ , le signe des parties réelles des valeurs propres se déduit directement des signes du déterminant et de la trace de  $A$ . En effet,  $\det A$  est le produit des valeurs propres de  $A$  et  $\text{tr}A$  est la somme de leurs parties réelles. Ainsi, en notant  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les valeurs propres de  $A$ , on a

1) Si  $\det A < 0$ , alors  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles de signe opposé (elles ne peuvent être complexes, car dans ce cas  $\det A = |\lambda|^2$ ).

2) Si  $\det A > 0$ , alors  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles de même signe, soit complexes conjuguées, dans les deux cas, les parties réelles de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de même signe, qui est celui de  $\text{tr}A$ .

Notons que, si  $\text{tr}A = 0$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont forcément complexes conjuguées de partie réelle nulle.

3) Si  $\det A = 0$ , l'une des valeurs propres est nulle, l'autre étant égale à  $\text{tr}A$ .

Le diagramme de stabilité dans le plan



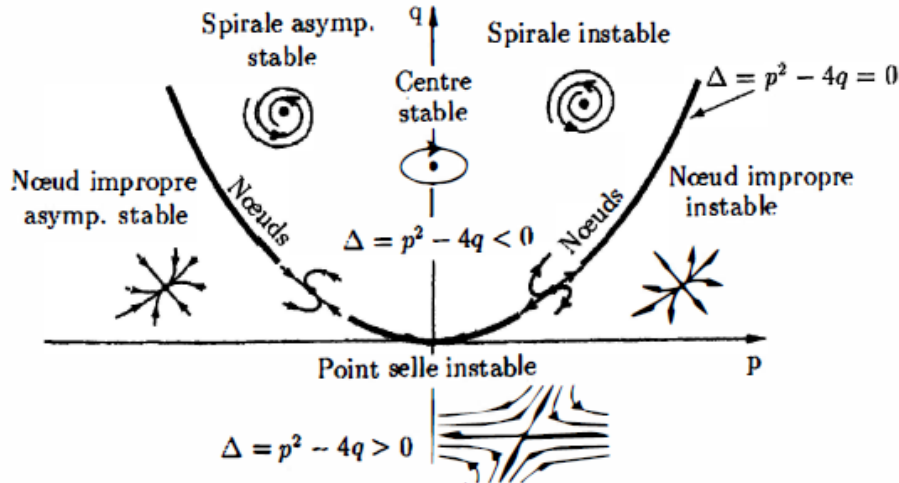


FIGURE 1.1 – Diagramme de la stabilité.

### 1.2.2 Stabilité des systèmes non linéaires Linéarisation

Le développement de Taylor du champ de vecteurs  $f$  de (1.9) en  $\bar{x}$  s'écrit :

$$f(x) = df(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2!}d^2f(\bar{x})(x - \bar{x}, x - \bar{x}) + \frac{1}{3!}d^3f(\bar{x})(x - \bar{x}, x - \bar{x}, x - \bar{x}) + \dots \quad (1.11)$$

où l'on a posé  $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,

$$df(x)x = \sum_j \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right) x_j, \quad d^2f(x)(x, x) = \sum_{i,j} \left( \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right) x_i x_j,$$

$$d^3f(x)(x, x, x) = \sum_{i,j,k} \left( \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right) x_i x_j x_k. \quad (1.12)$$

La matrice

$$df(x) = \left( \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_j} \right),$$

s'appelle matrice jacobienne de  $f$  (son déterminant est le jacobien). Pour  $x$  petit, (1.11) montre que le comportement du système au voisinage de  $\bar{x}$  est celui du système linéarisé :

$$\dot{x} = df(\bar{x})(x - \bar{x}). \quad (1.13)$$

Dans le cas où la matrice  $df(\bar{x})$  possède  $n$  valeurs propres  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  distinctes, la solution de (1.13) est :

$$x = \sum_{i=1}^n c_i a^{(i)} e^{\lambda_i t}, \quad (1.14)$$

où  $a^{(i)}$  est le vecteur propre correspondant à la valeur propre  $\lambda_i$  et les  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  sont des constantes (déterminées par les conditions initiales).

On peut énoncer le théorème suivant

**Théorème 1.2.3. (Hartman-Grobman)**

Soit  $D$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  contenant 0 et  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $D$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Pour tout  $x \in D$ , on note  $\phi(t, x)$  la solution de l'équation autonome

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

qui vérifie  $\phi(t, \bar{x}) = \bar{x}$ . On suppose que  $f(\bar{x}) = 0$  et que pour toute valeur propre  $\lambda$  de la matrice  $A = df(\bar{x})$ ,  $\operatorname{Re}(\lambda) \neq 0$ . Alors il existe deux ouverts  $U$  et  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $\bar{x}$  et un homéomorphisme  $H$  de  $U$  dans  $V$  tel que, pour tout  $x \in U$

$$H(\phi(t, x)) = e^{tA}H(x), \quad \forall t \in I_x,$$

où  $I_x$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  contenant  $\bar{x}$ . En particulier  $H$  envoie les trajectoires du système

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

sur les trajectoires du système linéaire à coefficients constants

$$\frac{dx}{dt} = A(x - \bar{x}).$$

**Corollaire 1.2.4. (Stabilité en première approximation)**

Soit  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  un système d'équations différentielles,  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Soit  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  un équilibre de  $f$ . Si  $\bar{x}$  est un équilibre asymptotiquement stable du système linéarisé

$$\dot{x} = df(\bar{x})(x - \bar{x}),$$

alors c'est un équilibre asymptotiquement stable du système

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Si on suppose que  $df(\bar{x})$  a une valeur propre de partie réelle strictement positive. Alors,  $\bar{x}$  n'est pas un équilibre stable pour le système

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

### 1.2.3 Classification des points singuliers

Nous nous restreignons ici à classifier les points singuliers d'un système non-linéaire en nous appuyant sur la conjugaison  $C^1$  locale du flot à un système linéaire. En ce qui concerne les points hyperboliques, il s'agit du système linéarisé au point singulier, sous réserve d'une régularité suffisante du flot posée en hypothèse de tout ce chapitre (classe  $C^2$ ). Il existe des résultats sous des hypothèses plus faibles qu'on pourra trouver par exemple dans Wiggins, 1990 [20].

**Définition 1.2.2.** Soit un point singulier hyperbolique  $\bar{x}$  du système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \quad (1.15)$$

où  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^2$  sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^2$ .

Soit  $\mu$  et  $\lambda$  les valeurs propres (dans  $\mathbb{C}$ ) de la jacobienne associée au champ de vecteurs en ce point singuliers . On a donc  $\Re(\lambda) \neq 0$  et  $\Re(\mu) \neq 0$  Le tableau suivant :

- définit la terminologie utilisée pour décrire la nature du point singulier en fonction de  $\lambda$  et  $\mu$  (l'entrée en colonne série le cas réel et le cas complexe, l'entrée en ligne série le nombre de valeurs propres à partie réelles strictement négatives),
- rappelle les dimensions des variétés stables et instables associées au point singulier,
- illustre le portrait de phase local au voisinage du point singulier (point singulier en violet, les orbites bleues appartiennent à  $\mathcal{W}^s$ , les orbites rouges à  $\mathcal{W}^u$ , les orbites noires complètent l'illustration du portrait de phase, les flèches indique le sens du flot).






Points hyperboliques	$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$	$\lambda = \bar{\mu} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$
$\Re(\lambda) < 0, \Re(\mu) < 0$ stable $\dim(\mathcal{W}^s) = 2$ $\dim(\mathcal{W}^u) = 0$	 Noeud attractif	 Foyer attractif
$\Re(\lambda) > 0, \Re(\mu) > 0$ instable $\dim(\mathcal{W}^s) = 0$ $\dim(\mathcal{W}^u) = 2$	 Noeud répulsif	 Foyer répulsif
$\Re(\lambda) < 0, \Re(\mu) > 0$ instable $\dim(\mathcal{W}^s) = 1$ $\dim(\mathcal{W}^u) = 1$	 Col ou Point selle ("saddle")	Impossible!

FIGURE 1.2 – Illustration du portrait de phase local

Pour les points singuliers non hyperboliques, il n'existe pas de résultats généraux de conjugaison topologique du flot avec le linéarisé. Ainsi la classification ne peut être entreprise à partir des valeurs propres de la jacobienne car le portrait de phase dépend des termes de plus haut degré dans le développement des fonctions  $f$  et  $g$ . Cependant, les différents cas de figure sont connus et sont définis comme suit. Pour chaque type, nous donnons un exemple de champ de vecteurs pour lequel l'origine est un point singulier non hyperbolique de ce type.

**Définition 1.2.3.** Un secteur de  $\mathbb{R}^2$  est dit hyperbolique (resp. parabolique, elliptique) s'il est topologiquement équivalent au secteur montré en **(a)** (resp. **(b)**, **(c)**) de la figure ci-dessous.

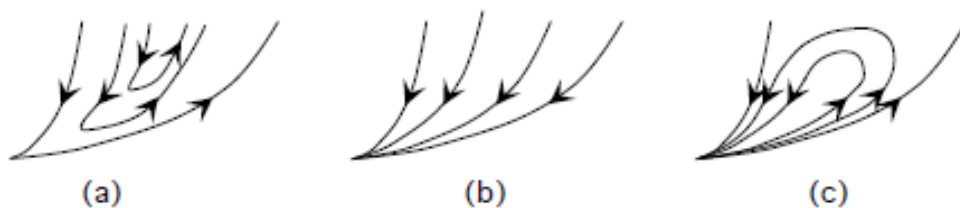


FIGURE 1.3 – Types des secteurs.

## 1.2.4 Fonction de Lyapunov

Soit  $\bar{x}$  un point fixe de (1.9). Soit  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction différentiable définie sur un voisinage  $\Omega$  de  $\bar{x}$  telle que  $V(\bar{x}) = 0$  et  $V(x) > 0$  si  $x \neq \bar{x}$ . Posons :

$$\dot{V} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j(x), \quad (1.16)$$

alors on a le théorème suivant :

**Théorème 1.2.5. (Lyapunov)**

- 1) Si  $\dot{V}(x) \leq 0$  dans  $\Omega$  alors  $\bar{x}$  est stable.
- 2) Si  $\dot{V}(x) < 0$  dans  $\Omega$  alors  $\bar{x}$  est asymptotiquement stable.
- 3) Si  $\dot{V}(x) > 0$  dans  $\Omega$  alors  $\bar{x}$  est instable.

On dit aussi que la fonction  $\dot{V}$  est semi-définie négative dans le premier cas, définie négative dans le deuxième cas et définie positive dans le troisième cas.

Pour la démonstration de ce théorème voir par exemple [9].

**Remarque 1.2.2.** Il n'y a pas de règle générale pour trouver une fonction de Lyapunov, cependant, dans des problèmes de mécanique, l'énergie est souvent un bon candidat.

## 1.3 Sous-variété centrale et formes normales

Cette sous section est consacrée aux méthodes qui permettent d'étudier le portrait de phases autour d'un point d'équilibre, ou d'un point fixe, non hyperbolique. Considérons le système continu  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  et supposons qu'il admet un point d'équilibre non hyperbolique  $\bar{x}$ . Voyons d'abord ce que l'on peut dire sur le linéarisé tangent en  $\bar{x}$  et plus généralement sur tout système linéaire non hyperbolique.

**Proposition 1.3.1.** *Tout système linéaire continu,  $\frac{dx}{dt} = Ax$  est décomposable de la façon suivante :*

$$\begin{cases} \frac{dx^c}{dt} = A^c x^c, \\ \frac{dx^h}{dt} = A^h x^h. \end{cases} \quad (1.17)$$

Avec  $x = (x^c, x^h)$ ,  $A = \begin{pmatrix} A^c & 0 \\ 0 & A^h \end{pmatrix}$  et où  $A^h$  correspond aux valeurs propres à partie réelle non nulle (la partie hyperbolique de  $A$ ) et  $A^c$  aux valeurs propres sur l'axe imaginaire (la partie centrale de  $A$ ). Les ensembles (espaces vectoriels) définis par  $x^c = 0$  (resp.  $x^h = 0$ ) sont invariants par le flot de (1.17). L'ensemble  $x^c = 0$  n'est autre que la somme directe des espaces vectoriels rentrant et sortant,  $E^s \oplus E^i$ , figure 1.4.

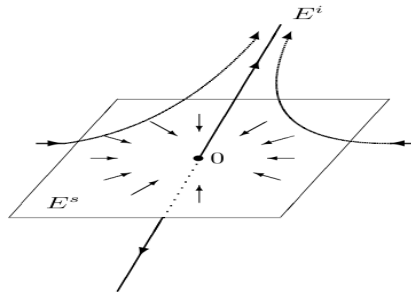


FIGURE 1.4 – Portrait de phase d'un système linéaire hyperbolique, de dimension 3.

**Remarque 1.3.1.** 1) *Une telle séparation entre la partie hyperbolique et la partie centrale du linéarisé tangent se prolonge également au non linéaire, de la même façon que les espaces vectoriels stable et instable,  $E^s$  et  $E^i$ , s'étendent aux sous-variétés invariantes stable et instable,  $W_{loc}^s$  et  $W_{loc}^i$ . Comme pour le linéaire, si la partie hyperbolique est stable asymptotiquement, la stabilité autour de  $\bar{x}$  peut être directement analysée à partir*

de la dynamique sur une sous-variété (non nécessairement unique comme nous le verrons plus loin), appelée sous-variété centrale, dont l'espace tangent en  $\bar{x}$  est égal à  $E^c$ .

- 2) En linéaire, tous les calculs, changement de base et matrices  $A^c$  et  $A^h$ , sont explicites et reposent sur la décomposition d'une matrice en sa forme de Jordan. En non linéaire, les calculs sont nécessairement approchés et donnent, de manière itérative, les termes des développements limités autour de  $\bar{x}$  des équations de la sous-variété centrale et de la dynamique sur cette sous-variété. En pratique, on arrête les calculs à l'ordre à partir duquel le portrait de phases n'est plus modifié de manière qualitative par les termes d'ordre supérieur.

### 1.3.1 Sous-variété centrale

Nous énonçons d'abord les résultats généraux, dont les démonstration se trouvent, pour l'essentiel.

Le théorème de décomposition en sous-variétés stable et instable autour d'un point d'équilibre hyperbolique, ainsi que le théorème de Grobman-Hartman se généralise comme suit aux points d'équilibre non hyperboliques [5].

