République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahai - Jijel

Faculté des Sciences Exacte et Informatique
Département de Mathématique

№ d'ordre : ....
№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : EDP et applications.

Thème

Étude d'une inégalité variationnelle du premier ordre avec une perturbation non bornée

Présenté par :

- Belmili Halima.
- Zelliche Roufaïda.

Devant le jury :

Président	: Menniche Linda	M. C. B	Université de Jijel
Encadreur	: Lounis Sabrina	M. C. A	Université de Jijel
Examinateur	: Arroud Chems eddine	M. C. B	Université de Jijel

Promotion **2018/2019**

Table des matières

Notation

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par

$\mathbb{N}$	ensemble des nombres entiers naturels.
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels.
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes.
$\overline{\mathbb{R}}$	$[-\infty, +\infty]$.
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
$\mathbb{R}^n$	ensemble des vecteurs de dimension n à coordonnées réelles.
H	un espace de Hilbert.

Soit E un espace vectoriel normé. On note par

E'	espace dual de E
$\langle ., . \rangle$	produit scalaire dans la dualité E', E.
$\sigma(E, E')$	la topologie faible sur E.
$\to$	la convergence forte.
$\rightharpoonup$	la convergence faible.
$d(x, C)$	La distance entre x et l'ensemble C définie par

$$d(x, C) = \inf_{s \in C} \|x - s\|.$$

La distance de Hausdorff entre deux ensembles fermés A et B de H, est définie par

$$\mathrm{H}aus(a, b) = max\{e(A, B), e(B, A)\},$$

où $e(., .)$ est l'ecart entre deux ensembles A et B, donné par

$$e(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B).$$

$L^1_E(a, b)$ l'espace des applications Lebesgue-intégrables définies sur Ω à valeurs dans l'espace de Banach E muni du produit scalaire $\langle ., . \rangle$

$$\langle f, g \rangle_{L^1} = \int_0^T \langle f(x), g(x) \rangle dx,$$

et de la norme $\|.\|_{L^1}$

$\mathcal{C}_E(a,b)$ l'espace des fonctions continues définies de $[a,b]$ à valeurs dans E muni de la norme $\|.\|_\infty$ définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in E} \|f(x)\|.$$

$\mathcal{C}^1_E[a,b]$ l'espace de Banach de toutes les applications continues $u : [a,b] \longrightarrow E$ ayant une dérivée continue $\dot{u}$, muni de la norme

$$\|u\|_{\mathcal{C}^1} = \max\{\max_{t\in[a,b]} \|u(t)\|, \max_{t\in[a,b]} \|\dot{u}(t)\|\}.$$

$B[x,r]$ La boule fermée de centre x et de rayon r.

$\overline{\mathbb{B}}$ La boule unité fermée de E.

$co(C)$ l'enveloppe convexe de l'ensemble C .

$\overline{co}(C)$ l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble C.

$int(C)$ l'intérieure de C .

$\overline{C}$ l'adhérence de C .

p.p presque partout .

i.e c'est à dire.

Introduction

L'étude du processus de Rafle correspond à la résolution de l'inclusion différentielle suivante

$$(\mathcal{I}) \qquad \begin{cases} \dot{u}(t) \in -\mathrm{N}_{C(t)}(u(t)) + F(t, u(t)) & p.p.t \in [0, T], \\ u(0) = u_0 \in C(0), \end{cases}$$

où $C : [T_0, T] \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une multi-application à valeurs non vides fermées et $F : [T_0, T] \times \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une multi-application.

Le problème processus de Rafle a été introduit dans les années 70 par J. J. Moreau, où les ensembles $C(t)$ sont supposés convexes fermés variant d'une manière absolument continu sans aucune perturbation ($F \equiv 0$). On peut interpréter cette inclusion de la manière suivante : le point $u(t)$, soumis au champ de force $F(t, u(t))$ doit rester dans l'ensemble mobile $C(t)$. Cette inclusion différentielle d'évolution correspond à plusieurs problèmes mécaniques importants (voir [25-28]).

Pour résoudre ce problème Moreau apporta une nouvelle idée importante, c'est l'algorithme de rattrapage "the catching-up algorithm"

$$u_{i+1}^n = \mathrm{Proj}_{C(t_{i+1}^n)}(u_i^n).$$

Depuis de nombreuse amélioration ont été apportées, nous citons principalement les travaux de C. Castaing, T. X. Duc Ha et M. Valadier [16] ainsi que ceux de C. Castaing et M.D.P Monteiro Marques [14] où les auteurs résolvent cette inclusion différentielle avec $u \in BV([0.T])$ en supposant une hypothèse de "croissance linéaire compacte"

$$F(t, u) \subset \beta(t)(1 + \|u\|)\overline{\mathbb{B}}(0, 1), \quad \forall (t, u) \in [0.T] \times \mathbb{R}^d.$$

De plus, la multi-application C était supposée Hausdorff continue et vérifiant une condition de "boule intérieure".

$$\exists r > 0, \quad \mathbb{B}(0, r) \subset C(t), \quad \forall t \in [0.T].$$

Une importante amélioration fut apportée pour contourner l'hypothèse de convexité des ensembles $C(t)$ grâce à la notion d'ensemble prox régulier. Plusieurs travaux traitent le processus de rafle par des ensembles prox réguliers. Le cas sans perturbation à été tout d'abord traité par G. Colombo, V.V. Goncharov [19], H. Benabdellah [4] et ensuite par L. Thibault [29], G. Colombo et M.D.P. Monteiro- Marques [20] dans le cadre d'un espace de dimension finie.

Dans le cadre d'un espace de Hilbert de dimension infinie le problème à été étudié par M. Bounkhel et L. Thibault [9], J. F Edmond L. Thibault [21], [22], [29], et récemment dans un carde Banachique par F. Bernicot, J. Venel [5], S. Adly et B. E. Khiet[1]. Récemment, Chemetov et Monteiro Marques [17] ont établi les premiers résultats concernant un ensemble mobile qui dépend du temps et de l'état non convexe.

L'objectif de ce mémoire est de détailler un article de J. Noel et L. Thibault intitulé "Nonconvex sweeping process with a moving set depending on the state" [23]. Le but des auteurs était de généraliser les résultats obtenus dans le cas d'un ensemble de contrainte borné au cas non borné qui dépend du temps et de l'état dans un espace de Hilbert de dimension infinie. Ce mémoire est composé de trois chapitre. Le premier chapitre est consacré à des notions de base et quelques résultats fondamentaux concernant la compacité, la topologie faible ainsi qu'un rappel d'analyse non lisse.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions les ensembles uniformément r-prox réguliers et nous donnons quelques propriétés fondamentaux qui caractérisent ce type d'ensembles.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude du processus de Rafle du premier ordre suivant

$$(\mathcal{D}) \qquad \begin{cases} \dot{u}(t) \in -N^c_{C(t,u(t))}(u(t)) + G(t, u(t)) & p.p \quad t \in [0, T], \\ u(t) \in C(t, u(t)) & \forall t \in [0, T], \\ u(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}(s)ds & \forall t \in [0, T]. \end{cases}$$

où $C : [0, T] \times H \rightrightarrows H$ une application à valeurs non vides fermées uniformément r-prox réguliers et variant d'une manière absolument continues et $G : [0, T] \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides convexes fermées semi-continue supérieurement scalairement non nécessairement borné.

Chapitre 1

Notions de base et résultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous présentons des notions, des définitions de bases et quelques résultats fondamentaux qui nous seront utiles dans ce travail. Dans tout ce chapitre E désigne un espace vectoriel normé.

1.1 Analyse Convexe

pour plus de détails voir [3].

1.1.1 Ensembles Convexes

Définition 1.1. *On dit qu'un sous ensemble C d'un espace vectoriel E est convexe si et seulement si, pour tous $u, v \in C$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$ on a*

$$\lambda u + (1 - \lambda)v \in C.$$

Exemple 1.2.

1. *Dans un espace vectoriel normé réel, toute boule ouverte ou fermée est convexe.*
2. *L'intersection d'une famille quelconque de sous ensembles convexes est convexe.*
3. *L'intérieure $int(C)$ et l'adhérence $\overline{C}$ d'un ensemble convexe le sont aussi.*

Définition 1.3. *Soit C une partie de E, l'enveloppe convexe de C, noté $co(C)$ est l'intersection de tous les ensembles convexes contenant C, et donc c'est le plus petit convexe* *qui contient C, i.e.,* $C \subset co(C)$.

Proposition 1.4. *Soit* E *un espace vectoriel et* $C \subset E$. *Alors,*

$$co(C) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, x_i \in C, \lambda_i \geq 0 \quad tel\, que \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\}.$$

Définition 1.5. *Soit* C *une partie quelconque de* E*, on désigne par l'enveloppe convexe fermée de* C*, et on la note* $\overline{co}(C)$*, l'adhérence* $\overline{co(C)}$ *de son enveloppe convexe.*

1.1.2 Fonctions Convexes

Dans cette section, on considère des fonctions $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Définition 1.6. *On appelle graphe de* f *l'ensemble définie par*

$$\mathrm{gph}(f) := \{(x, f(x)), x \in E\}.$$

Définition 1.7. *On rappelle que l'épigraphe de* f *est la partie de l'espace produit* $E \times \mathbb{R}$ *qui est au-dessus de son graphe*

$$\mathrm{epi}(f) := \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} : f(x) \leq t\}.$$

Définition 1.8. *On appelle domaine de* f *l'ensemble des points où elle ne prend pas la valeur* $+\infty$ *(elle peut y prenant la valeur* $-\infty$*, mais nous considérons le plus souvent des fonctions ne prenant pas cette valeur). On note*

$$dom f := \{x \in E : f(x) < +\infty\}.$$

Définition 1.9. *On dit qu'une fonction* $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *est convexe si pour tous* $x, y \in dom f$ *et pour tout* $\lambda \in [0, 1]$*, on a*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Exemple 1.10.
1. *Un supremum de fonctions convexes est une fonction convexe.*
2. *Soient* $\alpha \geq 0$ *et* f *une fonction convexe. Alors* (αf) *est convexe.*
3. *La somme de deux fonctions convexes est convexe.*
4. *La fonction* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *définie par* $g(x) = \langle a, x \rangle + b$ *où* $a \in \mathbb{R}^n$ *et* $b \in \mathbb{R}$ *est convexe. En effet, soient* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *et* $\lambda \in [0, 1]$*, on a*

$$\begin{aligned} g(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \langle a, (\lambda x + (1 - \lambda)y) \rangle + b \\ &= \lambda \langle a, x \rangle + (1 - \lambda)\langle a, y \rangle + \lambda b + (1 - \lambda)b \\ &= \lambda[\langle a, x \rangle + b] + (1 - \lambda)[\langle a, y \rangle + b] \\ &= \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y). \end{aligned}$$

5. *La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ car si $\lambda \in [0,1]$ et $x \neq y$, alors*

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \lambda^2 x^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy + (1-\lambda)^2 y^2 \\ &\leq \lambda^2 x^2 + \lambda(1-\lambda)(x^2+y^2) + (1-\lambda)^2 y^2 \\ &= \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2. \end{aligned}$$

Théorème 1.11. *La fonction $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est convexe si et seulement si son épigraphe* $\mathrm{epi}(f)$ *est convexe dans $E \times \mathbb{R}$.*

Définition 1.12. *Soit C un sous ensemble non vide de E, la fonction indicatrice associée à C, $\mathcal{I}_C : E \to [0, +\infty]$ est définie par*

$$\mathcal{I}_C(x) = \begin{cases} 0, & x \in C, \\ +\infty, & x \notin C. \end{cases}$$

- $\mathrm{dom}\, \mathcal{I}_C = \{x \in E, \mathcal{I}_C(x) < +\infty\} = C,$
- $\text{épi}\, \mathcal{I}_C = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R}, \mathcal{I}_C(x) \leq t\} = C \times [0, +\infty[,$

Remarque 1.13. *La fonction $\mathcal{I}_C$ est convexe si et seulement si C est convexe.*

Définition 1.14. *Soient E un espace normé et C un ensemble non vide de E. La fonction support de C (ou la fonction d'appui de C), est la fonction notée σ_C définie par*

$$\begin{aligned} \sigma_C : \quad & E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ & x \longmapsto \sigma_C(x) := \sup_{z \in C} \langle x, z \rangle. \end{aligned}$$

Proposition 1.15. *Pour tout sous ensemble non vide C de E, on a*

$$\overline{co}(C) = \{x \in E, \forall x' \in E', \langle x', x \rangle \leq \sigma(x', C)\}.$$

1.1.3 Cônes

Cône normal

Définition 1.16. *Soit C un sous ensemble convexe de E et $\overline{x} \in C$, le cône normal à C en $\overline{x}$ est l'ensemble défini par*

$$\mathrm{N}_C(\overline{x}) := \{v \in E : \langle v, x - \overline{x} \rangle \leq 0, \forall\, x \in C\}.$$

Exemple 1.17. 1. *Soit* $C = [0,1] \times [0,1]$ *un sous ensemble de* $\mathbb{R}^2$*, le cône normal à* C *en* $\overline{x} = (0,0)$ *est* $]-\infty, 0] \times [-\infty, 0[$.

2. *Soit* $C = [0,1] \times \{0\}$ *un sous ensemble de* $\mathbb{R}^2$*, le cône normal à* C *en* $\overline{x} = (0,0)$ *est* $]-\infty, 0] \times \mathbb{R}$
le cône normal à C *en* $\overline{x} = (1,0)$ *est* $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

Définition 1.18. ***(Fonction distance)*** *Soit* E *un espace vectoriel normé et* C *un sous ensemble non vide fermé de* E*, on définit la fonction distance* $d(., C)$ *sur* E *par*

$$d(x, C) = \inf_{s \in C} \|x - s\|.$$

Cette fonction est non nécessairement différentiable mais Lipschitzienne de rapport 1.

