République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exacte et Informatique
Département de Mathématique

№ d'ordre : ....
№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques

Option : EDP et applications

Thème

Une autre approche de certains polynômes orthogonaux

Présenté par :

Boulbina Hadjer
Mekroucha Amel

Devant le jury :

Président	: Daikh Yasmina	M.C.A	Université de Jijel
Encadreur	: Zerroug Hassina	M.A.A	Université de Jijel
Examinateur	: Djemai Samia	M.C.B	Université de Jijel

Promotion **2017/2018**

Remerciement

En premier lieu, je tenons à remercier **Allah**, notre créateur pour nous avoir donner la force pour accomplir ce travail.

Nous exprimons toutes nos profondes reconnaissances à nos encadreurs.

Madame **Zerroug Hassina** non seulement pour l'honneur d'avoir accepté de diriger ce travail, mais aussi pour sa patience, ses conseils judicieux et sa compréhension.

Un grand remerciement Aux membres du jury **Daikh Yasmina** et **Djemai Samia** . Pour leur entière disposition, qui nous ont fait l'honneur d'examiner ce travail et de le juger.

Nous remercions également tous ce qui nous ont aide d'une manière ou d'une autre, de par leurs conseils judicieux ou par la documentation ou les données qu'il ont mis à notre disposition.

Nous ne pourrons pas oublier nos chers parents ,sœurs et freres, tous nos amis, tous nos collègues et tous les membres de nos famille.

Dédicace

L'occasion tant attendue d'offrir et de dédier ce modeste travail, qui clôture toute une période de persévérance continue et assidue, aux personnes qui me sont les plus chères en ce monde. Personnes qui par leur présence permanente ou leur soutien en des moments difficiles ont été le catalyseur de toute mon énergie et tous mes efforts.Je dédie ce travail à

A mon très chère père Abdelmadjid

Mon père, le plus généreux et le plus compréhensif de tous les pères.

A ma très chère mère Saida

Ma mère, la plus forte et la plus courageuse de toutes les mères.

A mes chères frères

Anter et Alaedine

A mes chères sœurs

Ilhem, Nadjla, Nahla, Nadjeh et Rayan

A tous mes amis et mes collègues surtout

Amel ,nassiba ,wissam ,Micha et Saida

A toute qui m'aiment et que j'aime

Hadjer

Dédicace

Tout d'abord, louange **Allah** qui ma guide sur le droit chemin tout au longue de travail et m'a inspiré le bons pas et les justes réflexes.

Au terme de ce travail je tien a exprimer tout ma reconnaissance et remerciement

A mon très chère père Salah

Mon père était le meilleur soutien pour moi et m'a donné la meilleure éducation sur la religion et l'éthique jusqu'à sa mort. Je souhaite que Allah le place au paradis avec le prophète Mohamed.

A ma très chère mère Saida

Ma mère, qui a œuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.

A mes chères frères

Youcef, Houcine, mohamed et le petit prince Haroune

A mes chères sœurs

Fatima, Hanane, Naima, Khadidja, Najeh, et la petite Mary

A mes chères amies

Hadjer, Amel, Micha, Merieme, Nihed

A toute qui m'aiment et que j'aime

Amel

Table des matières

Introduction

Beaucoup de travaux concernant les fonctions symétriques ont été déjà réalisés par A.Lascoux [4], A.Abderrezzak [1],[2], ainsi il y'a des résultats utiles et intéressants dans [3].En s'inspirant des travaux de ce dernier, il a proposé des théorèmes sont basés sur les fonctions symétriques afin de déterminer les fonctions génératrices où il a prend un alphabet P de cardinal égale à deux et que le paramètre $k = \{1, 2\}$.

Le but de ce travail est d'obtenir des nouvelles fonctions génératrices en utilisant l'opérateur δ_{p_1,p_2}^{-k} sur la série $\sum_{j=0}^{\infty} a_j p_1^j z^j$ où l'alphabet $P = \{p_1, p_2\}$ et $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.Cela nous permet de donner une autre approche pour les nombres de Fibonacci et les polynômes de Tchebychev du première et deuxième espèce.

Ce mémoire est composé de deux chapitres. Le premier est consacré aux définitions des séries formelles et les relations de récurrence. Nous rappelons aussi des résultats auxiliaires sur les fonctions génératrices et ses applications sur les suites définies par récurrence linéaire que nous avons utilisé tout le long de ce travail, à savoir les suites des nombres de Fibonacci et les polynômes de Tchebychev du première et deuxième espèce, nous introduisons les fonctions symétriques élémentaires et complètes ainsi que leurs propriétés.

Dans le deuxième chapitre, nous donnons un théorème principale sur les fonctions symétriques, puis on propose leurs applications à l'aide des polynômes orthogonaux. On termine ce chapitre par une récupération des fonctions génératrices des nombres de Fibonacci et les polynômes de Tchebychev du première et deuxième espèce.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions et théorèmes de base concernent les séries formelles, les fonctions génératrices et symétriques qui sont utilisés fréquemment au long de ce travail.

1.1 Séries Formelles

Définition 1.1.1. *Soit* $< A, +, ., 0, 1 >$ *un anneau intègre (c'est à dire sans diviseurs de 0), les éléments de l'ensemble* $A[[X]] \equiv \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j, a_j \in A \right\}$ *s'appellent les séries formelles à coefficients dans* A*. Pour* $j \in \mathbb{N}$*,* x^j *s'appelle le monôme de degré* j *et* a_j *est son coefficient.*

1.1.1 Les opérations sur les séries formelles

Définition 1.1.2. *Soient* $u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ *et* $v(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ *deux séries formelles. On peut définir les opérations comme suite*

a) La somme

$$(u+v)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (a_j + b_j) x^j.$$

b) Le produit

$$(u.v)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{j} (a_k b_{j-k}) \right) x^j.$$

c) Multiplication par un scalaire

$$w(x) = \lambda u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda a_j x^j,$$

tel que λ un scalaire.

d) Dérivation

$$w(x) = u'(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) a_{j+1} x^j.$$

e) Intégration

$$w(x) = \int u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{x^{j+1}}{j+1}.$$

f) Division : v divise u si et seulement s'il existe une série formelle w telle que $u = wv$, $v \neq 0$.

1.1.2 Séries inversibles

Définition 1.1.3. *On dit que la série $\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ est l'inverse de la série $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ si*

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right) = 1.$$

Proposition 1.1.4. *Une série formelle $u(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ est inversible si et seulement si $a_0 \neq 0$.*

Démonstration. Soit $v(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ est l'inverse de la série $u(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ telle que

$$\begin{aligned} u(x)v(x) &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}\right) x^j \\ &= a_0 b_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}\right) x^j. \end{aligned}$$

Mais comme

$$u(x)v(x) = 1,$$

alors

$$a_0 b_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}\right) x^j = 1,$$

ce qui donne $a_0b_0 = 1$ et $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} \right) x^j = 0$, et par suit le coefficient $a_0 \neq 0$. Réciproquement, supposons que $a_0 \neq 0$, alors le système triangulaire d'équations

$$\begin{cases} a_0b_0 = 1 \\ a_1b_0 + a_0b_1 = 0 \\ \quad \vdots \\ a_0b_0 + a_{n-1}b_1 + ... + a_0b_n = 0 \end{cases}$$

a une unique solution. ■

Exemples 1.1.5.

1) La série $\sum\limits_{j=0}^{\infty} x^j$ *est inversible car* $a_0 = 1 \neq 0$.

2) La série $\sum\limits_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^j$ *est inversible car* $a_0 = 1 \neq 0$.

3) La série $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \dfrac{x^j}{j!}$ *est inversible car* $a_0 = 1 \neq 0$.

1.1.3 Substitution d'une série formelle dans une autre

Définition 1.1.6. *Si* $u = \sum\limits_{j\geq 0} a_j x^j \in A[[X]]$, *si* $u \neq 0$, *on appelle ordre (ou valuation) de* u, *noté* $ord(u)$, *l'entier* $min\{j \in \mathbb{N}, a_j \neq 0\}$. *On convient que* $ord(0) = +\infty$.

Définition 1.1.7. *Soit* $v(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ *telle que* $ord(v) \geq 1$ *et* $u(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j x^j$.*On appelle composée de* u *par* v *et on note* $u(v)$ *(ou* $u \circ v$*)* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i v^i$. *On dit que* $u \circ v$ *est obtenue par substitution de* v *a* x *dans* u.