**Théorème 1.3.2. (Sous-variété centrale pour les systèmes continus)**

Soient un champ de vecteurs  $f$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $r$  fois continûment dérivable s'annulant en  $\bar{x} \in U$ ,  $V$  un petit voisinage de  $\bar{x}$  dans  $U$ , et  $\phi_t$  le flot. Considérons  $E^s$ ,  $E^c$  et  $E^i$ , les espaces propres généralisés correspondants aux valeurs propres de  $df(\bar{x})$  à partie réelle strictement négative, nulles et strictement positive, respectivement :  $E^s$ ,  $E^c$  et  $E^i$  sont des espaces vectoriels stable par  $df(\bar{x})$  et  $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^c \oplus E^i$ . Alors, les sous-espaces rentrant,

$$W_{loc}^s = \{x \in V : \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = \bar{x} \text{ et } \forall t \geq 0 \ \phi_t(x) \in V\},$$

et sortant,

$$W_{loc}^i = \{x \in V : \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x) = \bar{x} \text{ et } \forall t \leq 0 \ \phi_t(x) \in V\},$$

possèdent des structures de sous-variétés différentiables de classe  $C^r$  autour de  $\bar{x}$  et admettent pour espaces vectoriels tangentes en  $\bar{x}$ ,  $E^s$  et  $E^i$ , respectivement. Il existe aussi une sous-variété différentiable de classe  $C^{r-1}$ ,  $W_{loc}^c$ , (non nécessairement unique contrairement à  $W_{loc}^s$  et  $W_{loc}^i$ ), invariante par le flot, et dont l'espace tangent en  $\bar{x}$  est égal à  $E^c$ .  $W_{loc}^c$  est appelée sous-variété centrale. Elle est définie localement autour de  $\bar{x}$ . Soient  $x^c$  des coordonnées locales sur  $W_{loc}^c$  et

$f^c(x^c)$  le champ de vecteurs induit par  $f$  sur  $W_{loc}^c$  (cela a un sens car  $f$  est tangent à  $W_{loc}^s$ ). Alors  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  est, autour de  $\bar{x}$ , topologiquement équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx^c}{dt} = f^c(x^c), \\ \frac{dx^s}{dt} = -x^s, \\ \frac{dx^i}{dt} = x^i, \end{cases} \quad (1.18)$$

où les dimensions de  $x^s$  et  $x^i$  sont égales à celles de  $E^s$  et  $E^i$ .

**Remarque 1.3.2.** En particulier, le théorème précédent implique que, si  $df(\bar{x})$  n'a pas de valeurs propres à partie réelle strictement positive, la stabilité de  $\bar{x}$  est alors conditionnée par celle la dynamique sur la sous-variété centrale, plus précisément :

1) Si  $\frac{dx^c}{dt} = f^c(x^c)$ , est stable (resp. asymptotiquement stable) au sens de Lyapounov en  $\bar{x}$ , alors le système complet  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  est aussi stable (asymptotiquement stable) au sens de Lyapounov.

2) Si  $\frac{dx^c}{dt} = f^c(x^c)$  n'est pas stable au sens de Lyapounov en  $\bar{x}$ , alors le système complet  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  n'est pas stable au sens de Lyapounov.

### 1.3.2 Formes normales

**Approximation de la partie centrale** Il ne reste plus qu'à compléter les résultats précédents par le calcul de  $f^c$  sur la sous-variété centrale. Pour cela, il suffit de connaître les équations de  $W_{loc}^c$ , étant donné que le champ de vecteurs  $f$  restreint à  $W_{loc}^c$  n'est autre que  $f^c$ . Il est, en général, impossible d'obtenir les équations exactes définissant  $W_{loc}^c$ , d'autant plus que cette sous-variété n'est pas unique. Ainsi, on peut se contenter d'une connaissance approximative, au sens des développements limités, des équations de  $W_{loc}^c$  et donc de  $f^c$ . Considérons donc le ( $C^\infty$  par exemple)  $\frac{dx}{dt} = f(x)$ , pour  $x \in U$ , ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et un point d'équilibre  $\bar{x}$ . On note  $A = df(\bar{x})$  la matrice jacobienne de  $f$  en  $\bar{x}$ . La décomposition en blocs de Jordan de  $A$  conduit à la factorisation suivante

$$A = P \begin{pmatrix} A^c & 0 & 0 \\ 0 & A^s & 0 \\ 0 & 0 & A^i \end{pmatrix} P^{-1},$$

où  $A^c$  a ses valeurs propres sur l'axe imaginaire,  $A^s$  a ses valeurs propres stables aux parties réelles négatives,  $A^i$  a ses valeurs propres instables aux parties réelles positives et  $P$  est une matrice inversible. Le changement affine de coordonnées,

$$x \longrightarrow P^{-1}(x - \bar{x}),$$

permet de se ramener au voisinage de 0 et de découpler le linéarise tangent. Sans changer de notation, on peut donc supposer que  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  s'écrit, au voisinage du point d'équilibre  $\bar{x} = 0$ , de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx^c}{dt} = A^c x^c + g^c(x^c, (x^s, x^i)), \\ \frac{dx^s}{dt} = A^s x^s + g^s(x^c, (x^s, x^i)), \\ \frac{dx^i}{dt} = A^i x^i + g^i(x^c, (x^s, x^i)). \end{cases} \quad (1.19)$$

Avec  $x = (x^c, x^s, x^i)$  et où  $g^c, g^s, g^i$  sont des fonctions régulières de  $x$ , nulles ainsi que leurs dérivées en 0. On note  $x^h = (x^s, x^i)$  la partie hyperbolique de  $x$  et

$$A^h = \begin{pmatrix} A^s & 0 \\ 0 & A^i \end{pmatrix},$$

Le système (1.19) s'écrit alors

$$\begin{cases} \frac{dx^c}{dt} = A^c x^c + g^c(x^c, x^h), \\ \frac{dx^h}{dt} = A^h x^h + g^h(x^c, x^h). \end{cases} \quad (1.20)$$

Avec  $g^h = (g^s, g^i)$ .

$W_{loc}^c$  est, par définition, tangente en 0 à  $E^c$ , l'espace vectoriel d'équation  $x^h = 0$ . Il est donc normal de chercher une équation de  $W_{loc}^c$  sous la forme de  $x^h = h(x^c)$  avec  $h(0) = 0$  ( $0 \in W_{loc}^c$ ) et  $dh(0) = 0$  ( $E^c$  tangent en 0 à  $W_{loc}^c$ ). La dynamique sur la sous-variété centrale est alors, dans les coordonnées locales  $x^c$ , donnée par :

$$\frac{dx^c}{dt} = A^c x^c + g^c(x^c, h(x^c)) = f^c(x^c).$$

Comme  $h(x^c) = O(\|x^c\|^2)$  et  $g^c(x^c, x^h) = O(\|x^c\|^2 + \|x^h\|^2)$ , on a

$$f^c(x^c) = A^c x^c + g^c(x^c, 0) + O(\|x^c\|^3).$$



Ainsi, la projection de  $f$  sur le plan  $x^h = 0$  fournit une approximation jusqu'à l'ordre 2 inclus de dynamique sur la sous-variété centrale. Le vecteur  $f$  est tangent à  $W_{loc}^c$  cette condition de tangence s'exprime par les égalités suivantes où intervient le Jacobien  $dh$  de  $h$  :

$$\frac{dx^h}{dt} = \frac{d}{dt}(h(x^c)) = dh(x^c)\frac{dx^c}{dt} = dh(x^c)(A^c x^c + g^c(x^c, h(x^c))),$$

de plus

$$\frac{dx^h}{dt} = A^h x^h + g^h(x^c, x^h) = A^h h(x^c) + g^h(x^c, h(x^c)).$$

Cette dernière expression est appelée forme normale du système (1.18).

Ainsi,  $h$  vérifie l'équation aux dérivées partielles suivantes

$$\mathcal{N}(h(x^c)) = dh(x^c)(A^c x^c + g^c(x^c, h(x^c))) - A^h h(x^c) - g^h(x^c, h(x^c)) = 0. \quad (1.21)$$

Cette équation aux dérivées partielles ne peut pas, en général, être résolue de manière exacte. En revanche, elle permet de calculer de façon récurrence les termes successifs du développement limité de  $h$  en  $x^c = 0$  grâce au résultat d'approximation suivant :

**Théorème 1.3.3. (*Approximation de la sous-variété centrale*)**

*Si une fonction  $\rho(x^c)$ , telle que  $\rho(0) = 0$  et  $d\rho(0) = 0$ , est autour de  $x^c$  de l'équation aux dérivées partielles(1.21)*

$$\mathcal{N}(\rho(x^c)) = O(\|x^c\|^k),$$

*alors  $\rho$  est également une approximation à l'ordre  $k$  de  $h$  :*

$$h(x^c) = \rho(x^c) + O(\|x^c\|^k).$$

## 1.4 Types des bifurcations

Il est utile de diviser les bifurcations d'un système dynamique en deux classes principales :

- Bifurcations locales, qui peuvent être analysés entièrement par des changements dans les propriétés de stabilité des équilibres locaux, orbites périodiques ou d'autres ensembles invariants comme les paramètres traversent des seuils critique.
- Bifurcation globales, qui se produisent souvent lorsque les plus grands ensembles invariants du système entrent en collision avec l'autre, ou avec les équilibres du système.

Ils ne peuvent pas être détectés uniquement à une analyse de la stabilité des équilibres (points fixes).

### 1.4.1 Bifurcations locales

On s'intéresse ici aux changements qualitatifs du portrait de phases d'un système dynamique dépendant de paramètres. De tels changements sont appelés bifurcations [5].

Pour les valeurs des paramètres auxquelles de tels changements qualitatifs apparaissent, valeurs dites de bifurcation, la construction du portrait de phases nécessite des outils adaptés. Nous nous intéressons ici aux bifurcations dites locales, c'est à dire relatives à un point d'équilibre. L'étude de ce type de bifurcation repose sur deux méthodes importantes, présentées dans cette partie et qui se ramènent à l'utilisation de bonnes coordonnées :

- 1) La méthode de la sous-variété centrale qui permet d'isoler la partie non hyperbolique, dite centrale.
- 2) La méthode des formes normales de Poincaré où ne subsistent que les vraies non linéarités, c'est à dire celles que l'on ne peut pas faire disparaître par changement régulier de coordonnées.

La théorie des bifurcation s'intéresse aux familles d'équations différentielles dépendant de paramètres  $\mu$  :

$$\frac{dx}{dt} = f_\mu(x), \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^p. \quad (1.22)$$

Le terme bifurcation a été introduit pour la première fois par H.Poincaré pour décrire l'apparition ou la disparition, pour certaines valeurs du paramètres  $\mu$ , de points d'équilibre du système (1.22). Les différents types des bifurcations locales sont :

- 1) bifurcation selle-noeud (fold).
- 2) bifurcation transcritique.
- 3) bifurcation fourche.
- 4) bifurcation doublement de période (Flip).
- 5) bifurcation de Hopf.

### 1.4.2 Bifurcations globales

Les bifurcations globales se produisent lorsque des ensembles invariants, comme orbites périodiques, entrent en collision avec les équilibres. Cela entraîne des changements dans la topologie des trajectoires dans l'espace des phases qui ne peuvent être limitées à un petit voisinage, comme le cas avec les bifurcations locales. En fait, les changements de topologie étendent

jusqu'à une distance arbitrairement grand d'où "globale". Ici, on va citer deux type des bifurcations globales :

- 1) bifurcation homocline dans laquelle un cycle limite entre en collision avec un point selle.
- 2) bifurcation hétéroclinique dans laquelle un cycle limite entre en collision avec deux ou plusieurs points selle.

### 1.4.3 Codimension d'une bifurcation

La codimension d'une bifurcation est le nombre de paramètres qui doivent être modifiés pour la bifurcation de se produire. Cela correspond à la codimension du jeu de paramètres pour lequel la bifurcation se produit à l'intérieur de l'espace complet de paramètres. La bifurcations **fold** et la bifurcations de Hopf sont les seules bifurcations locales génériques qui sont vraiment codimension un (les autres ayant tous codimension supérieure). Cependant, la bifurcation **transcritique** et la bifurcations de fourche sont également souvent considérés comme des bifurcations de codimension un, parce que les formes normales peuvent être écrites avec un seul paramètre. Un exemple d'une bifurcation de codimension deux qui a été bien étudié est la bifurcation **Bogdanov-Takens**.

#### Définition 1.4.1. (*Valeur de bifurcation*)

Une valeur  $\mu_0$  du paramètre pour laquelle le système (1.22) n'est pas structurellement stable est appelée valeur de bifurcation.

### 1.4.4 Bifurcations dans $\mathbb{R}^2$

Dans la suite, on a besoin de calculer un indice dit indice de **Marsden-McCacken**.

#### Utilisation de l'indice de Marsden-McCacken

Pour utiliser cette méthode, il faut mettre le système dynamique étudié sous une forme adéquate. On va suivre les étapes suivantes :

- 1) Il faut ramener le système dynamique étudié à l'origine par le changement de variable :

$$\begin{cases} X = x - x_0, \\ Y = y - y_0. \end{cases}$$

Tel que  $(x_0, y_0)$  les coordonnées de point d'équilibre de système dynamique.

- 2) Faire un changement de variables pour mettre la matrice Jacobienne à l'origine sous sa forme

de Jordan lorsque  $a = a^*$  :

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^* \\ \omega^* & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Il faut calculer l'indice  $I$  de **Marsden-McCracken** comme suit :

$$I = \omega^*(f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}) + g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) + f_{xx}g_{xx} - f_{xx}g_{xx} - f_{yy}g_{yy}.$$

Où  $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  est calculée au point d'équilibre (l'origine) pour  $a = a^*$  et ainsi de suite.

On distingue trois cas :

- a) Si  $I < 0$  : le point d'équilibre est stable.
- b) Si  $I > 0$  : le point d'équilibre est instable.
- c) Si  $I = 0$  : on ne peut rien conclure par cette méthode.

### Exemple

On va appliquer cette méthode sur le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - ay - \frac{1}{3}y^3. \end{cases}$$

La matrice jacobienne est :

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,  $\omega^* = 1$ .

a aussi :

$$f_{xy} = f_{xx} = f_{yy} = f_{xxx} = f_{xyy} = 0, \quad g_{xy} = g_{xx} = g_{yy} = g_{xxy} = 0, \quad \text{et} \quad g_{xxy} = -2.$$

On obtient :  $I = -2 < 0$  : Ce qui confirme que le point d'équilibre est asymptotiquement stable, Il existe une bifurcation super-critique et un cycle limite asymptotiquement stable.

### Bifurcations locales

Il existe quatre types de bifurcations de codimension 1, qui correspondent toutes à des comportements génériques, avec des formes normales [5] :

$$\dot{x} = G(x, \mu).$$

On note

$$G_\mu = \frac{\partial G}{\partial \mu}, \quad G_{xx} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \quad G_{\mu\mu} = \frac{\partial^2 G}{\partial \mu^2}, \quad G_{\mu x} = \frac{\partial^2 G}{\partial \mu \partial x}.$$

**1) Bifurcation fourche**

La forme normale est :

$$\dot{x} = G(x, \mu) = x(G_{\mu x}\mu + \frac{1}{6}G_{xx}x^2) + O(2),$$

avec  $x \sim \mu^{\frac{1}{2}}$ , et

$$G_{\mu}(0, 0) = G_{xx}(0, 0) = 0.$$

**Exemple**

L'équation générique d'une bifurcation fourche est :

$$\dot{x} = f(x) = \mu x - x^3.$$

On donne le diagramme de cette bifurcation

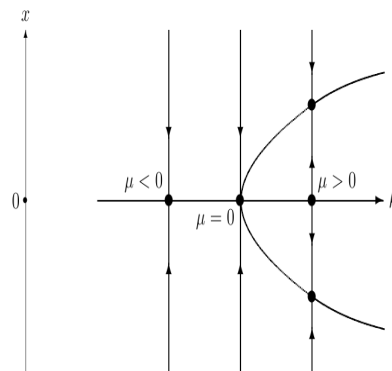


FIGURE 1.5 – Diagramme de la bifurcation fourche.

