RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques Appliquées.

Option : EDP et applications.

Thème

Analyse a posteriori et ses applications

Présenté par :

Chahinaze Azizi

Youssra Kerchoune

Devant le jury composé de

W. Chikouche	Maître de conférences A	Université de Jijel	Président
S. Maarouf	Maître de conférences B	Université de Jijel	Encadreur
H. Benhassine	Maître de conférences B	Université de Jijel	Examinateur

Promotion **2017/2018**

Remerciements

*Nous remercions tout d'abord **ALLAH**, le tout puissant et maître de l'univers qui nous a donné la capacité nécessaire, la forte volonté et la patience afin d'accomplir ce travail, et qui nous a toujours guidé vers le bon chemin.*

*Nous tenons à exprimer notre gratitude à **S.Maarouf** maître de conférences B à l'université de Jijel, qui a encadré ce mémoire et nous a guidé tout au Long de ce travail avec patience et beaucoup d'intérêt. Merci de nous avoir montré le bon exemple.*

*Nous remercions également les membres du jury : **Madame W. Chikouche** et **Monsieur H.Benhassine**, pour nous avoir honoré par leur évaluation du travail en tant qu'examinateurs.*

Enfin, nous n'oublions pas tous notre enseignant au département de mathématiques de l'université de Jijel, nos amis et nos collègues.

Dédicace

Je dédie ce travail de fin d'études

A mes chèrs parents ⋆ Abdelhafid et Naima ⋆ pour leur soutien moral

et pour leurs encouragements...

Que Dieu vous protège

A ma soeur Hadjer

A mon frère, Mostafa et Haroun

A mes amis de ma promotion.

A tous mes enseignants depuis le primaire jusqu'à maintenant.

Enfin, je dédie ce mémoire à ceux qui m'aiment et surtout ceux que j'aime.

Chahinaze

Dédicace

$\mathcal{A}$ la mémoire de ma mère $\star$ Noura $\star$ qui a fait de moi ce que je suis aujourd'hui par ses sacrifices, qu'Allah te garde dans son vaste paradis.

$\mathcal{A}$ mon père $\star$ Mohamed cherif $\star$ pour son soutien moral et ses encouragements...

$\mathcal{A}$ mes frères : Yasser et Alaeddine.

$\mathcal{A}$ mes soeurs : Rayane, Nouha et Asmae.

$\mathcal{A}$ mes amis de ma promotion.

$\mathcal{A}$ tous mes enseignants depuis le primaire jusqu'à maintenant.

Enfin, je dédie ce mémoire à ceux qui m'aiment et surtout ceux que j'aime.

$\mathcal{Y}$oussra

Table des matières

Introduction **1**

1 Préliminaires **3**

1.1 Espaces Fonctionnels 3

1.2 Rappels sur le Lemme de Lax-Milgram 6

1.3 Méthode des éléments finis 6

1.4 Erreur d'approximation par éléments finis 9

2 Introduction à l'analyse a posteriori **12**

2.1 Principes généraux et propriétés 12

2.2 Outils de l'analyse 14

2.2.1 Fonctions bulles 15

2.2.2 Inégalités inverses 18

3 Analyse a posteriori du problème de Dirichlet pour le laplacien **23**

3.1 Formulation variationnelle 23

3.2 Analyse a posteriori du problème de Dirichlet 25

3.2.1 Condition aux limites homogènes 26

3.2.1.1 Discrétisation par éléments finis 26

3.2.1.2 Analyse d'erreur a priori 27

3.2.1.3 Analyse d'erreur a posteriori 28

3.2.2 Condition aux limites non-homogène 35

3.2.2.1 Discrétisation par éléments finis 35

3.2.2.2 Analyse d'erreur a priori 36

3.2.2.3 Analyse d'erreur a posteriori 38

Conclusion **40**

Appendice **41**

Bibliographie **42**

Introduction

Les méthodes des éléments finis sont des méthodes numériques de résolution des équations aux dérivées partielles. Elles reposent sur l'approximation des solutions de ces dernières par des fonctions dont la restriction à chaque élément d'une triangulation du domaine de calcul est un polynôme de bas degré. Ces méthodes sont basées sur la formulation variationnelle d'une équation aux dérivées partielles elliptique et la résolution de celle-ci en se restreignant à un sous espace de dimension finie. Comme pour toute méthode numérique, la question de l'erreur commise entre la solution exacte du problème et la solution numérique se pose. Il y a deux façon d'estimer cette erreur, estimation a priori ou estimation a posteriori :

Estimation a priori : Cette estimation permet de connaître l'ordre de convergence de la méthode, mais ne donne qu'un indice global de l'erreur.

Estimation a posteriori : C'est une estimation calculée à l'aide de la solution numérique obtenue par la méthode, elle permet d'obtenir des informations globales sur l'erreur mais aussi locales (sur les éléments du maillage).

L'analyse d'erreur a posteriori est en quelques années devenue l'outil de base pour l'adaptation automatique de maillage en éléments finis. Elle consiste à majorer et à minorer l'erreur entre la solution approchée et la solution exacte par des quantités qui dépendent seulement de la solution discrète et des données du problème étudié. Ces quantités, appelées estimateurs d'erreur a posteriori, permettent de mesurer la qualité de la solution calculée et fournissent une information pour contrôler l'algorithme d'adaptation de maillage. Les estimations d'erreur a posteriori servent à raffiner certaines parties de la triangulation en fonction de la solution approchée. L'adaptation de maillage est donc devenu un outil important dans l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.

Il existe dans la littérature, plusieurs classes d'estimations d'erreur a posteriori. Dans ce mémoire, nous avons choisi de présenter parmi les nombreux types d'indicateurs d'er-

reur existants, ceux dits "par résidu" et nous prouvons l'équivalence de leur somme avec l'erreur. Ce travail est basé sur le livre de Bernardi et al [10].

Ce mémoire est structuré de la façon suivante :
Dans le premier chapitre, nous rassemblons les notions et les résultats que nous utilisons fréquemment tout au long de ce manuscrit. Nous donnons des brèves définitions de quelques espaces fonctionnels, notamment, les espaces de Sobolev. En effet, c'est dans ces espaces qu'on recherche la solution variationnelle et qu'on donne les résultats de régularité. Ensuite, on rappelle le Lemme de Lax-Milgram qui est à la base de l'étude des équations aux dérivées partielles. Puis, nous donnons des brèves descriptions de la méthode des éléments finis et les opérateurs d'approximations pour cette méthode.

Au deuxième chapitre, nous commençons par introduire l'analyse a posteriori résiduel et présenter ses propriétés, notamment, la fiabilité, l'adaptation de maillage et l'efficacité. Dans la deuxième partie nous regroupons les outils de l'analyse, c'est à dire, les fonctions bulles et les inégalités inverses locales qu'on utilise pour montrer l'efficacité de l'analyse.

Le dernier chapitre est consacré à l'analyse a posteriori du problème de Dirichlet pour le laplacien. Dans un premier temps nous écrivons la formulation variationnelle et nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution. Dans un deuxième temps, nous nous intéressons à l'analyse a posteriori du problème homogènes et non-homogènes. Dans les deux cas, nous proposons une discrétisation par éléments finis conforme, nous prouvons que le problème discret est uniquement résoluble et nous établissons l'analyse d'erreur a priori. Nous écrivons une équation dite du résidu et nous construisons ainsi une famille des indicateurs optimale. En outre, nous démontrons la fiabilité et l'efficacité de l'analyse a posteriori.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on rappelle les notions de base utilisées tout au long du mémoire. En particulier les définitions et les propriétés fondamentales des espaces de Sobolev classiques et les outils de la méthode des éléments finis. Nous présentons aussi quelques concepts utilisés.

1.1 Espaces Fonctionnels

Les notations utilisées dans ce mémoire pour les espaces de Sobolev sont classiques. Les démonstrations des propriétés indiquées figurent en particulier dans les ouvrages de références suivants : Adams [1], Dautray et Lions [16], Grisvard [17] et Lions et Magenes [21].

Dans ce qui suit, d est un entier positif représentant la dimension de l'espace dans lequel on se place. Le symbole ∂ suivi d'un nom d'ouvert, désigne sa frontière. La définition suivante est nécessaire pour caractériser la géométrie des ouverts que l'on considère.

Définition 1.1.1. *En dimension $d \geq 2$, un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^d$ est dit lipschitzien ou à frontière lipschitzienne si pour tout point $\boldsymbol{x}$ de $\partial\Omega$, il existe un système de coordonnées orthogonales $(y_1, ..., y_d)$, un hypercube $U^{\boldsymbol{x}} = \prod_{i=1}^{d}]-a_i, a_i[$ et une application lipschitzienne $\Phi^{\boldsymbol{x}}$ de $\prod_{i=1}^{d-1}]-a_i, a_i[$ dans $]-\frac{a_d}{2}, \frac{a_d}{2}[$ tels que :*

$$\Omega \cap U^{\boldsymbol{x}} = \{(y_1, ..., y_d) \in U^{\boldsymbol{x}};\ \ y_d > \Phi^{\boldsymbol{x}}(y_1, ..., y_{d-1})\},$$
$$\partial\Omega \cap U^{\boldsymbol{x}} = \{(y_1, ..., y_d) \in U^{\boldsymbol{x}};\ \ y_d = \Phi^{\boldsymbol{x}}(y_1, ..., y_{d-1})\}.$$

Cette propriété signifie que la frontière coïncide localement avec le graphe d'une fonction lipschitzienne. Elle sera satisfaite par tous les ouverts considérés dans ce mémoire. Tout ouvert borné convexe de $\mathbb{R}^d$ est également à frontière lipschitzienne (voir Grisvard [17, Corollaire 1.2.2.3]).

Dans la suite, on note Ω un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^d$. On note $\boldsymbol{x}$ le point générique de Ω, et $(x_1, ..., x_d)$ ses coordonnées. Finalement, on utilise la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$, que l'on écrit soit $d\boldsymbol{x}$ soit $dx_1, ..., dx_d$.
On rappelle que $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω, et que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ désigne l'espaces des restrictions à $\overline{\Omega}$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans $\mathbb{R}^d$. Le dual $\mathcal{D}'(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω. On introduit également $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ l'espaces des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$. On note maintenant $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions v mesurables telles que

$$\int_\Omega v^2(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \ < +\infty.$$

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v) = \int_\Omega u(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}.$$

On note $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ la norme

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \Big(\int_\Omega v^2(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On sait que l'espace $L^2(\Omega)$ contient les deux espaces $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ comme sous-espaces denses, et que l'espace $L^2(\Omega)$ est contenu dans l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$. Le produit de dualité entre les espaces $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}'(\Omega)$ étant alors une extension du produit scalaire dans $L^2(\Omega)$. La théorie des distributions (voir Schwartz [22]) permet de définir, pour les fonctions de $L^2(\Omega)$, des dérivées d'ordre quelconque à valeurs dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Définition 1.1.2. *Pour tout entier $m \geq 0$, on définit l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ de la façon suivante :*

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega),\ \partial^\alpha v \in L^2(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha| \leq m\},$$

muni de la norme

$$\|v\|_{H^m(\Omega)} = \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq m} (\partial^\alpha v)^2(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1}$$

Définition 1.1.3. *Soit m un entier positif. On note $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace $H^m(\Omega)$.*

L'espace $H_0^m(\Omega)$ est donc un sous-espace fermé de $H^m(\Omega)$. On rappelle maintenant un résultat de base, connu sous le nom d'inégalité de Poincaré-Friedrichs (voir Adams [1, Thm 6.28]).

Lemme 1.1.1. (***Inégalité de Poincaré-Friedrichs***) *Il existe une constante positive c ne dépendant que de la géométrie de Ω telle que toute fonction v de $H_0^1(\Omega)$ vérifie*

$$\|v\|_{0,\Omega} \leq c \left(\int_\Omega \sum_{j=1}^d (\frac{\partial v}{\partial x_j})^2(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2}$$

Cette inégalité permet de démontrer facilement le résultat suivant :

Corollaire 1.1.2. *La semi norme*

$$|v|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{j=1}^d (\frac{\partial v}{\partial x_j})^2(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.3}$$

est une norme sur l'espace $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

La caractérisation des espaces $H_0^m(\Omega)$ s'effectue au moyen du théorème de traces, que l'on trouve démontré dans Grisvard [17]. On rappelle que l'ouvert Ω étant lipschitzien, il existe en presque tout point de la frontière $\partial\Omega$, un vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ et dirigé vers l'extérieur de Ω, que l'on note $\boldsymbol{n}$. Si les composantes de $\boldsymbol{n}$ s'écrivent $(n_1, ..., n_d)$, on désigne par $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}$ l'opérateur de dérivée normale $n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + ... + n_d \frac{\partial}{\partial x_d}$.

Théorème 1.1.3. *L'application $\gamma_0 \ : \ u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \mapsto \gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$ se prolonge de manière unique, et de façon continue à l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$. On appelle l'opérateur γ_0 ainsi obtenu :* ***l'application de traces.***
l'opérateur γ_0 n'est pas surjectif sur $L^2(\partial\Omega)$. L'image de γ_0 est un espace de Sobolev fractionnaire appelé $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ et qui est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \inf\{\|u\|_{H^1(\Omega)},\ u \in H^1(\Omega),\ \gamma_0 u = v\}.$$

Dans ces conditions, il existe un opérateur linéaire continu $R_0 : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to H^1(\Omega)$, dit de relèvement, qui vérifie $\gamma_0 \circ R_0 = Id_{\partial\Omega}$. De plus, il existe une constante positive c_0 telle que

$$\forall v \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega), \quad \|R_0 v\|_{H^1(\Omega)} \leq c_0 \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}.$$

Corollaire 1.1.4. (***Formule de Green***) *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Pour toute fonction u de $H^2(\Omega)$ et toute fonction v de $H^1(\Omega)$, on a la formule de Green :*

$$-\int_\Omega \Delta u(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \nabla u(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla v(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x})\, d\sigma. \tag{1.4}$$

Définition 1.1.4. *Soit m un entier positif. On note $H^{-m}(\Omega)$ le dual de $H_0^m(\Omega)$ et on le munit de la norme dual :*

$$\|f\|_{-m,\Omega} = \sup_{v \in H_0^m(\Omega)} \frac{< f, v >}{|v|_{m,\Omega}},$$

où $< \cdot, \cdot >$ désigne le produit de dualité entre $H_0^m(\Omega)$ et son dual.