Proposition 1.1.8. *Soit* v *une série sans terme constant. L'application* $u \mapsto u \circ v$ *est un homomorphisme de* $A[[x]]$ *dans lui-même. En d'autres termes, on a*

$$(u + w) \circ v = u \circ v + w \circ v,$$
$$(u \cdot w) \circ v = (u \circ v) \cdot (w \circ v),$$
$$u^n \circ v = (u \circ v)^n (n \geq 1),$$

de plus

$$1 \circ v = 1.$$

1.2 Relation de récurrence

1.2.1 Relation de récurrence linéaire homogène

Définition 1.2.1. *Une relation de récurrence est dite linéaire homogène d'ordre k à coefficient constant, si elle est de la forme*

$$u_n + d_1 u_{n-1} + d_2 u_{n-2} + ... + d_k u_{n-k} = 0, \tag{1.1}$$

où $d_1, d_2, ..., d_k \in \mathbb{R}$,$d_k \neq 0$.

Remarque 1.2.2.

1) $u_n = 0$ est une solution de l'équation (1.1), elle s'appelle solution triviale.

2) $u_n = x^n$ est solution de l'équation (1.1) avec $u_n \neq 0$, vérifie

$$x^n + d_1 x^{n-1} + d_2 x^{n-2} + ... + d_k x^{n-k} = 0,$$

si $n = k$, on trouve

$$x^k + d_1 x^{k-1} + d_2 x^{k-2} + ... + d_k = 0.$$

Cette dernière équation est l'équation caractéristique de la relation de récurrence.

1.2.2 Polynôme caractéristique

Définition 1.2.3. *Soit $u_n + d_1 u_{n-1} + d_2 u_{n-2} + ... + d_k u_{n-k} = 0$, le polynôme caractéristique qui lui correspond est*

$$P(x) = u_n + d_1 u_{n-1} + d_2 u_{n-2} + ... + d_k u_{n-k}.$$

Théorème 1.2.4. *Soit $d_1, d_2, ..., d_k$ des nombre réels tels que d_k est non nul. Supposons que le polynôme caractéristique $P(x)$ admet k racines distinctes $x_1, x_2, ..., x_k$, alors u_n est une solution générale de la relation de récurrence si et seulement si*

$$u_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n + ... + c_k x_k^n,$$

avec $c_1, c_2, ..., c_k$ des constantes réelles.

Exemple 1.2.5. *Soit la récurrence de la suite de Fibonacci*

$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1, \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad pour \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Son équation caractéristique est

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

qui a pour racines simple avec $\Delta = 5$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad ou \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

La solution générale est donnée par

$$F_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n,$$

avec

$$\begin{cases} F_0 = c_1 + c_2 = 1 \\ F_1 = c_1 x_1 + c_2 x_2 = 1 \end{cases}$$

on cherche c_1 *et* c_2 *tels que*

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 = 1 \end{cases}$$

ce qui donne

$$c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \quad , \quad c_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

En fin, on écrit F_n *comme suit*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

Théorème 1.2.6. *Soient* $d_1, d_2, ..., d_k$ *des nombres réels tels que* d_k *est non nul. Supposons que le polynôme caractéristique* $P(x)$ *admet* r *racines* $x_1, x_2, ..., x_r$ *de multiplicité* $m_1, m_2, ..., m_r$ *telles que* $m_i \geqslant 1, i = 1..r$ *et* $\sum_{i=0}^{r} m_i = k$*, alors* u_n *est une solution générale de la relation de récurrence si et seulement si*

$$u_n = \sum_{i=1}^{r} (c_{i1} + c_{i2} n + ... + c_{im_i} n^{m_{i-1}}) x_i^n,$$

avec c_{ij} *des constantes réelles,* $\forall i, j$ *tels que* $1 \leq i \leq r$ *et* $0 \leq j \leq m_r$.

Exemple 1.2.7. *Soit la relation de récurrence*

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 0, \\ u_n - 7u_{n-1} + 16u_{n-2} - 12u_{n-3} = 0. \end{cases}$$

Son équation caractéristique est

$$x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0,$$

qui a pour racine simple x_1 et racine double x_2 telle que

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 2.$$

La solution générale est donnée par

$$u_n = c_1 3^n + (c_2 + c_3 n)2^n,$$

avec

$$\begin{cases} u_0 = c_1 + c_2 = 1 \\ u_1 = 3c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 2 \\ u_2 = 9c_1 + 4c_2 + 8c_3 = 0 \end{cases}$$

on cherche c_1, c_2 et c_3 tels que

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 3c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 2 \\ 9c_1 + 4c_2 + 8c_3 = 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$c_1 = -4, c_2 = 5 \quad et \quad c_3 = 2.$$

Alors, on peut écrire u_n sous las forme suivante

$$u_n = (-4)3^n + (5 + 2n)2^n.$$

1.2.3 Polynôme de Tchebychev de $1^{\text{ère}}$ espèce

Définition 1.2.8. *On définit la fonction T_n par*

$$T_n(cos\theta) = cos(n\theta), \theta \in [0, \pi], \tag{1.2}$$

si $x \in [-1, 1]$, alors on a

$$T_n(x) = cos(n(arccosx)).$$

Proposition 1.2.9. *Les polynômes de Tchebychev de $1^{\text{ère}}$ espèce sont définies par la relation de récurrence suivante*

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, \\ T_1(x) = x, \\ T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), n \geq 2. \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit de prouver que

$$T_n(x) + T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x).$$

Pour $\theta \in [0, \pi]$, $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} cos(n\theta) + cos((n+2)\theta) &= cos((n+1)\theta)cos(\theta) + sin((n+1)\theta)sin(\theta) \\ &\quad + cos((n+1)\theta)cos(\theta) - sin((n+1)\theta)sin(\theta) \\ &= 2cos((n+1)\theta)cos(\theta), \end{aligned}$$

de (1.2)

$$\forall \theta \in [0, \pi] \quad T_n(cos(\theta)) + T_{n+2}(cos(\theta)) = 2cos(\theta)T_{n+1}(cos(\theta)),$$

alors

$$\forall x \in [-1, 1] \quad T_n(x) + T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x).$$

■

1.2.4 Polynôme de Tchebychev de $2^{\text{ème}}$ espèce

Définition 1.2.10. *On définit la fonction U_n par*

$$sin\theta U_n(cos\theta) = sin(n\theta), \theta \in [0, \pi], \tag{1.3}$$

si $x \in [-1, 1]$, alors on a

$$U_n(x) = \frac{sin(n(arccosx))}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

Proposition 1.2.11. *Les polynômes de Tchebychev de $2^{\acute{e}me}$ espèce sont définies par la relation de récurrence suivante*

$$\begin{cases} U_0(x) = 1, \\ U_1(x) = 2x, \\ U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), n \geq 2. \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit de prouver que

$$U_n(x) + U_{n+2}(x) = 2xU_{n+1}(x).$$

Pour $\theta \in [0, \pi]$, $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} sin(n\theta) + sin((n+2)\theta) &= sin((n+1)\theta)cos(\theta) - cos((n+1)\theta)sin(\theta) \\ &\quad + sin((n+1)\theta)cos(\theta) + cos((n+1)\theta)sin(\theta) \\ &= 2sin((n+1)\theta)cos(\theta), \end{aligned}$$

de (1.3)

$$\forall \theta \in [0, \pi] \quad sin(\theta)U_n(cos(\theta)) + sin(\theta)U_{n+2}(cos(\theta)) = 2cos(\theta)sin(\theta)U_{n+1}(cos(\theta)),$$

alors

$$\forall x \in]-1, 1[\quad U_n(x) + U_{n+2}(x) = 2xU_{n+1}(x).$$

■

1.3 Fonctions Génératrices

1.3.1 Fonctions génératrice ordinaires

Définition 1.3.1. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite des nombres, on appelle fonction génératrice ordinaire de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ la fonction*

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n.$$

Proposition 1.3.2. *Soit $g(x)$ une fonction génératrice de la suite (a_n), et $h(x)$ une fonction génératrice de la suite (b_n). Donc*

1. *$g(x)h(x)$ fonction génératrice de la suite $(a_nb_0 + a_{n-1}b_1 + ... + a_1b_{n-1} + a_0b_n)$.*
2. *$c_1g(x) + c_2h(x)$ fonction génératrice de la suite $(c_1a_n + c_2b_n)$.*
3. *$g(x)(1-x)$ fonction génératrice de la suite $(a_n - a_{n-1})$.*
4. *$ng(x)$ fonction génératrice de la suite (na_n).*
5. *$\dfrac{g(x)}{(1-x)}$ fonction génératrice de la suite $(a_0 + a_1 + ... + a_n)$.*