**2) Bifurcation noeud-col**

On a une Bifurcation noeud-col avec la forme normale :

$$\dot{x} = G(x, \mu) = G_{xx}x + G_{\mu x}\mu + O(2),$$

où

$$G_{\mu}(0, 0) \neq 0 \text{ et } G_{xx}(0, 0) \neq 0.$$

**Exemple**

L'équation générique d'une bifurcation noeud-col est :

$$\dot{x} = f(x) = \mu + \alpha x^2.$$

On donne le diagramme de cette bifurcation

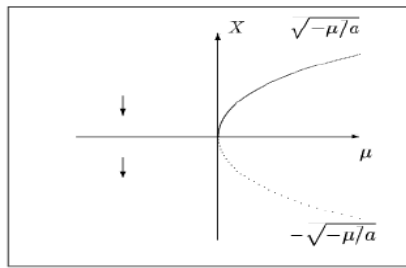


FIGURE 1.6 – Diagramme de la bifurcation noeud-col

### 3) Bifurcation transcritique

La forme normale est

$$\dot{x} = G(x, \mu) = \frac{1}{2}(G_{xx}x^2 + G_{\mu x}\mu x + G_{\mu\mu}\mu^2 + O(3)),$$

avec

$$G_{\mu}(0, 0) = 0 \text{ et } G_{xx}(0, 0) \neq 0.$$

#### Exemple

L'équation générique d'une bifurcation transcritique est :

$$\dot{x} = f(x) = \mu x - x^2.$$

On donne le diagramme de cette bifurcation

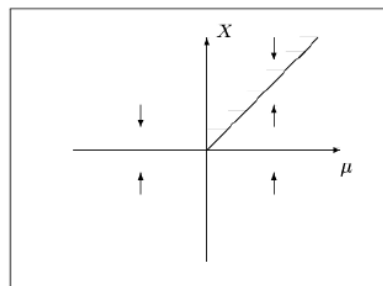


FIGURE 1.7 – Diagramme de la bifurcation transcritique

#### 4) Bifurcation de Hopf

Supposons que le système dynamique

$$\dot{z} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{C}^n, \quad n \geq 3, \quad \mu : \text{paramètre réel},$$

ait un point stationnaire  $x = x^*(\mu)$  et que

- la matrice jacobienne

$$A(\mu) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial z_j} \right)_{z=z^*},$$

possède une paire de valeurs propres complexes conjuguées  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ ,

$$\lambda_{1,2}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu),$$

telles que :

- 1) pour une certaine valeur  $\mu = \mu_c$ ,

$$\alpha(\mu_c) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{d\mu} \alpha(\mu) \Big|_{\mu=\mu_c} \neq 0,$$

- 2) Les  $(n - 2)$  autres valeurs propres de  $A(\mu_c)$  aient leur partie réelle strictement négative.

Alors, il existe une bifurcation de Hopf.

#### Exemple

L'équation générique d'une bifurcation de Hopf est :

$$\dot{x} = f(x) = \mu x - |x|^2 x.$$

On donne le diagramme de cette bifurcation

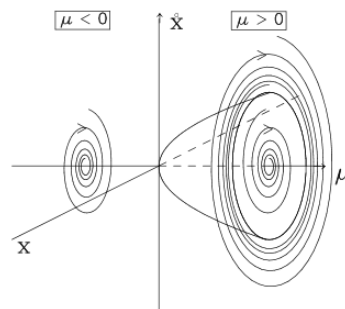


FIGURE 1.8 – Diagramme de la bifurcation de Hopf

### 5) Bifurcations flip ou doublement de période

Cette bifurcation a lieu lorsqu'une des deux valeurs propres est égales à  $-1$ . Un cycle d'ordre  $k$  qui subit cette bifurcation va changer de nature et crée un cycle d'ordre  $2k$  de la même nature. C'est-à-dire, un point fixe stable d'ordre 1, par exemple, devient instable en même temps que l'apparition d'un cycle d'ordre 2 stable. Cette situation peut être représentée par :

**Cycle attractif d'ordre  $k$  + cycle répulsif d'ordre  $k$   $\Leftrightarrow$  cycle attractif d'ordre  $2k$**

#### Exemple

Considérons l'application quadratique (ou logistique) :

$$f(x) = rx(1 - x), \quad r > 0. \quad (1.23)$$

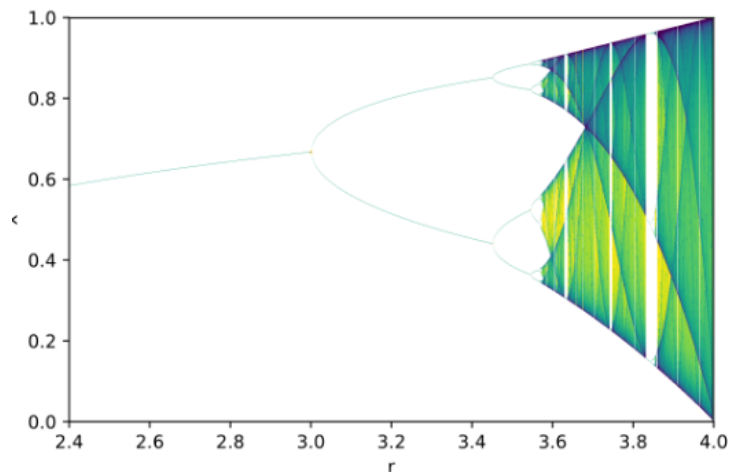


FIGURE 1.9 – Cascade de bifurcations pour  $f(x) = rx(1 - x)$ .

#### Bifurcations globales

##### Bifurcations homocline

Une bifurcation homocline est une bifurcation globale qui se produit souvent quand une orbite périodique entre en collision avec un point selle. la figure 1.10 montre un portrait de phase avant, pendant et après une bifurcation homocline en 2D. L'orbite périodique développe jusqu'à ce qu'il entre en collision avec le point selle. Au point de bifurcation de la période de l'orbite périodique a augmenté à l'infini et il est devenu une orbite homocline. Après la bifurcation il n'y a plus une orbite périodique. La bifurcations homoclines peuvent se produire supercritique



ou sous-critique. la figure 1.10 présente une bifurcation homocline de " type I " en 2D, il ya une bifurcation homocline " type II ", dans lequel l'orbite homoclines **pièges** les autres extrémités des collecteurs stables et instables de point selle. En trois dimensions ou plus, les bifurcations homocline d'une grande codimension peuvent se produire, mais la production dynamique sera complexe, elle peut-être chaotiques.

### Bifurcations hétérocline

Une bifurcation hétérocline est une bifurcation globale impliquant un cycle hétérocline. Bifurcations hétéroclines sont de deux types : les bifurcations par résonance et bifurcations transversales. Les deux types de bifurcation se traduira par la modification de la stabilité du cycle hétérocline. A une bifurcation par résonance, la stabilité du cycle change quand une condition algébrique sur les valeurs propres de l'équilibre dans le cycle est satisfaite. Cela est généralement accompagnée par la naissance ou la disparition d'une orbite périodique. Une bifurcation transversale d'un cycle hétérocline se produit lorsque la partie réelle d'une valeur propre transversal de la figure 1.10 bifurcation homocline :

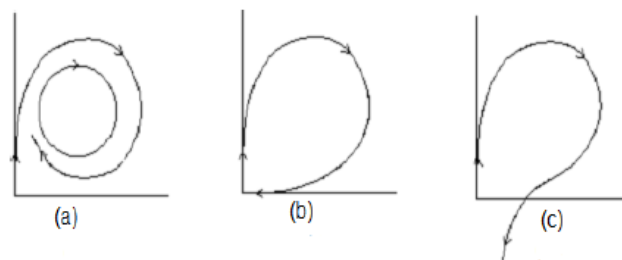


FIGURE 1.10 – Bifurcation homocline : Pour des petites valeur de paramètres

Pour de petites valeurs de paramètres, il ya un point selle à l'origine et un cycle limite (a). Comme le paramètre de bifurcation augmente, le cycle limite développe jusqu'à ce qu'il croise exactement le point selle, ce qui donne une orbite de longueur infinie (b). Lorsque le paramètre de bifurcation augmente encore, le cycle limite disparaît complètement (c). l'un des équilibres dans le cycle passe par zéro. Cela permettra également de faire un changement de la stabilité du cycle hétérocline.

### Exemple

Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y , \\ \dot{y} = x + ay - x^2 . \end{cases} \quad (1.24)$$

Les points d'équilibre de système (1.24) sont  $P_1(0, 0)$  et  $P_2(1, 0)$ . La matrice Jacobienne est :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 2x & a \end{pmatrix}.$$

On a

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}.$$

Puisque  $\text{Det}(J(P_1)) = -1$  .Donc  $P_1$  est un point selle .

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}.$$

On a

$$\text{Det}(J(P_2)) = 1 , \text{tr}(J(P_2)) = a,$$

donc le polynôme caractéristique de  $J(P_2)$  est :

$$P(x) = x^2 - ax + 1,$$

alors

$$\Delta = a^2 - 4$$

Donc , pour  $-2 < a < 2$  . le point d'équilibre  $P_2$  est un foyer asymptotiquement stable si :  
 $-2 < a < 0$  , instable si  $0 < a < 2$  . Par conséquent la valeur de bifurcation est  $a_0 = 0$  .

Donc on va voir que se passe-t-il si :  $a = a_0$ . Soit la fonction définie positive suivante :

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

On a

$$\dot{V}(x, y) = x\dot{x} + y\dot{y},$$

d'où

$$\dot{V}(x, y) = 2xy - x^2y.$$

On remarque que le signe de  $\dot{V}(x, y)$  n'est pas clair. On peut alors soit calculer l'indice de Marsden-McCracken, soit rechercher la possibilité de centres par une intégrale première. On à

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - x^2}{y},$$

D'où

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C, \quad c \in \mathbb{R}$$

On peut prendre la fonction :

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

comme solution de système (1.24). On peut aussi vérifier que le point  $P_2(1, 0)$  est un minimum à cette fonction, et les courbes de niveaux de  $H(x, y) = C$  se referment autour de ce point. On a donc des centres. On remarque aussi que la courbe  $H(x, y) = 0$  est une trajectoire homocline. L'équation  $H(x, y) = 0$  donne :

$$y = \pm \sqrt{|1 - \frac{2}{3}x|} \text{ avec } 1 - \frac{2}{3}x \geq 0$$

Il s'agit d'une bifurcation homocline, comme illustré dans les figures 1.11, 1.12 et 1.13.

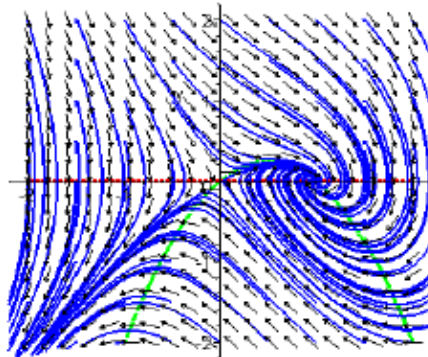
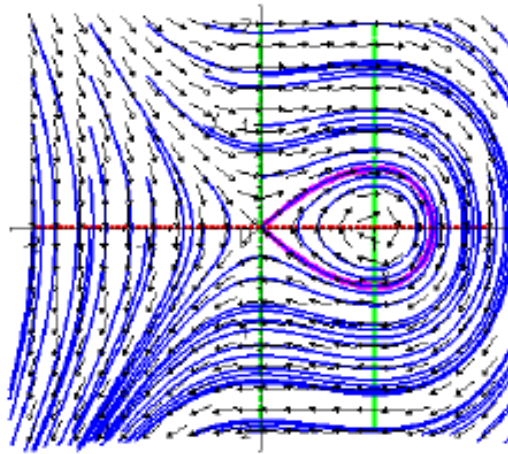
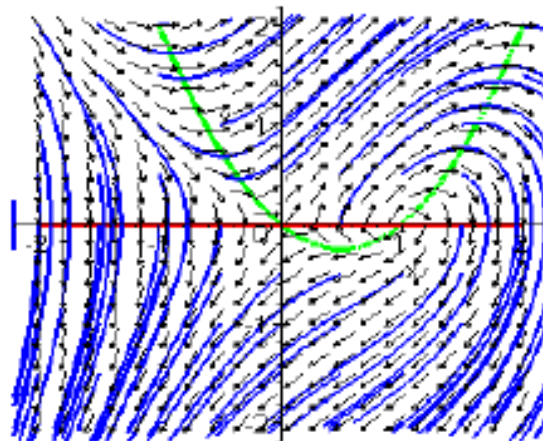


FIGURE 1.11 – Portrait de phase de système (1.24) pour  $a = -1$

FIGURE 1.12 – Portrait de phase de système (1.24) pour  $a = 0$ FIGURE 1.13 – Portrait de phase de système (1.24) pour  $a = 1$ 

### Bifurcations de Bogdanov-Takens

Dans cette partie on s'intéresse à une bifurcation dit bifurcation de **Bogdanov-Takens**

Une bifurcation de Bogdanov-Takens est une bifurcation de codimension 2 qui consiste en l'occurrence simultanée pour un même point singulier d'une bifurcation pli et d'une bifurcation de Hopf. Considérons la famille de champ de vecteurs dépendant de deux paramètres  $a$  et  $b$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= a + by + x^2 + xy.\end{aligned}$$

les points singuliers sont donnés par

$$x = x^+ = \sqrt{-a}, \quad y = 0,$$

et

$$x = x^- = -\sqrt{-a}, \quad y = 0.$$

On distingue trois cas :

Si  $a < 0$ , il y a donc deux points singuliers ; sur l'axe  $a = 0$ , il existe un unique point singulier et si  $a > 0$ , il n'y a aucun point singulier.

La jacobienne au voisinage du point singulier  $(\bar{x}, 0)$  est donné par

$$J(\bar{x}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\bar{x} & b + \bar{x} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres  $\lambda_1^-$ ,  $\lambda_2^-$  et  $\lambda_1^+$ ,  $\lambda_2^+$  correspondant aux deux points singuliers vérifient :

$$\lambda^2 - (b + \bar{x})\lambda - 2\bar{x} = 0.$$

Le point  $(x^+, 0)$  est donc un col et le point  $(x^-, 0)$  est un noeud ou un foyer. Ce dernier point est stable si  $b - \sqrt{-a} < 0$  et instable si  $b - \sqrt{-a} > 0$ . L'axe  $a = 0$  correspond à une bifurcation pli. On peut vérifier que le changement de stabilité du point  $(x^-, 0)$  le long de la branche de parabole  $b = \sqrt{-a}$  correspond à une bifurcation de Hopf sous-critique. Il apparaît donc en dessous de la parabole un cycle limite instable.

Nous décrivons par la suite la bifurcation responsable de la disparition de ce cycle limite qui nécessite un changement de variables dépendant d'un paramètre  $\varepsilon$

$$t = \varepsilon\tau, \quad x = \varepsilon^2 u, \quad y = \varepsilon^3 v, \quad a = \varepsilon^4 \alpha, \quad b = \varepsilon^2 \beta.$$

On aboutit alors au système

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v, \\ \dot{v} &= \alpha + u^2 + \varepsilon(\beta v + uv). \end{aligned}$$

Pour  $\varepsilon = 0$ , ce système est hamiltonien et admet la fonction d'énergie :

$$H = \frac{1}{2}v^2 - \alpha u - \frac{u^3}{3}.$$

Notons que ce système hamiltonien présente une connexion homocline  $\gamma_0$  contenue dans la courbe  $H = \frac{2}{3}$ . On fixe  $\alpha$  et on cherche les valeurs de  $\beta$

Pour lesquelles, lorsque  $\varepsilon$  est petit, la connexion homocline persiste. On doit donc considérer la fonction

$$M(\beta) = \int_{\gamma_0} (\beta v + uv) dv,$$

Le calcul de cette fonction se ramène à des intégrales elliptiques (voir [Guckenheimer-Holmes, 1983]) et conduit au fait que  $M(\beta)$  s'annule pour  $\beta = \frac{5}{7}$ . En revenant aux paramètres initiaux  $(a, b)$ , on peut achever l'analyse de la bifurcation en ajoutant l'arc de parabole  $a = \frac{-49}{25}b^2$  en dessous de l'arc de parabole de la bifurcation de Hopf et qui donne une approximation de la courbe le long de laquelle le cycle limite instable disparaît par bifurcation homocline. Cette bifurcation de Bogdanov-Takens est dite souscritique.