Lemme 1.1.5. *Soit $v \in L^2(\Omega)$. Pour $1 \leq i \leq d$, on peut définir une forme linéaire continue $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ dans $H^{-1}(\Omega)$ par la formule*

$$< \frac{\partial v}{\partial x_i}, \phi >= - \int_\Omega v(\boldsymbol{x}) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.5}$$

1.2 Rappels sur le Lemme de Lax-Milgram

On écrit tout de suite l'énoncé de ce Lemme, dû à Lax-Milgram [20] qui est à la base de l'étude des équations aux dérivées partielles.

Lemme 1.2.1. *Soit V un espace de Hilbert réel de norme $\|\cdot\|_V$. On considère une forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ continue sur $V \times V$ i.e.*

$$\exists M > 0,\ \forall u, v \in V, \quad |a(u, v)| \leq M\ \|u\|_V \|v\|_V,$$

et on suppose qu'elle est elliptique sur V, c'est-à-dire qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall v \in V, \quad a(v, v) \geq \alpha\ \|v\|_V^2.$$

On considère ainsi, une forme linéaire continue $L(\cdot)$ sur V. Alors, le problème :

$$\begin{cases} Trouver\ u\ dans\ V\ tel\ que : \\ \forall v \in V, \quad a(u, v) = L(v), \end{cases}$$

admet une solution unique u dans V. De plus cette solution vérifie

$$\|u\|_V \leq \frac{\|L\|_{V'}}{\alpha}.$$

1.3 Méthode des éléments finis

Dans cette section, on présente les notions de base et les principaux outils de la méthode des éléments finis. On réfère à [10] pour plus de détail.

Définition 1.3.1. *Un d-simplexe K de $\mathbb{R}^d$ est l'enveloppe convexe de $d+1$ points $\boldsymbol{a}_j$, $1 \leq j \leq d+1$, appelés sommets de K qui ne sont pas contenus dans un même hyperplan de $\mathbb{R}^d$.*

Définition 1.3.2. *Soit d et m des entiers positifs. Un élément fini est un triplet (K, P_K, Σ_K), où*

(i) K est un fermé borné de $\mathbb{R}^d$ d'intérieur non vide,

(ii) P_K est un sous-espace de dimension finie de $\mathcal{D}(K)^m$,

(iii) Σ_K est un ensemble de n formes linéaires continues σ_1, ... et σ_n sur $\mathcal{D}(K)^m$ qui est P_K-unisolvant, au sens suivant : pour tout n-uplet $(c_1, ..., c_n)$ de $\mathbb{R}^n$, il existe une unique fonction p de P_K telle que

$$\sigma_i(p) = c_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

On note que, si Σ_K est P_K-unisolvant au sens précédent, les σ_i, $1 \leq i \leq n$, sont linéairement indépendantes sur P_K. Une condition nécessaire pour que Σ_K soit P_K-unisolvant est que dim P_K = card $\Sigma_K = n$. En outre, on a la propriété suivante.

Lemme 1.3.1. *Avec les notations de la Définition 1.3.2, l'ensemble Σ_K est P_K-unisolvant si et seulement s'il existe un unique n-uplet de fonctions φ_1, ...et φ_n de P_K telles que*

$$\sigma_i(\varphi_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

où $\delta_{..}$ désigne le symbole de Kronecker.

Les fonctions φ_j, $1 \leq j \leq n$, introduites dans le Lemme 1.3.1 forment une base de P_K : en effet, toute fonction p de P_K s'écrit de façon unique

$$p = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(p)\varphi_j.$$

Dans tout ce qui suit, Ω est un intervalle ($d = 1$), un polygone borné connexe ($d = 2$) ou un polyèdre borné connexe à frontière lipschitzienne ($d = 3$).

Définition 1.3.3. *Une triangulation de Ω est un ensemble fini $\mathcal{T}_h$ de sous-ensembles K de $\overline{\Omega}$ vérifiant les propriétés suivantes*

(i) On a

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K,$$

(ii) chaque élément K de $\mathcal{T}_h$ est un polygone ou un polyèdre connexe fermé de $\mathbb{R}^d$ d'intérieur non vide à frontière lipschitzienne,

(iii) l'intersection de deux éléments distincts de $\mathcal{T}_h$ est soit vide soit un sommet, un côté ou une face entière de ces deux éléments.

Dans la plupart des cas, les triangulations sont composées de triangles ou de quadrilatères convexes en dimension $d = 2$, de tétraèdres ou de parallélépipèdes rectangles en dimension $d = 3$.

Soit h_K le diamètre de K. Il est d'usage que l'indice h de $\mathcal{T}_h$ représente le maximum des h_K, $K \in \mathcal{T}_h$.

Définition 1.3.4. (***Triangulation conforme***) *On suppose que le bord $\partial\Omega$ est polygonal (si $N = 2$) ou polyédral (si $N = 3$). On dit qu'une triangulation $\mathcal{T}_h$ sur $\partial\Omega$ est admissible ou conforme, si l'intersection entre deux éléments est soit vide, soit un sommet, soit un côté entier ou une face entière.*

Définition 1.3.5. *Une famille de triangulations $(\mathcal{T}_h)_h$ est dite régulière s'il existe une constante positive c telle que, pour tout h*
(i) en dimension $d = 1$, pour tous éléments K et K' de $\mathcal{T}_h$ ayant une extrimité commune, le rapport $\frac{h_K}{h_{K'}}$ est inférieur à c,
(ii) en dimension $d \geq 2$, pour tout élément K de $\mathcal{T}_h$, le rapport $\frac{h_K}{\rho_K}$ est inférieur à c, où ρ_K désigne le diamètre de la plus grande sphère contenue dans K.

Définition 1.3.6. *On appelle coordonnées barycentriques λ_j, $1 \leq j \leq d+1$, d'un point $\boldsymbol{x} = (x_i)_{1\leq i\leq d}$ de $\mathbb{R}^d$ par rapport aux $d+1$ sommets $\boldsymbol{a}_j$ non contenus dans un même hyperplan, la solution (unique) du système linéaire suivant*

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{d+1} a_{ij}\lambda_j = x_i, \quad 1 \leq i \leq d, \\ \sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j = 1, \end{cases}$$

où les a_{ij} sont les coordonnées du point $\boldsymbol{a}_j$.

Définition 1.3.7. *Pour tout entier $k \geq 0$, on appelle treillis principal d'ordre k d'un d-simplexe K, et on note $T_k(K)$, l'ensemble des points de $\mathbb{R}^d$ ainsi défini*

$$T_0(K) = \{x \in \mathbb{R}^d; \lambda_j(x) = \frac{1}{d+1}, 1 \leq j \leq d+1\},$$
$$T_k(K) = \{x \in \mathbb{R}^d; \lambda_j(x) \in \{0, \frac{1}{k}, ..., \frac{k-1}{k}, 1\}, 1 \leq j \leq d+1\}, \quad k \geq 1.$$

Notation 1.3.2. *Pour tout entier $k \geq 0$, on définit $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^d)$ comme l'espace des polynômes sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de degré total $\leq k$ et $\mathcal{P}_k(K)$ défini par l'espace des restrictions à K des fonctions de l'ensemble $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^d)$.*

On introduit quelques notations suplémentaires.

Notation 1.3.3. *À une triangulation $\mathcal{T}_h$, on associe l'ensemble $\mathcal{E}_h$ des côtés $d = 2$ ou faces $d = 3$ des éléments de $\mathcal{T}_h$. On désigne par $\mathcal{E}_h^0$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}_h$ qui ne sont pas contenus dans $\partial\Omega$. Dans ce qui suit, h_e désigne le diamètre de n'importe quel élément e de $\mathcal{E}_h$.*

Notation 1.3.4. *Pour une triangulation $\mathcal{T}_h$ et tout élément K de $\mathcal{T}_h$, on note $\mathcal{E}_K$ l'ensemble des côtés $d = 2$ ou faces $d = 3$ de K et $\mathcal{E}_K^0$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}_K$ qui ne sont pas contenus dans $\partial\Omega$.*

On réfère à [10, Lemme 2.7, chap XI] pour la démonstration du lemme suivant.

Lemme 1.3.5. *Pour tout élément K de $\mathcal{T}_h$ et tout élément e de $\mathcal{E}_K$, il existe un opérateur $\mathcal{R}_{K,e}$ de l'espace $\mathcal{P}^0_{k+d-1}(e)$ de polynômes de $\mathcal{P}_{k+d-1}(e)$ s'annulant sur ∂e dans $\mathcal{P}_{k+d-1}(K)$ tel que, pour tout élément φ de $\mathcal{P}^0_{k+d-1}(e)$,*

(i)

$$\mathcal{R}_{K,e}\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \varphi(\boldsymbol{x}) & \text{dans } e, \\ 0 & \text{sur } \partial K \setminus e, \end{cases}$$

(ii) on ait l'estimation

$$|\mathcal{R}_{K,e}\varphi|_{H^1(K)} + h_K^{-1}\|\mathcal{R}_{K,e}\varphi\|_{L^2(K)} \leq c\, h_e^{-\frac{1}{2}}\|\varphi\|_{L^2(e)}. \tag{1.6}$$

1.4 Erreur d'approximation par éléments finis

Les propriétés des opérateurs de projection orthogonale et d'interpolation sont présentées et démontrées en détail dans [10].

Dans cette partie, l'espace d'éléments finis X_h associé à la famille d'éléments finis (K, P_K, Σ_K), $K \in \mathcal{T}_h$, est l'espace engendré par les fonctions de base φ_i $1 \leq i \leq N_h$.

Notation 1.4.1. *On note $i_h^{\partial\Omega}$ l'opérateur d'interpolation de Lagrange aux nœuds de $\Sigma_K \cap \partial\Omega$ à valeurs dans l'espace des traces des fonctions de X_h sur $\partial\Omega$.*

Notation 1.4.2. *On note $\mathcal{I}_h$ l'opérateur d'interpolation sur la grille Σ_K : pour toute fonction v suffisamment régulière sur Ω, $\mathcal{I}_h v$ appartient à X_h et vérifie*

$$\sigma_i(\mathcal{I}_h v) = \sigma_i(v), \quad 1 \leq i \leq N_h.$$

De façon équivalente, la fonction $\mathcal{I}_h v$ s'écrit

$$\mathcal{I}_h v = \sum_{i=1}^{N_h} \sigma_i(v)\varphi_i. \tag{1.7}$$

Théorème 1.4.3. *On suppose tous les éléments finis (K, P_K, Σ_K)*

(i) affine-équivalents à un même élément de référence $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$, c'est à dire, il existe un élément de référence $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ et pour tout K, une transformation affine F_K qui envoie $\hat{K}$ sur K et telle que $P_K = \{p \circ F_K^{-1},\ p \in \hat{P}\}$ et $\Sigma_K = \{\sigma, \sigma(p) = \hat{\sigma}(p \circ F_K),\ \hat{\sigma} \in \hat{\Sigma}\}$,

(ii) tels que P_K contienne l'espace $\mathcal{P}_k(K)$, $k \geq 0$,

(iii) tels que tous les éléments de Σ_K soient définis sur un espace $W(K)$,

(iv) et tels que toute $(d-1)-$face e de K, (e, P_e, Σ_e) est un élément fini.

Pour tout entier m, $0 \leq m \leq k+1$, tel que $H^m(K)$ soit inclus dans $W(K)$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m telle que, pour toute fonction v de $H^m(\Omega)$, on ait

$$\|v - \mathcal{I}_h v\|_{H^1(\Omega)} \leq c\, h^{m-1} |v|_{H^m(\Omega)}. \tag{1.8}$$

Les opérateurs $i_h^{\partial\Omega}$ et $\mathcal{I}_h$ introduits précédemment vérifient des propriété d'approximation optimales, toutefois ils ne sont définis sauf exception que pour des fonctions continues, ce qui n'est pas le cas des fonctions de $L^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$. Pour remédier à cet inconvénient, nous allons introduire des opérateurs de projection orthogonale. On désigne par X_h^0 l'espace $X_h \cap H_0^1(\Omega)$.

Notation 1.4.4. *On note $\Pi_h^{1,0}$ l'opérateur de projection orthogonale de $H_0^1(\Omega)$ sur l'espace X_h^0 pour le produit scalaire associé à la semi norme $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$.*

Théorème 1.4.5. *Pour tout entier m, $1 \leq m \leq k+1$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m telle que, pour toute fonction v de $H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, on ait*

$$|v - \Pi_h^{1,0} v|_{H^1(\Omega)} \leq c\, h^{m-1} \|v\|_{H^m(\Omega)}. \tag{1.9}$$

On désire finalement construire un opérateur de régularisation, appelé aussi opérateur de projection locale tel qu'introduit par P. Clément [15]. Dans ce but, on note $\boldsymbol{a}_i$, $1 \leq i \leq N_h^0$ les nœuds qui appartiennent à Ω.