Définition 1.19. *Soit* $\overline{x} \notin C$*. On définit* $\mathrm{Proj}_C(\overline{x})$ *la projection de* $\overline{x}$ *sur* C *(peut être vide) comme l'ensemble des éléments* $\overline{x} \in C$ *dont la distance est minimale, i.e.,*

$$\|\overline{u} - \overline{x}\| = d(\overline{u}, C).$$

Donc

$$\mathrm{P}roj_C(\overline{u}) = \{\overline{x} \in C : d(\overline{u}, C) = \|\overline{u} - \overline{x}\|\}.$$

Remarque 1.20. ***(La relation entre le cône normal et la projection)*** *Soit* C *un convexe fermé de* E*, si* $y = \mathrm{Proj}_C(x)$*, alors* $y = (\mathrm{I} + \mathrm{N}_C)^{-1}(x)$*, donc*

$$(\mathrm{I} + \mathrm{N}_C)^{-1}(.) = \mathrm{Proj}_C(.).$$

En effet,

$$\begin{aligned} y = \mathrm{Proj}_C(x) &\Leftrightarrow \langle x - y, z - y \rangle \leq 0, \forall z \in C \\ &\Leftrightarrow x - y \in \mathrm{N}_C(y) \\ &\Leftrightarrow x \in y + \mathrm{N}_C(y) \\ &\Leftrightarrow x \in (\mathrm{I} + \mathrm{N}_C)(y) \\ &\Leftrightarrow y = (\mathrm{I} + \mathrm{N}_C)^{-1}(x), \end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{Proj}_C(.) = (\mathrm{I} + \mathrm{N}_C)^{-1}(.).$$

Proposition 1.21. ***(La relation entre la fonction support et le cône normal)*** $z \in \mathrm{N}_C(x)$ *si et seulement si pour tout* $x \in C$

$$\sigma(C, z) = \langle z, x \rangle.$$

Cône normal de Clarke

Définition 1.22. *Soient E un espace vectoriel normé, $f : x \to \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne au voisinage de $\overline{x}$. la dérivée directionnelle au sens de Clarke de f au point $\overline{x}$ dans la direction $v \in E$ notée $f^0(\overline{x}, v)$, est définie par*

$$f^0(x_0, v) = \limsup_{x \to x_0 t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t},$$

où x est un vecteur de E et t un scalaire positif.

Remarque 1.23. *La fonction $v \mapsto f^0(\overline{x}, v)$ est finie, positivement homogène et satisfait*

$$|f^0(\overline{x}, v)| \leq k\|v\|, \forall v \in E$$

.

Définition 1.24. *Soit E un espace vectoriel. On appelle cône tangent de Clarke à C au point $\overline{x}$ qui on note $T_C^c(\overline{x})$ l'ensemble défini par*

$$T_C^c(\overline{x}) = \{v \in X : d^0(\overline{x}_0; v, C) = 0\}.$$

Définition 1.25. *Soit E un espace vectoriel normé. On appelle cône normal de Clarke à C au point $\overline{x}$ qu'on note $N_C^c(\overline{x})$ l'ensemble définie par*

$$N_C^c(\overline{x}) = (T_C^c(\overline{x}))^0 = \{\xi \in X', \, tel\, que\, \langle \xi, y \rangle \leq 0, \forall y \in T_C^c(\overline{x})\}.$$

Remarque 1.26.
1. *Si C est convexe, alors*

$$N_C^c(\overline{x}) = \{\xi \in X' : \langle \xi, y \rangle \leq 0, \forall y \in C\} = N_C(\overline{x})$$

2. *Le cône normal de Clarke à C au point $\overline{x}$ et le sous différentiel de Clarke de la fonction indicatrice à l'ensemble C au point $\overline{x}$ coïncident.*

Le cône normal proximal

Définition 1.27. *Soit $\overline{x} \in C$. On définit le cône normal proximal à C au point $\overline{x}$ comme l'ensemble de tous les éléments pour les quels il existe un nombre positif $r > 0$ tel que*

$$d(\overline{x} + r\xi, C) = r\|\xi\|,$$

i.e. $\overline{x}$ est la projection de $\overline{x} + r\xi$ sur C. Alors

$$\mathrm{N}_C^p(\overline{x}) = \{\xi \in H : \exists r > 0 : d(\overline{x} + r\xi, C) = r\|\xi\|\}.$$

Remarque 1.28. *Si $\overline{x} \notin C$, le cône normal proximal est indéfini.*

Proposition 1.29. *On a les caractérisations analytiques suivantes du cône normal proximal*

$$\begin{aligned}\xi \in \mathrm{N}_C^p(\overline{x}) &\Leftrightarrow \exists \sigma, \delta > 0 : \langle \xi, x - \overline{x} \rangle \leq \|x - \overline{x}\|^2, \forall x \in C \cap (\overline{x} + \delta \overline{\mathbb{B}}) \\ &\Leftrightarrow \exists \sigma = \sigma(\xi, \overline{x}) > 0 : \langle \xi, x - \overline{x} \rangle \leq \sigma \|x - \overline{x}\|^2, \forall x \in C.\end{aligned}$$

Démonstration. Montrons en premier lieu la première caractérisation. On suppose que $\varphi \in \mathrm{N}_C^p(\overline{x})$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi \in \mathrm{N}_C^P(\overline{x}) &\Leftrightarrow d(\overline{x} + \alpha\varphi, C) = \alpha\|\varphi\|, pour\ \alpha > 0 \\ &\Leftrightarrow \|\overline{x} + \alpha\varphi - \overline{x}\|^2 \leq \|\overline{x} + \alpha\varphi - x\|^2, \forall x \in C \\ &\Leftrightarrow \|\overline{x} + \alpha\varphi\|^2 - 2\langle \overline{x} + \alpha\varphi, \overline{x}\rangle + \|\overline{x}\|^2 \leq \|\overline{x} + \alpha\varphi\|^2 - 2\langle \overline{x} + \alpha\varphi, x\rangle + \|x\|^2, \forall x \in C \\ &\Leftrightarrow 2\langle \overline{x} + \alpha\varphi, x - \overline{x}\rangle \leq \|x\|^2 - \|\overline{x}\|^2, \forall x \in C \\ &\Leftrightarrow \langle \overline{x} + \alpha\varphi, x - \overline{x}\rangle \leq \frac{1}{2}[\|x\|^2 - \|\overline{x}\|^2] \\ &\Leftrightarrow \langle \overline{x}, x - \overline{x}\rangle + \alpha\langle \varphi, x - \overline{x}\rangle \leq \frac{1}{2}[\|x\|^2 - \|\overline{x}\|^2] \\ &\Leftrightarrow \alpha\langle \varphi, x - \overline{x}\rangle \leq \frac{1}{2}[\|x\|^2 + \|\overline{x}\|^2 - 2\langle \overline{x}, x\rangle] \\ &\Leftrightarrow \langle \varphi, x - \overline{x}\rangle \leq \frac{1}{2\alpha}[\|x - \overline{x}\|^2], \forall x \in C.\end{aligned}$$

On pose $\sigma = \dfrac{1}{2\alpha}$, on obtient donc la première caractérisation. Montrons maintenant l'équivalence entre les deux caractérisations. Supposons qu'il existe $\sigma > 0$ et $\delta > 0$ tels que

$$\langle \varphi, x - \overline{x}\rangle \leq \sigma\|x - \overline{x}\|^2,$$

pour tout $x \in C \cap (\overline{x} + \delta\overline{\mathbb{B}})$. Soit maintenant $x \in C$ alors que $\|x - \overline{x}\| > \delta$. Alors, on distingue les deux cas suivants :

1ercas : Si $\|x - \overline{x}\| \geq 1$, alors

$$\big|\|x\| - \|\overline{x}\|\big| < \|x - \overline{x}\| \leq \|x - \overline{x}\|^2.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, x-\overline{x}\rangle &\leq \|\varphi\|\|x-\overline{x}\| \\
&\leq \|\varphi\|(\|x\|+\|\overline{x}\|) \\
&\leq \|\varphi\|\big(\|x\|-\|\overline{x}\|+2\|\overline{x}\|\big) \\
&\leq \|\varphi\|\big[|\|x\|-\|\overline{x}\||+2\|\overline{x}\|\big] \\
&\leq \|\varphi\|\big[\|x-\overline{x}\|^2+2\|\overline{x}\|\big] \\
&\leq \|\varphi\|\big[1+2\|\overline{x}\|\big]\|x-\overline{x}\|^2.
\end{aligned}$$

2eme**cas** : Si $\|x-\overline{x}\|\leq 1$, alors $\delta\leq\|x-\overline{x}\|<1$ pour un certain $\delta>0$, ce qui nous donne $\frac{1}{\delta}\|x-\overline{x}\|\geq 1$ et $\frac{1}{\delta}>1$, et donc on a

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, x-\overline{x}\rangle &\leq \|\varphi\|\|x-\overline{x}\| \\
&\leq \|\varphi\|\left[\frac{1}{\delta}\|x-\overline{x}\|+2\|\overline{x}\|\right] \\
&\leq \|\varphi\|\left[\frac{\|x-\overline{x}\|}{\delta}\frac{\|x-\overline{x}\|}{\delta}+2\|\overline{x}\|\right] \\
&\leq \|\varphi\|\left[\frac{\|x-\overline{x}\|^2}{\delta^2}+2\|\overline{x}\|\frac{\|x-\overline{x}\|^2}{\delta^2}\right] \\
&\leq \|\varphi\|\frac{\|x-\overline{x}\|^2}{\delta^2}[1+2\|\overline{x}\|] \\
&\leq \frac{\|\varphi\|}{\delta^2}\left[1+2\|\overline{x}\|\right]\|x-\overline{x}\|^2.
\end{aligned}$$

Prenons donc $\overline{\sigma}=max\{\sigma,\|\varphi\|[1+2\|\overline{x}\|],\frac{\|\varphi\|}{\delta^2}[1+2\|x\|]\}$ nous obtenons

$$\langle \varphi, x-\overline{x}\rangle\leq\overline{\sigma}\|\overline{x}-x\|^2, \forall x\in C,$$

ce qui achève la démonstration de cette proposition. ■

1.1.4 sous différentiels

Pour plus de détails on se réfère à [3].

Sous différentiel normal

Définition 1.30. *Soit $f:E\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ une fonction convexe et soit $\overline{x}\in domf$, un élément $\xi\in E$ est dit sous-gradient de f en $\overline{x}$ si*

$$\langle \xi, x-\overline{x}\rangle\leq f(x)-f(\overline{x}),\quad \forall x\in E.$$

La collection de tous les sous-gradients de f en $\overline{x}$ est appelée le sous différentiel de f en $\overline{x}$ et noté $\partial f(\overline{x})$.

Sous différentiel de Clarke

Définition 1.31. *Soient E un espace vectoriel normé, $f : x \to \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne au voisinage de $\overline{x}$. Alors le sous différentielle de Clarke de f au point $\overline{x}$, notée $\partial^c f(\overline{x})$ est définie par*

$$\partial^c f(\overline{x}) = \{\xi \in E' : \langle \xi, v \rangle \leq f^0(x, v), \forall v \in X\}.$$

Remarque 1.32. *1. La fonction $v \mapsto f^0(\overline{x}, v)$ est la fonction support de $\partial^c f(\overline{x})$ i.e.,*

$$f^0(\overline{x}, v) = \sigma(\partial^c f(\overline{x}), v).$$

2. Le sous différentiel de Clarke $\partial^c f(\overline{x})$ est non vide, convexe et satisfait

$$\partial^c f(\overline{x}) \subset k\mathbb{B}',$$

où $\mathbb{B}'$ est la boule unité fermée du dual de E.

Sous différentiel proximal

Définition 1.33. *Soit $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction et $\overline{x} \in H$ tel que $f(\overline{x}) < \infty$. Un vecteur $\xi \in E'$ est un sous gradient proximal de f au point $\overline{x}$, s'il existe deux nombres réels positif σ et δ tels que*

$$\langle \xi, x - \overline{x} \rangle \leq f(x) - f(\overline{x}) + \sigma \|x - \overline{x}\|^2, \text{ pour tout } x \in \overline{x} + \delta\overline{\mathbb{B}}.$$

La collection de tous les sous gradients proximales de f au point $\overline{x}$ est appelée le sous différentiel proximal de f au point $\overline{x}$.