1.3.2 Fonction génératrices associées a la suite Fibonacci

Soit la suite de Fibonacci est définie par

$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1, \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

1) La fonction génératrice de F_n

posons

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n,$$

$$\begin{aligned} g(x) &= F_0 + F_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n \\ &= 1 + x + x \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n - F_0 \right) + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^{n-2} \\ &= 1 + x \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \\ &= 1 + x + xg(x) + x^2 g(x), \end{aligned}$$

donc

$$g(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

2) La fonction génératrice de $(-1)^n F_n$

posons

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F_n x^n,$$

$$\begin{aligned} g(x) &= F_0 - F_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n F_n x^n \\ &= 1 - x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n \\ &= 1 - x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n F_{n-2} x^n \\ &= 1 - x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} F_n x^{n+2} \\ &= 1 - x - x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n F_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F_n x^n \\ &= 1 - x - x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F_n x^n - 1 \right) + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F_n x^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 - x + x - x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n F_n x^n + x^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n F_n x^n \\ &= 1 - xg(x) + x^2 g(x), \end{aligned}$$

donc

$$g(x) + xg(x) - x^2 g(x) = 1,$$

et par suit

$$(1 + x - x^2)g(x) = 1,$$

alors

$$g(x) = \frac{1}{1 + x - x^2}.$$

3) La fonction génératrice de $(-1)^n F_{n+1}$

posons

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n F_{n+1} x^n,$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (F_n + F_{n-1})x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n (F_n + F_{n-1})x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n F_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n F_{n-1} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} F_{n+1} x^{n+1} - x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n F_{n-1} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} F_{n+1} x^{n+1} - x + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+2} F_{n+1} x^{n+2} \\ &= 1 - x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n F_{n+1} x^n - x + x^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n F_{n+1} x^n \\ &= 1 - xg(x) - x + x^2 g(x), \end{aligned}$$

donc

$$g(x) + xg(x) - x^2 g(x) = 1 - x,$$

et par suit

$$(1 + x - x^2)g(x) = 1 - x,$$

alors

$$g(x) = \frac{1 - x}{1 + x - x^2}.$$

1.3.3 Fonction génératrices associées aux polynôme de Tchebychev de $1^{\text{ére}}$ espèce

Soit la relation récurrence de polynôme de Tchebychev de $1^{\text{ére}}$ espèce est définie par

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, \\ T_1(x) = x, \\ T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), n \geq 2. \end{cases}$$

1) La fonction génératrice de T_n

posons

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n z^n,$$

$$\begin{aligned} g(z) &= T_0 + T_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} (2xT_{n-1} + T_{n-2}) z^n \\ &= 1 + xz + 2xz \left(\sum_{n=0}^{\infty} T_n z^n - T_0 \right) - z^2 \sum_{n=2}^{\infty} T_{n-2} z^{n-2} \\ &= 1 + xz + 2xzg(z) - 2xz - z^2 g(z) \\ &= 1 - xz + 2xzg(z) - z^2 g(z), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$g(z) = \frac{1 - xz}{1 - 2xz + z^2}.$$

2) La fonction génératrice de $(-1)^n T_n$

Posons

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n T_n z^n,$$

$$\begin{aligned} g(z) &= T_0 - T_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n T_n z^n \\ &= 1 - xz + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (2xT_{n-1} - T_{n-2}) z^n \\ &= 1 - xz + 2x \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n T_{n-1} z^n - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n T_{n-2} z^n \\ &= 1 - xz + 2x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} T_n z^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} T_n z^{n+2} \\ &= 1 - xz - 2xz \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n T_n z^n - z^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n T_n z^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(z) &= 1 - xz - 2xz\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n T_n z^n - T_0\right) - z^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n T_n z^n \\ &= 1 - xz - 2xzg(z) + 2xz - z^2 g(z), \end{aligned}$$

et par suite

$$g(z) + 2xzg(z) + z^2 g(z) = 1 + xz,$$

alors

$$g(z) = \frac{1+xz}{1+2xz+z^2}.$$

1.3.4 Fonction génératrices associées aux polynôme de Tchebychev de $2^{\text{éme}}$ espèce

Soit la relation de récurrence de polynôme de Tchebychev de $2^{\text{éme}}$ espèce définie par

$$\begin{cases} U_0(x) = 1, \\ U_1(x) = 2x, \\ U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), n \geq 2. \end{cases}$$

1) La fonction génératrice de U_n

posons

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n z^n,$$

$$\begin{aligned} g(z) &= U_0 + U_1 z + \sum_{n=2}^{\infty}\left(2xU_{n-1} + U_{n-2}\right) z^n \\ &= 1 + 2xz + 2xz\left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n z^n - U_0\right) - z^2\sum_{n=2}^{\infty} U_{n-2} z^{n-2} \\ &= 1 + 2xz + 2xzg(z) - 2xz - z^2 g(z) \\ &= 1 + 2xzg(z) - z^2 g(z), \end{aligned}$$

et par suite

$$g(z) = \frac{1}{1-2xz+z^2}.$$

2) La fonction génératrice de $(-1)^n U_n$

Posons

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n U_n z^n,$$

$$\begin{aligned}
g(z) &= U_0 - U_1 z + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(2xU_{n-1} - U_{n-2})z^n \\
&= 1 - 2xz + 2x\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n U_{n-1}z^n - \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n U_{n-2}z^n \\
&= 1 - 2xz + 2x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} U_n z^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+2} U_n z^{n+2} \\
&= 1 - 2xz - 2xz\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n U_n z^n - z^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n U_n z^n \\
&= 1 - 2xz - 2xz\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n U_n z^n - U_0\right) - z^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n U_n z^n \\
&= 1 - 2xz - 2xz\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n U_n z^n + 2xz - z^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n U_n z^n \\
&= 1 - 2xz - 2xzg(z) + 2xz - z^2 g(z),
\end{aligned}$$

et par suit

$$g(z) + 2xzg(z) + z^2 g(z) = 1,$$

alors

$$g(z) = \frac{1}{1 + 2xz + z^2}.$$

1.4 Équation du second degré

Considérons l'équation du second degré $x^2 - a_1 x - a_2 = 0$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, on a alors (formules de Viète) $a_1 = \delta_1 = \lambda_1 + \lambda_2$ et $a_2 = \delta_2 = -\lambda_1\lambda_2$ (où λ_1, λ_2 sont les racines de l'équation ci-dessus).

Posons

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cette matrice est appelée "matrice compagnon" du polynôme $P(x) = x^2 - a_1 x - a_2$.

Passons à la diagonalisation de la matrice M ; recherchons ses valeurs propres

$$P_M(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a_1\lambda - a_2,$$

ce déterminant s'annule pour $\lambda = \lambda_1$ ou $\lambda = \lambda_2$ où λ_1,λ_2 sont les valeurs propres de la matrice M qui sont donc les racines de l'équation $x^2 - a_1 x - a_2 = 0$.

Cherchons les vecteurs propres

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad i = 1.2,$$

donc

$$\begin{cases} a_1 x + a_2 x = \lambda_i x \\ x = \lambda_i y \end{cases}$$

ces deux équation sont équivalents à $x = \lambda_i y$. Donc les vecteurs propres de M sont

$$v_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} \, et \quad v_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.4.1.

$$1) \quad Mv_1 = \lambda_1 v_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \, et \quad M^n v_1 = \lambda_1^n v_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} \\ \lambda_1^n \end{pmatrix}.$$

$$2) \quad Mv_2 = \lambda_2 v_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2^2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \, et \quad M^n v_2 = \lambda_2^n v_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2^{n+1} \\ \lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

Nous supposerons, pour le moment $\lambda_1 \neq \lambda_2$, et plus précisément $|\lambda_1| > |\lambda_2|$.