Définition 1.4.1. *On définit l'opérateur* $\tilde{\Pi}_h^0$ *par*

$$\tilde{\Pi}_h^0 v = \sum_{i=0}^{N_h^0} (\pi_i v)(\boldsymbol{a}_i)\varphi_i,$$

à valeurs dans X_h^0*, où* π_i *est un opérateur de régularisation dans un voisinage de* $\boldsymbol{a}_i$ *construit par projection locale (opérateur de projection orthogonale de* $L^2(K_i)$ *sur* $\mathcal{P}_k(K_i)$*).*

Notation 1.4.6. *Pour tout triangle* K *de* $\mathcal{T}_h$*,*

- *on note* Δ_K *l'union des éléments de* $\mathcal{T}_h$ *partageant au moins un sommet avec* K*.*
- *l'ensemble* Δ_e *désigne l'union des éléments de* $\mathcal{T}_h$ *dont l'intersection avec* e *est non vide.*

Théorème 1.4.7. *Pour tout entier* m*,* $1 \leq m \leq k+1$*, il existe une constante* c *positive ne dépendant que de* m *telle que, pour tout élément* K *de* $\mathcal{T}_h$ *et pour toute fonction* v *de* $H^m(\Delta_K)$ *s'annulant sur* $\Delta_K \cap \partial\Omega$*, on ait*

$$\|v - \tilde{\Pi}_h^0 v\|_{L^2(K)} \leq c\, h_K^m |v|_{H^m(\Delta_K)},$$

et

$$|v - \tilde{\Pi}_h^0 v|_{H^1(K)} \leq c\, h_K^{m-1} |v|_{H^m(\Delta_K)}.$$

Corollaire 1.4.8. *Pour tout entier* m*,* $1 \leq m \leq k+1$*, il existe une constante* c *positive ne dépendant que de* m *telle que, pour tout élément* K *de* $\mathcal{T}_h$ *et tout côté* $(d=2)$ *ou face* $(d=3)$ e *de* K *non contenu dans* $\partial\Omega$*, et pour toute fonction* v *de* $H^m(\Delta_e)$ *s'annulant* $\Delta_e \cap \partial\Omega$*, on ait*

$$\|v - \tilde{\Pi}_h^0 v\|_{L^2(e)} \leq c\, h_e^{m-\frac{1}{2}} |v|_{H^m(\Delta_e)}.$$

L'opérateur de régularisation permet de construire un opérateur de relèvement. L'idée de la construction de cet opérateur vient de [23]. On note $\mathcal{E}_h^b$ l'ensemble des côtés $(d=2)$ ou faces $(d=3)$ des éléments de $\mathcal{T}_h$ qui sont contenus dans $\partial\Omega$.

Théorème 1.4.9. *Soit* W_h *l'espace*

$$W_h = \{\varphi_h \in \mathscr{C}^0(\partial\Omega); \forall e \in \mathcal{E}_h^b, \varphi_{h|e} \in \mathcal{P}_k(e)\}.$$

Il existe un opérateur $\mathcal{R}_h$ *de* W_h *dans* X_h *tel que, pour tout* φ_h *dans* W_h*, la trace de* $\mathcal{R}_h(\varphi_h)$ *sur* $\partial\Omega$ *coïncide avec* φ_h*. Cet opérateur vérifie en outre la propriété de stabilité,*

$$\|\mathcal{R}_h(\varphi_h)\|_{H^1(\Omega)} \leq c\, \|\varphi_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}.$$

Chapitre 2

Introduction à l'analyse a posteriori

Une phase délicate dans une simulation numérique est la construction du maillage. En effet, si le maillage est trop grossier, la durée des calculs sera courte, mais le résultat ne sera pas satisfaisant car trop approximatif. Par contre, si le maillage est très fin, il y a deux inconvénients : premièrement le calcul sera inutilement long car certaines zones ne nécessitent pas un maillage fin, deuxièmement, le processus lui-même risque de se terminer par une interruption extérieure par exemple limite de temps dépassée. Il faut donc trouver un bon compromis de manière à ce que le maillage soit fin uniquement là où cela est nécessaire.

Les outils permettant de déterminer les endroits où l'erreur locale est inférieure ou supérieure à la moyenne sont appelés indicateur d'erreur. Leur étude repose sur une analyse a posteriori de la discrétisation, le sens de ce terme étant expliqué dans ce chapitre.

2.1 Principes généraux et propriétés

Supposons que l'on ait à résoudre numériquement le problème suivant : trouver u dans un espace de Banach X tel que $A(u) = f$. Si h désigne le paramètre de discrétisation on va donc chercher une solution u_h de l'équation $A(u_h) = f$ dans un sous-espace de dimension finie X_h de X.

Les estimations d'erreur a priori fournissent des bornes sur la différence entre la solution exacte u de X et la solution approchée u_h dans la norme (ou semi-norme), $\|\cdot\|_X$ sous la

forme,

$$\|u - u_h\|_X \leq c\, h^{m-1} \|u\|_{H^m(\Omega)}, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*. \tag{2.1}$$

Ces estimations sont utilisées afin de justifier théoriquement la convergence de la méthode numérique employée. De plus, la constante générique c qui apparaît dans l'estimation (2.1) est soit inconnue, soit difficile à estimer. La difficulté la plus importante est que la norme $\|\cdot\|_{H^m}$ n'est pas calculable, simplement parce que la solution exacte u est inconnue explicitement.

Pour pouvoir développer une méthode adaptative, on va avoir recours à des estimations d'erreur a posteriori.

Définition 2.1.1. *On appelle estimation d'erreur a posteriori, une estimation de la forme,*

$$\|u - u_h\|_X \leq c\, \eta(h, u_h, f), \tag{2.2}$$

où c est une constante réelle positive indépendante du paramètre h caractérisant la précision du maillage. La quantité $\eta(h, u_h, f)$ est appelée estimateur d'erreur a posteriori, et ne dépend que de la solution approchée u_h du maillage $\mathcal{T}_h$ et de la donnée f (le second membre de l'équation).

On attribue à un estimateur d'erreur a posteriori, certaines propriétés qui attestent de sa qualité. Ainsi, il doit satisfaire les trois propriétés suivantes :

• **Propriété de fiabilité.** Une première propriété que doit vérifier un estimateur d'erreur a posteriori est de satisfaire l'estimation

$$\|u - u_h\|_X \leq c_1\, \eta(h, u_h, f) + H_1, \tag{2.3}$$

où H_1 est une quantité ne dépendant que du second membre et des conditions de bord du problème.

L'estimation (2.3) s'interprète comme une propriété de fiabilité puisqu'elle garantit que l'erreur $\|u - u_h\|_X$ est effectivement contrôlée par l'estimateur d'erreur a posteriori.

• **Adaptation de maillage.** Un estimateur d'erreur a posteriori doit donner des informations sur la distribution locale de l'erreur. Il doit pouvoir être localisé, par exemple sur chaque élément du maillage sous la forme,

$$\eta(h, u_h, f) = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2(h, u_h, f) \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.4}$$

Alors on dit que les quantités $\{\eta_K(h, u_h, f)\}_{K \in \mathcal{T}_h}$ sont des indicateurs d'erreur locaux.

Grâce aux estimateurs d'erreur a posteriori et notamment aux indicateurs d'erreur locaux, on connait la répartition de l'erreur et l'on sait atteindre uniquement les éléments où elle est la plus élevée. On introduit alors une procédure d'adaptation basée sur ces indicateurs pour raffiner (ou déraffiner) localement le maillage. Un algorithme relativement général d'adaptation de maillage est le suivant :

1. On choisit un maillage initial que l'on note $\mathcal{T}_h^0$. On pose $i = 0$.
2. On résout le problème discret sur $\mathcal{T}_h^i$. On note u_h^i la solution discrète.
3. Sur chaque élément K de $\mathcal{T}_h^i$, on calcule un indicateur d'erreur local η_K associé à K.
4. Si l'estimation d'erreur globale est inférieure à un seuil de tolérance, on arrête les calculs.
5. Sinon, sur la base de ces indicateurs d'erreur locaux, on décide de raffiner certaines mailles et d'en déraffiner d'autres. On note $\mathcal{T}_h^{i+1}$ le nouveau maillage ainsi construit.
6. On incrémente l'indice i de 1 et on revient à l'étape (2).

• **Propriété d'efficacité.** Pour qu'une procédure de raffinement adaptatif de maillage soit efficace, il faut que les indicateurs d'erreur locaux obéissent à l'estimation,

$$\eta_K(h, u_h, f) \leq c_2 \|u - u_h\|_{\Delta_K} + H_{2,K}(h, f), \tag{2.5}$$

où Δ_K désigne l'espace des restrictions des fonctions de X à un voisinage fixé de K et $H_{2,K}(h, f)$ ne fait intervenir que h et les valeurs du second membre f sur ce même voisinage.

Définition 2.1.2. *Une estimation de l'erreur a posteriori par une quantité $\eta(h, u_h, f)$ dépendant du paramètre de discrétisation h, de la solution discrète u_h et des données f est dite optimale si elle satisfait la propriété de fiabilité* (2.3) *et la propriété d'efficacité* (2.5).

Remarque 2.1.1. *Le critère d'optimalité assure l'équivalence entre l'erreur et l'estimateur d'erreur a posteriori. Ce critère permet donc d'assurer numériquement le bon comportement des indicateurs d'erreur a posteriori.*

2.2 Outils de l'analyse

Nous regroupons dans cette section, les outils d'analyse, notamment les fonctions bulles et inégalités inverses. Dans ce qui suit, on considère Ω un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, et on suppose qu'il admet une triangulation $\mathcal{T}_h$ au sens de la Définition 1.3.3.

2.2.1 Fonctions bulles

Pour minorer localement l'erreur par les indicateurs d'erreur locaux, nous aurons besoin des fonctions bulles satisfaisant certaines propriétés.

Définition 2.2.1. *On désigne d-simplexe $\hat{K}$ le triangle de référence dont un sommet a toutes ses coordonnées nulles et les d autres ont une coordonnée égale à 1 et les autres nulles.*

Définition 2.2.2. *Une transformation $F_K : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est dite affine s'il existe une matrice A_K carrée de dimension d et un vecteur b de $\mathbb{R}^d$ tels que*

$$\boldsymbol{x} = F_K(\hat{\boldsymbol{x}}) = A_K\hat{\boldsymbol{x}} + b.$$

Lemme 2.2.1. *Soit F_K une transformation affine bijective du d-simplexe de référence $\hat{K}$ sur un d-simplexe K, de la forme $F_K(\hat{\boldsymbol{x}}) = A_K\hat{\boldsymbol{x}} + b$. Alors il existe des constantes c et c' indépendantes de K telles que le déterminant de A_K vérifie les bornes suivantes :*

$$|\det A_K| \leq c\,\frac{h_K^d}{\hat{\rho}^d}, \quad |\det A_K^{-1}| \leq c'\,\frac{\hat{h}^d}{\rho_K^d}.$$

Preuve. La transformation F_K est un changement de variable sur K, en rappelant que $\det A_K$ est constant sur $\hat{K}$, on obtient

$$mes(K) = \int_K d\boldsymbol{x} = \int_{\hat{K}} |\det A_K| d\hat{\boldsymbol{x}} = |\det A_K| \int_{\hat{K}} d\hat{\boldsymbol{x}} = |\det A_K| mes(\hat{K}).$$

On conclut en notant que $mes(K)$ est inférieur à $c_d h_K^d$ et supérieur à $c_d \rho_K^d$, où c_d est le volume de la sphère unité de $\mathbb{R}^d$ divisé par 2^d et de façon analogue que, $mes(\hat{K})$ est inférieur à $c_d \hat{h}^d$ et supérieur à $c_d \hat{\rho}^d$, il en résulte

$$\begin{aligned} |\det A_K| &= \frac{mes(K)}{mes(\hat{K})} \leq \frac{c_d\, h_K^d}{mes(\hat{K})} \leq c\,\frac{h_K^d}{\hat{\rho}^d}, \\ \text{et} \quad |\det A_K|^{-1} &= \frac{mes(\hat{K})}{mes(K)} \leq \frac{c_d\, \hat{h}^d}{mes(K)} \leq c'\,\frac{\hat{h}^d}{\rho_K^d}. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve.

Par la suite, on note $\|\cdot\|$ à la foie la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$ et la norme de la matrice subordonnée, c'est-à-dire

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \|\boldsymbol{x}\| = \Big(\sum_{i=1}^d x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \forall A \in \mathbb{R}^{d\times d}, \quad \|A\| = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d, \boldsymbol{x}\neq 0_{\mathbb{R}^d}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}.$$

Lemme 2.2.2. *Soit F_K une transformation affine bijective du d-simplexe de référence $\hat{K}$ sur un d-simplexe K, de la forme $F_K(\hat{\boldsymbol{x}}) = A_K\hat{\boldsymbol{x}} + b$. Alors la matrice A_K satisfait les bornes suivantes :*

$$\|A_K\| \leq \frac{h_K}{\hat{\rho}}, \quad \|A_K^{-1}\| \leq \frac{\hat{h}}{\rho_K}. \tag{2.6}$$

Preuve. On a

$$\|A_K\| = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d, \boldsymbol{x}\neq 0_{\mathbb{R}^d}} \frac{\|A_K\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = \sup_{\hat{\boldsymbol{y}}\in\mathbb{R}^d, \|\hat{\boldsymbol{y}}\|=\hat{\rho}} \frac{\|A_K\hat{\boldsymbol{y}}\|}{\hat{\rho}}.$$

En écrivant $\hat{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{y}}_1 - \hat{\boldsymbol{y}}_2$ avec $\hat{\boldsymbol{y}}_1$ et $\hat{\boldsymbol{y}}_2$ appartenant à $\hat{K}$, on voit que

$$A_K\hat{\boldsymbol{y}} = A_K\hat{\boldsymbol{y}}_1 - A_K\hat{\boldsymbol{y}}_2 = F_K(\hat{\boldsymbol{y}}_1) - F_K(\hat{\boldsymbol{y}}_2).$$

Par définition, $F_K(\hat{\boldsymbol{y}}_1)$ et $F_K(\hat{\boldsymbol{y}}_2)$ appartiennent à K alors $\|F_K(\hat{\boldsymbol{y}}_1) - F_K(\hat{\boldsymbol{y}}_2)\| \leq h_K$ car $h_K = \max_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K}\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$. D'où $\|A_K\hat{\boldsymbol{y}}\| \leq h_K$. D'où la première inégalité de (2.6) est prouvée. La deuxième inégalité s'obtient en changeant les rôles de K et $\hat{K}$. En effet, soit $\boldsymbol{x}$ égal à $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \in K$ tel que $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in K$, on a

$$A_K^{-1}\boldsymbol{x} = A_K^{-1}\boldsymbol{x}_1 - A_K^{-1}\boldsymbol{x}_2 = F_K^{-1}(\boldsymbol{x}_1) - F_K^{-1}(\boldsymbol{x}_2).$$

Puisque $F_K^{-1}(\boldsymbol{x}_1)$ et $F_K^{-1}(\boldsymbol{x}_2)$ appartiennent à $\hat{K}$ il en résulte

$$\|A_K^{-1}\boldsymbol{x}\| = \|F_K^{-1}(\boldsymbol{x}_1) - F_K^{-1}(\boldsymbol{x}_2)\| \leq \hat{h}.$$

On conclut en divisant par ρ_K et passant au supremum pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, $\|\boldsymbol{x}\| = \rho_K$.