Remarque 1.34. *Quand f est la fonction indicatrice d'un ensemble non vide fermé C, le sous différentiel proximal de $\mathcal{I}_C$ au point $\overline{x}$ est le cône normal proximal de C au point $\overline{x}$. En effet, Pour tout $\overline{x} \in C$, soit $\xi \in \partial^p \mathcal{I}_C(\overline{x})$, alors il existe deux nombres réels positifs σ et δ tels que*

$$\langle \xi, x - \overline{x} \rangle \leq \mathcal{I}_C(x) - \mathcal{I}_C(\overline{x}) + \sigma \|x - \overline{x}\|^2,$$

pour tout $x \in \overline{x} + \delta\overline{\mathbb{B}}$, d'où

$$\langle \xi, x - \overline{x} \rangle \leq \mathcal{I}_C(x) + \sigma \|x - \overline{x}\|^2,$$

pour tout $x \in C$ on a

$$\langle \xi, x - \overline{x} \rangle \leq \sigma \|x - \overline{x}\|^2,$$

ce qui montre que

$$\langle \xi, x - \overline{x} \rangle \leq \sigma \|x - \overline{x}\|^2, \forall x \in C \cap (\overline{x} + \delta \overline{\mathbb{B}}),$$

et donc $\xi \in \mathrm{N}_C^p(\overline{x})$, par conséquent $\partial^p \mathcal{I}_C(\overline{x}) \subset \mathrm{N}_C^p(\overline{x})$.
Inversement, soit maintenant $\xi \in \mathrm{N}_C^p(\overline{x})$, alors

$$\langle \xi, x - \overline{x} \rangle \leq \sigma \|x - \overline{x}\|^2, \textit{ pour tout } x \in C \cap (\overline{x} + \delta \overline{\mathbb{B}}),$$

d'où

$$\langle \xi, x - \overline{x} \rangle \leq \mathcal{I}_C(x) - \mathcal{I}_C(\overline{x}) + \sigma \|x - \overline{x}\|^2, \textit{ pour tout } x \in C \cap (\overline{x} + \delta \overline{\mathbb{B}}),$$

et donc $\xi \in \partial^p \mathcal{I}_C(\overline{x})$, ce qui montre que $\mathrm{N}_C^p(\overline{x}) \subset \partial^p \mathcal{I}_C(\overline{x})$, on en déduit donc que

$$\mathrm{N}_C^p(\overline{x}) = \partial^p \mathcal{I}_C(\overline{x}).$$

Exemple 1.35. *1. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$. Alors*

$$\partial f(0) = \{-1, 1\}, \quad \partial^p f(0) = \emptyset \quad \textit{et} \quad \partial^c f(0) = [-1, 1].$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -(|x|^{3/2})$. Alors

$$\partial f(0) = \{0\}, \quad \partial^p f(0) = \emptyset \quad \textit{et} \quad \partial^c f(0) = \{0\}.$$

Proposition 1.36. *Soit E un espace de Banach et C un sous-ensemble non vide fermé de E, et soit $x \in C$, alors*

$$\partial^p d_C(x) = \mathrm{N}_C^p(x) \cap \mathbb{B}'.$$

Démonstration. Soit $x^* \in \partial^p d_C(x)$, alors il existe $\sigma > 0$ et $\delta > 0$ tels que

$$\begin{aligned} \langle x^*, x' - x \rangle &\leq \sigma \|x' - x\|^2 + d(x', C) - d(x, C) \quad \forall x' \in x + \delta \overline{\mathbb{B}} \\ &\leq \sigma \|x' - x\|^2 + d(x', C). \end{aligned}$$

car $x \in C$. En particulier, pour tout $x' \in C \cap (x + \delta \overline{\mathbb{B}})$ on a

$$\langle x^*, x' - x \rangle \leq \sigma \|x' - x\|^2,$$

ce qui montre que $x^* \in \mathrm{N}_C^p(x)$.
D'autre part, on sait que

$$\partial^p d_C(x) \subset B[x, \gamma],$$

d'où

$$x^* \in \mathrm{N}^p_C(x) \cap \mathbb{B}',$$

et donc

$$\partial^p d_C(x) \subset \mathrm{N}^p_C(x) \cap \mathbb{B}'.$$

Pour montrer la réciproque, on fixe $x^* \in \mathrm{N}^p_C(x)$ avec $\|x^*\| \leq 1$, il existe alors $\sigma > 0$ et $\delta > 0$ tels que

$$\langle x^*, x' - x\rangle \leq \sigma\|x' - x\|$$

pour tout $x' \in C \cap B[x, \delta]$.

Prenons $\gamma = \min(1, \dfrac{\delta}{3})$ et fixons $z \in B[x, \gamma]$ puis choisissons $y_z \in C$ tel que

$$\|y_z - z\| \leq d(z, C) + \|z - x\|^2.$$

D'après le choix de y_z on trouve que $y_z \in B[x, \gamma]$. En effet,

$$\begin{aligned}
\|y_z - x\| &\leq \|y_z - z\| + \|z - x\| \\
&\leq \|z - x\|^2 + d(z, C) + \|z - x\| \\
&\leq \|z - x\| + \|z - x\|^2 + \|z - x\| \\
&\leq (2 + \|z - x\|)\|z - x\| \\
&\leq 3\|z - x\| \\
&\leq 3\sigma < \delta.
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\langle x^*, z - x\rangle &= \langle x^*, y_z - x\rangle + \langle x^*, z - y_z\rangle \\
&\leq \sigma\|y_z - x\|^2 + \|y_z - z\|\|x^*\| \\
&\leq \sigma\|y_z - x\|^2 + d(z, C) + \|z - x\|^2 \\
&\leq 9\sigma\|z - x\|^2 + d(z, C) + \|z - x\|^2 \\
&\leq (9\sigma - 1)\|z - x\|^2 + d(z, C) - d(x, C).
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $x^* \in \partial^p d_C(x)$ d'où

$$\mathrm{N}^p_C(x) \cap \mathbb{B}' = \partial^p d_C(x).$$

■

Propriétés 1.37. *Les sous-différentiels et les cône normaux satisfont les inclusions suivantes :*

$$N^p_C(u) \subset N^c_C(u) \quad \text{et} \quad \partial^p f(u) \subset \partial^c f(u).$$

1.2 Théorèmes Fondamentaux d'Analyse Fonctionnelle

1.2.1 Théorèmes de Compacité

Pour plus d'informations se réfère à [2]

Théorème 1.38. ***(Théorème d'Ascoli-Arzéla)*** *Soient K un espace compact et (E, d) un espace métrique. L'espace $\mathcal{C}(K, E)$ des fonctions continues de K dans E, muni de la topologie de la convergence uniforme, est un espace métrique.*
Une partie A de $\mathcal{C}(K, E)$ est relativement compacte si et seulement si, pour tout point x de K

1. *A est équi-continue en x, i.e., pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que*

$$\forall f \in A, \forall y \in V, d(f(x), f(y)) < \epsilon,$$

2. *l'ensemble $A(x) = \{f(x), f \in A\}$ est relativement compact.*

Théorème 1.39. *On considère $x_k(.)$ comme une suite de fonctions absolument continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach E satisfaisant*

i) *$\forall t \in I$, $(x_k(t))_{k \in N}$ est un sous ensemble relativement compact de E,*

ii) *il existe une fonction $c(.) \in L^1(I)$ tel que pour presque tout $t \in I$, $\|x'_k(t)\| \leq c(t)$.*
Alors, il existe une sous suite de $(x_k)_k$ qu'on la note toujours $x_k(.)$ qui converge vers une fonction absolument continue $x : I \longrightarrow E$ au sens suivant

1) *$x_k(.)$ converge uniformément vers $x(.)$ sur les sous-ensembles compactes de I.*

2) *$x'_k(.)$ converge faiblement vers $x'(.)$ dans $L^1(I, E)$.*

1.2.2 Théorème du Point fixe

Théorème 1.40. ***(Théorème de Schauder)*** *: Soient E un espace de Banach, C un convexe fermé de E et T une application continue de C dans C telle que $T(C)$ soit relativement compact. Alors, T admet une point fixe.*

1.2.3 Topologie Faible

Pour plus de détails sur la topologie faible on se réfère à [10].

Définition 1.41. *Soit E un espace de Banach et $f \in E'$, considérons l'application*

$$\begin{aligned}\varphi_f : E &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \varphi_f(x) := \langle f, x\rangle,\end{aligned}$$

on appelle topologie faible sur E, notée $\sigma(E, E')$, la topologie la moins fine rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f\in E'}$.

Notation : Étant donnée une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, on désigne par $x_n \rightharpoonup x$ la convergence de x_n vers x pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.

Proposition 1.42. *Soit E un espace de Banach, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On a les propriétés suivantes*

1. *$x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E')$ ssi $\langle f, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$ pour tout $f \in E'$.*
2. *Si $x_n \longrightarrow x$ fortement, alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.*
3. *Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$, alors $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E et*

$$\|x\|_E \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_E.$$

4. *Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$ et si $f_n \longrightarrow f$ fortement dans E' alors*

$$\langle f_n, x\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle.$$

Corollaire 1.43. *(**Lemme de Mazur**) Soit E un espace de Banach. Si $(x_n)_n$ une suite qui converge faiblement vers x dans E. Alors, il existe une suite $(y_n)_n$ avec chaque y_n combinaison convexe des $\{x_k, k \geq n\}$ qui converge fortement vers x dans E.*

1.3 Multi-applications

Pour plus de détails sur cette section se réfère à [7]

Définition 1.44. *Soient X et Y deux ensembles non vides. Une multi-application (ou fonction multivoque) F définie sur X à valeurs dans Y est une fonction qui à chaque élément $x \in X$ associé un sous-ensemble $F(x)$ de Y, on note $F : X \rightrightarrows Y$ ou $F(x) : X \to P(y)$,($P(y)$ est l'ensemble des parties de Y).*
Le domaine, le graphe et l'image de la multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ sont donnés par

$$Dom(F) = \{x \in X; F(x) \neq \emptyset\},$$

$$gph(F) = \{(x, y) \in X \times Y : x \in DomF, y \in F(x)\},$$

$$Im(F) = \bigcup_{x \in DomF} F(x).$$

Définition 1.45. *Soient X et Y deux espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors F est dite semi-continue supérieurement (s.c.s) au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert V de Y tel que $F(x) \subset V$, il existe un ouvert U de X tel que $x_0 \in U$ et $F(x_0) \subset V$, $\forall x \in U$.*
On dit que F est s.c.s sur X si elle est s.c.s en tout point $x \in X$.

Proposition 1.46. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

i) F est semi-continue supérieurement sur X,

ii) L'ensemble $F_+^{-1}(G) = \{x \in X : F(x) \subset G\}$ est un ouvert de X pour tout ouvert G de Y,

iii) L'ensemble $F^{-1}(M) = \{x \in X : F(x) \cap M \neq \emptyset\}$ est un fermé de X pour tout fermé M de Y.

Proposition 1.47. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

i) F est semi-continue inférieurement sur X,

ii) L'ensemble $F_+^{-1}(G) = \{x \in X : F(x) \subset M\}$ est un fermé de X pour tout fermé M de Y,

iii) L'ensemble $F^{-1}(M) = \{x \in X : F(x) \cap G \neq \emptyset\}$ est un ouvert de X pour tout ouvert G de Y.

Théorème 1.48. *Considérons une suite de sous-ensembles contenant dans un ensemble compact K d'un espace de Banach séparable E. Alors*

$$\overline{co}(\limsup_{n \to \infty} K_n) = \cap_{N>0} \overline{co}(\cup_{n \geq N} K_n).$$

Théorème 1.49. *Soient X et Y deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs compactes, alors*

$$\limsup_{x' \to x} F(x') = F(x).$$

Définition 1.50. ***(Scalairement s.c.s)***
On dit qu'une multi-application $F : E \rightrightarrows H$ est scalairement s.c.s si, pour tout $\xi \in H$, la fonction réelle $u \mapsto \sigma(F(u), \xi)$ est s.c.s.

Définition 1.51. *(**Sélection minimale**) Considérons un sous-espace métrique X, un espace de Banach Y, et une multi-application F de X dans Y, on définit la multi-application minimale de F par*

$$m(F(x)) = \{y \in F(x) : \|y\| = \min_{u \in F(x)} \|u\|\}$$

Si Y est un espace de Hilbert et F à valeurs fermées convexes, alors la multi-application minimale $m(F(x))$ devient une fonction univoque dite " sélection minimale", donnée explicitement par

$$m(F(x)) = \mathrm{Proj}_{F(x)}(0).$$

Chapitre 2

La prox-régularité

La prox-régularité a été initialement définie par Federer en 1957 dans $\mathbb{R}^n$ sous l'application "Positively reached set". En suite, elle fait étendue au espace de Hilbert par Clarcke-Sterne et Wolenski en 1995 puis par Poliquin, Rockafellar et Thibault en 2000 et Récemment, dans un cadre Banachique par Bernard, Thibault et Zlateva.

Définition 2.1. *étant donné un $r \in]0, +\infty[$, un sous-ensemble fermé $C \subset H$ est uniformément r-prox- régulier si et seulement si*

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \textit{pour tout}\, y \in C \,\textit{et tout}\, \xi \in \mathrm{N}_C^p(\overline{x})\, \textit{on a} \\ \langle \frac{\xi}{\|\xi\|}, x - \overline{x} \rangle \leq \frac{1}{2r} \|x - \overline{x}\|^2 \end{cases}.$$

Remarque 2.2.

1. *Cette propriété peut être décrite de manière géométrique : Un ensemble C est uniformément $r-$prox régulier si on peut faire rouler une boule de rayon r continument sur toute la frontière ∂C. Elle est équivalente à la propriété suivante : la projection est monovaluée et continue en tout point x à distance $d(x, C) < r$.*
2. *Cette propriété permet de généraliser et d'affaiblir une hypothèse de convexité. Un ensemble fermé C est convexe si et seulement s'il est uniformément ∞-prox régulier.*

La proposition suivante résume quelques propriétés importantes de ces ensembles :

Proposition 2.3. *Soit $r > 0$ et C un sous-ensemble non vide fermé uniformément r-prox régulier de H. Alors,*

1. $\mathrm{Proj}_C(x)$ *existe et unique pour tout* $x \in H$ *avec* $d(x, C) < r$.
2. *Le sous-différentiel proximal de* $d(., C)$ *coïncide avec tous les sous-différentiels contenus dans le sous-différentiel de Clarke en tout point* x *satisfaisant* $d(x, C) < r$.
3. *Pour chaque* $r' \in]0, r[$, *le sous-ensemble* $C(r') := \{x \in H : d(x, C) \leq r'\}$ *est* $(r - r')$*-prox-régulier.*

Pour la démonstration de cette proposition voir [24], [25], [26].

Remarque 2.4. *Comme conséquence de 2. de la **Proposition 2.3**, pour les ensembles uniforme r-prox-réguliers, le cône normal proximal à* C *coïncide avec tous les cônes normaux contenus dans le cône normal de Clarke en tout point* $x \in C$, *i.e.,*

$$\mathrm{N}_C^p(x) = \mathrm{N}_C^c(x).$$

La proposition suivante montre qu'on peut remplacer le cône normal proximal dans la définition de l'uniforme-r-prox-régularité par le sous-différentiel proximal de la fonction distance.
Pour un sous-ensemble C dans H, étant donné $r > 0$. On pose

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \textit{pour}\, \overline{x} \in C \,\textit{et}\, \xi \in \partial^p d_C(\overline{x}) \,\textit{on a} \\ \langle \xi, x - \overline{x} \rangle \leq \dfrac{1}{2r} \|x - \overline{x}\|^2 \quad \textit{pour tout}\, x \in C. \end{cases}$$

Proposition 2.5. *Soit* C *un sous-ensemble non vide fermé de* H *et soit* $r > 0$. *Alors,* (I) $\Longleftrightarrow$ (II).