Une analyse analogue du système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= a + bx + x^2 + xy. \end{aligned}$$

montre l'existence d'une courbe de bifurcations pli ( $T_+$  et  $T_-$  les deux branches de la courbe), un demi-axe le long duquel se produisent des bifurcations de Hopf surcritiques ( $H$ ) et une courbe de bifurcations homoclines ( $P$ ) faisant disparaître le cycle limite stable né de la bifurcation de Hopf. On obtient alors la partition de l'espace des paramètres représentée dans la figure suivante avec les notations introduites ci-dessus.

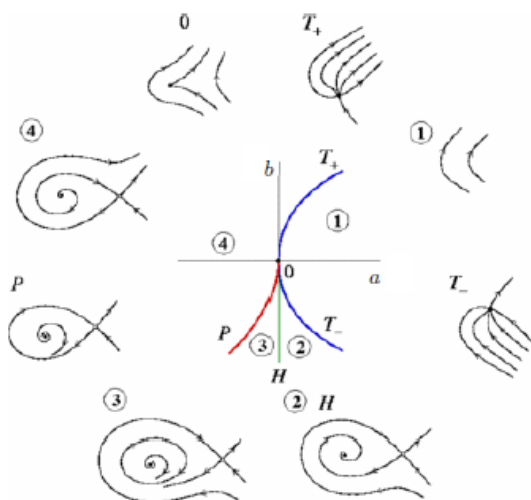


FIGURE 1.14 – Partition de l'espace des paramètres.

---

---

## CHAPITRE 2

---

# ÉTUDE D'UN MODÈLE PROIE-PRÉDATEUR AVEC UNE RÉPONSE FONCTIONNELLE DE TYPE HOLLING IV

En 1959, Holling a proposé pour la première fois le système prédateur-proie avec une réponse fonctionnelle. Dans la dynamique de la population, une réponse fonctionnelle du prédateur à la densité de la proie se réfère à le changement dans la densité des proies attachées par unité de temps par prédateur à mesure que la densité des proies change. a différentes formes. Par exemple, une réponse fonctionnelle  $p(x)$  de Holling de type II est de la forme

$$p(x) = \frac{mx}{a+x},$$

tandis que la forme

$$p(x) = \frac{mx^2}{a+x^2},$$

est appelée réponse fonctionnelle de type Holling III. En général, cette réponses fonctionnelles  $p(x)$  est monotone et le système prédateur-proie traditionnel avec des réponses fonctionnelles monotones a été largement étudiés. Cependant, des expériences indiquent que des réponses non monotones se produisent au niveau microbien : lorsque la concentration en éléments nutritifs atteint un niveau élevé, un effet inhibiteur sur le taux de croissance spécifique peut se produire. Cela se voit souvent lorsque des micro-organismes sont utilisés pour les déchets décomposition

ou pour la purification de l'eau. Dans la dynamique des populations, la défense de groupe est un terme utilisé décrire le phénomène de réduction, voire de prévention totale de la prédation, en raison de la capacité accrue de la proie de mieux se défendre ou de se déguiser lorsque leur nombre sont assez grands. Pour étudier l'interaction prédateur-proie lorsque la proie présente une défense de groupe, Freedman et Wolkowicz , Mischaikow et Wolkowicz et Wolkowicz ont proposé le modèle suivant [10, 19, 7, 21] :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xg(x, k) - yp(x), \\ \frac{dy}{dt} = y(-D + q(x)), \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $x$  et  $y$  sont des fonctions du temps représentant les densités la de population de proies et de prédateurs,  $k > 0$  est la capacité de charge de la proie et  $D > 0$  est le taux de mortalité de la proie prédateur. La fonction  $g(x, k)$  représente le taux de croissance spécifique de la proie en l'absence prédateur et est supposé satisfaire les conditions suivantes pour  $x \geq 0, k > 0$  :

$$\begin{aligned} g(k, k) = 0, & \quad g(0, k) > 0, & \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g(0, k) < \infty, \\ g_x(x, k) < 0, & \quad g_k(x, k) \geq 0, & \quad g_{xk}(x, k) \geq 0, & \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g_x(x, k) = 0. \end{aligned}$$

La fonction  $p(x)$ , qui désigne la fonction de réponse du prédateur, vérifie que

$$p(0) = 0, \quad p(x) > 0 \quad \text{pour} \quad x > 0,$$

et il y a une constante  $M > 0$  telle que :

$$p'(x) > 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq M,$$

$$p'(x) < 0 \quad \text{si} \quad x \geq M.$$

Évidemment, la fonction de réponse  $p(x)$  n'est pas monotone pour  $x \geq 0$ . Le taux de conversion de proie à prédateur est décrit par  $q(x)$ . Dans le modèle gaussien,  $q(x) = \lambda p(x)$  pour certains constante positive  $\lambda$ .

Soit  $g(x, k)$  la fonction logistique,  $p(x)$  le Monod-Haldane simplifié ou fonction de Holling type-IV donnée par  $p(x) = \frac{\gamma x}{a+x^2}$  et  $q(x) = \frac{\mu}{\gamma}$ .

Ruan et Xiao dans leur article [18], avaient étudié un modèle proie-prédateur avec une réponse fonctionnelle de type Holling IV, ce modèle qui est le sujet de notre étude dans ce mémoire.



## 2.1 Présentation du modèle mathématique

Le modèle que nous allons étudier décrit une population proie de densité  $x$  qui sert d'unique ressource à un prédateur de densité  $y$ . La proie suit une croissance logistique et la réponse fonctionnelle du prédateur à la proie est de forme Holling type IV. Les équations décrivant les densités de ces deux populations sont données par le système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{xy}{a+x^2} \\ \frac{dy}{dt} = y\left(\frac{\mu x}{a+x^2} - D\right), \end{cases} \quad (2.2)$$

avec  $x(0) \geq 0$ ,  $y(0) \geq 0$  et  $a$ ,  $D$ ,  $k$ ,  $\mu$ ,  $r$  sont les paramètres du modèle et ne prennent que des valeurs strictement positives. Ces paramètres sont définis de la manière suivante :

$r$  désigne le taux de croissance intrinsèque de la population de proies,

$a$  est la demi-saturation,

$D$  est le taux de mortalité du prédateur,

$k$  est la capacité de charge de la proie,

$\mu$  le taux de croissance maximale de l'espèce.

## 2.2 Étude de la persistance du modèle

Notons  $\mathbb{R}_+^2$  le quadrant positif, et  $Int(\mathbb{R}_+^2)$  le quadrant strictement positif.

**Lemme 2.2.1.** *Le quadrant strictement positif  $Int(\mathbb{R}_+^2)$  est invariant par le système (2.2).*

### Démonstration

Remarquons, tout d'abord, que les frontières du quadrant positif  $\mathbb{R}_+^2$  sont invariantes, cela est immédiat à partir des équations du système (2.2). De plus, les densités  $x(t)$  et  $y(t)$  sont strictement positives : pour  $t \geq 0$ , si  $x(0) > 0$  et  $y(0) > 0$  alors  $x(t) > 0$  et  $y(t) > 0$  car le théorème d'existence et d'unicité des équations différentielles assure que les solutions sont strictement positives et les axes ne peuvent se couper. ■

Nous montrerons que, sous certaines conditions, les solutions du système (2.2) issues de  $\mathbb{R}_+^2$  sont semi bornées pour  $t$  suffisamment grand.

**Définition 2.2.1.** *Une solution  $\phi(t, t_0, x_0, y_0)$  du système (2.2) est dite bornée dans  $\mathbb{R}_+^2$  s'il existe une région compacte  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}_+^2$  et un temps fini  $T$  ( $T = T(t_0, x_0, y_0)$ ) tels que, pour tous  $(t_0, x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^2$ ,  $\phi(t, t_0, x_0, y_0) \in \mathcal{A}$  pour tout  $t > T$ .*

**Théorème 2.2.2.** Soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble défini par :

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2; 0 \leq x \leq k, 0 < y < \infty\}.$$

Alors :

- a)  $\mathcal{A}$  est positivement invariant par le champ (2.2),
- b) toutes les solutions de (2.2) issues de  $\mathbb{R}_+^2$  convergent vers l'ensemble attracteur  $\mathcal{A}$ .
- c) le système est semi dissipatif.

### Démonstration

a) Soient  $(x(0), y(0)) \in \mathcal{A}$ , nous allons montrer que  $(x(t), y(t)) \in \mathcal{A}$  pour tout  $t \geq 0$ .

Il est évident, à partir du lemme 2.2.1, que  $(x(t), y(t))$  restent positifs, puisque  $(x(0), y(0)) \in \mathcal{A}$ .

(a1) Montrons d'abord que  $x(t) \leq k$ , pour tout  $t \geq 0$ . Puisque  $x > 0$  et  $y > 0$  dans  $\text{Int}(\mathbb{R}_+^2)$ , vérifie l'inéquation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} \leq rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right), \quad (2.3)$$

cela est immédiat si on considère la première équation de (2.2). Donc  $x(t)$  peut être comparé avec le solution de

$$\frac{du}{dt} = ru(t)\left(1 - \frac{u(t)}{k}\right), \quad u(0) = x_0 > 0,$$

qui est une équation de Bernoulli pour cela on pose

$$u(t) = \frac{1}{z(t)},$$

d'où

$$u'(t) = \frac{-z'(t)}{z(t)^2},$$

Si on remplace dans l'équation précédente on trouve :

$$\frac{-z'(t)}{z(t)^2} = \frac{r}{z(t)}\left(1 - \frac{1}{z(t)k}\right),$$

alors

$$\frac{-z'(t)}{z(t)} = r\left(1 - \frac{1}{z(t)k}\right),$$

donc

$$z'(t) = -rz(t)k + 1.$$

On cherche premièrement la solution de l'équation homogène associée :

$$z'(t) = -rz(t)k,$$

on trouve

$$z(t) = ce^{-rkt}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Pour résoudre l'équation non-homogène, on pose

$$z(t) = c(t)e^{-rkt}.$$

On dérive et on reporte dans l'équation non-homogène, on trouve

$$c'(t)e^{-rkt} = 1,$$

donc

$$c(t) = \frac{1}{rk}e^{rkt} + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

alors

$$z(t) = ce^{-rkt} + \frac{1}{rk},$$

qui donne

$$0 < u(t) = \frac{k}{\frac{1}{r} + cke^{-rkt}} \leq k,$$

avec

$$c = \frac{1}{u(0)} - \frac{1}{rk}.$$

On a  $0 < u(0) \leq k$ , puisque  $(x_0, y_0) \in A$ , donc  $c \geq 0$ .

Il en découle que toute solution positive  $x(t)$  de (2.2) vérifie  $x(t) \leq k$ , pour tout  $t \geq 0$ .

**b)** On pose

$$g(y) = \left( \frac{\mu x}{a + x^2} - D \right) y.$$

On va étudier suivant le signe de  $\frac{\mu x}{a + x^2} - D$ , on a :

1) si  $\frac{\mu x}{a + x^2} - D \geq 0$ ,

on remarque que  $g$  est décroissante dans l'intervalle  $] -\infty, 0]$  et croissante dans  $[0, \infty[$ . Alors,  $g$  admet une valeur minimale pour  $y = 0$ , donc

$$\min_{\mathbb{R}} \left[ \left( \frac{\mu x}{a + x^2} - D + 1 \right) y \right] = g(0) = 0,$$

de plus

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) = +\infty.$$

2) si  $\frac{\mu x}{a+x^2} - D < 0$ ,

Biologiquement c'est nécessaire pour la persistance de l'écosystème, Alors  $\frac{\mu x}{a+x^2} - D < 0$  pour toute  $x > 0$  et  $g(y) < 0$ . d'où  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t, t_0, x_0, y_0) = 0$  comme  $x_0 > 0$  et  $y_0$ . Implique que les espèces de prédateur sont vers l'extinctions.

c) Le système (2.2) est évidemment semi dissipatif dans  $\mathbb{R}_+^2$ , puisque toutes les solutions positives sont bornées.

## 2.3 Stabilité locale et bifurcations

Dans cette partie nous allons étudier l'existence et la stabilité des points d'équilibre, qu'ils soient triviaux (i.e. appartenant à la frontière de  $\mathbb{R}_+^2$ ) ou intérieure (i.e. appartenant à  $Int(\mathbb{R}_+^2)$ ). Les différents points fixes sont donnés par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x(r(1 - \frac{x}{k}) - \frac{y}{a+x^2}) = 0, \\ y(\frac{\mu x}{a+x^2} - D) = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

On va résoudre d'abord la deuxième équation, on trouve :

$$y = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\mu x}{a+x^2} - D = 0.$$

On se reporte à la première équation, on trouve deux points triviaux :

$$E_0(0, 0), E_1(k, 0).$$

Rappelons la définition du point d'équilibre intérieur :

**Définition 2.3.1.** *Un point d'équilibre  $E$  du système (2.2) est dit non trivial ou intérieur s'il appartient au cône strictement positif  $Int(\mathbb{R}_{xy}^+)$ .*

Les coordonnées  $(x^*, y^*)$  des points d'équilibre intérieurs sont données par les équations suivantes :

$$\begin{cases} y^* = r(1 - \frac{x^*}{k})(a + (x^*)^2), \\ Dx^{*2} - \mu x^* + aD = 0. \end{cases}$$

et vérifiées la condition  $(x^*, y^*) \in \mathcal{A}$ , c'est-à-dire :

$$x^* < k. \quad (2.5)$$

On a l'équation

$$Dx^2 - \mu x + aD = 0 ,$$

a comme discriminant

$$\Delta = \mu^2 - 4aD^2,$$

On a trois cas suivant le signe du ce discriminant

1) Si  $\Delta = 0$  on a une racine double :

$$x_0 = \frac{\mu}{2D},$$

comme  $x_0$  est positive alors  $\tilde{E}_0(x_0, y_0)$  est un point intérieur avec :

$$x_0 = \frac{\mu}{2D}, \quad y_0 = r\left(1 - \frac{x_0}{k}\right)(a + x_0^2). \quad (2.6)$$

2) Si  $\Delta > 0$  On a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4aD^2}}{2D},$$

$$x_2 = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4aD^2}}{2D},$$

comme  $x_1 x_2 = a > 0$ , et comme  $x_2$  est positive on sait que les deux racines sont positives.

Par conséquent il existe deux points intérieurs  $\tilde{E}_1(x_1, y_1)$  et  $\tilde{E}_2(x_2, y_2)$  où :

$$x_1 = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4aD^2}}{2D}, \quad y_1 = r\left(1 - \frac{x_1}{k}\right)(a + x_1^2) \quad (2.7)$$

$$x_2 = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4aD^2}}{2D}, \quad y_2 = r\left(1 - \frac{x_2}{k}\right)(a + x_2^2) \quad (2.8)$$

3) Si  $\Delta < 0$  L'équations n'admet pas des solutions dans  $\mathbb{R}$ .

### 2.3.1 Étude de la stabilité des points d'équilibre triviaux

Nous allons analyser la stabilité locale des points d'équilibre  $E_0$  et  $E_1$ .