Pour simplifier, on considère la dimension $d = 2$. Soient $\hat{K}$ le triangle de référence. Les trois coordonnées barycentriques par rapport aux sommets $\boldsymbol{a}_1$ de coordonnées $(1, 0)$, $\boldsymbol{a}_2$ de coordonnées $(0, 1)$, $\boldsymbol{a}_3$ de coordonnées $(0, 0)$, sont

$$\hat{\lambda}_1 = x, \ \hat{\lambda}_2 = y, \ \hat{\lambda}_3 = 1 - x - y.$$

La définition suivante fait appel aux coordonnées barycentriques $\hat{\lambda}_j$.

Définition 2.2.3. *On définit la fonction bulle intérieure dans $\hat{K}$ par :*

$$\hat{\psi}_K = 27\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2\hat{\lambda}_3.$$

Lemme 2.2.3. *La fonction $\hat{\psi}_K$ s'annule sur le bord de $\hat{K}$ et $\max_{\boldsymbol{x}\in\hat{K}} \hat{\psi}_K(\boldsymbol{x}) = 1$.*

Preuve. On a $\partial\hat{K}$ est l'union de trois arrêtes e_1, e_2 et e_3 telles que

$$e_1 = \{0\} \times [0, 1], \quad e_2 = [0, 1] \times \{0\}, \quad e_3 = \{(x, y) \in \partial\hat{K}; y = 1 - x\}.$$

Donc il est clair que $\hat{\psi}_K$ est nul si $x = 0$, $y = 0$ ou $y = 1 - x$. Pour montrer que $\max_{\boldsymbol{x}\in\hat{K}} \hat{\psi}_K(\boldsymbol{x}) = 1$, on cherche les points critiques de $\hat{\psi}_K$. Le gradient de $\hat{\psi}_K$ est donné par

$$\nabla\hat{\psi}_K = \begin{pmatrix} \frac{\partial\hat{\psi}_K}{\partial x} \\ \frac{\partial\hat{\psi}_K}{\partial y} \end{pmatrix} = 27 \begin{pmatrix} y - 2xy - y^2 \\ x - x^2 - 2xy \end{pmatrix}$$

Il suffit de trouver les solutions (x, y) dans $\hat{K}$ des équations

$$\begin{cases} y(1 - 2x - y) = 0 \\ x(1 - x - 2y) = 0. \end{cases}$$

Les solutions dont $x = 0$ ou $y = 0$ sont rejetées car ils appartiennent à $\partial\hat{K}$ et annulent $\hat{\psi}_K$. Si $y = 1 - 2x$ ou $y = \frac{1-x}{2}$ on trouve $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ est un point critique de $\hat{\psi}_K$ et on a : $\hat{\psi}_K(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = 1$.

Encore grâce aux coordonnées barycentriques on donne la définition des fonctions bulles sur ∂K.

Définition 2.2.4. *On définit les fonctions bulles de bord :*

$$\hat{\psi}_{e_1} = 4\hat{\lambda}_2\hat{\lambda}_3,\ \hat{\psi}_{e_2} = 4\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_3,\ \hat{\psi}_{e_3} = 4\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2.$$

Lemme 2.2.4. *Les fonctions $\hat{\psi}_{e_i}$, $1 \leq i \leq 3$, sont définies telles que $\max_{\boldsymbol{x}\in\overline{\hat{K}}} \hat{\psi}_{e_i}(\boldsymbol{x}) = 1$ et $\hat{\psi}_{e_i}$ est différent de 0 sur e_i (i-ième bord de $\hat{K}$) et 0 sur les autres bords de $\hat{K}$.*

Preuve. Similairement à la preuve précédente, pour déterminer le $\max_{\boldsymbol{x}\in\overline{\hat{K}}} \hat{\psi}_{e_i}$ on détermine les points critiques de $\hat{\psi}_{e_i}$, $i = \overline{1,3}$. On remarque que $\hat{\psi}_{e_1}$ qui est définie sur e_1 par $\hat{\psi}_{e_1} = 4y(1 - y)$ admet le seul point critique $(0, \frac{1}{2})$ et vérifie $\hat{\psi}_{e_1}(0, \frac{1}{2}) = 1$. De manière similaire, les seuls points critiques de $\hat{\psi}_{e_2}$ et $\hat{\psi}_{e_3}$ sont $(\frac{1}{2}, 0)$ et $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ respectivement et on a $\hat{\psi}_{e_2}(\frac{1}{2}, 0) = 1$ et $\hat{\psi}_{e_3}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1$.

On peut généraliser les définitions des fonctions bulles (Définitions 2.2.3 et 2.2.4) et ses propriétés (Lemmes 2.2.3 et 2.2.4) en dimension quelconque de la façon suivante.

Définition 2.2.5. *Soit $\hat{\lambda}_j$, $1 \leq j \leq d + 1$, les coordonnées barycentriques associées à $\hat{K}$.*
1. La fonction bulle $\hat{\psi}_K$ est un élément de $\mathcal{P}_{d+1}(\hat{K})$, définie sur une maille $\hat{K}$ par :

$$\hat{\psi}_K = (d + 1)^{d+1} \prod_{j=1}^{d+1} \hat{\lambda}_j.$$

2. Pour tout élément e de $\mathcal{E}_h$, on désigne par $\hat{\psi}_e$ la fonction bulle sur e égale au produit des d coordonnées barycentriques associées aux sommets de e

$$\hat{\psi}_e = d^d \prod_{j=1}^{d} \hat{\lambda}_j.$$

La preuve du Lemme suivant s'effectue par les mêmes arguments que pour les Lemmes 2.2.3 et 2.2.4.

Lemme 2.2.5. *Les fonctions bulles vérifient les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_K &= 0 \quad \textit{sur } \partial\hat{K}, \\
\hat{\psi}_e &= 0 \quad \textit{sur } \partial W_{\hat{e}} = \partial(\hat{K} \cup \hat{K}'), \\
\|\hat{\psi}_K\|_{L^\infty(\hat{K})} &= \|\hat{\psi}_e\|_{L^\infty(W_{\hat{e}})} = 1, \\
0 &\leq \hat{\psi}_K \leq 1, \\
0 &\leq \hat{\psi}_e \leq 1.
\end{aligned}$$

Grâce à la Définition 2.2.2 on donne la définition des fonctions bulles sur une maille K d'une triangulation $\mathcal{T}_h$.

Définition 2.2.6. *Soit F_K une transformation affine bijective du d-simplexe de référence $\hat{K}$ à un d-simplexe K de la forme $F_K(\hat{\boldsymbol{x}}) = A_K\hat{\boldsymbol{x}} + b$. On définit les fonctions bulles sur K par :*

- $\psi_K = \hat{\psi}_K \circ F_K^{-1}$ *fonction bulle intérieure,*
- $\psi_e = \hat{\psi}_e \circ F_K^{-1}$ *fonction bulle de bord, telle que e est une arête de K.*

2.2.2 Inégalités inverses

Nous donnons à présent certaines inégalités inverses, lesquelles sont systématiquement utilisées pour établir la minoration locale de l'erreur, c'est-à-dire une estimation locale du type (2.5). L'idée principale consiste à majorer successivement chacun des termes intervenant dans la définition de l'indicateur local $\eta_K(h, u_h, f)$.

Lemme 2.2.6. *Soient $\hat{P}$ un sous-espace de dimension finie de $H^1(\hat{K})$ et $\hat{\psi}_K$ la fonction bulle intérieure sur l'élément de référence $\hat{K}$. Alors, il existe une constante c ne dépendant que de $\hat{K}$ telle que : pour tout $\hat{v}$ dans $\hat{P}$*

$$c\,\|\hat{v}\|^2_{L^2(\hat{K})} \leq \int_{\hat{K}} (\hat{\psi}_K \hat{v}^2)(\hat{\boldsymbol{x}})\, d\hat{\boldsymbol{x}} \leq c'\,\|\hat{v}\|^2_{L^2(\hat{K})},$$

et

$$c\,\|\hat{v}\|_{L^2(\hat{K})} \leq \|\hat{\psi}_K^{\frac{1}{2}}\hat{v}\|_{H^1(\hat{K})} \leq c'\,\|\hat{v}\|_{L^2(\hat{K})}.$$

Preuve. On va montrer que les applications :

$$v \mapsto \left(\int_{\hat{K}} (\hat{\psi}_K \hat{v}^2)(\hat{\boldsymbol{x}})\, d\hat{\boldsymbol{x}}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{et} \qquad v \mapsto \|\hat{\psi}_K^{\frac{1}{2}}\hat{v}\|_{H^1(\hat{K})}$$

définissent des normes sur $\hat{P}$. Il suffit de vérifier si $\|\hat{\psi}_K^{\frac{1}{2}}\hat{v}\|_{L^2(\hat{K})} = \|\hat{\psi}_K^{\frac{1}{2}}\hat{v}\|_{H^1(\hat{K})} = 0$ alors $\hat{v} = 0$. En effet, on a $\|\hat{\psi}_K^{\frac{1}{2}}\hat{v}\|_{L^2(\hat{K})} = 0$ alors $\hat{\psi}_K^{\frac{1}{2}}\hat{v} = 0$. Comme $\hat{\psi}_K$ n'est pas nul dans $\hat{K}$, $\hat{v} = 0$. Or en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, d'où le résultat.

Lemme 2.2.7. *Soit $\hat{e}$ une arête ou face de $\partial\hat{K}$ et $\hat{\psi}_e$ la fonction bulle correspondante ($\hat{\psi}_e \neq 0$ sur $\hat{e}$). Soit $\hat{P}(\hat{e})$ un espace de dimension finie des fonctions définies sur $\hat{e}$ de $H^1(\hat{K})$. Alors, il existe une constante c ne dépendant que de $\hat{e}$ telle que : pour tout $\hat{v}$ dans $\hat{P}(\hat{e})$*

$$c\,\|\hat{v}\|^2_{L^2(\hat{e})} \leq \int_{\hat{e}} (\hat{\psi}_e \hat{v}^2)(\hat{\tau})\, d\hat{\tau} \leq c'\,\|\hat{v}\|^2_{L^2(\hat{e})},$$

et

$$\|\hat{\psi}_e^{\frac{1}{2}}\hat{v}\|_{H^1(\hat{e})} \leq c'\,\|\hat{v}\|_{L^2(\hat{e})}.$$

Preuve. Puisque $\hat{\psi}_e$ ne s'annule pas sur $\hat{e}$, $\|\hat{\psi}_e^{\frac{1}{2}}\hat{v}\|_{L^2(\hat{e})}$ et $\|\hat{\psi}_e^{\frac{1}{2}}\hat{v}\|_{H^1(\hat{e})}$ sont des normes sur $\hat{P}(\hat{e})$ qui est de dimension finie. On conclut grâce à l'équivalence des normes dans les espaces de dimension finie.

Proposition 2.2.8. *Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une famille régulière de triangulations sur $\overline{\Omega}$ et conforme dans le sens de la Définition 1.3.4. Alors pour tous $v_K \in \mathcal{P}_k(K)$ et $v_e \in \mathcal{P}_k(e)$, avec $e \in \mathcal{E}_K$, on a les inégalités suivantes :*

$$c\,\|v_K\|_{L^2(K)} \leq \|\psi_K^{\frac{1}{2}} v_K\|_{L^2(K)} \leq c'\,\|v_K\|_{L^2(K)}, \tag{2.7}$$

$$c\,\|v_e\|_{L^2(e)} \leq \|\psi_e^{\frac{1}{2}} v_e\|_{L^2(e)} \leq c'\,\|v_e\|_{L^2(e)}. \tag{2.8}$$

Preuve. On commence par montrer la première inégalité. Pour toute fonction $\psi_K v_K$ égale à $\hat{\psi}_K \hat{v}_K \circ F_K^{-1}$ continue sur K, on a

$$\int_K (\psi_K v_K^2)(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_{\hat{K}} (\hat{\psi}_K \hat{v}_K^2)(\hat{\boldsymbol{x}}) |\det A_K|\, d\hat{\boldsymbol{x}}.$$

D'après le Lemme 2.2.6, on trouve

$$c\,|\det A_K| \int_{\hat{K}} \hat{v}_K^2(\hat{\boldsymbol{x}})\, d\hat{\boldsymbol{x}} \leq \int_K (\psi_K v_K^2)(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \leq c'\,|\det A_K| \int_{\hat{K}} \hat{v}_K^2(\hat{\boldsymbol{x}})\, d\hat{\boldsymbol{x}},$$

en effectuant encore le changement de variable $\boldsymbol{x} = F_K(\hat{\boldsymbol{x}})$, on obtient

$$c\ \|v_K\|^2_{L^2(K)} \leq \|\psi_K^{\frac{1}{2}} v_K\|^2_{L^2(K)} \leq c'\ \|v_K\|^2_{L^2(K)}.$$

La deuxième inégalité se démontre par les mêmes arguments. Pour toute fonction $\psi_e v_e$ égale à $\hat{\psi}_e \hat{v}_e \circ F_K^{-1}$ continue sur e, on a

$$\int_e (\psi_e v_e^2)(\tau)\ d\tau = \int_{\hat{e}} (\hat{\psi}_e \hat{v}_e^2)(\hat{\tau}) |\det A_K|\ d\hat{\tau}.$$

D'après le Lemme 2.2.7, on trouve

$$c\ |\det A_K| \int_{\hat{e}} \hat{v}_e^2(\hat{\tau})\ d\hat{\tau} \leq \int_e (\psi_e v_e^2)(\tau)\ d\tau \leq c'\ |\det A_K| \int_{\hat{e}} \hat{v}_e^2(\hat{\tau})\ d\hat{\tau},$$

en effectuant encore le changement de variable $\tau = F_K(\hat{\tau})$, on obtient

$$c\ \|v_e\|^2_{L^2(e)} \leq \|\psi_e^{\frac{1}{2}} v_e\|^2_{L^2(e)} \leq c'\ \|v_e\|^2_{L^2(e)}.$$

Ceci termine la démonstration.