Démonstration. (I) $\Longrightarrow$ (II) :
Supposons que C satisfait (I), il est clair qu'il satisfait (II) pour $\xi = 0$. Soit $\overline{x} \in C$ et $0 \neq \xi \in \partial^p d_C(\overline{x}) \subset \mathrm{N}_C^p(\overline{x})$ alors, d'après (I) on a

$$\langle \frac{\xi}{\|\xi\|}, x - \overline{x} \rangle \leq \frac{1}{2r} \|x - \overline{x}\|^2,$$

et donc

$$\begin{aligned} \langle \xi, x - \overline{x} \rangle &\leq \frac{\|\xi\|}{2r} \|x - \overline{x}\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2r} \|x - \overline{x}\|^2, \end{aligned}$$

car $\|\xi\| \leq 1$ ce qui montre que (II) est satisfaite.
(II) $\Longrightarrow$ (I) :

Supposons maintenant que (II) est satisfaite et soit $\overline{x} \in C$ et $0 \neq \xi \in \mathrm{N}^p_C(\overline{x})$. Alors, d'après la **Proposition 1.36**, $\dfrac{\xi}{\|\xi\|} \in \partial^p d_C(\overline{x})$ et donc d'après (II) on a

$$\langle \frac{\xi}{\|\xi\|}, x - \overline{x} \rangle \leq \frac{1}{2r}\|x - \overline{x}\|^2,$$

pour tout $x \in C$. Ce qui achève la démonstration.

■

Lemme 2.6. *Soit C un sous-ensemble non vide fermé de H et $r > 0$. Alors, pour tout $x \notin C(r)$ on a*

$$d(x, C(r)) = d(x, C) - r \tag{2.1}$$

Démonstration. D'après [15], comme l'ensemble $\{x \notin C(r) : \mathrm{Proj}_C(x) \neq \emptyset\}$ est dense dans $X \setminus C(r)$ et comme $d(., C)$ et $d(., C(r))$ sont des fonctions continues. Il est suffisant de montrer l'égalité **(2.1)** pour $x \notin C(r)$ satisfaisant $\mathrm{Proj}_C(x) \neq \emptyset$. Fixons x et fixons aussi $p \in H$ tel que $d(x, C) = \|x - p\|$. On pose :

$$u := p + \frac{r}{\|x - p\|}(x - p). \tag{2.2}$$

on a

$$\begin{aligned} d(U, C) &= \inf_{p \in C} \|u - p\| \\ &\leq \|u - p\| = \|\frac{r}{\|x - p\|}(x - p)\| \\ &\leq r \times \frac{\|x - p\|}{\|x - p\|} = r. \end{aligned}$$

d'où $u \in C(r)$.

Montrons maintenant que $u \in \mathrm{Proj}_{C(r)}(x)$. Considérons $y \in C(r)$, i. e., $d(y, C) \leq r$, et fixons un nombre positif ε. Choisissons $y_\varepsilon \in C$ satisfaisant

$$\|y - y_\varepsilon\| \leq d(y, C) + \varepsilon \leq r + \varepsilon.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \|y - x\| \geq \|y_\varepsilon - x\| - \|y - y_\varepsilon\| &\geq d(x, C) - \|y - y_\varepsilon\| \\ &\geq \|x - p\| - r - \varepsilon = \|x - u\| - \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui montre que

$$d(x, C(r)) \leq \|x - u\| - \varepsilon,$$

pour tout $\varepsilon > 0$ on a donc

$$d(x, C(r)) \leq \|x - u\|,$$

et par suite $d(x, C(r)) = \|x - u\|$ car $u \in C(r)$, d'après (2.2)

$$d(x, C(r)) = \|x - u\| = \|x - p\| - r = d(x, C) - r.$$

$\blacksquare$

Nous établissons maintenant une autre caractérisation des ensembles r-prox-réguliers très utiles dans la pratique.

Théorème 2.7. *Soit C un sous ensemble non vide fermé de H et soit $r > 0$. Supposons que C est uniformément r-prox-régulier. Alors la propriété suivante est satisfaite*

$$(\mathrm{III}) \quad \begin{cases} \textit{pour tout}\, x \in H, \quad d(x, C) < r \quad \textit{et} \quad \textit{tout}\, \xi \in \partial^p d_C(x), \\ \textit{on a} \\ \langle \xi, x' - x \rangle \leq \dfrac{8}{r - d(x, C)} \|x' - x\|^2 - d(x, C), \textit{pour tout}\, x' \in H \quad \textit{avec} \quad d(x', C) \leq r. \end{cases}$$

Démonstration. Étape 1 : Montrons en premier lieu que,

$$(\mathrm{III})' \quad \begin{cases} \textit{Pour tout} \quad x \in C\, \textit{et tout} \quad \xi \in \partial^p d_C(x)\, \textit{on a} \\ \langle \xi, x' - x \rangle \leq \dfrac{2}{r} \|x' - x\|^2 + d(x', C), \\ \textit{pour tout}\, x' \in H\, \textit{avec} \quad d(x', C) < r. \end{cases}$$

Fixons $x \in C$ et $\xi \in \partial^p d_C(x)$. Fixons aussi $z \in H$ satisfaisant $d(z, C) < r$. Comme C est uniformément r-prox régulier on peut trouver $y_z \in \mathrm{Proj}_C(z) \neq \emptyset$, i. e., $y_z \in C$ et

$$\|z - y_z\| = d(z, C). \tag{2.3}$$

Alors,

$$\|y_z - x\| \leq \|y_z - z\| + \|z - x\| \leq 2\|z - x\|,$$

et donc d'après (II), l'inégalité $\|\xi\| \leq 1$ et **(2.3)** on trouve que

$$\begin{aligned} \langle \xi, z - x \rangle &= \langle \xi, y_z - x \rangle + \langle \xi, z - y_z \rangle \\ &\leq \frac{1}{2r} \|y_z - x\|^2 + \|\xi\| \|y_z - z\| \\ &\leq \frac{2}{r} \|z - x\|^2 + d(z, C) - d(x, C). \end{aligned}$$

Ce qui montre (III)$'$.

Étape 2 : D'après **3** de la **Proposition 2.3**, pour chaque $0 < r' < r$ le sous ensemble $C(r)$ est uniformément $(r - r')$-prox régulier. De plus, pour tout $x' \in H$, on peut démontrer facilement qu'on a $d(x', C(r')) < r - r'$ si et seulement si $d(x', C) < r$. En effet, si on suppose que $d(x', C(r')) < r - r'$, alors il existe $z \in H$ avec $d(z, C) \leq r'$ et $\|x' - z\| < r - r'$, et donc

$$d(x', C) \leq d(z, C) + \|x' - z\| < r$$

Supposons maintenant que $d(x', C) < r$. Dans le cas où $x' \in C(r')$, on peut écrire $d(x', C(r')) = 0 < r - r'$. Dans le cas où $x' \in C(r')$, on utilise le **lemme 2.6** on trouve que

$$d(x', C(r)) = d(x', C) - r' < r - r'$$

et donc l'équivalence entre les deux inégalités. Par conséquent la propriété suivante est satisfaite

(VI) $$\begin{cases} \textit{Pour tout}\, x \in C(r'),\ \textit{et tout}\, \xi \in \partial^p d_{C(r')}(x) \\ \langle \xi, x' - x \rangle \leq \dfrac{2}{r - r'}\|x' - x\|^2 + d(x, C(r')) \quad \textit{Pour tout}\, x' \in H, \quad \textit{avec} \quad d(x', C) < r. \end{cases}$$

Fixons maintenant $x \in H$ avec $d(x, C) < r$ et tout $\xi \in \partial^p d_C(x)$.
On distingue deux cas :
Cas 1 : Si $x \in C$, alors d'après (III)$'$ on a pour tout $x' \in H$ avec $d(x', C) < r$

$$\langle \xi, x' - x \rangle \leq \frac{2}{r}\|x' - x\|^2 + d(x', C) - d(x, C). \tag{2.4}$$

Cas 2 : Si $x \notin C$. Observons tout d'abord que $\xi \in \partial^p d_{C(r')}(x')$. En effet, D'après le **Théorème 4.1** et le **Théorème 4.3** dans [6] on a

$$\partial^p d_C(x) = N^p(C(r'), x) \cap \{\xi : \|\xi\| = 1\} \subset \partial^p d_{C(r')}(x),$$

et donc pour ξ finie dans $\partial^p d_C(x)$, on trouve que $\xi \in \partial^p d_{C(r')}(x)$. Par **(VI)**, pour tout $x' \in H$ avec $d(x', C) < r$ on a

$$\langle \xi, x' - x \rangle \leq \frac{2}{r - r'}\|x' - x\|^2 + d(x', C(r')).$$

Par conséquent, pour tout $x' \in H$ satisfaisant $d(x', C) < r$ et $x' \notin C(r')$, i.e., $r' < d_C(x') < r$ et en tenant compte du **Lemme 2. 6** on trouve que

$$\langle \xi, x' - x \rangle \leq \frac{2}{r - r'}\|x' - x\|^2 + d(x', C) - d(x, C).$$

Fixons maintenant $x' \in H$ satisfaisant $d(x', C) < r$ et $x' \in C(r')$, alors **(VI)** nous donne

$$\langle \xi, y - x \rangle \leq \frac{2}{r - r'}\|y - x\|^2, \tag{2.5}$$

avec $y \in H$ et $d(y, C) \leq r'$. En accordant à $\|\xi\| = 1$, choisissons $u \in H$ avec $\|u\| = 1$ et tel que $\langle \xi, u \rangle = 1$. Posons $t := d(x, C) - d(x', C) \geq 0$. Alors, $x' + tu \in C(r')$. En effet

$$d(x' + tu, C) \leq d(x', C) + t = d(x, C) = r'$$

De plus, d'après l'inégalité **(2.5)**

$$\begin{aligned} \langle \xi, x' - x \rangle &= \langle \xi, x' + tu - x \rangle - \langle \xi, tu \rangle & (2.6) \\ &\leq \frac{2}{r - r'} \|x' + tu - x\|^2 - t. & (2.7) \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \|x' + tu - x\| &\leq \|x' - x\| + t \\ &\leq 2\|x' - x\|. \end{aligned}$$

On en déduit donc d'après **(2.7)** que

$$\langle \xi, x' - x \rangle \leq \frac{8}{r - r'} \|x' - x\|^2 + d(x', C) - d(x, C).$$

Alors, d'après **(2.4), (2.5)** et la dernière inégalité, on trouve que, pour tout $x \in H$ avec $d(x, C) < r$ et tout $\xi \in \partial^p d_C(x)$

$$\langle \xi, x' - x \rangle \leq \frac{8}{r - r'} \|x' - x\|^2 + d(x', C) - d(x, C).$$

Pour tout $x' \in H$ avec $d(x', C) < r$. Prenons la continuité des deux membres de l'inégalité en compte, on peut remplace $d(x', C) < r$ par $d(x, C) < r$. Ce qui achève la démonstration.

■

Lemme 2.8. *Soit $C \in \mathrm{H}$ un sous ensembles fermés non vide qui est r-prox régulier. Soit $x \in C$ et $\xi \in \partial^p d_C(x)$. Alors, pour tout $z \in \mathrm{H}$ tel que $d(z, C) < r$, on a*

$$\langle \xi, z - x \rangle \leq \frac{1}{2r} \|z - x\|^2 + \frac{1}{2r} d^2(z, C) + (\frac{1}{r} \|z - x\| + 1) d(z, C), \tag{2.8}$$

et

$$\langle \xi, z - x \rangle \leq \frac{2}{r} \|z - x\|^2 + d(z, C). \tag{2.9}$$

Démonstration. On fixe $z \in \mathrm{H}$ avec $d(z, C) < r$, l'ensemble C est r-prox régulier, soit y_z l'unique point de C qui satisfait

$$d(z, C) = \|z - y_z\|.$$

on a

$$
\begin{aligned}
\|x-y_z\|^2 &= \langle x-y_z, x-y_z\rangle \\
&= \langle x-z+z-y_z, x-z+z-y_z\rangle \\
&= \langle x-z, x-z\rangle + \langle z-y_z, x-z\rangle + \langle x-z, z-y_z\rangle + \langle z-y_z, z-y_z\rangle \\
&= \|x-z\|^2 + 2\langle x-z, z-y_z\rangle + \|z-y_z\|^2 \\
&= \|z-x\|^2 + 2\langle x-z, z-y_z\rangle + d^2(z,C) \\
&\leq \|z-x\|^2 + 2\|x-z\|\|z-y_z\| + d^2(z,C)
\end{aligned}
$$

donc

$$\|x-y_z\|^2 \leq \|z-x\|^2 + 2\|x-z\|d(z,C) + d^2(z,C), \tag{2.10}$$

alors, puisque $d(z,C) \leq \|z-x\|$, on trouve que

$$\|x-y_z\|^2 \leq 4\|z-x\|^2. \tag{2.11}$$

D'autre part

$$
\begin{aligned}
\langle \xi, z-x\rangle &\leq \langle \xi, y_z-x\rangle + \langle \xi, z-y_z\rangle \\
&\leq \langle \xi, y_z-x\rangle + \|\xi\|d(z,C),
\end{aligned}
$$

comme $\xi \in \partial^p d_C(x)$, nous avons $\|\xi\| \leq 1$, par conséquent, on a

$$\langle \xi, z-x\rangle \leq \frac{1}{2r}\|y_z-x\|^2 + d(z,C),$$

en utilisant **(2.10)** et **(2.11)** respectivement, cela donne

$$\langle \xi, z-x\rangle \leq \frac{1}{2r}\|z-x\|^2 + \frac{1}{2r}d^2(z,C) + \frac{1}{r}\|z-x\|d(z,C) + d(z,C),$$

et

$$\langle \xi, z-x\rangle \leq \frac{2}{r}\|z-x\|^2 + d(z,C),$$

ce qui achève la démonstration du lemme. ∎

Lemme 2.9. *Soit $r>0$, supposons que $C(t)$ soit r-prox régulier pour tout $t \in [0,T]$, et qu'il existe une fonction absolument continue $v : [0,T] \to \mathbb{R}$ telle que*

$$|d(x,C(t)) - d(x,C(s))| \leq |v(t)-v(s)| \quad \forall s,t \in [0,T].$$

Soit $(t_n)_n$ une suite dans $[0,T]$ convergeant vers $t \in [0,T]$ avec $t_n \geq t$ pour tout n. Soit $(x_n)_n$ une suite de $C(t_n)$ convergeant vers $x \in C(t)$. Alors, pour tout $z \in H$

$$\limsup_n \sigma(\partial^p d_{C(t_n)}(x_n), z) \leq \sigma(\partial^p d_{C(t)}(x), z)$$

Autrement dit, $\partial^p d_{C(t)}$ est scalairement semi continue supérieurement.