La matrice jacobienne à un point d'équilibre  $E(x, y)$  est donnée grâce au champ (2.2) par

$$\begin{aligned}\frac{df_1}{dx} &= r - \frac{2rx}{k} + y\left(\frac{x^2 - a}{(a + x^2)^2}\right), \\ \frac{df_1}{dy} &= \frac{-x}{a + x^2}, \\ \frac{df_2}{dx} &= \frac{y\mu(a - x^2)}{(a + x^2)^2}, \\ \frac{df_2}{dy} &= \frac{\mu x}{a + x^2} - D.\end{aligned}$$

Donc

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx}{k} + y\left(\frac{x^2 - a}{(a + x^2)^2}\right) & \frac{-x}{a + x^2} \\ \frac{y\mu(a - x^2)}{(a + x^2)^2} & \frac{\mu x}{a + x^2} - D \end{pmatrix}.$$

Pour le point trivial  $E_0$

On a

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix}.$$

On a  $J(E_0)$  est diagonale donc il y a deux valeurs propres :

$$\lambda_1 = r > 0, \quad \lambda_2 = -D < 0,$$

donc  $E_0$  est un point d'équilibre hyperbolique de type selle.

De la même manière on trouve

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -r & -\frac{k}{a+k^2} \\ 0 & \frac{\mu k}{a+k^2} - D \end{pmatrix}.$$

$J(E_1)$  est triangulaire donc il y a deux valeurs propres  $\lambda_1 = -r$ ,  $\lambda_2 = \frac{\mu k}{a+k^2} - D$ .

Ce qui conduit aux trois possibilités suivantes :

**a) cas 1 :** si  $\frac{\mu k}{a+k^2} < D$

alors  $E_1$  est localement asymptotiquement stable.

**b) cas 2 :** si  $\frac{\mu k}{a+k^2} > D$

on obtient que  $E_1$  est un point d'équilibre hyperbolique instable.

**c) cas 3 :** si  $\frac{\mu k}{a+k^2} = D$

**Lemme 2.3.1.** Si  $\frac{\mu k}{a+k^2} = D$ , le système (2.2) admet une bifurcation de type transcritique.

### Démonstration

Dans ce cas, le point  $E_1$  possède une première valeur propre négative  $\lambda_1 = -r$  et la seconde est nulle. Et nous ne pourrions par conclure qu'après l'étude de la **variété centrale**. Pour cela, ramenons le système à l'origine par le changement de coordonnées suivant :

$$x \longrightarrow x + k, \quad y \longrightarrow y,$$

et posons

$$\varepsilon = \frac{\mu k}{a+k^2} - D.$$

En ajoutant l'équation triviale  $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$  et en notant que  $D = \frac{\mu k}{a+k^2} - \varepsilon$ , on obtient le système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r(x+k)\left(1 - \frac{(x+k)}{k}\right) - \frac{(x+k)y}{a+(x+k)^2}, \\ \frac{dy}{dt} = -\left(\frac{\mu k}{a+k^2} - \varepsilon\right)y + \frac{\mu y(x+k)}{a+(x+k)^2}, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Nous allons étudier la dynamique de (2.9) au voisinage de  $\varepsilon = 0$ , puisque les  $\varepsilon > 0$  et  $\varepsilon < 0$ . Nous allons commencer par mettre la matrice Jacobienne du champ de vecteur sous la forme de Jordan. On a :

$$J(x, y, \varepsilon) = \begin{pmatrix} r\left(1 - \frac{2(x+k)}{k}\right) - y\left(\frac{a-(x+k)^2}{(a+(x+k)^2)^2}\right) & -\frac{(x+k)}{a+(x+k)^2} & 0 \\ \frac{a-(x+k)^2}{(a+(x+k)^2)^2}\mu y & \frac{\mu(x+k)}{a+(x+k)^2} - \left(\frac{\mu k}{a+k^2} - \varepsilon\right) & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$J(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -r & -\frac{k}{a+k^2} & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont :  $\lambda_1 = -r$ ,  $\lambda_2 = \varepsilon$ ,  $\lambda_3 = 0$ . Les vecteurs propres associés à ces valeurs propres sont les suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{k}{(a+k^2)(r+\varepsilon)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{k}{(a+k^2)(r+\varepsilon)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  à la base  $\{v_1, v_2, v_3\}$ . Prenons le changement de variable suivant :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \varepsilon \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \\ \eta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varepsilon \end{pmatrix},$$

où

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{k}{(a+k^2)(r+\varepsilon)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{cases} u = x + \frac{k}{(a+k^2)(r+\varepsilon)}y, \\ v = y, \\ \eta = \varepsilon, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x = u - \frac{k}{(a+k^2)(r+\varepsilon)}v, \\ y = v, \\ \varepsilon = \eta, \end{cases}$$

ce qui nous permet d'écrire le système, en gardant la notation en  $\varepsilon$ .

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = r \left( u - \frac{kv}{(a+k^2)(r+\varepsilon)} + k \right) \left( -\frac{u}{k} + \frac{v}{(a+k^2)(r+\varepsilon)} \right) \\ \quad \left( \frac{u - \frac{kv}{(a+k^2)(r+\varepsilon)} + k}{a + \left( u - \frac{kv}{(a+k^2)(r+\varepsilon)} \right)^2} \right) v - \frac{kv}{(a+k^2)(r+\varepsilon)} \left( \frac{\mu \left( u - \frac{kv}{(a+k^2)(r+\varepsilon)} + k \right)}{a + \left( u - \frac{kv}{(a+k^2)(r+\varepsilon)} + k \right)^2} - \frac{\mu k}{a+k^2} + \varepsilon \right) = f(u, v, \varepsilon). \\ \frac{dv}{dt} = v \left( \mu \frac{u - \frac{kv}{(a+k^2)(r+\varepsilon)} + k}{a + \left( u - \frac{kv}{(a+k^2)(r+\varepsilon)} \right)^2} - \frac{\mu k}{a+k^2} + \varepsilon \right) = g(u, v, \varepsilon). \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$



Avant de chercher la variété centre associée à  $E_1$ , nous allons écrire chaque équation du système (2.10) sous la forme d'un développement de Taylor et calculer ensuite la forme normale.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = & \alpha_{000} + \alpha_{100}u + \alpha_{200}u^2 + \alpha_{110}uv + \alpha_{101}u\varepsilon + \alpha_{010}v + \alpha_{020}v^2 \\ & + \alpha_{011}v\varepsilon + \alpha_{001}\varepsilon + \alpha_{001}\varepsilon^2 + O(3). \end{aligned}$$

Après calculs, on obtient

$$\begin{aligned} \alpha_{000} = f(0, 0, 0) = 0, \quad \alpha_{100} = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0, 0) = -r, \\ \alpha_{200} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0, 0, 0) = -\frac{2r}{k}, \quad \alpha_{110} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(0, 0, 0) = \frac{\mu(a - k^2)}{(a + k^2)^2}, \\ \alpha_{101} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial \varepsilon}(0, 0, 0) = 0, \quad \alpha_{010} = \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0, 0) = 0, \\ \alpha_{020} = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(0, 0, 0) = -2k \left( \frac{1}{(a + k^2)r} + \frac{k^2 - a}{(a + k^2)^2 r} + \frac{2\mu}{(a + k^2)r} \left( \frac{k^3 - ak}{(a + k^2)^2 r} \right) \right), \\ \alpha_{011} = \frac{\partial f^2}{\partial v \partial \varepsilon}(0, 0, 0) = -\frac{k}{(a + k^2)r}, \\ \alpha_{001} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(0, 0, 0) = 0, \quad \alpha_{002} = \frac{\partial f^2}{\partial \varepsilon^2}(0, 0, 0) = 0, \end{aligned}$$

pour la seconde équation, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} = & \beta_{000} + \beta_{100}u + \beta_{200}u^2 + \beta_{110}uv + \beta_{101}u\mu + \beta_{010}v + \beta_{020}v^2 \\ & + \beta_{011}v\mu + \beta_{001}\mu + \beta_{002}\mu^2 + O(3), \end{aligned}$$

où les coefficients sont donnés par :

$$\begin{aligned} \beta_{000} = g(0, 0, 0) = 0, \quad \beta_{100} = \frac{\partial g^2}{\partial \varepsilon^2}(0, 0, 0) = 0, \\ \beta_{200} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(0, 0, 0) = 0, \quad \beta_{110} = \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(0, 0, 0) = \frac{\mu(a - k^2)}{(a + k^2)^2}, \\ \beta_{101} = \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial \varepsilon}(0, 0, 0) = 0, \quad \beta_{010} = \frac{\partial g}{\partial v}(0, 0, 0) = 0, \\ \beta_{020} = \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(0, 0, 0) = 2\mu k \frac{(k^2 - a)}{((a + k^2)^3)r}, \quad \beta_{011} = \frac{\partial g^2}{\partial v \partial \varepsilon}(0, 0, 0) = 1, \\ \beta_{001} = \frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(0, 0, 0) = 0, \quad \beta_{002} = \frac{\partial g^2}{\partial \varepsilon^2}(0, 0, 0) = 0. \end{aligned}$$

Ce développement nous conduit au système :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -ru - \left(\frac{2r}{k}\right)u^2 + \mu \left(\frac{a-k^2}{(a+k^2)^2}\right)uv - \left(\frac{k}{(a+k^2)r}\right)\varepsilon v \\ -2k \left(\frac{1}{a+k^2} + \frac{K^2-a}{(a+k^2)^2} + \frac{2\mu}{(a+k^2)^2} \left(\frac{k^3-ak}{(a+k^2)^2r}\right)\right)v^2 + O(3), \\ \frac{dv}{dt} = \mu \frac{a-k^2}{(a+k^2)^2}uv + 2\mu k \frac{k^2-a}{(a+k^2)^3r}v^2 + v\varepsilon + O(3), \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Nous savons que la variété centrale est l'ensemble :

$$W^c = \{(u, v, \varepsilon) \in \mathbb{R}^3 / u = h(v, \varepsilon), |v| < \delta_1, |u| < \delta_2, h(0, 0) = \partial_u h(0, 0) = 0\},$$

où

$$u = h(v, \varepsilon) = lv^2 + m\varepsilon + \theta\varepsilon^2 + O(3).$$

Puisque  $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$ , on a

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dh(u, \varepsilon)}{du} \frac{du}{dt}.$$

Cette équation nous permet de calculer les coefficients  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  on a :

$$\frac{dh(u, \varepsilon)}{du} \frac{du}{dt} - \frac{dv}{dt} = 0,$$

où

$$\frac{dh(u, \varepsilon)}{du} = 2lu + m\varepsilon + O(2).$$

Après simplification et identification on obtient les valeurs des coefficients  $l, m$  et  $\theta$  :

$$\begin{cases} l = 0, \\ m = 0, \\ \theta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ce qui nous donne :

$$v = h(u, \varepsilon) = \theta\varepsilon^2 + O(3).$$

En reportant la valeur de  $v$  dans la première équation de système précédente, on obtient de  $u$  le long de la variété centrale et donc le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -ru - \frac{2r}{k}u^2 + O(3) = G(u, \varepsilon), \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = 0. \end{cases}$$

on a les conditions suivantes :

$$G(0, 0) = 0$$

$$G_u(0, 0) = -r \neq 0.$$

Si  $\frac{\mu k}{a+k^2} = 0$  alors le système (2.2) présente une bifurcation transcritique au point  $E_1(k, 0)$ . ■

### 2.3.2 Étude la stabilité des points d'équilibre intérieurs

Le système possède trois points fixe intérieurs sont :  $\tilde{E}_0$ ,  $\tilde{E}_1$  et  $\tilde{E}_2$ , où :

$$\tilde{E}_0(x_0, y_0), \tilde{E}_1(x_1, y_1) \text{ et } \tilde{E}_2(x_2, y_2)$$

Pour étudier la stabilité locale de ces points dans  $\mathbb{R}^2$ , nous allons chercher les valeurs propres de la matrice Jacobienne associée à chacun de ces points.

$$J(\tilde{E}_0) = \begin{pmatrix} r(1 - \frac{\mu}{Dk}) & \frac{-\frac{\mu}{2D}}{a+(\frac{\mu}{2D})^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_1 = r(1 - \frac{\mu}{Dk}) \quad , \quad \lambda_2 = 0$$

d'où ,  $\tilde{E}_0$  est point selle si  $\mu \neq kD$ , les résultats détaillés suivant :

1) Si  $k < \frac{\mu}{D}$  :

Le point selle  $\tilde{E}_0$  comprend deux secteurs hyperboliques et un secteur parabolique, le secteur parabolique est entre l'axe des  $y$  et l'équilibre comme dans la figure 2.1.

Dans ce cas il existe deux seperatrices, Des solutions initiant d'un côté de la seperatrice convergent vers l'équilibre intérieur. Ainsi, la population du prédateur et la population de la proie tendra à un état stable si leurs populations initiales se situent dans le secteur parabolique, et le prédateur aura tendance à l'extinction car sa population initiale la densité réside dans l'un des deux secteurs hyperboliques.

2) Si  $k > \frac{\mu}{D}$  :

le point selle  $\tilde{E}_0$  comprend deux secteurs hyperboliques et un secteur parabolique, les hyperboliques secteurs est entre l'axe des  $y$ -axis et l'équilibre comme dans la figure 2.2.

Dans ce cas, il existe une seperatrix qui converge vers l'équilibre intérieur, et toutes les autres solutions tendent à l'équilibre  $E_1$ . Donc un enrichissement suffisant de l'environnement entraîne l'extinction du prédateur pour presque toutes les valeurs initiales, qui soutient fortement le prétendu paradoxe de l'enrichissement.

3) Si  $\mu = kD$  :

l'équilibre  $\tilde{E}_0$  est une bosse constitué de deux secteurs hyperboliques et de deux séparatrices, une des séparatrices converge vers l'équilibre intérieur  $\tilde{E}_0$  et toutes les autres solutions tendent vers l'équilibre  $E_1(k, 0)$

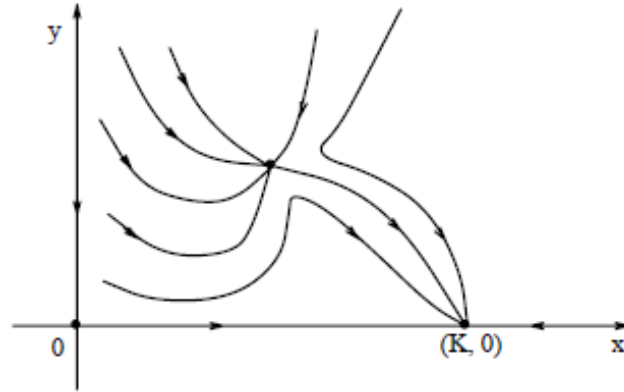


FIGURE 2.1 – Portrait de phase du système (2.2) où  $\mu^2 - 4aD^2 = 0$  mais  $\frac{\mu}{2D} < k < \frac{\mu}{D}$ .

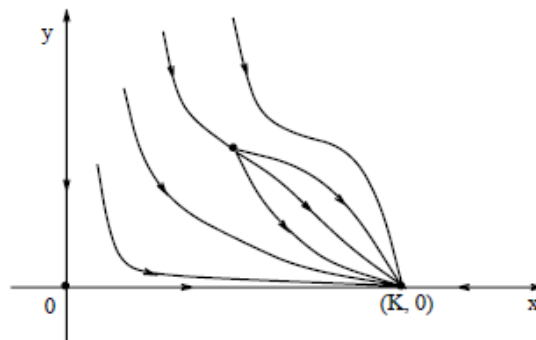


FIGURE 2.2 – Portrait de phase du système (2.2) où  $\mu^2 - 4aD^2 = 0$  mais  $k > \frac{\mu}{D}$ .