On a donc

$M = PDP^{-1}$ telle que

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \, et \quad p^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

alors

$$M = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

et

$$M^n = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} & -\lambda_1 \lambda_2 \dfrac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ \dfrac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} & -\lambda_1 \lambda_2 \dfrac{\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Remarque 1.4.2. *Dans le cas particulier de l'équation $x^2 = x + 1$, les racines λ_1,λ_2 sont les nombres d'or $\phi_1$et ϕ_2.*

1.5 Fonctions symétriques

Définition 1.5.1. *Une fonction $f(x_1, x_2, ..., x_n)$en variables est symétrique si pour tout permutation de l'ensemble d'indices {1,2,...,n} l'égalité suivante est vérifiée*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{s_{(1)}}, x_{s_{(2)}}, ..., x_{s_{(n)}}).$$

Autrement dit, une fonction de plusieurs variables est symétriques si ses valeurs ne change pas quant on permute les variables.
Considérons une équation de degré n

$$(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)...(x - \lambda_n) = 0,$$

à n racines réelles ou complexes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$; si nous développons le membre de gauche, nous obtenons

$$x^n - e_1x^{n-1} + e_2x^{n-2} - e_3x^{n-3} + e_4x^{n-4} - e_5x^{n-5} + ... + (-1)^n e_n = 0,$$

où $e_1, e_2, ..., e_n$ sont des polynômes homogènes et symétriques en $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Pour être plus rigoureux, on pourra les noter $e_i(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, ou $e_i^{(n)}$ (si on veut seulement préciser le nombre de racine), ou encore $e_i(f)$, f étant le polynôme

$$(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)...(X - \lambda_n).$$

Ces polynômes e_i sont appelés fonctions symétriques élémentaires des racines.

1.5.1 Fonctions symétriques élémentaires

Définition 1.5.2. *On appelle k-ième fonction symétrique élémentaire la fonction définie par*

$$e_k^{(n)} = e_k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \sum_{i_1+i_2+...+i_n=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}, \quad 0 \leq k \leq n, \tag{1.5}$$

avec $i_1, i_2, ..., i_n = \{0, 1\}$.

Exemple 1.5.3. *Pour une équation de degré 2 ($n = 2$; racines λ_1 et λ_2), on a*

$$e_k^{(2)} = e_k(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{cases} e_0 = 1 \\ e_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ e_2 = \lambda_1\lambda_2. \end{cases}$$

Exemple 1.5.4. *Pour une équation de degré* 3 *($n = 3$; racines λ_1 et λ_2), on a*

$$e_k^{(3)} = e_k(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{cases} e_0 = 1 \\ e_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ e_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \\ e_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{cases}$$

Proposition 1.5.5. *On a les formules suivantes*

1) $e_k^{(n+1)} = \lambda_{n+1} e_{k-1}^{(n)} + e_k^{(n)}$.

2) $e_k^{(n)} = \lambda_n e_{k-1}^{(n-1)} + \lambda_{n-1} e_{k-1}^{(n-2)} + ... + \lambda_{n-i} e_{k-1}^{(n-i-1)} + ... + \lambda_k e_{k-1}^{(k-1)}$.

Démonstration. 1) En utilisant la relation (1.5), on obtient

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} e_{k-1}^{(n)} + e_k^{(n)} &= \lambda_{n+1}\left(\sum_{i_1+i_2+...+i_n=k-1} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\right) + \sum_{i_1+i_2+...+i_n=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n} \\ &= \sum_{i_1+i_2+...+i_n=k-1} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^1 + \sum_{i_1+i_2+...+i_n=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^0 \\ &= \sum_{i_1+i_2+...+i_n+1=k-1+1=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^1 + \sum_{i_1+i_2+...+i_n+0=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^0 \\ &= \sum_{i_1+i_2+...+i_{n+1}=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{i_{n+1}} \\ &= e_k^{(n+1)}. \end{aligned}$$

2) De la 1ère égalité de la proposition, on écrit $e_k^{(n)}$ comme suit

$$\begin{aligned} e_k^{(n)} &= \lambda_n e_{k-1}^{(n-1)} + e_k^{(n-1)} \\ &= \lambda_n e_{k-1}^{(n-1)} + \lambda_{n-1} e_{k-1}^{(n-2)} + e_k^{(n-2)} \\ &= \lambda_n e_{k-1}^{(n-1)} + \lambda_{n-1} e_{k-1}^{(n-2)} + \lambda_{n-2} e_{k-1}^{(n-3)} + e_k^{(n-3)} \\ &= \lambda_n e_{k-1}^{(n-1)} + \lambda_{n-1} e_{k-1}^{(n-2)} + \lambda_{n-2} e_{k-1}^{(n-3)} + ... + \lambda_{n-i} e_{k-1}^{(n-i-1)} + ... + \lambda_k e_{k-1}^{(k-1)}. \end{aligned}$$

■

Proposition 1.5.6. *Les fonctions symétriques élémentaires peuvent également se définir comme les coefficients du développement en série formelle*

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k z^k = \prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i z),$$

avec $e_k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ s'annule pour $k > n$.

Démonstration. On a
$e_k^{(n)} = e_k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \sum_{i_1+...+i_n=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}$ avec $e_k^{(n)} = 0$ si $k > n$.
On montrons par récurrence

$$\sum_{k=0}^{\infty} e_k z^k = \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i z).$$

Pour $n = 2$, on a

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{2}(1+\lambda_i z) &= (1+\lambda_1 z)(1+\lambda_2 z)\\ &= 1 + (\lambda_1+\lambda_2)z + \lambda_1\lambda_2 z^2\\ &= e_0 + e_1 z + e_2 z^2\\ &= \sum_{k=0}^{2} e_k z^k.\end{aligned}$$

Supposons que la propriété est vraie pour n

$$\sum_{k=0}^{n} e_k z^k = \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i z).$$

Et montrons que la propriété est vraie pour $n+1$

$$\sum_{k=0}^{n+1} e_k z^k = \prod_{i=1}^{n+1}(1+\lambda_i z),$$

en effet

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n+1}(1+\lambda_i z) &= \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i z)(1+\lambda_{n+1} z)\\ &= \sum_{k=0}^{n} e_k z^k (1+\lambda_{n+1} z)\\ &= \sum_{k=0}^{n} e_k z^k + \lambda_{n+1}\sum_{k=0}^{n} e_k z^{k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n} e_k z^k + \lambda_{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} e_{k-1} z^{k}\\ &= \sum_{k=0}^{n} e_k z^k + \lambda_{n+1}\sum_{k=0}^{n+1} e_{k-1} z^{k}\\ &= \sum_{k\geq 0} e_k^{(n)} z^k + \lambda_{n+1}\sum_{k\geq 0} e_{k-1}^{(n+1)} z^{k}\\ &= \sum_{k\geq 0}(e_k^{(n)} + \lambda_{n+1} e_{k-1}^{(n+1)}) z^k\\ &= \sum_{k\geq 0} e_k^{(n+1)} z^k\end{aligned}$$

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1+\lambda_i z)=\sum_{k=0}^{n+1} e_k z^k.$$

■

1.5.2 Fonctions symétriques complètes

Définition 1.5.7. *On définit également les fonctions symétriques complètes des racines de la façon suivante*

$$h_k^{(n)}=h_k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)=\sum_{i_1+...+i_n=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}, \tag{1.6}$$

avec $i_1,i_2,...,i_n\geq 0$.

Exemple 1.5.8. *Pour une équation de degré* 2 *(*$n=2$ *; racines* λ_1 *et* λ_2 *), on a*

$$h_k^{(2)}=h_k(\lambda_1,\lambda_2)=\begin{cases} h_0=1 \\ h_1=\lambda_1+\lambda_2 \\ h_2=\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2 \\ h_3=\lambda_1^3+\lambda_1^2\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^2+\lambda_2^3 \\ \quad\vdots \end{cases}$$

Exemple 1.5.9. *Pour une équation de degré* 3 *(*$n=3$ *; racines* λ_1*,* λ_2 *et* λ_3*), on a*

$$h_k^{(3)}=h_k(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\begin{cases} h_0=1 \\ h_1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \\ h_2=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3 \\ h_3=\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3+\lambda_1^2\lambda_2+\lambda_1^2\lambda_3+\lambda_2^2\lambda_1+\lambda_2^2\lambda_3+\lambda_3^2\lambda_1+\lambda_3^2\lambda_2+\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ \quad\vdots \end{cases}$$

Proposition 1.5.10. *On a les formules suivantes*

1) $h_k^{(n+1)}=\lambda_{n+1}h_{k-1}^{(n+1)}+h_k^{(n)}$.

2) $h_k^{(n+1)}=\lambda_{n+1}^k+\lambda_{n+1}^{k-1}h_1^{(n)}+\lambda_{n+1}^{k-2}h_2^{(n)}+\lambda_{n+1}^{k-3}h_3^{(n)}+...+\lambda_{n+1}h_{k-1}^{(n)}+h_k^{(n)}$.