Démonstration. Fixons $z \in H$, par extraction d'une sous-suite, on peut supposer que $\sigma(\partial^p d_{C(t_n)}(x_n), z)$ converge, et par suite

$$\limsup_{n\to 0} \sigma(\partial^p d_{C(t_n)}(x_n), z) = \lim_{n\to 0} \sigma(\partial^p d_{C(t_n)}(x_n), z),$$

comme $C(t_n)$ est r-prox régulier, on trouve alors que

$$\partial^p d_{C(t_n)}(x_n) = \partial^c d_{C(t_n)}(x_n).$$

et donc $\partial^p d_{C(t_n)}(x_n)$ est faiblement compact, d'où, pour chaque n, il existe $\xi_n \in \partial^p d_{C(t_n)}(x_n)$ tel que

$$\sigma(\partial^p d_{C(t_n)}(x_n), z) = \langle \xi_n, z \rangle,$$

comme $\|\xi_n\| \leq 1$ pour tout n, on peut supposer par extraction d'une sous suite que (ξ_n) converge faiblement vers $\xi \in H$. Montrons maintenant que $\xi \in \partial^c d_{C(t)}(x)$.
Fixons $u \in H$. Comme $x_n \in C(t_n)$, pour $s > 0$ assez petit, on a

$$d(x_n - su, C(t_n)) \leq s\|u\| < r,$$

pour chaque n. Alors, pour $s > 0$ assez petit, on a d'après le **Lemme 2.8** :

$$\langle \xi_n, su \rangle \leq \frac{2}{r} s^2 \|u\|^2 + d(x_n + su, C(t_n)),$$

pour tout n. En faisant tendre n vers l'infini, et comme

$$d(x_n + su, C(t_n)) \to d(x + su, C(t_n)),$$

on obtient

$$\langle \xi, su \rangle \leq \frac{2}{r} s^2 \|u\|^2 + d(x + su, C(t)).$$

comme $d(x, C(t)) = 0$ alors

$$\begin{aligned}\langle \xi, u \rangle &\leq \liminf_{s\to 0} \frac{1}{s}[d(x + su, C(t)) - d(x, C(t))] \\ &\leq d^0(x; u, C(t)),\end{aligned}$$

ce qui montre que $\xi \in \partial^c d_{C(t)} x = \partial^p d_{C(t)} x$, par conséquent

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sigma(\partial^p d_{C(t_n)}(x_n), z) &= \lim_{n\to\infty} \langle \xi_n, z \rangle \\ &= \langle \xi, z \rangle \\ &\leq \sigma(\partial^p d_{C(t)} x, z),\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. ■

Théorème 2.10. *Soient r une constante strictement positive, C et C' des ensembles r-prox réguliers de l'espace de Hilbert H, avec* $\mathrm{Haus}(C, C') < r$, *et soit* $\gamma \in]0,1[$. *Alors, pour tout $\omega, \omega' \in H$ tels que $d(\omega, C) < \gamma r$ et $d(\omega', C') < \gamma r$ on a*

$$\|\mathrm{Proj}_C(\omega) - \mathrm{Proj}_{C'}(\omega')\| \leq (1-\gamma)^{-1}\|\omega - \omega'\| + \sqrt{\frac{2\gamma r}{1-\gamma}}(\mathrm{H}aus(C, C'))^{1/2}.$$

Démonstration. Fixons $\omega, \omega' \in H$ tels que $d(\omega, C) < \gamma r$ et $d(\omega', C') < \gamma r$ et on pose $x := \mathrm{Proj}_C(\omega)$, $y := \mathrm{Proj}_{C'}(\omega')$ et $h := \mathrm{H}aus(C, C')$. Comme $y \in C'$, on trouve donc que

$$d(y, C) \leq h.$$

Supposons que $x \neq \omega$ et $y \neq \omega'$. Alors, grâce à la **Proposition 2.7**, on obtient

$$x \in \mathrm{Proj}_C\big(x + r\frac{\omega - x}{\|\omega - x\|}\big),$$

et

$$y \in \mathrm{Proj}_{C'}\big(y + r\frac{\omega' - y}{\|\omega' - y\|}\big),$$

ce qui montre que, pour tout $z \in C$ on a

$$\begin{aligned}
\left\|x + r\frac{\omega - x}{\|\omega - x\|} - y\right\| &= \left\|x + r\frac{\omega - x}{\|\omega - x\|} - z + z - y\right\| \\
&\geq \left\|x + r\frac{\omega - x}{\|\omega - x\|} - z\right\| - \|z - y\| \\
&\geq d(x + r\frac{\omega - x}{\|\omega - x\|}, C) - \|z - y\| \\
&\geq r - \|z - y\|,
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\left\|x + r\frac{\omega - x}{\|\omega - x\|} - y\right\| \geq r - d(y, c),$$

il s'ensuite donc que

$$r - h \leq r - d(y, c) \leq \left\|x + r\frac{\omega - x}{\|\omega - x\|} - y\right\|.$$

Puisque $r - h \geq 0$, en quadrillant les deux membres de l'inégalité, on trouve que

$$\begin{aligned}
(r-h)^2 &\leq \left\|x + r\frac{\omega - x}{\|\omega - x\|} - y\right\|^2 \\
&\leq \left\|(x - y) + r\frac{\omega - x}{\|\omega - x\|}\right\|^2 \\
&= \left\langle (x - y) + r\frac{\omega - x}{\|\omega - x\|}, (x - y) + r\frac{\omega - x}{\|\omega - x\|} \right\rangle \\
&= \|x - y\|^2 + r^2\frac{\|\omega - x\|^2}{\|\omega - x\|^2} + 2r\left\langle x - y, \frac{\omega - x}{\|\omega - x\|} \right\rangle \\
&= \|x - y\|^2 + r^2 + \frac{2r}{\|\omega - x\|}\langle \omega - x, x - y \rangle,
\end{aligned}$$

d'où
$$r^2 - 2rh \le r^2 - 2rh + h^2 \le \|x-y\|^2 + \frac{2r}{\|\omega - x\|}\langle \omega - x, x-y\rangle + r^2,$$
ce qui est équivalente à

$$-2rh \le \|x-y\|^2 + \frac{2r}{\|\omega - x\|}\langle \omega - x, x-y\rangle,$$
d'où
$$\|\omega - x\|(\|x-y\|^2 + 2rh) \ge 2r\langle \omega - x, y-x\rangle,$$
ce qui donne sans restriction $x \neq \omega$ que
$$\gamma r(\|x-y\|^2 + 2rh) \ge 2r\langle \omega - x, y-x\rangle, \tag{2.12}$$
d'une manière analogue on trouve que
$$\gamma r(\|x-y\|^2 + 2rh) \ge 2r\langle \omega' - y, x-y\rangle, \tag{2.13}$$
en additionnant les deux inégalités, on obtient
$$2\gamma r(\|x-y\|^2 + 2rh) \ge 2r\langle \omega' - y - \omega + x, x-y\rangle,$$
d'où
$$2\gamma(\|x-y\|^2 + 2rh) \ge \langle \omega' - \omega, x-y\rangle + \|x-y\|^2,$$
alors
$$2\gamma rh + \langle \omega' - \omega, x-y\rangle \ge (1-\gamma)\|x-y\|,$$
d'après Chauchy-Schwartz, on trouve que
$$2rh\gamma + \|\omega - \omega'\|\|x-y\| \ge (1-\gamma)\|x-y\|^2,$$
et par suite
$$\frac{2rh\gamma}{1-\gamma} + \frac{1}{1-\gamma}\|\omega - \omega'\|\|x-y\| \ge \|x-y\|^2,$$
cela implique que
$$\begin{aligned}\frac{2rh\gamma}{1-\gamma} &\ge \|x-y\|^2 - \frac{1}{1-\gamma}\|\omega - \omega'\|\|x-y\| \\ &\ge \left(\|x-y\| - \frac{1}{2(1-\gamma)}\|\omega - \omega'\|\right)^2 - \left(\frac{1}{2(1-\gamma)}\|\omega - \omega'\|\right)^2,\end{aligned}$$
alors
$$\begin{aligned}\left(\|x-y\| - \frac{1}{2(1-\gamma)}\|\omega - \omega'\|\right)^2 &\le \frac{2r\gamma h}{1-\gamma} + \left(\frac{1}{2(1-\gamma)}\|\omega - \omega'\|\right)^2 \\ &\le \left(\sqrt{\frac{2\gamma rh}{1-\gamma}} + \frac{1}{2(1-\gamma)}\|\omega - \omega'\|\right)^2,\end{aligned}$$

par conséquent,

$$\|x-y\| - \frac{1}{2(1-\gamma)}\|\omega-\omega'\| \leq \sqrt{\frac{2\gamma rh}{1-\gamma}} + \frac{1}{2(1-\gamma)}\|\omega-\omega'\|,$$

donc

$$\|x-y\| \leq \sqrt{\frac{2r\gamma}{1-\gamma}}\Big(\mathrm{H}aus(C,C')\Big)^{1/2} + (1-\gamma)^{-1}\|\omega-\omega'\|,$$

d'où

$$\|\mathrm{Proj}_C(\omega) - \mathrm{Proj}_{C'}(\omega')\| \leq (1-\gamma)^{-1}\|\omega-\omega'\| + \sqrt{\frac{2r\gamma}{1-\gamma}}\Big(\mathrm{H}aus(C,C')\Big)^{1/2}.$$

■

Remarque 2.11. *Ce résultat est valable lorsque C dépend du temps et de l'état r-prox régulier satisfaisant la condition suivante*

$$|d(x,C(t,u)) - d(x,C(t,v))| \leq L\|u-v\|, \tag{2.14}$$

*où $t \in [0,T]$, $x,u,v \in H$ et L est une constante réelle positive. En effet, l'inégalité **(2.14)** est équivalente à*

$$\mathrm{H}aus(C(t,u),C(t,v)) \leq L\|u-v\|.$$

On applique donc le **Théorème 2.10** on obtient le résultat.

Corollaire 2.12. *Soit $C(t,u)$ un ensemble r-prox régulier de l'espace de Hilbert H de constante $r>0$ qui satisfait **(2.14)** et soit $\gamma \in]0,1[$, Alors, pour tous $u,v \in H$ avec $L\|u-v\| \leq r$ et pour tout $x \in H$ tel que $d(x,C(t,u)) < \gamma r$ et $d(x,C'(t,v)) < \gamma r$ on a*

$$\|\mathrm{Proj}_{C(t,u)}(x) - \mathrm{Proj}_{C(t,v)}(x)\| \leq \sqrt{\frac{2\gamma rL}{1-\gamma}}\|u-v\|^{1/2}.$$

Démonstration. On a d'après le **Théorème 2.10**

$$\|\mathrm{P}_C(\omega) - \mathrm{P}_{C'}(\omega')\| \leq (1-\gamma)^{-1}\|\omega-\omega'\| + \sqrt{\frac{2\gamma r}{1-\gamma}}(\mathrm{H}aus(C,C'))^{1/2}.$$

pour tout $x \in H$ tel que $d(x,C(t,u)) < \gamma r$ et $d(x,C'(t,v)) < \gamma r$, on a

$$\begin{aligned}\|\mathrm{Proj}_{C(t,u)(x)} - \mathrm{Proj}_{C(t,v)}\| &\leq (1-\gamma)^{-1}\|x-x\| + \sqrt{\frac{2\gamma r}{1-\gamma}}(\mathrm{H}aus(C,C'))^{1/2}\\ &\leq \sqrt{\frac{2\gamma r}{1-\gamma}}(\mathrm{H}aus(C,C'))^{1/2}\\ &\leq \sqrt{\frac{2\gamma r}{1-\gamma}}(L\|u-v\|)^{1/2},\end{aligned}$$

d'où

$$\|\mathrm{Proj}_{C(t,u)}(x) - \mathrm{Proj}_{C(t,v)}(x)\| \leq \sqrt{\frac{2\gamma r}{1-\gamma}L}\|u-v\|^{1/2}.$$

$\blacksquare$

Chapitre 3

Résultats d'existence de solutions pour le processus de Rafle perturbé

soient $C : [0,T] \times \mathrm{H} \rightrightarrows \mathrm{H}$ une multi-application à valeurs non vides fermées et $G : [0,T] \times \mathrm{H} \rightrightarrows \mathrm{H}$ une autre multi-application à valeurs non vides convexes fermées et qui satisfait les conditions suivantes

$(\mathcal{H}_1)$ G est scalairement semi-continue supérieurement par rapport aux deux variables et pour un certain réel $\alpha > 0$ on a

$$d(0, G(t,u)) \leq \alpha,$$

pour chaque $t \in [0,T]$ et chaque $u \in \mathrm{H}$ avec $u \in C(t,u)$,
$(\mathcal{H}_2)$ Il existe une constante $r > 0$ tel que, pour chaque $t \in [0,T]$ et $u \in \mathrm{H}$, les ensembles $C(t,u)$ sont r-prox-réguliers,

$(\mathcal{H}_3)$ Il existe des constantes réelles $L_1 > 0$, $L_2 \in]0,1[$ telles que pour tous $t, s \in [0,T]$ et pour tous $x, y, u, v \in \mathrm{H}$ on a

$$|d(x, C(t,u)) - d(y, C(s,v))| \leq \|x - y\| + L_1|t - s| + L_2\|u - v\|,$$

$(\mathcal{H}_4)$ Pour tout sous-ensemble borné $A \subset \mathrm{H}$, l'ensemble $C([0,T] \times A)$ est relativement compact, i.e., l'intersection de $C([0,T] \times A)$ avec tout boule fermée de H est relativement compacte dans H.