**Lemme 2.3.2.** Si  $4aD^2 < \mu^2 < \frac{18+2\sqrt{6}}{3}aD^2$  et  $k = x_3$ , alors l'équilibre  $\tilde{E}_1$  du système (2.2) est un stable de multiplicité 1.

Si  $\mu^2 > \frac{18+2\sqrt{6}}{3}aD^2$  et  $k = x_3$ , alors l'équilibre  $\tilde{E}_1$  du système (2.2) est un foyer instable de multiplicité 1.

Et  $\mu^2 = \frac{18+2\sqrt{6}}{3}aD^2$  et  $k = x_3$ , alors l'équilibre  $\tilde{E}_1$  du système (2.2) est un foyer multiples de multiplicité au moins 2.

**Démonstration**

On pose  $dt = (a + x^2)d\tau$  donc (2.2) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = x(r(1 - \frac{x}{k})(a + x^2) - y), \\ \frac{dy}{d\tau} = y(\mu x - D(a + x^2)). \end{cases} \quad (2.12)$$

la matrice jacobienne de point  $\tilde{E}_1$  est :

$$J(\tilde{E}_1) = \begin{pmatrix} \frac{rx_1}{K}(-3(x_1)^2 + 2kx_1 - a) & -x_1 \\ y_1(\mu - 2Dx_1) & 0 \end{pmatrix}.$$

d'où

$$\delta(k) = \text{tr}(J(\tilde{E}_1)) \text{ donc } \delta(k) = \frac{\sigma(k)}{2} = \frac{rx_1}{2K}(-3(x_1)^2 + 2kx_1 - a)$$

on a que  $\delta(k_0) = 0$  pour

$$k_0 = x_3,$$

tel que

$$x_3 = \frac{2\mu - \sqrt{\mu^2 - 4aD^2}}{2D}. \quad (2.13)$$

On a

$$\beta(k)^2 = \frac{1}{4}(4\det(k) - \delta^2(k))$$

On a

$$\delta(x_3) = 0,$$

en outre

$$\beta^2(x_3) = x_1y_1(\mu - 2Dx_1) > 0$$

donc, à  $k = x_3$ , l'équilibre  $\tilde{E}_1$  a des valeurs propres  $\lambda_{1,2} = \pm i\beta(x_3)$ .

Pour  $\bar{x} = x - x_1$ ,  $\bar{y} = y - y_1$  le système (2.12) peut être transformé à la forme suivante

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{d\tau} = r(a + (\bar{x} + x_1)^2)(\bar{x} + x_1)(1 - \frac{\bar{x} + x_1}{k}) - (\bar{x} + x_1)(\bar{y} + y_1), \\ \frac{d\bar{y}}{d\tau} = \mu(\bar{y} + y_1)(\bar{x} + x_1) - D(a + (\bar{x} + x_1)^2)(\bar{y} + y_1). \end{cases} \quad (2.14)$$

Si  $k = x_3$  dans le système (2.14) on trouve

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{d\tau} = -x_1\bar{y} + r\left(-\frac{a}{k} + 3x_1 - \frac{6x_1^2}{k}\right)\bar{x}^2 - \bar{x}\bar{y} - r\left(1 - \frac{4x_1}{k}\right)\bar{x}^3 - \frac{r}{k}\bar{x}^4, \\ \frac{d\bar{y}}{d\tau} = (\mu - 2Dx_1)y_1\bar{x} - Dy_1\bar{x}^2 + (\mu - 2Dx_1)\bar{x}\bar{y} - D\bar{x}^2\bar{y}. \end{cases} \quad (2.15)$$

selon la formule de la troisième valeur focale (i.e le nombre lyapounov ) d'un foyer multiple sur p.253 d'Andronov [2] nous obtenons, après un calcul élémentaire mais long, l'expression suivante pour la troisième valeur focale  $\alpha_3$  du foyer multiple  $(0, 0)$  du système (2.15) :

$$\alpha_3 = \frac{3\pi x_1 y_1 r}{2kD(x_1 y_1 (\mu - 2Dx_1))^{\frac{3}{2}}} \left( 2\mu x_1 - 10aD + \frac{\mu^2}{D} \right)$$

d'où

$$\alpha_3 = \frac{3\pi r}{2kD(\mu - 2Dx_1)(x_1 y_1 (\mu - 2Dx_1))^{\frac{1}{2}}} \left( 2\mu^2 - \mu\sqrt{\mu^2 - 4aD^2} - 10aD^2 \right)$$

Si  $4aD^2 < \mu^2 < \frac{18+2\sqrt{6}}{3}aD^2$  alors  $\alpha_3 < 0$  , d'où l'équilibreur  $\tilde{E}_1$  est un stable multiple focus de multiplicité 1.

Si  $\mu^2 > \frac{18+2\sqrt{6}}{3}aD^2$  alors  $\alpha_3 > 0$  donc l'équilibreur  $\tilde{E}_1$  est un foyer instable de multiplicité 1 .

Si  $\mu^2 = \frac{18+2\sqrt{6}}{3}aD^2$  alors  $\alpha_3 = 0$  est donc l'équilibreur  $\tilde{E}_1$  est foyer de multiplicité au moins 2.

Par le lemme (2.3.1) nous savons que l'équilibre  $\tilde{E}_1$  est un foyer stable lorsque

$$4aD^2 < \mu^2 < \frac{18 + 2\sqrt{6}}{3}aD^2 \text{ et } x_1 < k \leq x_3.$$

Cependant, l'équilibre  $\tilde{E}_1$  est un foyer instable pour

$$4aD^2 < \mu^2 < \frac{18 + 2\sqrt{6}}{3}aD^2 \text{ et } K > x_3.$$

Par conséquent, lorsque les paramètres passent d'un côté à l'autre de la surface suivante , système (2.2) peut subir une bifurcation de Hopf supercritique. Un cycle limite stable apparaît dans le petit voisinage de  $\tilde{E}_1$ .

La surface :

$$H_1 : k = x_3, 4aD^2 < \mu^2 < \frac{18 + 2\sqrt{6}}{3}aD^2,$$

est appelée la surface supercritique de bifurcation de Hopf du système (2.2) .

D'autre part, l'équilibre  $E_1$  est un foyer instable lorsque

$$\mu^2 > \frac{18 + 2\sqrt{6}}{3}aD^2 \text{ et } k \geq x_3,$$

Cependant, il s'agit d'un foyer stable pour

$$\mu^2 > \frac{18 + 2\sqrt{6}}{3}aD^2 \text{ et } x_1 < k < x_3.$$

Par conséquent, lorsque les paramètres passent d'un côté à l'autre de la surface suivante de l'autre côté, le système (2.2) peut subir une bifurcation de Hopf sous-critique . Un instable cycle limite apparaît dans le petit voisinage de  $\tilde{E}_1$ . La surface

$$H_2 : k = x_3, \mu^2 > \frac{18 + 2\sqrt{6}}{3}aD^2$$

est appelée la surface sous-critique du système (2.2) de bifurcation de Hopf la surface :

$$H_0 : k = x_3, \mu^2 = \frac{18 + 2\sqrt{6}}{3} aD^2$$

est appelée la surface de bifurcation de Hopf dégénérée du système (2.2), ■

Pour le point d'équilibre  $\tilde{E}_2$  on à l'étude suivante :

$$J(\tilde{E}_2) = \begin{pmatrix} r(1 - \frac{x_2}{K})(\frac{2x_2^2}{a+x_2^2}) - \frac{rx_2}{K} & \frac{x_2}{a+x_2^2} \\ r(1 - \frac{x_2}{K})(\frac{a-x_2^2}{a+x_2^2}) & 0 \end{pmatrix}.$$

on trouve après calculatoire que :

$$\det(J(\tilde{E}_2)) = \frac{rx_2}{a+x_2^2} (1 - \frac{x_2}{k})(a - x_2^2).$$

On a

$$a - x_2^2 = \frac{1}{4D^2} (-2\mu^2 + 8aD^2 - 2\mu\sqrt{\mu^2 - 4aD^2}) < 0$$

car on a :

$$\Delta = \mu^2 - 4aD^2 > 0$$

donc

$$-2\mu^2 + 8aD^2 < 0,$$

alors

$$\det(J(\tilde{E}_2)) < 0 \text{ pour } x_2 < k$$

on obtient que  $\tilde{E}_2$  est un point selle.

---

---

# CHAPITRE 3

---

## ÉTUDE DE CYCLE LIMITE

Rappelons que les cycles limites sont des phénomènes non linéaires. Ils ne peuvent apparaître dans les systèmes linéaires.

Nous déduirons dans la suite les conditions pour lesquelles le système admet au moins un cycle limite, en utilisant le théorème fondamental de *Poincaré-Bendixon* sur les différentes possibilités des ensembles  $\alpha$ -limites et  $\omega$ -limites des équations différentielles autonomes.

### 3.1 Cycle limite

Pour montrer la absence de cycle limite, nous utiliserons le *critère de Dulac*. Nous établirons en suite des conditions sous lesquelles le système (2.2) a au moins un cycle limite, en utilisant le théorème fondamental sur les différentes possibilités des ensembles  $\alpha$ - et  $\omega$ - limite des équations différentielles autonomes.

En ce qui concerne l'unicité, nous transformerons le système (2.2) en un modèle de Gause où l'isocline de la proie possède un minimum local et maximum local et nous donnerons des conditions sous lesquelles ce système admet un unique cycle limite.

#### 3.1.1 Absence de cycle limite

**Définition 3.1.1.** *Un cycle limite est une trajectoire fermée isolée.*

*Une trajectoire fermée est une orbite (i.e., une solution  $t \rightarrow x(t)$ ) non réduite à un point*



qui revient à la condition initiale après un certain temps. **Isolée** signifie que les trajectoires voisines ne sont pas fermées, elles spiralent autour du cycle limite en s'en éloignant ou en s'en approchant.

Si toutes les trajectoires voisines s'approchent du cycle limite, le cycle est dit **stable** ou **attractif**, sinon, il est dit **instable** ou dans de rares cas, **semi stable**.

### Théorème 3.1.1. (Poincaré-Bendixon)

Supposons qu'une orbite  $x(x_0, t)$  du système autonome de deux équations.

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad x = (x_1, x_2)^T, \quad f = (f_1, f_2)^T, \quad (3.1)$$

reste dans un domaine compact  $D \subset \mathbb{R}^2$  pour  $t \geq 0$ , alors

- i) ou bien  $x(x_0, t)$  est une solution périodique de (3.1),
- ii) ou bien  $x(x_0, t)$  tend vers une solution périodique de (3.1),
- iii) ou bien  $x(x_0, t)$  tend vers un point fixe de (3.1).

Dans la pratique, on utilise souvent un critère dit Bendixson.

### Théorème 3.1.2. (Critère de Bendixson)

Si dans un domaine simplement connexe (c'est-à-dire, il n'y a pas de trou dans  $D$ )  $D \subset \mathbb{R}^2$ , l'expression  $\text{div} f \equiv \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$  n'est pas identiquement nulle et ne change pas de signe, alors le système (3.1) n'a pas d'orbite périodique contenue dans  $D$ .

#### Démonstration

Soit  $\Gamma$ ,  $x = x(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , un orbite périodique de période  $T$  contenue entièrement dans  $D$ .

Si  $S$  désigne l'intérieure de  $\Gamma$ , on a d'après le théorème de Green :

$$\begin{aligned} \int \int_S \text{Div} f dx_1 dx_2 &= \int_{\Gamma} (f_1 dx_2 - f_2 dx_1), \\ &= \int_0^T (f_1 \dot{x}_2 - f_2 \dot{x}_1) dt, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si  $\text{Div} f$  n'est pas identiquement nul et ne change pas de signe alors l'intégrale double précédente est soit positive soit négative, d'où la contradiction. ■

Rappelons le *critère de Dulac*, qui est une généralisation du critère précédent .

**Théorème 3.1.3 (Critère de Dulac).** Soit  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  un ensemble ouvert simplement connexe et  $B(x, y)$  une fonction à valeurs réelles de classe  $C^1$  dans  $D$ . Si la fonction

$$\text{div} Bf = \frac{\partial(Bf_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(Bf_2)}{\partial x_2},$$

est de signe constant et non-identiquement nulle dans  $D$ , alors le système (3.1) n'a aucune orbite périodique à l'intérieur de la région  $D$ .

Dans la suite, nous donnerons un résultat sur la dynamique du système (2.2).

**Théorème 3.1.4.** *Si  $4aD^2 < \mu^2 < \frac{16}{3}aD^2$  et  $x_1 < k < x_2$ , alors le système (2.2) possède trois équilibres, deux de type hyperbolique selle  $E_0$  et  $E_1$  et un équilibre  $\tilde{E}_1$  globalement asymptotiquement stable à l'intérieur du premier quadrant.*

### Démonstration

On va montrer que le système (2.2) n'a aucune orbite périodique à l'intérieur du premier quadrant.

Il est clair que la dynamique du système (2.2) est équivalente à celui du système (2.12) Prenons la fonction du Dulac  $B(x, y) = \frac{1}{xy}$ ,  $x, y > 0$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} Bf &= B \frac{\partial f_1}{\partial x} + f_1 \frac{\partial B}{\partial x} + B \frac{\partial f_2}{\partial y} + f_2 \frac{\partial B}{\partial y}, \\ &= B \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) + f_1 \frac{\partial B}{\partial x} + f_2 \frac{\partial B}{\partial y}. \end{aligned}$$

À partir du système (2.12) ,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = ra + 3rx^2 - \frac{2axr}{k} - \frac{4rx^3}{k} - y,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \mu x - D(a + x^2).$$

Par ailleurs

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{1}{x^2y},$$

et

$$\frac{\partial B}{\partial y} = -\frac{1}{xy^2}.$$

D'où,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} Bf &= \frac{1}{xy} \left( ra + 3rx^2 - \frac{2axr}{k} - \frac{4rx^3}{k} - y \right) + x \left( r \left( 1 - \frac{x}{k} \right) (a + x^2) - y \right) \left( -\frac{1}{x^2y} \right) \\ &\quad + y (\mu x - D(a + x^2)) \left( -\frac{1}{xy^2} \right) + \frac{1}{xy} (\mu x - D(a + x^2)). \end{aligned}$$

Par simplification et comme  $B(x, y) = \frac{1}{xy}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} Bf &= \frac{1}{xy} \left[ 2rx^2 - \frac{arx}{k} - \frac{3rx^3}{k} \right], \\ &= \frac{r}{ky} (2kx - a - 3x^2). \end{aligned}$$

Pour étudier le signe de  $\operatorname{div} Bf$ , on a le discriminant

$$\Delta = 4 \left( 1 - \frac{3a}{k^2} \right).$$

Il est clair que, si  $k \leq \sqrt{3a}$ , alors  $\operatorname{div} Bf$  est de signe constant (strictement négatif).