Démonstration. 1) En utilisant la relation (1.6), on obtient

$$\begin{aligned}
\lambda_{n+1}h_{k-1}^{(n+1)}+h_k^{(n)} &= \lambda_{n+1}\sum_{i_1+...+i_{n+1}=k-1}\lambda_1^{i_1}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{i_{n+1}}+\sum_{i_1+...+i_{n+1}=k}\lambda_1^{i_1}...\lambda_n^{i_n}\\
&= \sum_{i_1+...+i_n+i_{n+1}=k-1}\lambda_1^{i_1}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{i_{n+1}}\lambda_{n+1}+\sum_{i_1+...+i_n=k}\lambda_1^{i_1}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{0}\\
&= \sum_{i_1+...+i_n+i_{n+1}+1=k-1+1=k}\lambda_1^{i_1}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{i_{n+1}+1}+\sum_{i_1+...+i_n+0=k}\lambda_1^{i_1}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{0}\\
&= \sum_{i_1+...+i_n+(i_{n+1}+1)=k}\lambda_1^{i_1}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{i_{n+1}+1}+\sum_{i_1+...+i_n+0=k}\lambda_1^{i_1}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{0},
\end{aligned}$$

on a $i_{n+1}\geq 0$ donc $i_{n+1}+1\geq 1$, supposons $i'_{n+1}=i_{n+1}+1\vee 0$ alors $i'_{n+1}\geq 0$ donc

$$\begin{aligned}
\lambda_{n+1}h_{k-1}^{(n+1)}+h_k^{(n)} &= \sum_{i_1+...+i_n+i'_{n+1}=k}\lambda_1^{i_1}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{i'_{n+1}}\\
&= h_k^{(n+1)}.
\end{aligned}$$

2) De la 1ére égalité de la proposition, on écrit $h_k^{(n+1)}$ comme suit

$$\begin{aligned}
h_k^{(n+1)} &= \lambda_{n+1}h_{k-1}^{(n+1)}+h_k^{(n)}\\
&= \lambda_{n+1}(\lambda_{n+1}h_{k-2}^{(n+1)}+h_{k-1}^{(n)})+h_k^{(n)}\\
&= \lambda_{n+1}^2h_{k-2}^{(n+1)}+\lambda_{n+1}h_{k-1}^{(n)}+h_k^{(n)}\\
&= \lambda_{n+1}^3h_{k-3}^{(n+1)}\lambda_{n+1}^2h_{k-2}^{(n+1)}+\lambda_{n+1}h_{k-1}^{(n)}+h_k^{(n)}\\
&\ \vdots\\
&= \lambda_{n+1}^ih_{k-1}^{(n+1)}+\lambda_{n+1}^{i-1}h_{k-(i-1)}^{(n)}+...+\lambda_{n+1}^2h_{k-2}^{(n)}+\lambda_{n+1}h_{k-1}^{(n)}+h_k^{(n)},i<k\\
&\ \vdots\\
&= \lambda_{n+1}^k+\lambda_{n+1}^{k-1}h_1^{(n)}+\lambda_{n+1}^{k-2}h_2^{(n)}+\lambda_{n+1}^{k-3}h_3^{(n)}+...+\lambda_{n+1}h_{k-1}^{(n)}+h_k^{(n)}.
\end{aligned}$$

■

Proposition 1.5.11. *On peut également définir les k-ièmes fonctions complètes comme les coefficients du développement en série formelle*

$$H(z)=\sum_{k\geq 0}h_kz^k=\prod_{i\geq 1}(1-\lambda_iz)^{-1}.$$

Démonstration. On a

$$h_k^{(n)}=h_k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)=\sum_{i_1+i_2+...+i_n}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}.$$

Pour $n = 2$ on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0} h_k^{(2)} z^k &= h_0^{(2)} + h_1^{(2)} z + h_2^{(2)} z^2 + ... \\
&= 1 + (\lambda_1 + \lambda_2) z + (\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2) z^2 + ... \\
&= (1 + \lambda_1 z + \lambda_1^2 z^2 + ...)(1 + \lambda_2 z + \lambda_2^2 z^2 + ...) \\
&= \left(\sum_{k\geq 0} (\lambda_1 z)^k\right) \left(\sum_{k\geq 0} (\lambda_2 z)^k\right) \\
&= \frac{1}{(1-\lambda_1 z)(1-\lambda_2 z)} \\
&= \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{2} (1-\lambda_i z)}.
\end{aligned}$$

Supposons que la propriété est vraie pour n

$$\sum_{k\geq 0} h_k^{(n)} z^k = \prod_{i=1}^{n} (1-\lambda_i z)^{-1}.$$

Et montrons que la propriété est vraie pour $n+1$

$$\sum_{k\geq 0} h_k^{(n+1)} z^k = \prod_{i=1}^{n+1} (1-\lambda_i z)^{-1},$$

en effet

$$h_k^{(n+1)} = \lambda_{n+1} h_{k-1}^{(n+1)} + h_k^{(n)},$$

alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0} h_k^{(n+1)} z^k &= \sum_{k\geq 0} (\lambda_{n+1} h_{k-1}^{(n+1)} + h_k^{(n)}) z^k \\
&= \lambda_{n+1} \sum_{k\geq 0} h_{k-1}^{(n+1)} z^k + \sum_{k\geq 0} h_k^{(n)} z^k \\
&= \lambda_{n+1} \sum_{k\geq 1} h_{k-1}^{(n+1)} z^k + \sum_{k\geq 0} h_k^{(n)} z^k \\
&= \lambda_{n+1} z \sum_{k\geq 0} h_{k-1}^{(n+1)} z^k + \sum_{k\geq 0} h_k^{(n)} z^k \\
&= \lambda_{n+1} z \prod_{i=1}^{n+1} (1-\lambda_i z)^{-1} + \prod_{i=1}^{n} (1-\lambda_i z)^{-1} \\
&= \frac{\lambda_{n+1} z + (1-\lambda_{n+1} z)}{\prod\limits_{i=1}^{n+1} (1-\lambda_i z)} \\
&= \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n+1} (1-\lambda_i z)}.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

1.5.3 Quelques Propriétés

A partir de la matrice M^n donnée dans le paragraphe 1.4 par la relation (1.4) et d'après la définition 1.5.7 on peut donner la définition suivante des fonctions symétriques.

Définition 1.5.12. *Considérons l'alphabet $P = \{p_1, p_2\}$, et on définit la fonction symétrique S_n qui lui est associée par*

$$S_n(P) = S_n(p_1 + p_2) = \frac{p_1^{n+1} - p_2^{n+1}}{p_1 - p_2},$$

avec

$$\begin{aligned}
S_0(P) &= h_0 = 1\\
S_1(P) &= h_1 = p_1 + p_2\\
S_2(P) &= h_2 = p_1^2 + p_1p_2 + p_2^2\\
S_3(P) &= h_3 = p_1^3 + p_1p_2^2 + p_2p_1^2 + p_2^3\\
S_4(P) &= h_4 = p_1^4 + p_1^3p_2 + p_1^2p_2^2 + p_1p_2^3 + p_2^4\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Définition 1.5.13. *Étant donnés deux ensembles indéterminés A et B (dits alphabets), on note $S_j(A - B)$ les coefficients de la série rationnelle*

$$\frac{\prod_{b\in B}(1 - zb)}{\prod_{a\in A}(1 - za)} = \sum_{j=0}^{\infty} S_j(A - B)z^j. \tag{1.7}$$

Lemme 1.5.14. *Soit A, B deux alphabets, A est de cardinal 1, on a*

$$S_{j+k}(x - B) = x^k S_j(x - B),$$

pour $k \in N$.

Proposition 1.5.15. *Si $A = \{x\}$, alors*

$$\frac{\prod_{b\in B}(1 - bz)}{(1 - xz)} = 1 + ... + z^{j-1}S_{j-1}(x - B) + z^j \frac{S_j(x - B)}{(1 - xz)}.$$

Démonstration. De (1.7), on a

$$\frac{\prod_{b\in B}(1 - bz)}{(1 - xz)} = \sum_{j=0}^{\infty} S_j(x - B)z^j,$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} S_j(x-B)z^j &= 1+...+S_{j-1}(x-B)z^{j-1}+S_j(x-B)z^j+S_{j+1}(x-B)z^{j+1}+...\\ &= 1+...+S_{j-1}(x-B)z^{j-1}+z^j(S_j(x-B)+S_{j+1}(x-B)z+...)\\ &= 1+...+S_{j-1}(x-B)z^{j-1}+z^j(S_j(x-B)+xS_j(x-B)z+...)\\ &= 1+...+S_{j-1}(x-B)z^{j-1}+z^jS_j(x-B)(1+xz+x^2z^2+...)\\ &= 1+...+S_{j-1}(x-B)z^{j-1}+z^j\frac{S_j(x-B)}{(1-xz)},\end{aligned}$$

alors, ce qui donne

$$\frac{\prod_{b\in B}(1-bz)}{(1-xz)} = 1+...+z^{j-1}S_{j-1}(x-B)+z^j\frac{S_j(x-B)}{(1-xz)}.$$

■

Remarque 1.5.16. *La définition 1.5.13 implique la convention*

$$S_j(A-B)=0,$$

pour $j<0$.