Lemme 2.2.9. *Soit F_K une transformation affine bijective du d-simplexe de référence $\hat{K}$ sur un d-simplexe K. Pour tout entier positif ou nul m, une fonction v appartient à $H^m(K)$ si et seulement si la fonction $\hat{v} = v \circ F_K$ appartient à $H^m(\hat{K})$. En outre, il existe une constante $\hat{c}$ telle que l'on ait les estimations suivantes*

$$\forall v \in H^m(K), \quad |\hat{v}|_{H^m(\hat{K})} \leq \hat{c}\ h_K^m\ \rho_K^{-\frac{d}{2}} |v|_{H^m(K)}, \tag{2.9}$$

$$\forall \hat{v} \in H^m(\hat{K}), \quad |v|_{H^m(K)} \leq \hat{c}\ h_K^{\frac{d}{2}}\ \rho_K^{-m} |\hat{v}|_{H^m(\hat{K})}. \tag{2.10}$$

Preuve. On démontre la première inégalité par récurrence sur m :

1. pour $m = 0$, on a

$$\|\hat{v}\|^2_{L^2(\hat{K})} = \int_{\hat{K}} |\hat{v}(\hat{\boldsymbol{x}})|^2 d\hat{\boldsymbol{x}} = |\det A_K|^{-1} \int_K |v(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x} = |\det A_K|^{-1} \|v\|^2_{L^2(K)}.$$

   On a du Lemme 2.2.1,

$$|\det A_K^{-1}| \leq c'\ \frac{\hat{h}^d}{\rho_K^d},$$

   on trouve

$$\|\hat{v}\|_{L^2(\hat{K})} \leq \hat{c}\ \rho_K^{-\frac{d}{2}} \|v\|_{L^2(K)}.$$

2. On suppose l'inégalité vraie pour $m - 1$

$$|\hat{v}|_{H^{m-1}(\hat{K})} \leq \hat{c}\ h_K^{m-1}\ \rho_K^{-\frac{d}{2}} |v|_{H^{m-1}(K)}.$$

On a

$$
\begin{aligned}
|\hat{v}|_{H^m(\hat{K})} &= \left(\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha \hat{v}\|^2_{L^2(\hat{K})} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{d} \sum_{|\beta|=m-1} \|\partial_{\hat{x}_i}(\partial^\beta \hat{v})\|^2_{L^2(\hat{K})} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{d} |\partial_{\hat{x}_i} \hat{v}|^2_{H^{m-1}(\hat{K})} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c \sum_{i=1}^{d} |\partial_{\hat{x}_i} \hat{v}|_{H^{m-1}(\hat{K})},
\end{aligned}
$$

et de l'hypothèse de récurrence

$$
|\hat{v}|_{H^m(\hat{K})} \leq \hat{c}\, h_K^{m-1}\, \rho_K^{-\frac{d}{2}} \sum_{i=1}^{d} |(\partial_{\hat{x}_i} \hat{v}) \circ F_K^{-1}|_{H^{m-1}(K)}.
$$

On observe que, si l'on note A_{ij}, $1 \leq i, j \leq d$, les coefficients de la matrice A_K,

$$
(\partial_{\hat{x}_i} \hat{v}) \circ F_K^{-1} = \sum_{j=1}^{d} A_{ji} \frac{\partial v}{\partial x_j},
$$

on obtient

$$
|\hat{v}|_{H^m(\hat{K})} \leq \hat{c}\, h_K^{m-1}\, \rho_K^{-\frac{d}{2}} \|A_K\| \sum_{i=1}^{d} |\partial_{x_i} v|_{H^{m-1}(K)}.
$$

Du Lemme 2.2.2 on a $\|A_K\| \leq \frac{h_K}{\hat{\rho}}$, d'où l'estimation (2.9).

l'inégalité (2.10) s'obtient par les mêmes arguments que pour l'inégalité (2.9). On démontre par récurrence sur m.

1. pour $m = 0$, on a grâce au Lemme 2.2.1

$$
\|v\|^2_{L^2(K)} = |\det A_K| \|\hat{v}\|^2_{L^2(\hat{K})} \leq \hat{c}\, h_K^{\frac{d}{2}} \|\hat{v}\|_{L^2(\hat{K})}.
$$

2. On suppose l'inégalité vraie pour $m - 1$

$$
|v|_{H^{m-1}(K)} \leq \hat{c}\, h_K^{\frac{d}{2}}\, \rho_K^{-m+1} |\hat{v}|_{H^{m-1}(\hat{K})}.
$$

On a de l'hypothèse de récurrence

$$
\begin{aligned}
|v|_{H^m(K)} &\leq c \sum_{i=1}^{d} |\partial_{x_i} v|_{H^{m-1}(K)} \\
&\leq \hat{c}\, h_K^{\frac{d}{2}}\, \rho_K^{-m+1} \sum_{i=1}^{d} |(\partial_{x_i} v) \circ F_K|_{H^{m-1}(\hat{K})}.
\end{aligned}
$$

On observe que, si l'on note B_{ij}, $1 \leq i, j \leq d$, les coefficients de la matrice A_K^{-1},

$$(\partial_{x_i} v) \circ F_K = \sum_{j=1}^{d} B_{ji} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}_j},$$

on obtient

$$|v|_{H^m(K)} \leq \hat{c}\, h_K^{\frac{d}{2}}\, \rho_K^{-m+1} \|A_K^{-1}\| \sum_{i=1}^{d} |\partial_{\hat{x}_i} \hat{v}|_{H^{m-1}(\hat{K})}.$$

Du Lemme 2.2.2 on a $\|A_K^{-1}\| \leq \frac{\hat{h}}{\rho_K}$, on trouve l'estimation cherchée.

Proposition 2.2.10. *Pour tout entier m positif ou nul, il existe une constante c ne dépendant que de k telle que l'on ait pour tout d-simplexe K*

$$\forall v \in \mathcal{P}_k(K), \quad |v|_{H^m(K)} \leq c\, \rho_K^{-m-\frac{d}{2}}\, h_K^{\frac{d}{2}} \|v\|_{L^2(K)}. \tag{2.11}$$

Preuve. En posant $\hat{v} = v \circ F_K$, d'après le Lemme 2.2.9, on a

$$\forall v \in \mathcal{P}_k(K), \quad |v|_{H^m(K)} \leq \hat{c}\, h_K^{\frac{d}{2}}\, \rho_K^{-m} |\hat{v}|_{H^m(\hat{K})}.$$

Sur l'espace de dimension finie toutes les normes sont équivalentes. Il existe donc une constante $\hat{c}$ ne dépendant que de k et de $\hat{K}$ telle que

$$|\hat{v}|_{H^m(\hat{K})} \leq \|\hat{v}\|_{H^m(\hat{K})} \leq \hat{c}\, \|\hat{v}\|_{L^2(\hat{K})}.$$

donc

$$|v|_{H^m(K)} \leq \hat{c}\, h_K^{\frac{d}{2}}\, \rho_K^{-m} |\hat{v}|_{H^m(\hat{K})} \leq c\, h_K^{\frac{d}{2}}\, \rho_K^{-m} \|\hat{v}\|_{L^2(\hat{K})}.$$

On utilise de nouveau le Lemme 2.2.9,

$$\|\hat{v}\|_{L^2(\hat{K})} \leq \hat{c}\, \rho_K^{-\frac{d}{2}} \|v\|_{L^2(K)},$$

on trouve

$$|v|_{H^m(K)} \leq c'\, \rho_K^{-m}\, \rho_K^{-\frac{d}{2}}\, h_K^{\frac{d}{2}} \|v\|_{L^2(K)}.$$

D'où le résultat cherché.

Corollaire 2.2.11. *On suppose la triangulation $\mathcal{T}_h$ régulière dans le sens de la Définition 1.3.5. Pour tout entier m positif ou nul, il existe une constante c ne dépendant que de k telle que l'on ait pour tout d-simplexe K*

$$\forall v \in \mathcal{P}_k(K), \quad |v|_{H^m(K)} \leq c\, h_K^{-m} \|v\|_{L^2(K)}. \tag{2.12}$$

Preuve. En vertu de la Définition 1.3.5, il existe $c > 0$ tel que $\dfrac{h_K}{\rho_K} \leq c$. De façon équivalente

$$\frac{1}{\rho_K} \leq \frac{c}{h_K} \quad \text{ou encore} \quad \frac{1}{\rho_K^{m+\frac{d}{2}}} \leq \frac{c^{m+\frac{d}{2}}}{h_K^{m+\frac{d}{2}}}.$$

On combine cette inégalité avec (2.11), on obtient l'estimation désirée.

Chapitre 3

Analyse a posteriori du problème de Dirichlet pour le laplacien

Par analogie au Chapitre 2, on s'intéresse ici à l'analyse a posteriori de l'équation de Laplace muni aux conditions aux limites de Dirichlet.

Sur un ouvert borné lipschitzien Ω de $\mathbb{R}^d$, on considère le problème de Dirichlet pour l'opérateur de Laplace $\Delta = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

où l'inconnue est la fonction u. Les données sont les fonctions f et g.

3.1 Formulation variationnelle

On considère la distribution f dans $H^{-1}(\Omega)$ et la donnée sur la frontière g dans $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Grâce au théorème de trace Théorème 1.1.3 pour $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ on peut trouver un relèvement de cette trace que l'on note $\overline{g}$ de $H^1(\Omega)$, il vérifie donc par définition $\gamma_0\overline{g} = g$.

Proposition 3.1.1. *Le problème* (3.1) *admet la formulation variationnelle suivante :*

Trouver u dans $H^1(\Omega)$, avec $u - \overline{g}$ dans $H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla u(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla v(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} =< f, v >, \tag{3.2}$$

où $< \cdot, \cdot >$ désigne les crochets de dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$.

Preuve. En prenant comme nouvelle fonction inconnue $\widetilde{u} = u - \overline{g}$, nous voyons que $\widetilde{u}$ est solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta\widetilde{u} = f + \Delta\overline{g} & \text{dans } \Omega, \\ \widetilde{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.3}$$

Par construction, $\widetilde{u} \in H_0^1(\Omega)$, on multiplie la première ligne de (3.3) par une fonction test v de $H_0^1(\Omega)$, on voit que

$$< -\Delta\widetilde{u}, v >=< f + \Delta\overline{g}, v >=< f, v > + < \Delta\overline{g}, v > .$$

Grâce au Lemme 1.1.5, on trouve

$$\int_\Omega \nabla\widetilde{u}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla v(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} =< f, v > - \int_\Omega \nabla\overline{g}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla v(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x},$$

finalement, on rajoute le dernier terme du membre de droite dans les deux membres on obtient le problème variationnel (3.2).

Nous vérifions que la formulation variationnelle (3.2) admet une solution unique. Pour cela nous utilisons le Lemme de Lax-Milgram dont nous vérifions les hypothèses avec les notations

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla v(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \quad \text{et} \quad L(v) =< f, v > .$$

Théorème 3.1.2. *Pour toute distribution f de $H^{-1}(\Omega)$ et toute fonction g de $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ le problème* (3.1) *admet une solution unique u dans $H^1(\Omega)$. Cette solution vérifie*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c\, (\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}).$$

Preuve. Revenons au changement d'inconnu $\widetilde{u} = u - \overline{g}$. La fonction $\widetilde{u}$ appartient à $H_0^1(\Omega)$ et vérifie

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(\widetilde{u}, v) = L(v) - a(\overline{g}, v). \tag{3.4}$$

On voit facilement en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ et que $L(\cdot) - a(\overline{g}, \cdot)$ est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$. En vertu de l'inégalité de Poincaré-Friedrichs (1.2), la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est coercive dans $H_0^1(\Omega)$, c'est à dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$a(v, v) = \int_\Omega (\nabla v)^2(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \geq \alpha\, \|v\|^2_{H^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Comme $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, on peut conclure qu'il existe une unique solution $\widetilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ de

$$a(\widetilde{u}, v) = L(v) + < \Delta\overline{g}, v >,$$

ce qui implique l'existence et l'unicité de u dans $H^1(\Omega)$ solution de (3.2). En prenant v égale à $\widetilde{u}$ dans (3.4), on déduit que

$$\|\widetilde{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha}\,(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\overline{g}\|_{H^1(\Omega)}).$$

On a $\overline{g}$ est une fonction de $H^1(\Omega)$ dont la trace sur $\partial\Omega$ coïncide avec g et vérifie

$$\|\overline{g}\|_{H^1(\Omega)} \leq c\,\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}.$$

On combine ces deux dernières inégalités on voit que

$$\|\widetilde{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq c\,(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}).$$

Finalement, grâce à l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c\,(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}).$$

Ceci achève la démonstration.

On peut interpréter le problème variationnel et retourner au problème aux limites.

Proposition 3.1.3. *Le problème variationnel* (3.2) *et le problème aux limites* (3.1) *sont équivalents au sens où*

(i) toute solution u dans $H^1(\Omega)$ de (3.1) *est solution de* (3.2).

(ii) toute solution u de (3.2) *est solution de* (3.1) *au sens des distributions.*

Preuve. (i) est déjà démontré dans la Proposition 3.1.1. Pour prouver (ii), on prend $v \in D(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ dans (3.2), en appliquant la formule (1.5), on obtient

$$< -\Delta u, v >=< f, v >, \quad \forall v \in D(\Omega).$$

Ce qui implique que $-\Delta u = f$ au sens des distributions. Comme $\widetilde{u} = u - \overline{g} \in H_0^1(\Omega)$ ce qui veut dire que $\widetilde{u} = 0$ sur le bord de Ω, on en déduit que $u = g$ sur $\partial\Omega$.

3.2 Analyse a posteriori du problème de Dirichlet

Dans ce qui suit, le domaine Ω dans le quel on travaille est soit un polygone de $\mathbb{R}^2$ soit un polyèdre de $\mathbb{R}^3$ à frontière lipschitzienne. On considère une famille régulière de triangulations $(\mathcal{T}_h)_h$ de Ω par des triangles ou tétraèdres, au sens indiqué dans la Section 1.3. Le paramètre de discrétisation est le maximum h des diamètres des éléments de $\mathcal{T}_h$.