Grâce au critère de *Dulac*, donné par le théorème 3.1.3, nous concluons que le système (2.2) ne possède aucun cycle limite sous les conditions  $4aD^2 < \mu^2 < \frac{16}{3}aD^2$  et  $k < \sqrt{3a}$  d'où l'équilibre  $\tilde{E}_1(x_1, y_1)$  est asymptotiquement stable à l'intérieur du premier quadrant. ■

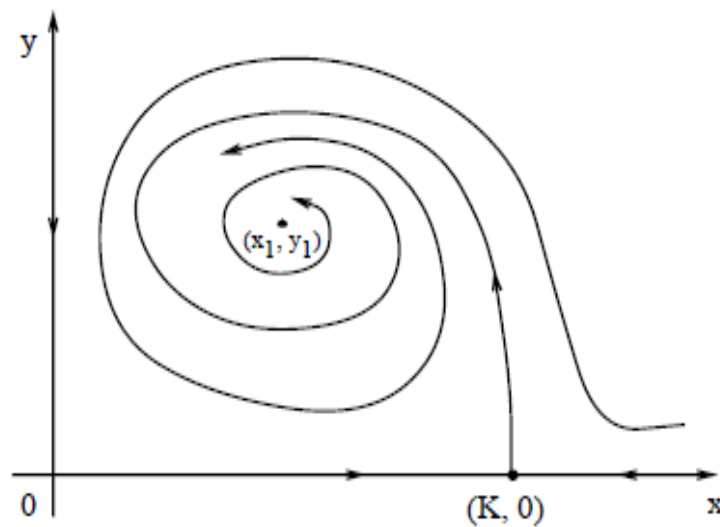


FIGURE 3.1 – Portrait de phase du système (2.2) où  $4aD^2 < \mu^2 < \frac{16}{3}aD^2$  et  $x_1 < k < x_2$ .

**Remarque 3.1.1.** Dans le théorème 3.1.4 pour  $x_2 = k$ , le système (2.2) possède un unique point d'équilibre strictement positif. Ce point émerge du point  $E_1(k, 0)$  sous la bifurcation donnée par le lemme 2.3.1.

## 3.2 Existence de cycle limite

Grâce au théorème du *Pioncaré-Bendixson* nous pouvons établir, sous certaines conditions, l'existence au moins d'un cycle limite pour le système (2.2) .

**Théorème 3.2.1.** *Si  $\mu^2 > \frac{16}{3}aD^2$  et  $x_3 < k < x_2$ , le système (2.2) possède au moins un cycle limite à l'intérieur du premier quadrant.*

### Démonstration

Il est clair que l'orbite périodique de système (2.2) doit être dans le domaine  $\Omega_1$ , où

$$\Omega_1 = \{(x, y) : 0 < x < k, 0 < y < +\infty\}.$$

Prenons une ligne de rayon à partir du point  $A(k, 0)$

$$L_1 = \{(x, y) : x = k, y > 0\}$$

nous pouvons voir que le champ de vecteur de direction du système (2.2) sur  $L_1$  est de droite à gauche, voir la figure (3.2)

Le vecteur directeur de courbe du système (2.2) est le vecteur tangent à cette courbe  $\vec{v}(\dot{x}, \dot{y})$  le vecteur normal unitaire  $\vec{n}$  de chaque surface  $S$  est le vecteur orthogonal sur la frontière, dans notre cas les droites il sont orientées vers l'extérieur. On a les cas suivant : Pour  $L_1$

On a

$$\vec{n} = (1, 0)$$

$$\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}) = \left( rx(1 - \frac{x}{k}) - \frac{xy}{a+x^2}, y(\frac{\mu x}{a+x^2} - D) \right),$$

le produit scalaire  $\vec{n} \cdot \vec{v}$  est :

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = rx(1 - \frac{x}{k}) - \frac{xy}{a+x^2},$$

sur  $L_1$

$$\vec{n} \cdot \vec{v}|_{x=k} = -\frac{ky}{a+x^2} < 0, \forall y > 0.$$

donc  $\vec{v}$  est dans le sens inverse de  $\vec{n}$  c'est-à-dire il est dirigé vers l'intérieur de  $S$ .

Soit  $M(x, y)$  un point de la courbe intégrale de (2.2), pour que la courbe traverse  $L_1$  par le point  $B(k, y_b)$  où  $y_b > y_1$  et croisé la ligne  $L_2 = \{(x, y) : x = x_1, y > 0\}$  par le point  $C(x_1, y_c)$  avec :  $y_c \geq y_b$ , il faut avoir  $y$  décroissante c'est à dire :  $\frac{dy}{dx} < 0$ . On regarde le vecteur directeur  $\vec{v}(\dot{x}, \dot{y})$  sur le point  $B(k, y_B)$  le vecteur  $\vec{v}$  est pointé vers le haut si

$$\dot{y} > 0 \text{ (d'où } (\frac{\mu x}{a+x^2} - D) > 0),$$

On a  $y > 0$  donc il reste à étudier le signe de

$$\left(\frac{\mu x}{a+x^2} - D\right).$$

D'après l'expression  $\Delta = \mu^2 - 4aD^2$  pour :  $\Delta > 0$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{\mu x}{a+x^2} - D > 0 \text{ pour } x_1 < x < x_2 &\implies \dot{y} > 0 \\ \frac{\mu x}{a+x^2} - D < 0 \text{ pour } x_1 < x \text{ et } x > x_2 &\implies \dot{y} < 0 \end{aligned}$$

et comme l'orbite périodique de (2.2) doit être dans le domaine  $\Omega_1$  et  $\vec{n}$  passe par  $L_1$  on obtient que  $x = k$  donc :

$$\frac{\mu x}{a+x^2} - D > 0 \text{ pour } x_1 < k < x_2 \implies \dot{y} > 0.$$

Tracer une ligne  $L_3 = \{(x, y) : y = y_c\}$  qui commence au point  $C(x_1, y_c)$  et se termine au point  $D(0, y_1)$  nous pouvons voir que le champ de vecteur de direction du système (2.2) sur  $L_3$  est de haut en bas donc l'orbite du système (2.2) à l'intérieur de la région ne peut pas franchir la frontière.

D'autre part, nous savons que l'équilibre  $\tilde{E}_1$  est un instable pour  $k > x_3$ , donc l'existence d'une orbite périodique découle directement du théorème de *Pioncaré-Bendixson*. De plus, cet orbite périodique est à l'intérieur de  $\Omega_1$ . ■

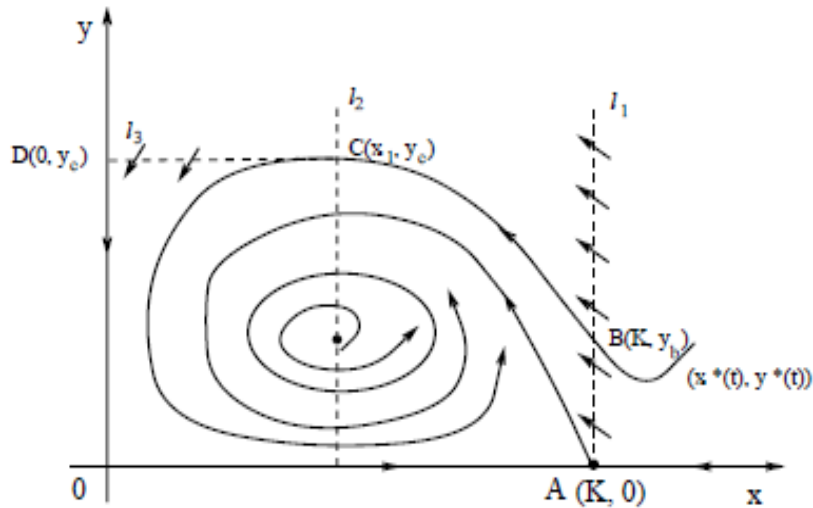


FIGURE 3.2 – Portrait de phase du système (2.2) où  $\mu^2 > \frac{16}{3}aD^2$  et  $x_3 < k < x_2$ .

### 3.2.1 Unicité de cycle limite

**Théorème 3.2.2.** *Si  $\mu^2 > \frac{16}{3}aD^2$  et  $x_3 < k < x_2$  le système (2.2) possède au plus un cycle limite dans l'intérieur du premier quadrant.*

#### Démonstration

On va démontrer ce théorème par contradiction. Premièrement nous considérons le système (2.2) seulement dans le domaine  $\Omega_1$  défini dans le théorème précédent.

Par le changement des variables suivant :

$$x - x_1 = -X, \quad y - y_1 = y_1(e^Y - 1) \text{ et } xdt = (a + x^2)dT,$$

le système(2.2) devient :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dT} = -r\left(1 - \frac{x_1 - X}{k}\right)(a + (x_1 - X)^2) + (y_1 + y_1(e^Y - 1)), \\ \frac{dY}{dT} = \mu - \frac{D(a + (x_1 - X)^2)}{x_1 - X}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Pour simplifier on garde la même notations  $x, y$  et  $t$  pour  $X, Y$  et  $T$  respectivement.

Donc le système (3.2) écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y_1(e^y - 1) - r\left(1 - \frac{x_1 - x}{k}\right)(a + (x_1 - x)^2) + y_1, \\ \frac{dy}{dt} = \mu - \frac{D(a + (x_1 - x)^2)}{x_1 - x}. \end{cases} \quad (3.3)$$

On pose

$$\begin{aligned} F(x) &= r\left(1 - \frac{x_1 - x}{k}\right)(a + (x_1 - x)^2) - y_1, \\ \Phi(y) &= y_1(e^y - 1), \\ g(x) &= \frac{Dx(x - x_1 + x_2)}{x_1 - x}. \end{aligned}$$

Où

$$x_1 - k < x < x_1 \text{ et } \infty < y < +\infty$$

D'ou le système (3.2) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \Phi(y) - F(x), \\ \frac{dy}{dt} = -g(x). \end{cases} \quad (3.4)$$

On remarque que le problème d'unicité d'un cycle limite du système (2.2) dans le domaine  $\Omega_1$  est équivalent à celui du système (3.4) dans le domaine  $\Omega_2$  où :

$$\Omega_2 = \{(x, y) : x_1 - k < x < x_1, -\infty < y < +\infty\}.$$

On note que dans le domaine  $\Omega_2$  l'équation  $\Phi(y) = F(x)$  définit une courbe lisse. De plus, en remplaçant  $y_1$  par sa valeur dans  $F(x)$ , on trouve :

$$F(x) = \frac{rx}{k}(x^2 + (k - 3x_1)x + a + 3x_1^2 - 2kx_1).$$

Soit  $r_1$  et  $r_2$  les racines de  $F(x)$ , alors :

$$r_1 r_2 = a + 3x_1^2 - 2kx_1.$$

On remplace la valeur de  $a = x_1 x_2$

$$\begin{aligned} r_1 r_2 &= x_1(x_2 + 3x_1 - 2k), \\ &= 2x_1 \left( \frac{2\mu - \sqrt{\mu^2 - 4aD^2}}{2D} - k \right). \end{aligned}$$

comme

$$x_3 = \frac{2\mu - \sqrt{\mu^2 - 4aD^2}}{2D},$$

on trouve

$$r_1 r_2 = 2x_1(x_3 - k).$$

d'où

$$r_1 r_2 < 0 \quad \text{pour} \quad x_3 < k < x_2.$$

Il est clair que  $F(x) = 0$  possède trois racines  $r_1$ , 0 et  $r_2$  dans  $\Omega_2$ , où  $r_1 < 0 < r_2$ .

Ainsi la proie isocline  $\Phi(y) = F(x)$  du système (3.4) possède deux bosses dans  $\Omega_2$ , à savoir un maximum locale et un minimum locale, et traverse l'axe des  $x$  en trois points  $P(r_1, 0)$ ,  $O(0, 0)$  et  $Q(r_2, 0)$  respectivement.

Maintenant, supposons au contraire que le système (3.4) possède deux orbites périodiques  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ ,

avec  $\Gamma_1 \subset \text{int}\Gamma_2$ . Il est facile de montrer que  $\overline{POQ} \subset \text{int}\Gamma_1$  (voir la figure 3.3).

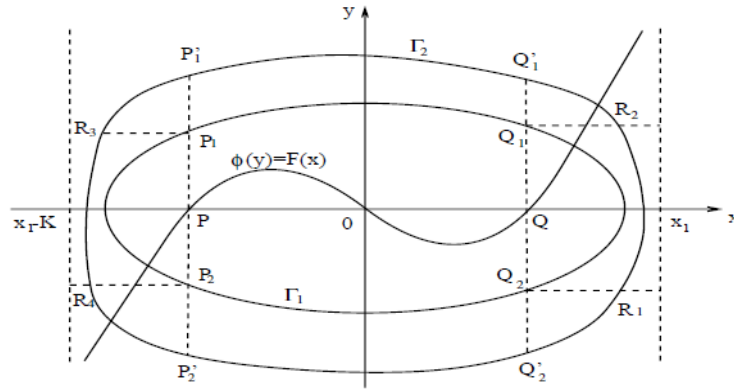


FIGURE 3.3 – Système(3.4) possède au plus un cycle limite.

Considérons la fonction :

$$W(x, y) = \int_0^x g(s)ds + \int_0^y \Phi(s)ds.$$

On calcule  $dW$ , d'une part, on a :

$$\begin{aligned} dW(x, y) &= \frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy, \\ &= g(x)dx + \Phi(y)dy. \end{aligned}$$

à partir du système (3.4) on a :

$$g(x) = -\frac{dy}{dt} \text{ et } \Phi(y) = \frac{dx}{dt} + F(x),$$

par remplacement et simplification on trouve :

$$dW(x, y) = F(x)dy, \tag{3.5}$$

Et d'autre part en multiplie la deuxième équation du système (3.4) par  $F(x)$ , on obtient :

$$F(x)\frac{dy}{dt} = -F(x)g(x),$$

on divise cette dernière sur la première équation de (3.4) on trouve

$$F(x)dy = \frac{-F(x)g(x)}{\Phi(y) - F(x)}dx,$$



D'après (3.5), on obtient :

$$dW(x, y) = \frac{-F(x)g(x)}{\Phi(y) - F(x)} dx.$$

On note

$$\oint_{\Gamma_1} dW(x, y) = \oint_{\Gamma_2} dW(x, y) = 0. \quad (3.6)$$

Maintenant, nous partitions  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  comme suit (voir la figure 3.3) :

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \widehat{Q_2 Q_1} \cup \widehat{Q_1 P_1} \cup \widehat{P_1 P_2} \cup \widehat{P_2 Q_2}, \\ \Gamma_2 &= \widehat{Q_2' R_1} \cup \widehat{R_1 R_2} \cup \widehat{R_2 Q_1'} \cup \widehat{Q_1' P_1'} \cup \widehat{P_1' R_3} \cup \widehat{R_3 R_4} \cup \widehat{R_4 P_2'} \cup \widehat{P_2' Q_2'}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_1} dW &= \int_{\widehat{Q_2 Q_1}} dW + \int_{\widehat{Q_1 P_1}} dW + \int_{\widehat{P_1 P_2}} dW + \int_{\widehat{P_2 Q_2}} dW, \\ \oint_{\Gamma_2} dW &= \int_{\widehat{Q_2' R_1}} dW + \int_{\widehat{R_1 R_2}} dW + \int_{\widehat{R_2 Q_1'}} dW + \\ &\quad \int_{\widehat{Q_1' P_1'}} dW + \int_{\widehat{P_1' R_3}} dW + \int_{\widehat{R_3 R_4}} dW \\ &\quad + \int_{\widehat{R_4 P_2'}} dW + \int_{\widehat{P_2' Q_2'}} dW. \end{aligned}$$

Puisque  $F(x) > 0$  pour  $(x, y) \in \widehat{Q_2 Q_1}$  or  $(x, y) \in \widehat{Q_2' Q_1'}$ , il suit que

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{R_1 R_2}} dW &= \int_{\widehat{R_1 R_2}} F(x) dy > \int_{\widehat{Q_2 Q_1}} dW = \int_{\widehat{Q_2 Q_1}} F(x) dy, \\ \int_{\widehat{Q_2' R_1}} dW &= \int_{\widehat{Q_2' R_1}} F(x) dy > 0, \end{aligned}$$

et

$$\int_{\widehat{R_2 Q_1'}} dW = \int_{\widehat{R_2 Q_1'}} F(x) dy > 0.$$

D'après l'expression du  $W(x, y)$  et le système (3.4).