Remarque 1.5.17. *En prenant $A=\emptyset$ dans (1.7) nous obtenons*

$$\prod_{b\in B}(1-zb)=\sum_{j=0}^{\infty}S_j(-B)z^j.$$

Proposition 1.5.18. *Considérons successivement le cas $A=\emptyset$ et $B=\emptyset$, on obtient la factorisation*

$$\sum_{j=0}^{\infty}S_j(A-B)z^j=\sum_{j=0}^{\infty}S_j(A)z^j\sum_{j=0}^{\infty}S_j(-B)z^j. \tag{1.8}$$

c'est-à-dire

$$S_n(A-B)=\sum_{k=0}^{n}S_{n-k}(A)S_k(-B).$$

Remarque 1.5.19. *Si $A=B$ d'après (1.7) et (1.8) s'écrit*

$$1=\sum_{j=0}^{\infty}S_j(A)z^j\sum_{j=0}^{\infty}S_j(-A)z^j,$$

alors

$$\sum_{j=0}^{\infty}S_j(A)z^j=\frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{\infty}S_j(-A)z^j}.$$

Proposition 1.5.20. *Soit $A = x$ on a*

$$S_n(x-B) = x^n S_0(-B) + x^{n-1} S_1(-B) + ... + S_n(-B),$$

$S_j(-B)$ sont les coefficients du polynôme $S_n(x-B)$ pour $0 \leq j \leq n$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} S_n(x-B) &= \sum_{k=0}^{n} S_{n-k}(x) S_k(-B) \\ &= \sum_{k=0}^{n} x^{n-k} S_k(-B) \\ &= x^n S_0(-B) + x^{n-1} S_1(-B) + ... + S_n(-B). \end{aligned}$$

■

Remarque 1.5.21. *Ceux sont donc au signe prés les fonctions symétriques élémentaires de l'alphabet B, qui sont nuls pour $j \geq n$, c'est-à-dire $S_j(-B) = 0$ pour $j \geq n$.*
En particulier, lorsque $B = \{b, b, ..., b\}$ (on note $B = nb$), on a $S_n(x - nb) = (x - b)^n$.

Chapitre 2

Théorème principal et applications

Dans ce chapitre nous montrons comment l'action des opérateurs $\delta_{p_1p_2}^{-k}$ sur la série $\sum_{j=0}^{\infty} a_j p_1^j z^j$ ce qui nous permet d'obtenir une autre approche des nombres de Fibonacci, et d'autre résultats sur les polynômes de Tchebychev de première et deuxième espèce

2.1 Définitions et Notations

Définition 2.1.1. *Nous définissons l'opérateur $\delta_{p_1p_2}^{-k}$ par*

$$\delta_{p_1p_2}^{-k} g(p_1) = \frac{p_2^k g(p_1) - p_1^k g(p_2)}{(p_1p_2)^k (p_1 - p_2)}. \tag{2.1}$$

Définition 2.1.2. *Pour tout couple (x_i, x_{i+1}) nous pouvons associer la différence divisée $\partial_{x_i x_{i+1}}$ définie par*

$$\partial_{x_i x_{i+1}}(g) = \frac{g(x_1, ..., x_i, x_{i+1}, ..., x_n) - g(x_1, ..., x_{i+1}, x_i, ..., x_n)}{x_i - x_{i+1}}.$$

Proposition 2.1.3. *Soit $P = \{p_1, p_2\}$, on définit l'opérateur $\delta_{p_1p_2}^{-k}$ par*

$$\delta_{p_1p_2}^{-k} g(p_1) = \frac{-S_{k-1}(P)}{(p_1p_2)^k} g(p_1) + \frac{p_1^k}{(p_1p_2)^k} \partial_{p_1p_2} g(p_1), \forall k \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. D'après la définition de $\delta_{p_1p_2}^{-k}$, on a

$$\begin{aligned}
\delta_{p_1p_2}^{-k} g(p_1) &= \frac{p_2^k g(p_1) - p_1^k g(p_2)}{(p_1p_2)^k (p_1 - p_2)} \\
&= \frac{p_2^k g(p_1) - p_1^k g(p_1) + p_1^k g(p_1) - p_1^k g(p_2)}{(p_1p_2)^k (p_1 - p_2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta^{-k}_{p_1p_2} g(p_1) &= \frac{-g(p_1)}{(p_1p_2)^k}\frac{(p_1^k - p_2^k)}{(p_1-p_2)} + \frac{p_1^k}{(p_1p_2)^k}\frac{g(p_1)-g(p_2)}{(p_1-p_2)} \\
&= \frac{-S_{k-1}(P)}{(p_1p_2)^k} g(p_1) + \frac{p_1^k}{(p_1p_2)^k}\partial_{p_1p_2} g(p_1).
\end{aligned}$$

■

2.2 Théorème Principale

Théorème 2.2.1. *Étant donné un alphabet $P = \{p_1, p_2\}$ et deux séries $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ et $\sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$ tel que $\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j\right) = 1$, alors*

$$\frac{\sum_{j=0}^{\infty} b_j S_{k+j-1}(P) z^j}{\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j p_1^j z^j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j p_2^j z^j\right)} = \sum_{j=0}^{k-1} a_j p_1^j p_2^j S_{k-j-1}(P) z^j - p_1^k p_2^k z^{k+1} \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+k+1} S_j(P) z^j. \quad (2.2)$$

Démonstration. L'action de l'opérateur $\delta^{-k}_{p_1p_2}$ sur la série $g(p_1) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j p_1^j z^j\right)$ donne le premier membre de l'égalité (2.2), en effet

$$\begin{aligned}
\delta^{-k}_{p_1p_2} g(p_1) &= \delta^{-k}_{p_1p_2}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j p_1^j z^j\right) \\
&= \frac{-S_{k-1}(P)}{(p_1p_2)^k}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j p_1^j z^j\right) + \frac{p_1^k}{(p_1p_2)^k}\partial_{p_1p_2}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j p_1^j z^j\right) \\
&= \frac{-S_{k-1}(P)}{(p_1p_2)^k}\frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} b_j p_1^j z^j} + \frac{p_1^k}{(p_1p_2)^k}\partial_{p_1p_2}\frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} b_j p_1^j z^j} \\
&= \frac{1}{p_1^k p_2^k}\left(\frac{-\sum_{j=0}^{\infty} b_j p_2^j S_{k-1}(P) z^j + \frac{p_1^k}{p_1-p_2}\sum_{j=0}^{\infty} b_j (p_2^j - p_1^j) z^j}{\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j p_1^j z^j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j p_2^j z^j\right)}\right) \\
&= \frac{-1}{p_1^k p_2^k}\left(\frac{\sum_{j=0}^{\infty} b_j \left(p_2^j \frac{p_1^k - p_2^k}{p_1-p_2} + p_1^k \frac{p_1^j - p_2^j}{p_1-p_2}\right) z^j}{\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j p_1^j z^j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j p_2^j z^j\right)}\right)
\end{aligned}$$

$$\delta_{p_1p_2}^{-k}g(p_1) = \frac{-1}{p_1^k p_2^k}\left(\frac{\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j\left(\frac{p_1^{k+j}-p_2^{k+j}}{p_1-p_2}\right)z^j}{\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j p_1^j z^j\right)\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j p_2^j z^j\right)}\right)$$
$$= \frac{-1}{p_1^k p_2^k}\left(\frac{\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j S_{k+j-1}(P) z^j}{\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j p_1^j z^j\right)\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j p_2^j z^j\right)}\right).$$