3.2.1 Condition aux limites homogènes

Désormais on traitera le cas de conditions aux limites homogènes où la valeur de g sur la frontière est nulle et on suppose f dans $L^2(\Omega)$.

3.2.1.1 Discrétisation par éléments finis

On s'intéresse à la discrétisation par éléments finis du problème variationnel :

Trouver u dans $H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u,v) = \int_\Omega f(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}. \tag{3.5}$$

On introduit l'espace

$$X_h = \{v_h \in H^1(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, v_{h|K} \in \mathcal{P}_k(K)\}$$

et on considère l'espace $X_h^0 = X_h \cap H_0^1(\Omega)$, l'espace des fonctions de X_h à trace nulle sur $\partial\Omega$. Le problème discret suivant est simplement construit par la méthode de Galerkin qui consiste à remplacer $H_0^1(\Omega)$ par X_h^0 :

Trouver u_h dans X_h^0 tel que

$$\forall v_h \in X_h^0, \quad a(u_h, v_h) = L(v_h). \tag{3.6}$$

Théorème 3.2.1. *Pour toute fonction f dans $L^2(\Omega)$, le problème admet une solution unique. De plus, cette solution vérifie*

$$\|u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c\, \|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.7}$$

telle que c est une constante positive indépendante de h.

Preuve. Vu que X_h^0 est un sous espace de dimension finie de $H_0^1(\Omega)$, il est fermé muni du produit scalaire de $H_0^1(\Omega)$, X_h^0 est un espace de Hilbert. La restriction de la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ à $X_h^0 \times X_h^0$ est continue et coercive, et la restriction de $L(\cdot)$ à X_h^0 est linéaire et continue. D'après le Lemme de Lax-Milgram on a l'existence et l'unicité de u_h. Pour montrer (3.7) on prend v_h égal à u_h dans la formulation variationnelle (3.6) et on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\|\nabla u_h\|^2_{L^2(\Omega)^d} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Grâce à l'inégalité de Poincaré-Friedrichs (1.2) on déduit l'inégalité (3.7).

3.2.1.2 Analyse d'erreur a priori

On prouve dans cette section le résultat fondamental pour l'estimation de l'erreur a priori.

Lemme 3.2.2. ***(Lemme de Céa)*** *On a la majoration d'erreur a priori entre la solution u du problème* (3.5) *et la solution u_h du problème* (3.6)

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in X_h^0} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)},$$

où M et α sont les quantités qui interviennent de la continuité et la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$.

Preuve. on prend v égal à v_h dans (3.5) on déduit en soustrayant (3.6) de (3.5) la relation appelée relation d'orthogonalité de Galerkin

$$a(u - u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in X_h^0.$$

Puisque $a(\cdot, \cdot)$ est coercive, il en résulte

$$\begin{aligned} \alpha \, \|u - u_h\|^2_{H^1(\Omega)} &\leq a(u - u_h, u - u_h) \\ &\leq a(u - u_h, u) - a(u - u_h, u_h), \quad \forall v_h \in X_h^0. \end{aligned}$$

On a $a(u - u_h, u_h)$ égal à 0 car $u_h \in X_h^0$, donc

$$\begin{aligned} \alpha \, \|u - u_h\|^2_{H^1(\Omega)} &\leq a(u - u_h, u) - a(u - u_h, v_h) \\ &\leq a(u - u_h, u - v_h), \quad \forall v_h \in X_h^0. \end{aligned}$$

La continuité de $a(\cdot, \cdot)$ implique que

$$\alpha \, \|u - u_h\|^2_{H^1(\Omega)} \leq M \, \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall v_h \in X_h^0.$$

Par conséquent,

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha} \, \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall v_h \in X_h^0,$$

et donc

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in X_h^0} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ceci termine la preuve.

Théorème 3.2.3. *On suppose la solution u du problème* (3.5) *dans $H^m(\Omega)$ pour un entier m, $1 \leq m \leq k + 1$. Alors, pour le problème discret* (3.6)*, on a la majoration d'erreur*

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c \, h^{m-1} \|u\|_{H^m(\Omega)}. \tag{3.8}$$

Preuve. D'après le Lemme de Céa (Lemme 3.2.2)

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall v_h \in X_h^0.$$

On choisit v_h l'image de u par l'opérateur de projection orthogonale $\Pi_h^{1,0}$ sur X_h^0 donné dans la Notation 1.4.4 et vérifiant (1.9),

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha} \|u - \Pi_h^{1,0} u\|_{H^1(\Omega)} \leq c\, h^{m-1} \|u\|_{H^m(\Omega)}.$$

3.2.1.3 Analyse d'erreur a posteriori

On rappelle que grâce à la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \sup_{v \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{a(u - u_h, v)}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}. \tag{3.9}$$

D'après le principe énoncé dans la section 2.1, nous allons chercher à éliminer u dans la borne supérieure de (3.9).
On a la relation d'orthogonalité de Galerkin suivante

$$a(u - u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in X_h^0,$$

et donc, pour toutes fonctions $v \in H_0^1(\Omega)$ et $v_h \in X_h^0$

$$a(u - u_h, v) = a(u - u_h, v - v_h). \tag{3.10}$$

De l'égalité (3.10) et la définition de $a(\cdot,\cdot)$

$$\begin{aligned} a(u - u_h, v) = (\nabla(u - u_h), \nabla(v - v_h)) &= (\nabla u, \nabla(v - v_h)) - (\nabla u_h, \nabla(v - v_h)) \\ &= (f, v - v_h) - (\nabla u_h, \nabla(v - v_h)). \end{aligned} \tag{3.11}$$

À cette étape une première idée importante est à retenir : l'élimination de la solution exacte u dans (3.11). Maintenant on fait une décomposition sur les éléments de la triangulation $\mathcal{T}_h$:

$$a(u - u_h, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K f(\boldsymbol{x})(v - v_h)(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} - \int_K \nabla u_h(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla(v - v_h)(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \right). \tag{3.12}$$

On applique la formule de Green (1.4) sur le deuxième terme du membre de droite pour obtenir

$$a(u - u_h, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K (f + \Delta u_h)(\boldsymbol{x})(v - v_h)(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} - \int_{\partial K} \frac{\partial u_h}{\partial \boldsymbol{n}_K}(\tau)(v - v_h)(\tau)\, d\tau \right). \tag{3.13}$$

Où $\boldsymbol{n}_K$ désigne le vecteur normal unitaire extérieur à K.
À cette étape, une seconde idée importante est à retenir : l'application de la formule de Green à $\int_K \nabla u_h \cdot \nabla(v - v_h)\, d\boldsymbol{x}$ dans l'équation (3.12) pour éliminer l'opérateur gradient "∇" agissant sur $(v - v_h)$.

Dans (3.13), l'intégrale sur ∂K peut s'écrire comme une somme d'intégrales sur les éléments e de $\mathcal{E}_K$. On note que ces éléments se répartissent en deux parties :
• ou bien e est contenu dans $\partial\Omega$ et l'intégrale sur e est nulle car v et v_h s'annulent sur $\partial\Omega$;
• ou bien e est contenu dans la frontière de deux éléments K et K' et, au total, la quantité à intégrer sur e dans le second membre de (3.13) s'écrit

$$(\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h)(\tau)(v - v_h)(\tau) + (\partial_{\boldsymbol{n}_{K'}} u_h)(\tau)(v - v_h)(\tau) = [\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h](\tau)(v - v_h)(\tau), \tag{3.14}$$

où $[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h]$ désigne le saut $\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h + \partial_{\boldsymbol{n}_{K'}} u_h$. Les relations (3.13) et (3.14) conduisent à

$$a(u - u_h, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K (f + \Delta u_h)(\boldsymbol{x})(v - v_h)(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K^0} \int_e [\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h](\tau)(v - v_h)(\tau)\, d\tau \right). \tag{3.15}$$

À partir de cette équation, on peut majorer l'erreur en fonction de normes appropriées de $f + \Delta u_h$ et de $[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h]$. Une difficulté est que, la fonction f pouvant être compliquée, la norme de $f + \Delta u_h$ n'est pas forcément simple à calculer. Pour remédier à cet inconvénient, on fixe un entier $\ell \geq 0$, on introduit l'espace

$$Z_h = \{t_h \in L^2(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, t_{h|K} \in \mathcal{P}_\ell(K)\},$$

et on introduit une approximation f_h de la donnée f dans Z_h.

$$\begin{aligned} a(u - u_h, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Bigg(& \int_K (f - f_h)(\boldsymbol{x})(v - v_h)(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} + \int_K (f_h + \Delta u_h)(\boldsymbol{x})(v - v_h)(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \\ & - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K^0} \int_e [\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h](\tau)(v - v_h)(\tau)\, d\tau \Bigg). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Définition 3.2.1. *On définit la famille d'indicateurs d'erreur de la façon suivante, pour tout K dans $\mathcal{T}_h$,*

$$\eta_K = h_K \|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K^0} h_e^{\frac{1}{2}} \|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h]\|_{L^2(e)}. \tag{3.17}$$

Remarque 3.2.1. *Dans le cas où k est égal à 1, on aura tendance à prendre ℓ égal à zéro. Dans ce cas l'indicateur s'écrit simplement*

$$\eta_K = h_K (mes\, K)^{\frac{1}{2}} |f_{h|K}| + \frac{1}{2}\, h_e^{\frac{1}{2}} (mes\, e)^{\frac{1}{2}} |[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h]_{|e}|,$$

et se calcule de façon instantanée.

On est alors en mesure de prouver l'estimation a posteriori suivante.

Théorème 3.2.4. *On suppose la donnée f du problème* (3.5) *dans $L^2(\Omega)$. Alors, pour le problème discret* (3.6)*, il existe une constante positive c indépendante de h telle qu'on ait la majoration d'erreur*

$$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left(\eta_K^2+h_K^2\|f-f_h\|^2_{L^2(K)}\right)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.18}$$

Preuve. Pour tout $v\in H_0^1(\Omega)$ et tout v_h *dans* X_h^0, on utilise l'équation (3.16), combinée avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} a(u-u_h,v) \leq \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\Bigg(&\left(\|f-f_h\|_{L^2(K)}+\|f_h+\Delta u_h\|_{L^2(K)}\right)\|v-v_h\|_{L^2(K)} \\ &+\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_K^0}\|[\partial_{\boldsymbol{n}_K}u_h]\|_{L^2(e)}\|v-v_h\|_{L^2(e)}\Bigg). \end{aligned}$$

Puis on choisit v_h égal à l'image de v par l'opérateur $\tilde{\Pi}_h^0$ et on utilise le théorème 1.4.7, on trouve

$$\|v-\tilde{\Pi}_h^0 v\|_{L^2(K)} \leq c\, h_K\|v\|_{H^1(\Delta_K)},$$

et le corollaire 1.4.8, on obtient

$$\|v-\tilde{\Pi}_h^0 v\|_{L^2(e)} \leq c\, h_e^{\frac{1}{2}}\|v\|_{H^1(\Delta_e)}.$$

Donc

$$\begin{aligned} a(u-u_h,v) \leq c\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\Bigg(&h_K\left(\|f-f_h\|_{L^2(K)}+\|f_h+\Delta u_h\|_{L^2(K)}\right)\|v\|_{H^1(\Delta_K)} \\ &+\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_K^0}h_e^{\frac{1}{2}}\|[\partial_{\boldsymbol{n}_K}u_h]\|_{L^2(e)}\|v\|_{H^1(\Delta_e)}\Bigg), \end{aligned}$$

où les Δ_K et Δ_e sont introduits dans la Notation 1.4.6. Par une inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} a(u-u_h,v) \leq c&\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}h_K^2\left(\|f-f_h\|_{L^2(K)}+\|f_h+\Delta u_h\|_{L^2(K)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|v\|^2_{H^1(\Delta_K)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &+\left(\frac{1}{4}\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\sum_{e\in\mathcal{E}_K^0}h_e\|[\partial_{\boldsymbol{n}_K}u_h]\|^2_{L^2(e)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\sum_{e\in\mathcal{E}_K^0}\|v\|^2_{H^1(\Delta_e)}\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

et comme

$$\left(\|f-f_h\|_{L^2(K)}+\|f_h+\Delta u_h\|_{L^2(K)}\right)^2 \leq 2\left(\|f-f_h\|^2_{L^2(K)}+\|f_h+\Delta u_h\|^2_{L^2(K)}\right).$$

On obtient,

$$a(u-u_h,v) \leq c\Bigg(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\big(h_K^2\|f_h+\Delta u_h\|^2_{L^2(K)}+h_K^2\|f-f_h\|^2_{L^2(K)} \\ +\frac{1}{4}\sum_{e\in\mathcal{E}_K^0}h_e\|[\partial_{\boldsymbol{n}_K}u_h]\|^2_{L^2(e)}\big)\Bigg)^{\frac{1}{2}}\Bigg(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|v\|^2_{H^1(\Delta_K)}\Bigg)^{\frac{1}{2}},$$

et en rappelant qu'un même élément de $\mathcal{T}_h$ n'est contenu que dans un nombre fini (borné indépendamment de h) de Δ_K, on obtient alors

$$a(u-u_h,v) \leq c\Bigg(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\big(\eta_K^2+h_K^2\|f-f_h\|^2_{L^2(K)}\big)\Bigg)^{\frac{1}{2}}\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

En combinant cette estimation avec (3.9), on obtient la majoration cherchée.

La majoration (3.18) conforme également la propriété de fiabilité énoncé dans (2.3). Pour prouver la propriété d'efficacité, on s'appuie sur l'équation dite du "résidu" qui s'obtient en prenant v_h égal à 0 dans (3.16)

$$\forall v\in H_0^1(\Omega),\quad a(u-u_h,v)=\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\Bigg(\int_K(f-f_h)(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \\ +\int_K(f_h+\Delta u_h)(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \\ -\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_K^0}\int_e[\partial_{n_K}u_h](\tau)v(\tau)d\tau\Bigg). \tag{3.19}$$

En effet, par deux choix appropriés de la fonction v, on peut déduire de cette équation une majoration des deux termes figurant dans chaque η_K. On a besoin de la notation suivante.