Théorème 3.1. *Soit* H *un espace de Hilbert. Supposons que les hypothèses* $(\mathcal{H}_1)-(\mathcal{H}_4)$*sont satisfaites. Alors, pour* $u_0 \in$ H *avec* $u_0 \in C(0, u_0)$*, il existe une application Lipschitzienne continue* $u : [0, T] \to$ H *telle que*

$$(\mathcal{D}) \quad \begin{cases} \dot{u}(t) \in -N^c_{C(t,u(t))}(u(t)) + G(t, u(t)) & p.p \quad t \in [0, T], \\ u(t) \in C(t, u(t)) & \forall t \in [0, T], \\ u(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}(s)ds & \forall t \in [0, T]. \end{cases}$$

Autrement dit, $u(.)$ *est la solution Lipschitzienne de l'inclusion différentielle* $(\mathcal{D})$ *avec*

$$\|\dot{u}(t)\| \leq \frac{L_1 + 2\alpha}{1 - L_2} \quad t \in [0, T].$$

Démonstration. Nous allons construire une suite d'applications absolument continues $(u_n(.))_n$ dont la sous-suite converge ponctuellement vers une solution de $(\mathcal{D})$.
Considérons un entier $p \geqslant 1$ tel que

$$\frac{T}{p} < \frac{r(1 - L_2)}{4(\alpha(1 + 3L_2) + L_1(1 + L_2))}, \tag{3.1}$$

pour chaque entier $n \geqslant 1$, on considère la partition de $[0, T]$ par les points $t^n_k = k\frac{T}{p^n}, k = 0, 1, ..., p^n$. Pour chaque $(t, x) \in [0, T] \times$ H, notons par $g(., .)$ l'élément de norme minimale de l'ensemble convexe fermé $G(t, x)$ de H définit par :

$$g(t, x) = \text{Proj}_{G(t,x)}(0).$$

On pose $x^n_0 := u_0 \in C(t^n_0, u_0)$.
Étape 1 :
Nous construisons $x^n_0, x^n_1, ..., x^n_{p^n}$ dans H tel que pour chaque $k = 0, 1, ..., p^n - 1$, les inclusions suivantes sont satisfaites

$$x^n_{k+1} \in C(t^n_{k+1}, x^n_{k+1}), \tag{3.2}$$

$$x^n_k + \frac{T}{p^n} g(t^n_k, x^n_k) - x^n_{k+1} \in N^c_{C(t^n_{k+1}, x^n_{k+1})}(x^n_{k+1}), \tag{3.3}$$

ainsi que l'inégalité

$$\|x^n_{k+1} - x^n_k\| \leqslant \frac{L_1 + 2\alpha}{1 - L_2} \frac{T}{p^n}. \tag{3.4}$$

Observons tout d'abord par $(\mathcal{H}_1)$, que $\|g(t_0^n, u_0)\| \leq \alpha$. Alors pour tout $v \in B\left(u_0, 2\dfrac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\dfrac{T}{p^n}\right)$ nous avons

$$\begin{aligned}
d\left(u_0 + \frac{T}{p^n} g(t_0^n, u_0), C(t_1^n, v)\right) &= d\left(u_0 + \frac{T}{p^n} g(t_0^n, u_0), C(t_1^n, v)\right) + d\left(u_0 + \frac{T}{p^n} g(t_0^n, u_0), C(t_0^n, v)\right) \\
&\quad - d\left(u_0 + \frac{T}{p^n} g(t_0^n, u_0), C(t_0^n, v)\right) \\
&\leq d\left(u_0 + \frac{T}{p^n} g(t_0^n, u_0), C(t_0^n, v)\right) + L_1|t-s| + L_2\|v-u_0\| \\
&\leq \left\|u_0 - u_0 + \frac{T}{p^n} g(t_0^n, u_0)\right\| + L_1\frac{T}{p^n} + 2L_2\frac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\frac{T}{p^n} \\
&\leq \left\|\frac{T}{p^n} g(t_0^n, u_0)\right\| + L_1\frac{T}{p^n} + 2L_2\frac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\frac{T}{p^n} \\
&\leq \frac{T}{p^n}\|g(t_0^n, u_0)\| + L_1\frac{T}{p^n} + 2L_2\frac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\frac{T}{p^n} \\
&\leq \alpha\frac{T}{p^n} + L_2\frac{T}{p^n} + 2L_2\frac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\frac{T}{p^n} \\
&\leq \left(\alpha + L_1 + 2L_2\frac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\right)\frac{T}{p^n} \\
&\leq \frac{\alpha(1+3L_2) + L_1(1+L_2)}{1-L_2}\frac{T}{p^n} \\
&< \frac{1}{2}r.
\end{aligned}$$

Puisque $C(t_1^n, v)$ est r-prox-régulier, d'après le **Théorème 2.7** nous donne, pour chaque $v \in B\left(u_0, 2\dfrac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\dfrac{T}{p^n}\right)$, l'application $\phi_1 : B\big(u_0, 2\dfrac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\big)$ donnée par

$$\phi_1(v) := \mathrm{Proj}_{C(t_1^n, v)}\left(u_0 + \frac{T}{p^n} g(t_0^n, u_0)\right) \tag{3.5}$$

est bien définie. Prenons en compte le **Corollaire 2.12**, $(\mathcal{H}_2), (\mathcal{H}_3)$ et **(3.1)**, on voit que l'application ϕ_1 est localement hölderienne. De plus, pour tout $v \in B\left[u_0, \dfrac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\dfrac{T}{p^n}\right]$, nous avons $\phi_1(v) \in B\left[u_0, \dfrac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\dfrac{T}{p^n}\right]$. En effet, pour chaque v, il découle, de la définition de ϕ_1 et par l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$, que

$$\begin{aligned}
\|\phi_1(v)-u_0\| &= \left\|\phi_1(v)-u_0+\frac{T}{p^n}g(t_0^n,u_0)-\frac{T}{p^n}g(t_0^n,u_0)\right\| \\
&\leqslant \left\|\phi_1(v)-\left(u_0+\frac{T}{p^n}g(t_0^n,u_0)\right)\right\|+\|\frac{T}{p^n}g(t_0^n,u_0)\| \\
&= d\left(u_0+\frac{T}{p^n}g(t_0^n,u_0),C(t_1^n,v)\right)+\frac{T}{p^n}\|g(t_0^n,u_0)\| \\
&= d\left(u_0+\frac{T}{p^n}g(t_0^n,u_0),C(t_1^n,v)\right)+d\left(u_0+\frac{T}{p^n}g(t_0^n,u_0),C(t_0^n,v)\right) \\
&\quad - d\left(u_0+\frac{T}{p^n}g(t_0^n,u_0),C(t_0^n,v)\right)+\frac{T}{p^n}\|g(t_0^n,u_0)\| \\
&\leqslant d\left(u_0+\frac{T}{p^n}g(t_0^n,u_0),C(t_0^n,v)\right)+L_1|t_1^n-t_0^n|+L_2\|v-u_0\|+\frac{T}{p^n}\|g(t_0^n,u_0)\| \\
&\leqslant \frac{T}{p^n}\|g(t_0^n,u_0)\|+L_1|t_1^n-t_0^n|+L_2\|v-u_0\|+\frac{T}{p^n}\|g(t_0^n,u_0)\| \\
&\leqslant \left(2\alpha+L_1+L_2\frac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\right)\frac{T}{p^n} \\
&= \frac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\frac{T}{p^n},
\end{aligned}$$

par conséquent, pour tout $v \in B\left[u_0,\dfrac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\dfrac{T}{p^n}\right]$, on a

$$\phi_1(v) \in C\left(t_1^n, B\left[u_0,\frac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\frac{T}{p^n}\right]\right)\bigcap B\left[u_0,\frac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\frac{T}{p^n}\right].$$

D'après l'hypothèse $(\mathcal{H}_4)$, l'ensemble $\phi_1\left(B\left[u_0,\dfrac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\dfrac{T}{p^n}\right]\right)$ est relativement compact, et par suite l'application ϕ_1 est continue de l'ensemble convexe fermé $B\left[u_0,\dfrac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\dfrac{T}{p^n}\right]$ dans lui même et l'image de $B\left[u_0,\dfrac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\dfrac{T}{p^n}\right]$ par ϕ_1 est relativement compact. On peut alors appliquer à l'application ϕ_1, le théorème du point fixe de Schauder on trouve qu'il existe un certains $x_1^n \in B\left[u_0,\dfrac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\dfrac{T}{p^n}\right]$ tel que $x_1^n=\phi_1(x_1^n)$. Cela assure, en particulier, que

$$x_1^n \in C(t_1^n,x_1^n) \text{ et } \|x_1^n-x_0^n\| \leq \frac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\tfrac{T}{p^n},$$

et par la relation **(3.5)**

$$u_0+\tfrac{T}{p^n}g(t_0^n,u_0)-x_1^n \in N^c_{C(t_1^n,x_1^n)}(x_1^n).$$

On suppose maintenant que pour $0, 1, ..., k+1$, avec $k+1 \leq p^n-1$, les points $x_0^n, x_1^n, ..., x_{k+1}^n$ ont été construits de manière à ce que les propriétés **(3.2)**,**(3.3)** et **(3.4)** soient vérifient. Par construction,

$$x_{k+1}^n \in C(t_{k+1}^n, x_{k+1}^n),$$

et donc selon $(\mathcal{H}_1)$,

$$\|g(t_{k+1}^n, x_{k+1}^n)\| \leq \alpha.$$

D'autre part, pour tout $v \in B(x_{k+1}^n, 2\dfrac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\frac{T}{p^n})$, nous avons

$$\begin{aligned}
d\Big(x_{k+1}^n + \frac{T}{p^n}g(t_{k+1}^n, x_{k+1}^n), C(t_{k+2}^n, v)\Big) &= d\Big(x_{k+1}^n + \frac{T}{p^n}g(t_{k+1}^n, x_{k+1}^n), C(t_{k+2}^n, v)\Big) \\
&+ d\Big(x_{k+1}^n + \frac{T}{p^n}g(t_{k+1}^n, x_{k+1}^n), C(t_{k+1}^n, x_{k+1}^n)\Big) \\
&- d\Big(x_{k+1}^n + \frac{T}{p^n}g(t_{k+1}^n, x_{k+1}^n), C(t_{k+1}^n, x_{k+1}^n)\Big) \\
&\leq d\Big(x_{k+1}^n + \frac{T}{p^n}g(t_{k+1}^n, x_{k+1}^n), C(t_{k+1}^n, x_{k+1}^n)\Big) + L_1|t_{k+2}^n - t_{k+1}^n| \\
&+ L_2\|v - x_{k+1}^n\| \\
&\leq \Big\|x_{k+1}^n - x_{k+1}^n + \frac{T}{p^n}g(t_{k+1}^n, x_{k+1}^n\Big\| + L_1\frac{T}{p^n} + 2L_2\frac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\frac{T}{p^n} \\
&= \frac{T}{p^n}g(t_{k+1}^n, x_{k+1}^n\| + L_1\frac{T}{p^n} + 2L_2\frac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\frac{T}{p^n} \\
&= \Big(\alpha + L_1 + 2L_2\frac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\Big)\frac{T}{p^n} \\
&= \frac{\alpha(1+3L_2) + L_1(1+L_2)}{1-L_2}\frac{T}{p^n},
\end{aligned}$$

et d'après **(3.1)** on trouve que

$$d\Big(x_{k+1}^n + \frac{T}{p^n}g(t_{k+1}^n, x_{k+1}^n), C(t_{k+2}^n, v)\Big) < \frac{1}{2}r,$$

d'après la **Théorème 2.7** et grâce à la r-prox-régularité de $C(t_{k+2}^n, v)$ on trouve que l'application $\phi_{k+2}(v) : B\Big[x_{k+1}^n, 2\dfrac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\dfrac{T}{p^n}\Big] \to H$ donnée par

$$\phi_{k+2}(v) := \mathrm{Proj}_{C(t_{k+2}^n, v)}\Big(x_{k+1}^n + \frac{T}{p^n}g(t_{k+1}^n, x_{k+1}^n)\Big) \tag{3.6}$$

est bien définie, localement hölderienne continue, et pour tout $v \in B[x^n_{k+1}, 2\frac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\frac{T}{p^n}]$, nous avons

$$\phi_{k+2}(v) \in C\left(t^n_{k+2}, B\left[x^n_{k+1}, \frac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\frac{T}{P^n}\right]\right) \bigcap B\left[x^n_{k+1}, \frac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\frac{T}{P^n}\right]. \qquad (3.7)$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\|\phi_{k+2}(v) - x^n_{k+1}\| &= \left\|\phi_{k+2}(v) - x^n_{k+1} + \frac{T}{p^n}g(t^n_{k+1}, x^n_{k+1}) - \frac{T}{p^n}g(t^n_{k+1}, x^n_{k+1})\right\| \\
&\le \left\|\phi_{k+2}(v) - \left(x^n_{k+1} + \frac{T}{p^n}g(t^n_{k+1}, x^n_{k+1})\right)\right\| + \left\|\frac{T}{p^n}g(t^n_{k+1}, x^n_{k+1})\right\| \\
&= d\left(x^n_{k+1} + \frac{T}{p^n}g(t^n_{k+1}, x^n_{k+1}), C(t^n_{k+2}, v)\right) + \frac{T}{p^n}\|g(t^n_{k+1}, x^n_{k+1})\| \\
&= d\left(x^n_{k+1} + \frac{T}{p^n}g(t^n_{k+1}, x^n_{k+1}), C(t^n_{k+2}, v)\right) + d\left(x^n_{k+1} + \frac{T}{p^n}g(t^n_{k+1}, x^n_{k+1}), C(t^n_{k+1}, x^n_{k+1})\right) \\
&\quad - d\left(x^n_{k+1} + \frac{T}{p^n}g(t^n_{k+1}, x^n_{k+1}), C(t^n_{k+1}, x^n_{k+1})\right) + \frac{T}{p^n}\|g(t^n_{k+1}, x^n_{k+1})\| \\
&\le d\left(x^n_{k+1} + \frac{T}{p^n}g(t^n_{k+1}, x^n_{k+1}), C(t^n_{k+1}, x^n_{k+1})\right) + L_1|t^n_{k+2} - t^n_{k+1}| + L_2\|v - x^n_{k+1}\| \\
&\quad + \frac{T}{p^n}g(t^n_{k+1}, x^n_{k+1})\| \\
&\le \frac{T}{p^n}\|g(t^n_{k+1}, x^n_{k+1})\| + L_1|t^n_{k+2} - t^n_{k+1}| + L_2\|v - x^n_{k+1}\| + \frac{T}{p^n}\|g(t^n_{k+1}, x^n_{k+1})\| \\
&\le 2\alpha\frac{T}{p^n} + L_1\frac{T}{p^n} + L_2\frac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\frac{T}{p^n} \\
&= \left(2\alpha + L_1 + L_2\frac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\right)\frac{T}{p^n} \\
&= \frac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\frac{T}{p^n}.
\end{aligned}$$