D'autre part,  $F(x) < 0$  pour  $(x, y) \in \widehat{P_1 P_2}$  au alors  $(x, y) \in \widehat{P_1' P_2'}$ , et ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{R_3 R_4}} dW &= \int_{\widehat{R_3 R_4}} F(x) dy > \int_{\widehat{P_1 P_2}} dW = \int_{\widehat{P_1 P_2}} F(x) dy, \\ \int_{\widehat{P_1' R_3}} dW &= \int_{\widehat{P_1' R_3}} F(x) dy, \end{aligned}$$

et

$$\int_{\widehat{R_4 P_2'}} dW = \int_{\widehat{R_4 P_2'}} F(x) dy > 0.$$

Puisque

$$F(x)g(x) < 0, \quad \Phi(y) - F(x) > 0 \quad \text{pour } (x, y) \in \widehat{Q_1 P_1} \cup \widehat{O_1' P_1'}$$

et

$$F(x)g(x) < 0, \quad \Phi(y) - F(x) < 0 \quad \text{pour } (x, y) \in \widehat{P_2 Q_2} \cup \widehat{P_2' Q_2'},$$

et  $\Phi(y)$  est une fonction strictement croissante on trouve

$$\int_{\widehat{P_1' Q_1'}} dW = \int_{P_1' Q_1'} \frac{-F(x)g(x)}{\Phi(y) - F(x)} dx > \int_{\widehat{Q_1 P_1}} \frac{-F(x)g(x)}{\Phi(y) - F(x)} dx = \int_{\widehat{Q_1 P_1}} dW,$$

$$\int_{\widehat{P_2' Q_2'}} dW = \int_{P_2' Q_2'} \frac{-F(x)g(x)}{\Phi(y) - F(x)} dx > \int_{\widehat{Q_2 P_2}} \frac{-F(x)g(x)}{\Phi(y) - F(x)} dx = \int_{\widehat{Q_2 P_2}} dW.$$

Résumons les estimations au dessus, nous obtenons :

$$\oint_{\Gamma_1} dW(x, y) < \oint_{\Gamma_2} dW(x, y),$$

qui contredit (3.6) donc le système (3.4) possède au plus un orbite périodique. ■

Combinons les deux théorème et on obtient les théorèmes suivant :

**Théorème 3.2.3.** Si  $\mu^2 > \frac{16}{3}aD^2$  et  $x_2 > k > x_3$ , alors le système (2.2) possède trois équilibres, deux de type selle  $E_0(0, 0)$  et  $E_1(k, 0)$  et un point intérieur  $\tilde{E}_1(x_1, y_1)$  qui est un nœud. En outre, le système (2.2) a un cycle limite unique stable (le portrait de phase est donné par la figure 3.2).

**Théorème 3.2.4.** Si  $x_2 < k$  et  $x_3 < k < \frac{\mu}{D}$ , alors le système (2.2) a au plus un cycle limite à l'intérieur du premier quadrant.

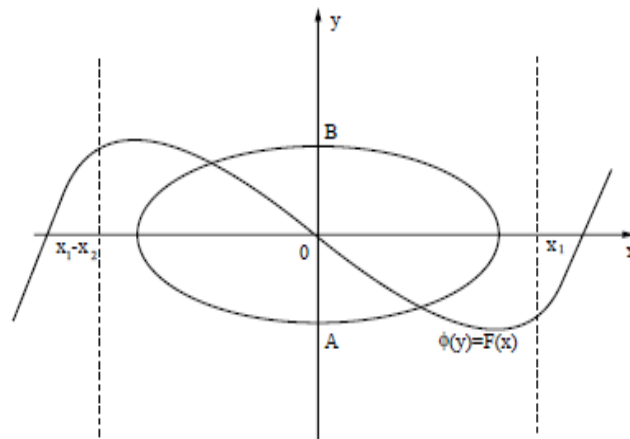


FIGURE 3.4 – Portrait de  $\Phi(y) = F(x)$  dans  $\Omega_4$  ou  $k \leq \frac{\mu}{D}$ .

**Démonstration**

Il est clair que le cycle limite s'il existe, il doit être dans le domaine  $\Omega_3$ , où

$$\Omega_3 = \{(x, y) : 0 < x < x_2, 0 < y < +\infty\}.$$

Noter que le problème de l'unicité d'un cycle limite du système (2.2) dans le domaine  $\Omega_3$  est équivalent à celui du système (3.4) dans le domaine  $\Omega_4$ , où

$$\Omega_4 = \{(x, y) : x_1 - x_2 < x < x_1, -\infty < y < +\infty\}.$$

Il est clair que  $\Phi(y) = F(x)$  définis une courbe lisse dans le domaine  $\Omega_4$ , et pour  $x_3 < k$ ,  $F(x) = 0$  a trois racines réelles  $r_1 < 0 < r_2$ . Comme dans la démonstration de théorème 3.2.2, on a  $x_1 + x_2 = \frac{\mu}{D}$ ,  $x_1 x_2 = a$  et  $x_2^2 + a = \frac{\mu x_2}{D}$ . Donc pour  $x_2 < k$  les trois racines  $r_1, 0, r_2$  sont dans  $\Omega_4$  si et seulement si  $k < \frac{\mu}{D}$ . Par conséquent, la proie isocline  $\Phi(y) = F(x)$  du système (3.4) a deux bosses dans  $\Omega_4$ , C'est-à-dire un maximum local et un minimum local et de plus traverse l'axe des x en trois points  $P(r_1, 0)$ ,  $O(0, 0)$  et  $Q(r_2, 0)$  respectivement. ■

En utilisant la même méthode que dans la preuve du théorème 3.2.4 on obtient le résultat suivant.

**Théorème 3.2.5.** *Si  $\frac{\mu}{D} \leq k$  alors, le système (2.2) n'a pas de cycles limites à l'intérieur du premier quadrant.*

**Démonstration**

Il est clair que pour  $x_2 < K$  le problème d'existence d'un cycle limite du système (2.2) est équivalent à celui du système (3.4) dans le domaine  $\Omega_4$ . Si  $\frac{\mu}{D} \leq k$ , alors les trios racines du  $F(x) = 0$  satisfaisaient  $r_1 \leq x_1 - x_2 < 0 < x_1 \leq r_2$ . Selon la preuve du théorème 3.2.5. Ainsi, la proie isocline  $\Phi(y) = F(x)$  du système (3.4) n'a pas de telles bosses dans  $\Omega_4$  voir la figure 3.4. Supposent, au contraire que le système (3.4) a un cycle limite  $\Gamma$  dans  $\Omega_4$ , qui traverse l'axe des y en deux points  $A$  et  $B$ .

Considérons la fonction

$$W(x, y) = \int_0^x g(s)ds + \int_0^y \Phi(s)ds.$$

Puis

$$\oint_{\Gamma} dW(x, y) = 0. \tag{3.7}$$

d'autre part

$$\oint_{\Gamma} dW(x, y) = \int_{\widehat{AB}} dW(x, y) + \int_{\widehat{BA}} dW(x, y) = \int_{\widehat{AB}} F(x)dy + \int_{\widehat{BA}} F(x)dy < 0. \tag{3.8}$$

Évidemment (3.8) contredit (3.7) donc le cycle limite n'existe pas cela conduit à la conclusion du théorème. ■

En utilisant un argument similaire à celui de la démonstration du théorème 3.2.5, nous obtenons les résultats suivants :

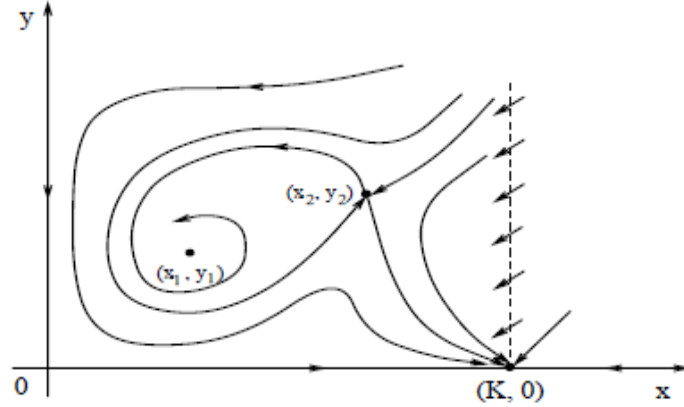


FIGURE 3.5 – Portrait de phase du système (2.2) où  $4aD^2 < \mu^2 < \frac{16}{3}aD^2$  et  $x_2 < k < x_3$ .

**Théorème 3.2.6.** Si  $\mu^2 > \frac{16}{3}aD^2$  et  $x_1 < k < -x_1 + 2\sqrt{\frac{\mu x_1}{D}}$ , le système (2.2) a trois équilibres deux de type selle  $E_0(0, 0)$  et  $E_1(k, 0)$  et un équilibre globalement asymptotiquement stable  $\tilde{E}_1(x_1, y_1)$  dans premier quadrant (le portrait de phase est représenté sur la figure 3.1).

**Théorème 3.2.7.** Si  $4aD^2 < \mu^2 < \frac{16}{3}aD^2$  et  $x_2 < k < x_3$ , le système (2.2) a quatre équilibres, deux selles  $E_0$  et  $\tilde{E}_2$ , un nœud stable  $E_1$  et un équilibre stable  $\tilde{E}_1$  et le système (2.2) n'a pas d'orbite fermée (le portrait de phase est donné sur la figure 3.5).

### Démonstration

Nous prouvons que le système (2.2) n'a pas d'orbite fermée. notez que la dynamique du système (2.12) est équivalente à celle du système (2.2), donc nous considérons uniquement le système (2.12) dans le domaine

$$\Omega_3 = \{(x, y) : 0 < x < x_2, 0 < y < +\infty\}.$$

On prend la fonction du Dulac définie par  $B(x, y) = \frac{1}{xy^m}$  pour le système (2.12). À partir de (2.12),

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = ra + 3rx^2 - \frac{2axr}{k} - \frac{4rx^3}{k} - y,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \mu x - D(a + x^2).$$

Par ailleurs

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{y^m}{x^2},$$

et

$$\frac{\partial B}{\partial y} = \frac{my^{m-1}}{x}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \operatorname{div} Bf &= \frac{y^m}{x} \left( ra + 3rx^2 - \frac{2axr}{k} - \frac{4rx^3}{k} - y + \mu x - D(a + x^2) \right) + x \left( r \left( 1 - \frac{x}{k} \right) (a + x^2) - y \right) \left( -\frac{y^m}{x^2} \right) \\ &\quad + y (\mu x - D(a + x^2)) \frac{my^{m-1}}{x}, \\ &= y^m \left( 2rx - \frac{ar}{k} - \frac{3r}{k} x^2 + \frac{(m+1)}{x} (\mu x - D(a + x^2)) \right). \end{aligned}$$

On a  $y^m > 0$  donc il reste à étudier le signe de la fonction suivante :

$$f(x) = 2rx - \frac{ar}{k} - \frac{3r}{k} x^2 + \frac{(m+1)}{x} (\mu x - D(a + x^2)).$$

On va premièrement analyser la fonction :

$$g(x) = 2rx - \frac{ar}{k} - \frac{3r}{k} x^2.$$

Pour étudier le signe de cette dernière, on a

$$\Delta = \frac{4r^2}{k^2} (k^2 - 3a)$$

ce discriminant est positive pour  $k > \sqrt{3a}$  d'où  $g(x) = 0$  admet deux racine :

$$x_{11} = \frac{k - \sqrt{k^2 - 3a}}{3}, \quad x_{22} = \frac{k + \sqrt{k^2 - 3a}}{3}$$

qui sont positive car  $x_{11}x_{22} = \frac{a}{3}$ . est on sait que  $(\mu x - D(a + x^2))$  admet deux racine donnée aux chapitre précédent.

Si, on prend :

$$m = \frac{2r\sqrt{k^2 - 3a}(k + \sqrt{k^2 - 3a})}{3k\sqrt{\mu^2 - 4aD^2}} - 1$$

on trouve

$$x_{22} \leq x_1$$

Grâce au critère de *Dulac* donné par le théorème 3.1.3 nous concluons que le système (2.12) ne possède aucun cycle limite sous les conditions précédentes. ■

---

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Abdallaoui., Modélisation et étude mathématique de quelques problèmes de dynamique des populations., *Thèse de doctorat Rebat*, (2007).
- [2] A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon, and A. G. Maier, Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on a Plane, Program for Scientific Translations, (1971).
- [3] V.I. Arnold., Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires., *MIR*, Moscou, (1980).
- [4] E.A. Conddington and N. Levinson., Theory of ordinary differential equations, Mc Graw-Hill book Company, New York (1995).
- [5] H. Dang-Vu et C. Delcarte., Bifurcation et Chaos., *Ellipses*, Paris, (2000).
- [6] H. I. Freedman, Deterministic Mathematical Models in Population Ecology, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math. 57, Marcel Dekker, New York, (1980).
- [7] H. I. Freedman and G. S. K. Wolkowicz, Predator-prey systems with group defence : The paradox of enrichment revisited, *Bull. Math. Biol.*, **48** (1986), pp. 493–508.
- [8] H.I. Freedman, P. Waltman., Persistence in models of three interacting predator-prey population., *Math. Biosc* **68**, (1984).
- [9] M. W. Hirsch et S. Smale., Differential equations, dynamical systems and linear algebra., *Academic Press*, New York, (1974).
- [10] C. S. Holling, The functional response of predators to prey density and its role in mimicry and population regulation, *Mem. Entomolog. Soc. can.*, **45** (1965), pp. 3-60.

- 
- [11] W. Khellaf., Systèmes dynamiques et modèles d'évaluation des actifs naturels et environnementaux : Application aux problèmes de dynamique des populations., *Thèse de doctorat en science*, Université de Constantine, (2013).
- [12] A.Kuznetsov, Elements of applied bifurcation theory, second edition.,*Springer*.
- [13] A. Minasri., Chaos et bifurcation dans les systèmes dynamiques en dimension  $n(n > 1)$ ., *Thèse de doctorat Rebat*, (2016).
- [14] J . E. Marsden et M. McCracken., The Hopf bifurcation and its applications., *Springer*, Berlin, (1976).
- [15] L. Perko., Differential equations and dynamical systems., *Springer*, New York, (2000).
- [16] H. Reinhard., Equations différentielles fondements et applications., *Bords*, Paris, (1989).
- [17] M. L. Rosenzweig, Paradox of enrichment : Destabilization of exploitation ecosystems in ecological time, *Science*, 171 (1971), pp. 385–387.
- [18] S.Ruan and D. Xiao., Globale analyse in a predator-prey system with nonmonotonic function response., *Canada* (2001), 1445-1470
- [19] R. J. Taylor, Predation, Chapman and Hall, New York, (1984).
- [20] A. Vidal, Modèles mathématique EDO pour la biologie université de Marne-la-vallée, (2014-2015).
- [21] G. S. K. Wolkowicz, Bifurcation analysis of a predator-prey system involving group defence, *SIAM J. Appl. Math.*, **48** (1988), pp. 592–606.
- [22] Y. R. Zhou, Existence and uniqueness of a limit cycle for the system of equations  $\dot{x} = \Phi(y) - F(x)$ ,  $\dot{y} = -g(x)$ , and the existence of exactly two limit cycles, *Chinese Ann. Math.*, 3 (1982), pp. 89–102 (Chinese).