Notation 3.2.5. *Pour tout élément K de $\mathcal{T}_h$, ω_K désigne l'union des éléments de $\mathcal{T}_h$ qui partagent au moins un côté ($d=2$) ou une face ($d=3$) avec K.*

Théorème 3.2.6. *On suppose la donnée f du problème (3.5) dans $L^2(\Omega)$. Pour tout élément K de $\mathcal{T}_h$, l'indicateur d'erreur η_K défini en (3.17) vérifie la majoration suivante*

$$\eta_K \leq c\,\big(|u-u_h|_{H^1(\omega_K)}+h_K\|f-f_h\|_{L^2(\omega_K)}\big). \tag{3.20}$$

Preuve. On prouve la majoration en deux étapes

1. Dans une première étape, on choisit tout d'abord la fonction v dans (3.19) égale à

$$v_K=\begin{cases}(f_h+\Delta u_h)\psi_K & \text{dans } K,\\ 0 & \text{dans } \Omega\setminus K,\end{cases} \tag{3.21}$$

tel que ψ_K est la fonction bulle introduit dans la Définition 2.2.6. On note que la fonction v_K est à support contenu dans K et s'annule sur ∂K et donc $\int_e [\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h](\tau) v_K(\tau) d\tau$ égale à 0. On en déduit de (3.19) que

$$a(u-u_h, v_K) = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \left(\int_K (f-f_h)(\boldsymbol{x}) v_K(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} + \int_K (f_h + \Delta u_h)(\boldsymbol{x}) v_K(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \right).$$

Donc

$$\int_K (f_h+\Delta u_h)(\boldsymbol{x}) v_K(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \int_K \nabla(u-u_h)(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla v_K(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} - \int_K (f-f_h)(\boldsymbol{x}) v_K(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}.$$

On écrit explicitement v_K dans le membre de gauche,

$$\int_K (f_h+\Delta u_h)^2(\boldsymbol{x}) \psi_K(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \int_K \nabla(u-u_h)(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla v_K(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} - \int_K (f-f_h)(\boldsymbol{x}) v_K(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x},$$

et en passant à la norme de $L^2(K)$, on obtient

$$\|(f_h + \Delta u_h)\psi_K^{\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(K)} = \int_K \nabla(u-u_h)(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla v_K(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} - \int_K (f-f_h)(\boldsymbol{x}) v_K(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne

$$\|(f_h + \Delta u_h)\psi_K^{\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(K)} \leq |u-u_h|_{H^1(K)} |v_K|_{H^1(K)} + \|f-f_h\|_{L^2(K)} \|v_K\|_{L^2(K)},$$

On utilise l'inégalité inverse (2.7)

$$c\, \|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K)} \leq \|(f_h + \Delta u_h)\psi_K^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(K)},$$

et donc

$$c\, \|(f_h + \Delta u_h)\|^2_{L^2(K)} \leq |u-u_h|_{H^1(K)} |v_K|_{H^1(K)} + \|f-f_h\|_{L^2(K)} \|v_K\|_{L^2(K)}.$$

Encore une fois l'inégalité inverse (2.12)

$$|v_K|_{H^1(K)} \leq c\, h_K^{-1} \|v_K\|_{L^2(K)}.$$

En notant que la fonction ψ_K prend ses valeurs entre 0 et 1 sur K (voir Lemme 2.2.5), on en déduit

$$\|v_K\|_{L^2(K)} = \|(f_h + \Delta u_h)\psi_K\|_{L^2(K)} \leq c'\, \|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K)},$$

alors

$$|v_K|_{H^1(K)} \leq c\, h_K^{-1} \|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K)}.$$

On trouve

$$\begin{aligned} c\, \|(f_h + \Delta u_h)\|^2_{L^2(K)} \leq c\, h_K^{-1} |u-u_h|_{H^1(K)} \|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K)} \\ + c'\, \|f-f_h\|_{L^2(K)} \|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K)}, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K)} \leq c\,\big(h_K^{-1}|u - u_h|_{H^1(K)} + \|f - f_h\|_{L^2(K)}\big).$$

En multipliant cette dernière relation par h_K, on obtient

$$h_K\|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K)} \leq c\,\big(|u - u_h|_{H^1(K)} + h_K\|f - f_h\|_{L^2(K)}\big). \tag{3.22}$$

2. Dans une deuxième étape, pour tout élément e de $\mathcal{E}_K^0$, soit K' l'autre élément de $\mathcal{T}_h$ contenant e. On choisit ici la fonction v dans (3.19) égale à

$$v_e = \begin{cases} \mathcal{R}_{K,e}([\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h]\psi_e) & \text{dans } K, \\ \mathcal{R}_{K',e}([\partial_{\boldsymbol{n}_{K'}} u_h]\psi_e) & \text{dans } K', \\ 0 & \text{dans } \Omega \setminus (K \cup K'), \end{cases} \tag{3.23}$$

où les opérateurs $\mathcal{R}_{K,e}$ et $\mathcal{R}_{K',e}$ sont introduits dans le Lemme 1.3.5. En utilisant cette fonction dans (3.19), on voit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sum_{\kappa\in\{K,K'\}}\sum_{e\in\mathcal{E}_\kappa^0}\int_e [\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h](\tau)v_e(\tau)\,d\tau = -a(u-u_h, v_e) \\ + \sum_{\kappa\in\{K,K'\}}\bigg(\int_\kappa (f-f_h)(\boldsymbol{x})v_e(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \\ + \int_\kappa (f_h + \Delta u_h)(\boldsymbol{x})v_e(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\bigg). \end{aligned} \tag{3.24}$$

On a par définition de ψ_e, la fonction $[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h]\psi_e$ s'annule sur ∂e de sorte que v_e s'annule sur $\partial(K \cup K')$ et donc

$$\frac{1}{2}\sum_{\kappa\in\{K,K'\}}\sum_{e\in\mathcal{E}_\kappa^0}\int_e [\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h](\tau)v_e(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\int_e [\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h](\tau)v_e(\tau)\,d\tau.$$

On combine cette égalité avec (3.24), on obtient

$$\begin{aligned} \int_e [\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h]^2(\tau)\psi_e(\tau)\,d\tau = -a(u-u_h, v_e) \\ + \sum_{\kappa\in\{K,K'\}}\bigg(\int_\kappa (f-f_h)(\boldsymbol{x})v_e(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \\ + \int_\kappa (f_h + \Delta u_h)(\boldsymbol{x})v_e(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\bigg). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h]\psi_e^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(e)}^2 = \sum_{\kappa\in\{K,K'\}}\bigg(-\int_\kappa \nabla(u-u_h)(\boldsymbol{x})\nabla v_e(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \\ + \int_\kappa (f-f_h)(\boldsymbol{x})v_e(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \\ + \int_\kappa (f_h + \Delta u_h)(\boldsymbol{x})v_e(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\bigg). \end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h]\psi_e^{\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(e)} \leq \sum_{\kappa\in\{K,K'\}} \Big(|u-u_h|_{H^1(\kappa)}|v_e|_{H^1(\kappa)} + \|f-f_h\|_{L^2(\kappa)}\|v_e\|_{L^2(\kappa)} + \|f_h+\Delta u_h\|_{L^2(\kappa)}\|v_e\|_{L^2(\kappa)}\Big).$$

On utilise l'inégalité inverse (2.8),

$$c\,\|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h]\|_{L^2(e)} \leq \|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h]\psi_e^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(e)},$$

ce qui entraîne

$$c\,\|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h]\|^2_{L^2(e)} \leq \sum_{\kappa\in\{K,K'\}} \Big(|u-u_h|_{H^1(\kappa)}|v_e|_{H^1(\kappa)} + \|f-f_h\|_{L^2(\kappa)}\|v_e\|_{L^2(\kappa)} + \|f_h+\Delta u_h\|_{L^2(\kappa)}\|v_e\|_{L^2(\kappa)}\Big).$$

On utilise l'inégalité (1.6),

$$|v_e|_{H^1(\kappa)} + h_K^{-1}\|v_e\|_{L^2(\kappa)} \leq c\, h_e^{-\frac{1}{2}}\|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h]\psi_e\|_{L^2(e)}.$$

On obtient

$$\|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h]\|^2_{L^2(e)} \leq c \sum_{\kappa\in\{K,K'\}} \Big(h_e^{-\frac{1}{2}}|u-u_h|_{H^1(\kappa)}\|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h]\psi_e\|_{L^2(e)} + h_K h_e^{-\frac{1}{2}}\|f-f_h\|_{L^2(\kappa)}\|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h]\psi_e\|_{L^2(e)} + h_K h_e^{-\frac{1}{2}}\|f_h+\Delta u_h\|_{L^2(\kappa)}\|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h]\psi_e\|_{L^2(e)}\Big).$$

Du Lemme 2.2.5, ψ_e est inférieur à 1, on aura

$$\|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h]\psi_e\|_{L^2(e)} \leq c'\,\|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h]\|_{L^2(e)}.$$

On trouve

$$\|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h]\|^2_{L^2(e)} \leq c \sum_{\kappa\in\{K,K'\}} \Big(h_e^{-\frac{1}{2}}|u-u_h|_{H^1(\kappa)}\|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h]\|_{L^2(e)} + h_K h_e^{-\frac{1}{2}}\|f-f_h\|_{L^2(\kappa)}\|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h]\|_{L^2(e)} + h_K h_e^{-\frac{1}{2}}\|f_h+\Delta u_h\|_{L^2(\kappa)}\|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h]\|_{L^2(e)}\Big).$$

En multipliant par $h_e^{\frac{1}{2}}$, on obtient

$$h_e^{\frac{1}{2}}\|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h]\|_{L^2(e)} \leq c \sum_{\kappa\in\{K,K'\}} \Big(|u-u_h|_{H^1(\kappa)} + h_K\|f-f_h\|_{L^2(\kappa)} + h_K\|f_h+\Delta u_h\|_{L^2(\kappa)}\Big).$$

On passe à la somme sur e dans $\mathcal{E}_K^0$,

$$\sum_{e\in\mathcal{E}_K^0} h_e^{\frac{1}{2}} \|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h]\|_{L^2(e)} \leq c \sum_{e\in\mathcal{E}_K^0} \sum_{\kappa\in\{K,K'\}} \Big(|u-u_h|_{H^1(\kappa)} + h_K \|f-f_h\|_{L^2(\kappa)} + h_K \|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(\kappa)} \Big). \quad (3.25)$$

En combinant (3.22) et (3.25) et par définition de $\mathcal{E}_K^0$, κ devient tout élément K' qui partage une arrête $d=2$ (ou une face en $d=3$) avec K, ce qui revient à ω_K, on trouve l'estimation désirée.

Remarque 3.2.2. *Si l'on somme sur K le carré de l'égalité* (3.20) *on vérifie que la quantité*

$$\Big(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \eta_K^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

fournit une estimation a posteriori optimale au sens de la Définition 2.1.2. En outre, les η_K satisfont la propriété d'efficacité.

3.2.2 Condition aux limites non-homogène

On considère maintenant le problème (3.2) pour des données f dans $L^2(\Omega)$ et g dans $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ continue sur $\partial\Omega$.

3.2.2.1 Discrétisation par éléments finis

L'idée consiste à imposer $u_h(a) = g(a)$ en tous les points a des treillis principaux $T_k(K)$, $K \in \mathcal{T}_h$, qui appartiennent à $\partial\Omega$. Ceci revient à remplacer dans le problème discret, la fonction $\overline{g}$ par son interpolé de Lagrange $\mathcal{I}_h\overline{g}$. On suppose donc la fonction $\overline{g}$ continue sur $\overline{\Omega}$, le problème discret s'écrit

Trouver u_h dans X_h, avec $u_h - \mathcal{I}_h\overline{g}$ dans X_h^0, tel que

$$\forall v_h \in X_h^0, \qquad a(u_h, v_h) = \int_\Omega f(\boldsymbol{x}) v_h(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}. \quad (3.26)$$

Théorème 3.2.7. *Pour toute fonction f dans $L^2(\Omega)$ et toute fonction $\overline{g}$ continue sur $\overline{\Omega}$, le problème* (3.26) *admet une solution unique.*

Preuve. Si l'on choisit $\widetilde{u}_h$ égale à $u_h - \mathcal{I}_h\overline{g}$. $\widetilde{u}_h$ appartient à X_h^0 et vérifie

$$a(\widetilde{u}_h, v_h) = L(v_h) - a(\mathcal{I}_h\overline{g}, v_h), \qquad \forall v_h \in X_h^0. \quad (3.27)$$

L'existence d'une solution u_h se déduit donc du Lemme de Lax-Milgram. D'autre part, comme la seule solution pour les données $f = 0$ et $\overline{g} = 0$ est nulle, on obtient également l'unicité de u_h.

Soit W_h l'image de X_h par l'opérateur de trace γ_0 et soit $i_h^{\partial\Omega}$ l'opérateur d'interpolation de Lagrange sur $\partial\Omega$: pour toute fonction g continue sur $\partial\Omega$, $i_h^{\partial\Omega} g$ appartient à W_h et est égal à g en tous les points de $T_k(K) \cap \partial\Omega$, $K \in \mathcal{T}_h$.

Théorème 3.2.8. *Sous les hypothèses du Théorème 3.2.7 la solution u_h du problème* (3.26) *vérifie*

$$\|u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c\,(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|i_h^{\partial\Omega} g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}).$$

Preuve. En prenant v_h égale à $\widetilde{u}_h$ dans (3.27), on obtient

$$\alpha\, \|\widetilde{u}_h\|^2_{H^1(\Omega)} \leq a(\widetilde{u}_h, \widetilde{u}_h) \leq (\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\mathcal{I}_h \overline{g}\|_{H^1(\Omega)})\|\widetilde{u}_h\|_{H^1(\Omega)},$$

et comme $\widetilde{u}_h = u_h - \mathcal{I}_h \overline{g}$,

$$\|u_h - \mathcal{I}_h \overline{g}\|_{H^1(\Omega)} \leq c\,(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\mathcal{I}_h \overline{g}\|_{H^1(\Omega)}).$$

On remplace $\mathcal{I}_h \overline{g}$ par $\mathcal{R}_h(i_h^{\partial\Omega} g)$, on trouve

$$\|u_h - \mathcal{R}_h(i_h^{\partial\Omega} g)\|_{H^1(\Omega)} \leq c\,(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\mathcal{R}_h(i_h^{\partial\Omega} g)\|_{H^1(\Omega)}).$$

On utilise inégalité triangulaire et le Théorème 1.4.9, on obtient

$$\|u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c\,(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|i_h^{\partial\Omega} g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}).$$

Ceci achève la démonstration.