Cela justifie l'inclusion **(3.7)**, ensuite, par $(\mathcal{H}_4)$, l'ensemble $\phi_{k+2}\left(B\left[x^n_{k+1}, \frac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\frac{T}{p^n}\right]\right)$ est relativement compacte. Ainsi, l'application ϕ_{k+2} est continue de l'ensemble convexe fermé $B\left[x^n_{k+1}, \frac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\frac{T}{p^n}\right]$ dans lui même et l'image de $B\left[x^n_{k+1}, \frac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\frac{T}{p^n}\right]$ par ϕ_{k+2} est relativement compact. Nous pouvons ensuite appliquer à nouveau à l'application ϕ_{k+2} le théorème du point fixe de Schauder pour obtenir un élément $x^n_{k+2} \in B\left[x^n_{k+1}, \frac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\frac{T}{p^n}\right]$ tel que $x^n_{k+2} = \phi_{k+2}(x^n_{k+2})$. En particulier

$$x^n_{k+2} \in C(t^n_{k+2}, x^n_{k+2}) \text{ et } \|x^n_{k+2} - x^n_{k+1}\| \le \frac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\frac{T}{p^n}.$$

Par **(3.6)**

$$x^n_{k+1} + \frac{T}{p^n}g(t^n_{k+1}, x^n_{k+1}) - x^n_{k+2} \in N^c_{C(t^n_{k+2}, x^n_{k+2})}(x^n_{k+2}).$$

par conséquent, la construction de $x_0^n, x_1^n, ..., x_{p^n}^n$ est obtenue par induction de telle sorte que les propriétés **(3.2)**,**(3.3)** et **(3.4)** pour $k = 0, 1, ..., p^n - 1$ soient satisfaites.

Étape 2 : **la construction de** $u_n(.)$.
Pour tout $t \in [t_k^n, t_{k+1}^n]$ avec $k = 0, 1, ..., p^n - 1$, on pose

$$u_n(t) := \frac{t_{k+1}^n - t}{t_{k+1}^n - t_k^n} x_k^n + \frac{t - t_k^n}{t_{k+1}^n - t_k^n} x_{k+1}^n.$$

Alors, pour presque tous $t \in [t_k^n, t_{k+1}^n]$ on a

$$\begin{aligned}\dot{u}_n(t) &= -\frac{x_k^n}{t_{k+1}^n - t_k^n} + \frac{x_{k+1}^n}{t_{k+1}^n - t_k^n} \\ &= -\frac{1}{t_{k+1}^n - t_k^n}(x_k^n - x_{k+1}^n) \\ &= -\frac{1}{\frac{T}{p^n}}(x_k^n - x_{k+1}^n) \\ &= -\frac{p^n}{T}(x_k^n - x_{k+1}^n).\end{aligned}$$

Par construction et d'après **(3.2)**,**(3.3)**et**(3.4)** et les deux dernières égalités on trouve que :

$$u_n(t_{k+1}^n) \in C(t_{k+1}^n, u_n(t_{k+1}^n)), \tag{3.8}$$

et

$$-\dot{u}_n(t) \in N^c_{C(t_{k+1}^n, u_n(t_{k+1}^n))}(u_n(t_{k+1}^n)) - g(t_k^n, u_n(t_k^n)) \quad p.p \quad t \in [t_k^n, t_{k+1}^n[. \tag{3.9}$$

avec

$$\|\dot{u}_n(t)\| = \frac{p^n}{T}\|x_k^n - x_{k+1}^n\| \leq \frac{L_1 + 2\alpha}{1 - L_2} := M. \tag{3.10}$$

on pose

$$\delta_n(t) := \begin{cases} t_k^n & si \quad t \in [t_k^n, t_{k+1}^n[, \\ t_{p^n-1}^n & si \quad t = T, \end{cases}$$

et

$$\theta_n(t) := \begin{cases} t_{k+1}^n & si \quad t \in [t_k^n, t_{k+1}^n[, \\ T & si \quad t = T. \end{cases}$$

Observons que pour chaque $t \in [0, T]$, en choisissons k tels que $t \in [t_k^n, t_{k+1}^n[$ si $t < T$ et $k = p^n - 1$ si $t = T$, nous avons

$$|\delta_n(t)-t| \leq |t_{k+1}^n - t_k^n| = \frac{T}{p^n},$$

et

$$\|\theta_n(t)-t\| \leq |t_{k+1}^n - t_k^n| = \frac{T}{p^n},$$

alors

$$\delta_n(t) \longrightarrow t \text{ et } \theta_n(t) \longrightarrow t \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty.$$

En outre, pour chaque $t \in [t_k^n, t_{k+1}^n[$, les définitions de $\delta_n(.)$ et $\theta_n(.)$ et grâce les relations **(3.8)** et **(3.9)** on obtient

$$u_n(\theta_n(t)) \in C(\theta_n(t), u_n(\theta_n(t))), \tag{3.11}$$

et

$$-\dot{u}_n(t) \in N^c_{C(\theta_n(t),u_n(\theta_n(t)))}(u_n(\theta_n(t))) - g(\delta_n(t), u_n(\delta_n(t))), \quad p.p \quad t \in [0,T]. \tag{3.12}$$

Étape3 : **Convergence d'une sous suite de** $(u_n(.))_n$**vers une application absolument continue** $u(.)$

Pour chaque $k = 0, 1, ..., p^n - 1$, il résulte de **(3.4)** que

$$\|x_{k+1}^n - u_0\| \leq \|x_{k+1}^n - x_k^n\| + ... + \|x_1^n - x_0^n\| \leqslant (k+1)\frac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\frac{T}{p^n},$$

donc

$$\|x_{k+1}^n\| \leq \|u_0\| + \frac{L_1+2\alpha}{1-L_2}T =: \beta.$$

Fixons $t \in [0,T]$ et considérons, pour tout sous ensemble infini $N \subset \mathbb{N}$, la suite $(u_n(t))_{n\in N}$. Il découle de **(3.11)** que

$$u_n(\theta_n(t)) \in C(\theta_n(t), u_n(\theta_n(t))) \cap \beta\overline{\mathbb{B}},$$

ce qui implique que

$$u_n(\theta_n(t)) \in C([0,T]) \times \beta\overline{\mathbb{B}} \cap \beta\overline{\mathbb{B}}.$$

Par $(\mathcal{H}_4)$, la suite $(u_n(\theta_n(t)))$ est relativement compacte, il existe donc un sous-ensemble infini $N_0 \subset N$ tel que $(u_n(\theta_n(t)))_{n\in N_0}$ converge vers un vecteur $l(t) \in$ H. Posons $h_n(t) := u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)$ pour tout $n \in N_0$, **(3.10)**, on obtient

$$\|h_n(t)\| \leq \int_t^{\theta_n(t)} \|\dot{u}_n(s)\| ds \leq M(\theta_n(t) - t) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Alors, $u_n(t))_{n \in N_0}$ converge vers $l(t)$, tel que

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - l(t)\| &= \|u_n(t) + u_n(\theta_n(t)) - u_n(\theta_n(t)) - l(t)\| \\ &\leq \|h_n(t)\| + \|u_n(\theta_n(t)) - l(t)\| \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

De plus, d'après **(3.10)** la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équi-continue et relativement compacte dans $C_H(0,T)$, on peut alors extraire une sous suite qu'on la note aussi $(u_n)_n$ qui converge uniformément vers $u \in [0.T]$. On utilise une deuxième fois la relation **(3.10)**, on peut extraire une sous suite de $(\dot{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge faiblement $\sigma(L^1_H, L^\infty_H)$ dans $L^1_H(0,T)$ vers une application $\omega \in L^1_H(0,T)$ avec $\|\omega(t)\| \leq M$ p.p $t \in [0,T]$. Fixons $t \in [0,T]$ et prenons $\xi \in H$, la convergence faible de $(\dot{u}_n)$ vers ω dans $L^1_H(0,T)$ nous donne

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle \mathcal{I}_{[0,T]}(s)\xi, \dot{u}_n(s)\rangle ds &= \int_0^T \langle \mathcal{I}_{[0,T]}(s)\xi, \omega(s)\rangle ds \\ \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^T \xi \mathcal{I}_{[0,t]}(s)\dot{u}_n(s) ds &= \int_0^T \xi \mathcal{I}_{[0,t]}\omega(s) ds \\ \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^t \xi \dot{u}_n(s) ds &= \int_0^t \xi \omega(s) ds, \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle \xi, u_0 + \int_0^t \dot{u}_n(s) ds \right\rangle = \langle \xi, u_0 + \int_0^t \omega(s) ds \rangle,$$

alors

$$\langle \xi, u(t)\rangle = \langle \xi, u_0 + \int_0^t \omega(s) ds \rangle,$$

d'où

$$\langle \xi, u(t) - u_0 - \int_0^t \omega(s) ds \rangle = 0,$$

ce qui montre

$$u(t) - u_0 - \int_0^t \omega(s) ds \in \mathrm{H}^\perp = \{0\}$$

Et par suite

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \omega(s) ds,$$

on conclut donc que

$$\omega(s) = \dot{u}(s).$$

Cela signifie que, pour chaque $t \in [0,T], u_n(t) \rightharpoonup u_0 + \int_0^t \omega(s) ds$ lorsque $n \to \infty$ dans H. Puisque la suite $(u_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi fortement vers $u(t)$ dans H, on trouve que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \omega(s) ds,$$

alors l'application $u(.)$ est absolument continue sur $[0,T]$ avec $\dot{u}=\omega$. De plus, l'application $u(.)$ est Lipschitzienne de rapport $M>0$.

Étape 4 : **Nous montrons maintenant que u(.) est solution de** $(\mathcal{D})$.

Posons

$$z_n(t) := g(\delta_n(t), u_n(\delta_n(t))) \quad \text{pour tout } t\in[0,T],$$

et observons que z_n est une application étagée. Puisque $\|g(\delta_n(t),u_n(\delta_n(t)))\| \leq \alpha$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $t\in[0,T]$, on peut supposer par extraction d'une sous suite que la suite $(z_n(.))_n$ converge $\sigma(L^1_H, L^\infty_H)$ dans $L^1_H(0,T)$ vers une application $z(.)\in L^1_H(0,T)$ avec $\|z(t)\|\leq\alpha$ p.p. $t\in[0,T]$.

Pour tout $t\in[0,T]$, nous avons $u(t)\in Ct,u(t))$. En effet, par $(\mathcal{H}_3)$ et **(3.10)**, on a

$$\begin{aligned} d(u_n(t),C(t,u(t))) &\leq \|u_n(t)-u_n(\theta_n(t))\| + L_1|t-\theta_n(t)| + L_2\|u(t)-u_n(\theta_n(t))\| \\ &\leq (M+L_1)|t-\theta_n(t)| + L_2M|\theta_n(t)-t| + L_2\|u(t)-u_n(t)\|, \end{aligned}$$

alors $\quad d(u_n(t),C(t,u(t))) \longrightarrow 0$, lorsque $n\to\infty$,

et par suite

$$d(u(t),C(t,u(t)))=0,$$

et grâce à la fermeture des valeurs de C on trouve que

$$u(t)\in C(t,u(t)).$$

De plus, de l'inégalité

$$\|\dot{u}_n(t)-z_n(t)\| \leq M+\alpha =: \gamma \quad p.p.$$

et à partir de l'inclusion **(3.12)**, il on résulte, pour presque tout $t\in[0,T]$ que

$$-\dot{u}_n(t)+z_n(t) \in N^c_{C(\theta_n(t),u_n(\theta_n(t)))}(u_n(\theta_n(t))) \cap \gamma\overline{\mathbb{B}} \in \gamma\partial d_{C(\theta_n(t),u_n(\theta_n(t)))}(u_n(\theta_n(t))),$$

et

$$z_n(t)\in G(\delta_n(t),u_n(\delta_n(t))), \tag{3.13}$$

de plus $(-\dot{u}_n+z_n, z_n)_n$ converge faiblement dans $L^1_{H\times H}(0,T)$ vers $(-\dot{u}+z,z)$, selon le Lemme de Mazur, il existe

$$\xi_n \in co\{-\dot{u}_q+z_q : q\geq n\} \tag{3.14}$$

et

$$\zeta_n \in co\{z_q : q\geq n\} \tag{3.15}$$

tels que $(\xi_n,\zeta_n)_n$ converge fortement dans $L^1_{\mathrm{H}\times\mathrm{H}}(0,T)$ vers $(-\dot{u}+z,z)$. Par extraction d'une sous suite, on suppose que $(\xi_n(.),\zeta_n(.))_n$ converge presque partout vers $(-\dot{u}(.)+z(.),z(.))$, il existe donc un ensemble négligeable de Lebesgue $S\subset[0,T]$ tel que pour chaque $t\in[0,T]\setminus S$, d'une part $(\xi_n(t),\zeta_n(t))\to(-\dot{u}(t)+z(t),z(t))$ fortement dans H et d'autre part, les inclusions **(3.13)**, **(3.14)** et **(3.15)** sont satisfaites pour tout entier n ainsi que les inclusions

$$-\dot{u}(t)+z(t)\in\bigcap_n\overline{co}\{-\dot{u}_q(t)+z_q(t):q\geq n\},$$

et

$$z(t)\in\bigcap_n\overline{co}\{z_q(t):q\geq n\}.$$

Il en résulte de **(3.13)**, **(3.14)** et **(3.15)** que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour tout $t\in[0,T]\setminus S$, et pour tout $y\in H$ on a

$$\langle y,-\dot{u}_n(t)+z_n(t)\rangle\leq\sigma\big(y,\gamma\partial d_{C(\theta_n(t),u_n(\theta_n(t)))}(u_n(\theta_n(t)))\big),\tag{3.16}$$

et

$$\langle y,z_n(t)\rangle\leq\sigma(y,G(\delta_n(t),u_n(\delta_n(t)))).\tag{3.17}$$