En remplaçant la série $g(p_1) = \left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j p_1^j z^j\right)$ dans la formule (2.1),on obtient le second membre de la formule (2.2)

$$\begin{aligned}
\delta_{p_1p_2}^{-k}g(p_1) &= \delta_{p_1p_2}^{-k}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j p_1^j z^j\right)\\
&= \frac{p_2^k\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j p_1^j z^j\right) - p_1^k\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j p_2^j z^j\right)}{(p_1p_2)^k(p_1-p_2)}\\
&= \frac{1}{p_1^k p_2^k}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{p_2^k p_1^j - p_1^k p_2^j}{p_1-p_2} z^j\right)\\
&= \frac{1}{p_1^k p_2^k}\left(\sum_{j=0}^{k-1} a_j \frac{p_2^k p_1^j - p_1^k p_2^j}{p_1-p_2} z^j + \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j \frac{p_2^k p_1^j - p_1^k p_2^j}{p_1-p_2} z^j\right)\\
&= \frac{-1}{p_1^k p_2^k}\left(\sum_{j=0}^{k-1} a_j p_1^j p_2^j S_{k-j-1}(P) z^j - p_1^k p_2^k z^{k+1}\sum_{j=0}^{\infty} a_{j+k+1} S_j(P) z^j\right),
\end{aligned}$$

d'où l'égalité (2.2)

$$\frac{\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j S_{k+j-1}(P) z^j}{\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j p_1^j z^j\right)\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j p_2^j z^j\right)} = \sum_{j=0}^{k-1} a_j p_1^j p_2^j S_{k-j-1}(P) z^j - p_1^k p_2^k z^{k+1}\sum_{j=0}^{\infty} a_{j+k+1} S_j(P) z^j.$$

$\blacksquare$

2.3 Applications

2.3.1 Le cas $\dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} z^j$

Corollaire 2.3.1. *Étant donné un alphabet $P = \{p_1, p_2\}$ et k un entier naturel, alors*

$$\frac{S_{k-1}(P) - S_k(P)z}{(1-p_1z)(1-p_2z)} = \sum_{j=0}^{k-1} p_1^j p_2^j S_{k-j-1}(P)z^j - p_1^k p_2^k z^{k+1} \sum_{j=0}^{\infty} S_j(P)z^j.$$

1) Si $k = 1$, le corollaire 2.3.1 s'écrit comme suit

$$\frac{S_0(P) - S_1(P)z}{(1-p_1z)(1-p_2z)} = 1 - p_1p_2z^2 \sum_{j=0}^{\infty} S_j(P)z^j,$$

mais comme $S_0(P) = 1$ et $S_1(P) = p_1 + p_2$, alors

$$\frac{1-(p_1+p_2)z}{(1-p_1z)(1-p_2z)} = 1 - p_1p_2z^2 \sum_{j=0}^{\infty} S_j(P)z^j,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} S_j(P)z^j &= \frac{1}{(1-p_1z)(1-p_2z)} \\ &= \frac{1}{1-(p_1+p_2)z+p_1p_2z^2}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

a- En remplaçant p_2 par $(-p_2)$ dans la formule (2.3), on trouve

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j(p_1 + [-p_2])z^j = \frac{1}{1-(p_1-p_2)z-p_1p_2z^2}. \tag{2.4}$$

On pose

$$\begin{cases} p_1 - p_2 = 1 \\ p_1p_2 = 1 \end{cases}$$

la formule (2.4) devient

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} S_j(p_1 + [-p_2])z^j &= \frac{1}{1-z-z^2} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} F_j z^j, \end{aligned}$$

la dernière formule représente une fonction génératrice pour les nombres de Fibonacci tel que

$$F_j = S_j(p_1 + [-p_2])$$

b- En remplaçant p_1 par $(2p_1)$ et p_2 par $(-2p_2)$ dans la formule (2.3), on trouve

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j(2p_1 + [-2p_2])z^j = \frac{1}{1 - 2(p_1 - p_2)z - 4p_1p_2z^2}. \tag{2.5}$$

On pose $4p_1p_2 = -1$, la formule (2.5) devient

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} S_j(2p_1 + [-2p_2])z^j &= \frac{1}{1 - 2(p_1 - p_2)z + z^2} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} U_j(p_1 - p_2)z^j \end{aligned} \tag{2.6}$$

la dernière formule représente une fonction génératrice pour les polynôme de Tchebychev de deuxième espèce tel que

$$U_j(p_1 - p_2) = S_j(2p_1 + [-2p_2]).$$

De la formule (2.6) nous pouvons déduire

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \left[S_j(2p_1 + [-2p_2]) - (p_1 - p_2)S_{j-1}(2p_1 + [-2p_2])\right] z^j &= \frac{1 - (p_1 - p_2)z}{1 - 2(p_1 - p_2)z + z^2} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} T_j(p_1 - p_2)z^j \end{aligned} \tag{2.7}$$

ce qui représente une nouvelle fonction génératrice pour les polynôme de Tchebychev de première espèce

$$T_j(p_1 - p_2) = S_j(2p_1 + [-2p_2]) - (p_1 - p_2)S_{j-1}(2p_1 + [-2p_2])$$

2) Si $k = 2$, le corollaire 2.3.1 s'écrit alors

$$\frac{S_1(P) - S_2(P)z}{(1 - p_1z)(1 - p_2z)} = S_1(P) + p_1p_2S_0(P)z - p_1^2p_2^2z^3 \sum_{j=0}^{\infty} S_j(P)z^j,$$

avec $S_0(P) = 1$, $S_1(P) = p_1 + p_2$ et $S_2(P) = p_1^2 + p_1p_2 + p_2^2$, alors

$$\begin{aligned} -p_1^2p_2^2z^3 \sum_{j=0}^{\infty} S_j(P)z^j &= \frac{S_1(P) - S_2(P)z}{(1 - p_1z)(1 - p_2z)} - S_1(P) - p_1p_2S_0(P)z \\ &= \frac{S_1(P) - S_2(P)z - (S_1(P) + p_1p_2S_0(P)z)(1 - p_1z)(1 - p_2z)}{(1 - p_1z)(1 - p_2z)} \\ &= \frac{(p_1 + p_2) - (p_1^2 + p_1p_2 + p_2^2)z - ((p_1 + p_2) + p_1p_2z)(1 - p_1z)(1 - p_2z)}{(1 - p_1z)(1 - p_2z)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-p_1^2p_2^2z^3\sum_{j=0}^{\infty}S_j(P)z^j &= \frac{p_1+p_2-p_1^2z-p_1p_2z-p_2^2z-p_1-p_2-p_1p_2z+p_1^2z+p_1p_2z}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&\quad+\frac{p_1^2p_2z^2+p_1p_2z+p_2^2z+p_1p_2^2z^2-p_1^2p_2z^2-p_1p_2^2z^2-p_1^2p_2^2z^3}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&= \frac{-p_1^2p_2^2z^3}{(1-p_1z)(1-p_2z)},
\end{aligned}
$$

et par suite

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty}S_j(P)z^j &= \frac{-p_1^3p_2^3z^4}{(1-p_1z)(1-p_2z)(-p_1^3p_2^3z^4)}\\
&= \frac{1}{(1-p_1z)(1-p_2z)}.
\end{aligned}
$$

D'autre part, on a

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty}S_j(P)z^j &= S_0(P)+\sum_{j=1}^{\infty}S_j(P)z^j\\
&= S_0(P)+z\sum_{j=0}^{\infty}S_{j+1}(P)z^j,
\end{aligned}
$$

ce qui implique

$$
\begin{aligned}
z\sum_{j=0}^{\infty}S_{j+1}(P)z^j &= \sum_{j=0}^{\infty}S_j(P)z^j-S_0(P)\\
&= \frac{1}{(1-p_1z)(1-p_2z)}-1,
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty}S_{j+1}(P)z^j &= \frac{1}{(1-p_1z)(1-p_2z)z}-\frac{1}{z}\\
&= \frac{1-(1-p_1z)(1-p_2z)}{(1-p_1z)(1-p_2z)z}\\
&= \frac{1-(1-p_1z-p_2z+p_1p_2z^2)}{(1-p_1z)(1-p_2z)z}\\
&= \frac{1-1+p_1z+p_2z-p_1p_2z^2}{(1-p_1z)(1-p_2z)z}\\
&= \frac{p_1z+p_2z-p_1p_2z^2}{(1-p_1z)(1-p_2z)z}\\
&= \frac{p_1+p_2-p_1p_2z}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&= \frac{p_1+p_2-p_1p_2z}{1-(p_1+p_2)z+p_1p_2z^2}. \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

a- En remplaçant p_2 par $(-p_2)$ dans la formule (2.8), on trouve

$$
\sum_{j=0}^{\infty}S_{j+1}(p_1+[-p_2])z^j = \frac{p_1-p_2+p_1p_2z}{1-(p_1-p_2)z-p_1p_2z^2} \qquad (2.9)
$$