3.2.2.2 Analyse d'erreur a priori

On s'intéresse ensuite à majorer l'erreur entre u et u_h. Le lemme qui suit, est similaire au Lemme 3.2.2, connu sous le nom de Lemme de Céa [14].

Lemme 3.2.9. *On a la majoration d'erreur a priori suivante entre la solution u du problème* (3.2) *et la solution u_h du problème* (3.26)

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c \inf_{v_h \in \{\mathcal{I}_h \overline{g}\} + X_h^0} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}. \tag{3.28}$$

Preuve. On pose $\widetilde{u} = u - \overline{g}$, $\widetilde{u}_h = u_h - \mathcal{I}_h\overline{g}$ et, pour toute approximation v_h de u dans $\{\mathcal{I}_h\bar{g}\} + X_h^0$, on note $\widetilde{v}_h$ l'élément $v_h - \mathcal{I}_h\bar{g}$ de X_h^0. Grâce à l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} &\leq \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} + \|u_h - v_h\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} + \|\widetilde{u}_h - \widetilde{v}_h\|_{H^1(\Omega)},\end{aligned} \tag{3.29}$$

il suffit de majorer $\|\widetilde{u}_h - \widetilde{v}_h\|_{H^1(\Omega)}$. D'après la propriété de coercivité de $a(\cdot,\cdot)$, on a

$$\alpha\|\widetilde{u}_h - \widetilde{v}_h\|^2_{H^1(\Omega)} \leq a(\widetilde{u}_h, \widetilde{u}_h - \widetilde{v}_h) - a(\widetilde{v}_h, \widetilde{u}_h - \widetilde{v}_h).$$

On calcule le premier terme du membre de droite en utilisant le problème discret (3.26)

$$\alpha\|\widetilde{u}_h - \widetilde{v}_h\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \int_\Omega f(\boldsymbol{x})(\widetilde{u}_h - \widetilde{v}_h)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - a(\mathcal{I}_h\bar{g}, \widetilde{u}_h - \widetilde{v}_h) - a(\widetilde{v}_h, \widetilde{u}_h - \widetilde{v}_h).$$

On rappelle que $v_h = \widetilde{v}_h + \mathcal{I}_h\bar{g}$, donc

$$\alpha\|\widetilde{u}_h - \widetilde{v}_h\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \int_\Omega f(\boldsymbol{x})(\widetilde{u}_h - \widetilde{v}_h)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - a(v_h, \widetilde{u}_h - \widetilde{v}_h).$$

En notant que $\widetilde{u}_h - \widetilde{v}_h$ appartient à l'espace X_h^0 qui est inclus dans $H_0^1(\Omega)$, on a de (3.2)

$$a(u, \widetilde{u}_h - \widetilde{v}_h) = \int_\Omega f(\boldsymbol{x})(\widetilde{u}_h - \widetilde{v}_h)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.$$

Ceci donne

$$\alpha\|\widetilde{u}_h - \widetilde{v}_h\|^2_{H^1(\Omega)} \leq a(u, \widetilde{u}_h - \widetilde{v}_h) - a(v_h, \widetilde{u}_h - \widetilde{v}_h) = a(u - v_h, \widetilde{u}_h - \widetilde{v}_h).$$

En utilisant la propriété de continuité de $a(\cdot,\cdot)$, on obtient

$$\|\widetilde{u}_h - \widetilde{v}_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha}\|u - v_h\|_{H^1(\Omega)},$$

et en combinant cette inégalité avec (3.29), on obtient la majoration désirée.

Théorème 3.2.10. *On suppose la solution u du problème* (3.1) *dans $H^m(\Omega)$ pour un entier m, $\frac{d}{2} < m \leq k+1$. Alors, pour le problème discret* (3.26)*, on a la majoration d'erreur*

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c\, h^{m-1}\|u\|_{H^m(\Omega)}.$$

Preuve. On note X_h^g l'espace des fonctions de X_h égales à $i_h^{\partial\Omega}g$ sur $\partial\Omega$, on déduit de Lemme 3.2.9 que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c \inf_{v_h \in X_h^g}\|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}.$$

Comme la trace de $\mathcal{I}_h u$ sur $\partial\Omega$ coïncide avec $i_h^{\partial\Omega}g$, la fonction $\mathcal{I}_h u$ appartient à X_h^g, ceci entraîne

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c\, \|u - \mathcal{I}_h u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Grâce à la propriété (1.8) du Théorème 1.4.3, on obtient

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c\, h^{m-1} \|u\|_{H^m(\Omega)}.$$

On déduit la majoration d'erreur a priori.

Cette estimation d'erreur a priori est optimale.

3.2.2.3 Analyse d'erreur a posteriori

On est en mesure de prouver l'estimation d'erreur a posteriori suivante

Théorème 3.2.11. *On suppose la donnée f du problème* (3.5) *dans $L^2(\Omega)$, et la donnée g dans $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ continue sur $\partial\Omega$. Alors, pour le problème discret* (3.26)*, on a la majoration d'erreur*

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\eta_K^2 + h_K^2 \|f - f_h\|_{L^2(K)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} + c' \, \|g - i_h^{\partial\Omega} g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}. \tag{3.30}$$

Preuve. On a

$$\|\overline{g}\|_{H^1(\Omega)} \leq c \, \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}.$$

D'après le Théorème 1.1.3, il existe une fonction w de $H^1(\Omega)$ égale à $g - i_h^{\partial\Omega} g$ sur $\partial\Omega$ et vérifiant

$$\|w\|_{H^1(\Omega)} \leq c \, \|g - i_h^{\partial\Omega} g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}. \tag{3.31}$$

Par conséquent, la fonction $u - u_h - w$ appartient à $H_0^1(\Omega)$ et on déduit de la propriété d'ellipticité de la forme $a(\cdot, \cdot)$ que

$$\|u - u_h - w\|_{H^1(\Omega)} \leq c \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{a(u - u_h - w, v)}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}. \tag{3.32}$$

Comme

$$a(u - u_h - w, v) = a(u - u_h, v) - a(w, v),$$

et on a

$$|a(w, v)| \leq \|w\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

D'autre part, on utilise l'estimation (3.31) et le Théorème 3.2.4, on trouve

$$\|u - u_h - w\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\eta_K^2 + h_K^2 \|f - f_h\|_{L^2(K)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} + c \, \|g - i_h^{\partial\Omega} g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}.$$

Encore une fois l'inégalité triangulaire suivante :

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u - u_h - w\|_{H^1(\Omega)} + \|w\|_{H^1(\Omega)},$$

entraîne

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\eta_K^2 + h_K^2 \|f - f_h\|_{L^2(K)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} + c \, \|g - i_h^{\partial\Omega} g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \|w\|_{H^1(\Omega)}.$$

puis on utilise l'estimation (3.31), on obtient

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\eta_K^2 + h_K^2 \|f - f_h\|_{L^2(K)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} + c' \, \|g - i_h^{\partial\Omega} g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}.$$

D'où l'estimation cherchée.

La majoration de chaque indicateur η_K s'effectue exactement comme dans la démonstration du Théorème 3.2.6.

Théorème 3.2.12. *On suppose la donnée f du problème* (3.1) *dans $L^2(\Omega)$. Pour tout élément K de $\mathcal{T}_h$, l'indicateur d'erreur η_K défini en* (3.17) *vérifie la majoration suivante*

$$\eta_K \leq c \left(|u - u_h|_{H^1(\omega_K)} + h_K \|f - f_h\|_{L^2(\omega_K)} \right). \tag{3.33}$$

Preuve. De la définition de $a(\cdot, \cdot)$

$$\begin{aligned} a(u - u_h, v) &= (\nabla(u - u_h), \nabla v) \\ &= (\nabla u, \nabla v) - (\nabla u_h, \nabla v) \\ &= (f, v) - (\nabla u_h, \nabla v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{3.34}$$

Par les mêmes arguments effectués dans la section 3.2, on obtient la même équation du résidu (3.19) pour tout v dans $H_0^1(\Omega)$. Donc, la majoration des indicateurs s'effectue exactement comme dans la preuve du Théorème 3.2.6, en prenant $v = v_K$ dans un premier temps puis $v = v_e$ tel que v_K et v_e sont définis par (3.21) et (3.23).

En vertu du Théorème 3.2.11 et 3.2.12, l'analyse a posteriori est optimale au sens de la Définition 2.1.2.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'analyse a posteriori pour les éléments finis des EDP.
Tout d'abord, nous avons fourni une introduction à l'analyse a posteriori et nous avons donné les principes généraux et propriétés de l'analyse a posteriori qui attestent de sa qualité et les outils d'analyse notamment les fonctions bulles et inégalités inverses.
Ensuite, nous avons choisi d'étudier l'analyse d'erreur a posteriori de l'équation de Laplace munie aux conditions de Dirichlet. En effet, nous avons écrit le problème discret en utilisant la méthode des éléments finis et nous avons montré qu'il est bien posé. Puis nous avons établi l'estimation a priori de l'erreur entre les solutions des problèmes exacte et discret. Nous avons proposé une famille d'indicateurs d'erreur a posteriori du type résiduel. Nous avons démontré que l'analyse a posteriori de problème de Dirichlet dans les deux cas homogène et non-homogène est optimale.

Appendice

Définition 1.1 *Soit V un espace de Hilbert. Deux normes sur V sont dites équivalentes si est seulement si il existe $c, c' > 0$ tels que*

$$\forall v_1, v_2 \in V, \quad c \, \|v_1\|_V \leq \|v_2\|_V \leq c' \, \|v_1\|_V.$$

Proposition 1.1 *Soit V un espace de Hilbert. Si V est de dimension finie, alors toutes les normes sur V sont équivalentes.*

Théorème 1.2 ***(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*** *Soit V un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(.,.)_V$ et de la norme $\|.\|_V$. Pour tous u et v de V, on ait*

$$|(u, v)_V| \leq \|u\|_V \cdot \|v\|_V.$$

Proposition 1.3 *Soit K un triangle de $\mathbb{R}^2$ ou un tétraèdre de $\mathbb{R}^3$. On a $mes(K)$ est inférieur à $c_d h_K^d$ et supérieur à $c_d \rho_K^d$, où c_d est le volume de la sphère unité de $\mathbb{R}^d$ divisé par 2^d.*

Bibliographie

[1] R.A. Adams and J. Fournier. *Sobolev Spaces.* Academic Press, 2003.

[2] I. Babuska, R. Duŕan, and R. Rodriguez. *Analysis of the efficiency of an a posteriori error estimator for linear triangular finite elements.* SIAM J. Numer. Anal., 29 :947–964, 1992.

[3] I. Babuska and A. Miller. *A feedback finite element method with a posteriori error estimation : Part i. the finite element method and some basic properties of the a posteriori error estimator.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 61(1) :1–40, 1987.

[4] I. Babuska and W. C. Rheinboldt. *Error estimates for adaptative finite element computations.* SIAM J. Numer. Anal., 15 :736–754, 1978.

[5] I. Babuska and W. C. Rheinboldt. *A posteriori error estimates for the finite element method.* Int. J. Num. Meth. Engrg., 12 :1597–1615, 1978.

[6] R. Bank and K. Smith. *A posteriori estimates based on hierarchical bases.* SIAM J. Numer.Anal., 30 :921–935, 1993.

[7] R. Bank and A. Weiser. *Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations.* Math. Comp., 44 :283–301, 1985.

[8] R. Beck, R. Hiptmair, R. Hoppe, and B. Wohlmuth. *Residual based a posteriori error estimators for eddy current computation.* Math. Model. Numer.Anal., 34 :159–182, 2000.

[9] R. Becker and R. Rannacher. *An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods.* Acta numerica., 10 :1–102, 2001.

[10] C. Bernardi, Y. Maday, and F. Rapetti. *Discrétisations Variationnelles de Problèmes aux Limites Elliptiques.* volume 45 of Mathématiques & Applications. Springer-Verlag, Paris, 2004.

[11] C. Bernardi, B. Métivet, and R. Verfürth. *Analyse numérique d'indicateurs d'erreur.* Rapport technique, Université Paris 6, 1993.

[12] C. Bernardi and R. Verfürth. *Adaptive finite element methods for elliptic equations with non-smooth coefficients.* Numer. Math., 85 :579–608, 2000.

[13] M. Braack and A. Ern. *A posteriori control of modeling errors and discretization errors.* SIAM J. Multiscale Modeling and Simulation, 2 :221–238, 2003.

[14] J. Céa. *Approximation variationnelle des problèmes aux limites.* Ann. Inst. Fourier Grenoble, 14, 345-444, 1964.

[15] P. Clément. *Approximation by finite element functions using local regularization.* Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique, 9(R2), 77-84, 1975.

[16] R. Dautray and J.-L. Lions. *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques. Vol. 1.* Masson, Paris, 1987.

[17] P. Grisvard. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, volume 24 of *Monographs and Studies in Mathematics.* Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.

[18] F. Hecht. *Métriques et indicateurs d'erreur.* In cours maillage. Paris, INRIA, CEA, EDF, 2003.

[19] W. Houedanou. *Analyse d'erreur a posteriori pour quelques méthodes d'éléments finis mixtes pour le problème de transmission Stokes Darcy : Discrétisations isotrope et anisotrope.* Université d'Abomey-Calavi, thèse de Doctorat, 2015.

[20] P. D. Lax and A. N. Milgram. *Parabolic equations.* Contributions to the theory of partial differential equations, Annals of Mathematics Studies, no. 33, pages 167–190. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1954.

[21] J.-L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications, Vol. 1.* Dunod, Paris, 1968.

[22] L. Schwartz. *Théorie des Distributions.* Hermann, Paris, 1966.

[23] O. B. Widlund. *An extension theorem for finite element spaces with three applications.* In Numerical Techniques in Continuum Mechanics. Proceedings of the Second GAMM Seminar, édité par W. Hackbush & K. Witsch, Kiel 1986.