De plus, pour chaque $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in[0,T]\setminus S$, de **(3.16)** et **3.17**, on obtient

$$\langle y,\xi_k(t)\rangle\leq\sup_{q\geq n}\langle y,-\dot{u}_q(t)+z_q(t)\rangle\quad\forall k\geq n$$

et

$$\langle y,\zeta_k(t)\rangle\leq\sup_{q\geq n}\langle y,z_q(t)\rangle\quad\forall k\geq n,$$

et prenons la limite lorsque $k\longrightarrow\infty$ on trouve que

$$\begin{aligned}\big\langle y,-\dot{u}(t)+z(t)\big\rangle&\leq\sup_{q\geq n}\big\langle y,-\dot{u}_q(t)+z_q(t)\big\rangle\\&\leq\sup_{q\geq n}\big(y,\gamma\partial d_{C(\theta_q(t),u_q(\theta_q(t)))}(u_q(\theta_q(t)))\big)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\langle y,z(t)\rangle&\leq\sup_{q\geq n}\langle y,z_q(t)\rangle\\&\leq\sup_{q\geq n}\sigma\big(y,G(\delta_q(t),u_q(\delta_q(t)))\big),\end{aligned}$$

ce qui assure que

$$\langle y,-\dot{u}(t)+z(t)\rangle\leq\limsup_{n\to+\infty}\sigma\big(y,\gamma\partial d_{C(\theta_n(t),u_n(\theta_n(t)))}(u_n(\theta_n(t)))\big),$$

et

$$\langle y,z(t)\rangle\leq\limsup_{n\to+\infty}\sigma(y,G(\delta_n(t),u_n(\delta_n(t)))).$$

D'après $(\mathcal{H}_3)$ et le **Lemme 2.9**, on trouve que chaque $y \in H$, la fonction réelle $\sigma(y, \gamma\partial d_{C(.,.)}(.))$ est semi-continue supérieurement sur $[0,T] \times H \times H$. En outre, $\sigma(y, G(.,.))$ est également semi-continue sur $[0,T] \times H$ par l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$. Il en résulte que, pour chaque $t \in [0,T] \setminus S$ et $y \in H$

$$\langle y, -\dot{u}(t) + z(t) \rangle \leq \sigma(y, \gamma\partial d_{C(t,u(t))}(u(t))),$$

et

$$\langle y, z(t) \rangle \leq \sigma(y, G(t, u(t))).$$

Alors

$$-\dot{u}(t) + z(t) \in \overline{co}(\gamma\partial d_{C(t,u(t))}(u(t))),$$

et

$$z(t) \in \overline{co}(G(t, u(t)),$$

comme $\partial d_{C(t,u(t))}$ et $G(t, y(t))$ sont convexes fermés et grâce à la **Proposition 1.15** on trouve donc que

$$-\dot{u}(t) + z(t) \in \gamma\partial d_{C(t,u(t))}(u(t)).$$

$$z(t) \in G(t, u(t)),$$

par conséquent

$$\dot{u}(t) \in -N^c_{C(t,u(t))} + z(t) \quad p.p.,$$

$$z(t) \in G(t, u(t)) \quad p.p.$$

avec

$$\|\dot{u}(t) - z(t)\| \leq \gamma.$$

Ce qui achève la preuve du Théorème. ■

Le théorème suivant montre qu'il existe une solution sur $\mathbb{R}_+$ pour le problème $(\mathcal{D})$.

Théorème 3.2. *Soit* H *un espace de Hilbert et soit* $G : \mathbb{R}_+ \times \mathrm{H} \rightrightarrows \mathrm{H}$ *une multi-application qui est scalairement semi-continue supérieurement par rapport aux deux variables. Supposons que les hypothèse suivantes sont vérifient :*

$(\mathcal{G}_1)$ *Il existe une fonction non négative* $\beta(.) \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+)$ *telle que*

$$d(0, G(t, u)) \leq \beta(t),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ *et* $u \in \mathrm{H}$ *avec* $u \in C(t,u)$,

$(\mathcal{G}_2)$ *Il existe une constante* $r > 0$ *telle que, pour chaque* $t \in \mathbb{R}_+$ *et chaque* $u \in \mathrm{H}$, *les ensembles* $C(t,u)$ *sont fermés non vides dans* H *et r-prox-réguliers,*

$(\mathcal{G}_3)$ *Il existe deux constantes réelles* $L_1 > 0, L_2 \in]0,1[$ *telles que pour tous* $t,s \in \mathbb{R}_+$ *et* $x,y,u,v \in H$, *on a*

$$|d(x, C(t,u)) - d(y, C(s,v))| \leq \|x-y\| + L_1|t-s| + L_2\|u-v\|,$$

$(\mathcal{G}_4)$ *Pour tout* $T > 0$ *réel et tout sous-ensemble borné* $A \subset \mathrm{H}$, *l'intersection de l'ensemble* $C([0,T] \times A)$ *avec une boule fermée de* H *est relativement compact dans* H.

Alors, pour $u_0 \in H$ *avec* $u_0 \in C(0,u_0)$, *il existe une application* $u : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{H}$ *qui est localement Lipschitzienne continue sur* $\mathbb{R}_+$ *et qui satisfait*

$$(\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}) \qquad \begin{cases} \dot{u}(t) \in -N^c_{C(t,u(t))}(u(t)) + G(t,u(t)) & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(t) \in C(t,u(t)) & \forall t \in \mathbb{R}_+, \\ u(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}(s)dx & \forall t \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Démonstration. Posons $T_k = k$ pour tout $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Il suffit d'appliquer le **Théorème 3.1** sur chaque intervalle $[T_k, T_{k+1}]$.
D'après les hypothèses$(\mathcal{G}_1) - (\mathcal{G}_4)$, nous avons $(\mathcal{H}_1) - (\mathcal{H}_4)$ sur l'intervalle $[T_0, T_1]$. Comme $u_0 \in C(T_0, u_0)$, Par le **Théorème 3.1**, il existe une application Lipschitzienne continue $u^0 : [T_0, T_1] \to \mathrm{H}$ telle que

$$\begin{cases} \dot{u}^0(t) \in -N^c_{C(t,u^0(t))}(u^0(t)) + G(t,u^0(t)) & p.p. \quad t \in [T_0,T_1], \\ u^0(t) \in C(t,u^0(t)) & \forall t \in [T_0,T_1], \\ u^0(T_0) = u_0. \end{cases}$$

Supposons que $u^0, ..., u^{k-1}$ ont construits de telle sorte que, pour $l = 0, ..., k-1, u^l : [T_l, T_{l+1}] \to H$ est Lipschitzienne continue, $u^l(T_l) = u^{l-1}(T_l)$, $u^l(t) \in C(t, u^l(t))$ pour tout $t \in [T_l, T_{l+1}]$ et

$$\dot{u^l}(t) \in -N^c_{C(t,u^l(t))}(u^l(t)) + G(t,u^l(t)) \quad p.p \quad t \in [T_l, T_{l+1}].$$

De manière analogue à ce qui précède, les hypothèses $(\mathcal{G}_1) - (\mathcal{G}_4)$ assure que les hypothèses $(\mathcal{H}_1) - (\mathcal{H}_4)$ sont satisfaites sur l'intervalle $[T_k, T_{k+1}]$ et que nous avons $u^{k-1}(T_k) \in$

$C(T_k, u^{k-1}(T_k))$. Il découle du **Théorème 3.1** qu'il existe une application Lipschitzienne continue $u^k : [T_k, T_{k+1}] \to \mathrm{H}$ tel que

$$\begin{cases} \dot{u}^k(t) \in -N^c_{C(t,u^k(t))}(u^k(t)) + G(t, u^k(t)) & p.p.t \in [T_k, T_{k+1}], \\ u^k(t) \in C(t, u^k(t)), & \forall t \in [T_k, T_{k+1}], \\ u^k(T_k) = u^{k-1}(T_k). \end{cases} \tag{3.18}$$

Soit $u : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{H}$ l'application défini par

$$u(t) := u^k(t) \text{ pour tout } \quad t \in [T_k, T_{k+1}], \text{ avec } k \in \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

On peut montrer facilement que u est localement Lipschitzienne continue sur $\mathbb{R}_+$, Donc par **(3.18)** on obtient

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in -N^c_{C(t,u(t))}(u(t)) + G(t, u(t)) & p.p. \in \mathbb{R}_+, \\ u(t) \in (t, u(t)) & \forall t \in \mathbb{R}_+, \\ u(0) = u^0(T_0) = u_0. \end{cases}$$

Cela prouve le théorème. ■

Conclusion

Dans ce mémoire on a présenté deux résultats d'existence pour le processus de Rafle du premier ordre avec une perturbation non bornée dans un espace de Hilbert ont été étudiés avec soin.
Il est remarquable que l'ensemble des contraintes soit éventuellement non borné et toutes les hypothèses principales (la continuités lipschitzienne et la compacité de l'ensemble des contraintes) sont plus faible que ceux utilisés dans les travaux antérieurs, ce qui permet plus d'applications dans la pratique.

Bibliographie

[1] **S. Adly. Ba. Khiet** , Unbounded Second-Ordre State-Dependent Moureau's Sweeping Process in Hilbert Space, Springer Verlage. 2016, 196, pp. 407-423.

[2] **J. P. Aubin, A. Cellina**, Differential inclusion, Set-Valued Maps and Viability Theory, Springer-verlag, Berlin(1984).

[3] **D. Azé**, Élément d'analyse convexe et variationnelle, Édition Marking. 1997.

[4] **H.Benabdellah**, Existence of solution to the nonconvex sweeping process. J. Differ. Equ. 164. 286-295(2000).

[5] **F. Bernicot et J. Venel**, Stochastic perturbation of sweeping process. Preprint, 2009.

[6]**M. Bounkhel**, Régularity concepts in Nonsmooth Analysis, Theory and Application, Optimization and Application, Springer, 2012.

[7] **M. Bounkhel et D. L. Azzam**, Existence results on the second-ordre nonconvex sweeping processes with perturbations, Set Valued Anal. 12(3), 291-318(2004).

[8] **M. Bounkhel. et L. Thiboult**, Nonconvex sweeping process and prox-regularity in Hilbert space. J. Nonlinear Convex Anal, 6, 359-374(2005)

[9] **M. Bounkhel et L. Thibault**, Nonconvex sweeping process and prox-regularity in Hilbert space J. Nonlinear convex Anal, 6 : 359-374, 2001.

[10] **H. Brezis**, Analyse Fonctionnelle : Théorie et application, Dunod, Paris, 1999.

[11] **C. Casting, A.G. Ibrahim et M. Yarou** , Some contributions to nonconvexe sweeping process.J.Nonlinear Convex Anal. 10, 1-20(2009).

[12] **C. Casting et M. Valadier**, Convexe Analysis and Measurable Multifonction, Springer-verlage, Berlin(1977).

[13] **C.Casting et M. D. P. Monteiro- Marques** , Perturbertions convexes semi-continues supérieurement de problémes d'évolution dans les espaces de Hilbert. Sém. Anal. Convexe Monttp. 14, Exp. 2(1984).

[14] **C. Casting et M. D. P. Monteiro- Marques** , Evolution problems associated with nonconvex closed moving sets with bounded variation. Port. Math. 53,

73-87(1996).

[15] **C.Castaing et M.D.P. Monteiro-Marques**, B V periodie solutions of an evolution problem associated with continuons moving convex sets. Set. Valued Anal, 3(4) :381-399, 1995.

[16] **C. Casting, T. X. Duc Ha et M. Valadier**, Evolution equations governed by the sweeping process. Set-Valued Anal. 1, 109-139(1993).

[17] **N. Chemetov, Monteiro Marques et M.D.P**, Non-convex quasi-variational differential inclusions. Set-Valued Anal. 15,209-221(2007)

[18] **Clarke, F.H. Ledyaev, Y.S, Stern, R.J, Wolenski, P.R**, Nonsmooth Analysis and Control Theory. Springer-Verlag, New York(1998).

[19] **G.Colombo, Goncharov et V.V** , The sweeping processes without convexity. Set-Valued Anal. 7, 357-374(1999).

[20] **G. Colombo et M. D. P. Monteiro-Marques** Sweeping by continuons prox-regular set J. Diff : Equations, 187(1) :46-62, 2003.

[21] **J. F. Edmond et L. Thibault**, B.V solutions of nonconvex sweeping process differential inclusion with pertubation. J. Diff. Equation, 226(1) : 135-176, 2006.

[22] **J. F. Edmond et Thilbaut**, Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process. Math. Program. Ser. B, 104(2-3) :347-373.

[23] **J. Noel et L. Thilbault**, Nonconvex Sweeping Process with a Moving Set Depending on the State. Vietnam Journal of Mathématics, 595-612, 42(2014).

[24] **K.S. Lau**, Almost Chebychev subsets in reflexive Banach spaces, Indiana Univ. Math. J., Vol 2, pp.791-795, 1978.

[25] **M. D. P. Monteiro- Marques** , Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems Shocks and Dry Friction. Birkhäuser, Basel(1993).

[26] **Mordukhovich, B.S**, Approximation Method in Problems of Optimization and Control. Nauka, Moscow(1988).

[27] **J.J Moreau**, Rafle par un convexe variable I. Sém. Anal. Convexe Montp, Exp, 15(1971).

[28] **J.J.Moreau**, Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space. L. Differ. Equ. 26, 347-374(1977)

[29] **L. Thibault**, Sweeping process with regular and nonregular sets. J. Differ. Equ. 193, 1-26(2003).