On pose

$$\begin{cases} p_1 - p_2 = 1 \\ p_1 p_2 = 1 \end{cases}$$

la formule (2.9) devient

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_{j+1}(p_1 + [-p_2])z^j = \frac{1+z}{1-z-z^2}$$
$$= (1+z)\sum_{j=0}^{\infty} F_j z^j,$$

la dernière formule représente une fonction génératrice pour les nombres de Fibonacci tel que

$$S_{j+1}(p_1 + [-p_2]) = (1+z)F_j.$$

b- En remplaçant p_1 par $(2p_1)$ et p_2 par $(-2p_2)$ dans la formule (2.8), on trouve

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_{j+1}(2p_1 + [-2p_2])z^j = \frac{2(p_1 - p_2) + 4p_1 p_2 z}{1 - 2(p_1 - p_2)z - 4p_1 p_2 z^2} \tag{2.10}$$

On pose $4p_1p_2 = -1$, la formule(2.10) devient

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_{j+1}(2p_1 + [-2p_2])z^j = \frac{2(p_1 - p_2) - z}{1 - 2(p_1 - p_2)z + z^2}$$
$$= (2(p_1 - p_2) - z)\sum_{j=0}^{\infty} U_j(p_1 - p_2)z^j,$$

la dernière formule représente une fonction génératrice pour les polynôme de Tchebychev de dexième espèce tel que

$$S_{j+1}(2p_1 + [-2p_2]) = (2(p_1 - p_2) - z)U_j(p_1 - p_2).$$

De la formule(2.7) nous pouvons déduire

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} T_{j+1}(p_1 - p_2)z^j &= \sum_{j=0}^{\infty}[S_{j+1}(2p_1 + [-2p_2]) - (p_1 - p_2)S_j(2p_1 + [-2p_2])]z^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} S_{j+1}(2p_1 + [-2p_2])z^j - (p_1 - p_2)\sum_{j=0}^{\infty} S_j(2p_1 + [-2p_2])z^j \\
&= \frac{2(p_1 - p_2) - z}{1 - 2(p_1 - p_2)z + z^2} - (p_1 - p_2)\frac{1}{1 - 2(p_1 - p_2)z + z^2} \\
&= \frac{p_1 - p_2 - z}{1 - 2(p_1 - p_2)z + z^2} \\
&= \frac{p_1 - p_2 - z}{1 - (p_1 - p_2)z} . \frac{1 - (p_1 - p_2)z}{1 - 2(p_1 - p_2)z + z^2} \\
&= \frac{(p_1 - p_2) - z}{1 - (p_1 - p_2)z} \sum_{j=0}^{\infty} T_j(p_1 - p_2)z^j,
\end{aligned}$$

ce qui représente une nouvelle fonction génératrice pour les polynôme de chebychev de première espèce tel que

$$S_{j+1}(2p_1+[-2p_2])-(p_1-p_2)S_j(2p_1+[-2p_2])=\frac{(p_1-p_2)-z}{1-(p_1-p_2)z}T_j(p_1-p_2).$$

3) Si $k=3$, le corollaire 2.3.1 s'écrit alors

$$\frac{S_2(P)-S_3(P)z}{(1-p_1z)(1-p_2z)}=S_2(P)+p_1p_2S_1(P)z+p_1^2p_2^2S_0(P)z^2-p_1^3p_2^3z^4\sum_{j=0}^{\infty}S_j(P)z^j,$$

avec $S_0(P)=1$, $S_1(P)=p_1+p_2$, $S_2(P)=p_1^2+p_1p_2+p_2^2$
et $S_3(P)=p_1^3+p_1p_2^2+p_1^2p_2+p_2^3$, alors

$$\begin{aligned}
-p_1^3p_2^3z^4\sum_{j=0}^{\infty}S_j(P)z^j &= \frac{S_2(P)-S_3(P)z}{(1-p_1z)(1-p_2z)}-S_2(P)-p_1p_2S_1(P)z-p_1^2p_2^2S_0(P)z^2\\
&= \frac{S_2(P)-S_3(P)z-S_2(P)(1-p_1z-p_2z+p_1p_2z^2)}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&\quad-\frac{p_1p_2S_1(P)z(1-p_1z-p_2z+p_1p_2z^2)}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&\quad-\frac{p_1^2p_2^2S_0(P)z^2(1-p_1z-p_2z+p_1p_2z^2)}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&= \frac{(p_1^2+p_1p_2+p_2^2)-(p_1^3+p_1p_2^2+p_1^2p_2+p_2^3)z}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&\quad-\frac{(p_1^2+p_1p_2+p_2^2)(1-p_1z-p_2z+p_1p_2z^2)}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&\quad-\frac{p_1p_2(p_1+p_2)z(1-p_1z-p_2z+p_1p_2z^2)}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&\quad-\frac{p_1^2p_2^2z^2(1-p_1z-p_2z+p_1p_2z^2)}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&= \frac{p_1^2+p_1p_2+p_2^2-p_1^3z-p_1p_2^2z-p_1^2p_2z-p_2^3z-p_1^2-p_1p_2}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&\quad-\frac{p_2^2-p_1^2p_2z-p_1p_2^2z-p_2^3z-p_1^3z-p_1^2p_2z-p_1p_2^2z}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&\quad-\frac{p_1^3p_2z^2+p_1^2p_2^2z^2+p_1p_2^3z^2+p_1^2p_2z+p_1p_2^2z}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&\quad+\frac{p_1^3p_2z^2+p_1^2p_2^2z^2+p_1^2p_2^2z^2+p_1p_2^3z^2-p_1^3p_2^2z^3}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&\quad-\frac{p_1^2p_2^3z^3+p_1^2p_2^2z^2-p_1^3p_2^2z^3-p_1^2p_2^3z^3+p_1^3p_2^3z^4}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&= \frac{-p_1^3p_2^3z^4}{(1-p_1z)(1-p_2z)},
\end{aligned}$$

et par suite

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j(P)z^j = \frac{-p_1^3p_2^3z^4}{(1-p_1z)(1-p_2z)(-p_1^3p_2^3z^4)}$$
$$= \frac{1}{(1-p_1z)(1-p_2z)}.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} S_j(P)z^j &= S_0(P) + \sum_{j=1}^{\infty} S_j(P)z^j \\ &= S_0(P) + S_1(P)z + \sum_{j=0}^{\infty} S_{j+2}(P)z^{j+2} \\ &= S_0(P) + S_1(P)z + z^2\sum_{j=0}^{\infty} S_{j+2}(P)z^j,\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}z^2\sum_{j=0}^{\infty} S_{j+2}(P)z^j &= \sum_{j=0}^{\infty} S_j(P)z^j - S_0(P) - S_1(P)z \\ &= \frac{1}{(1-p_1z)(1-p_2z)} - 1 - p_1z - p_2z,\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} S_{j+2}(P)z^j &= \frac{1}{(1-p_1z)(1-p_2z)z^2} - \frac{1+p_1z+p_2z}{z^2} \\ &= \frac{1-(1+p_1z+p_2z)(1-p_1z)(1-p_2z)}{(1-p_1z)(1-p_2z)z^2} \\ &= \frac{1-(1+p_1z+p_2z)(1-p_1z-p_2z+p_1p_2z^2)}{(1-p_1z)(1-p_2z)z^2} \\ &= \frac{1-1-p_1z-p_2z+p_1z+p_1^2z^2+p_1p_2z^2+p_2z}{(1-p_1z)(1-p_2z)z^2} \\ &\quad + \frac{p_1p_2z^2+p_2^2z^2-p_1p_2z^2-p_1^2p_2z^3-p_1p_2^2z^3}{(1-p_1z)(1-p_2z)z^2} \\ &= \frac{p_1^2z^2+p_2^2z^2+p_1p_2z^2-p_1^2p_2z^3-p_1p_2^2z^3}{(1-p_1z)(1-p_2z)z^2} \\ &= \frac{p_1^2+p_2^2+p_1p_2-p_1^2p_2z-p_1p_2^2z}{(1-p_1z)(1-p_2z)} \\ &= \frac{p_1^2+p_2^2+p_1p_2-p_1^2p_2z-p_1p_2^2z}{1-(p_1+p_2)z+p_1p_2z^2}. \qquad (2.11)\end{aligned}$$

a- En remplaçant p_2 par $(-p_2)$ dans la formule (2.11), on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} S_{j+2}(p_1+[-p_2])z^j &= \frac{p_1^2+p_2^2-p_1p_2+p_1^2p_2z-p_1p_2^2z}{1-(p_1-p_2)z-p_1p_2z^2} \\ &= \frac{(p_1-p_2)^2+p_1p_2+p_1p_2(p_1-p_2)z}{1-(p_1-p_2)z-p_1p_2z^2} \qquad (2.12)\end{aligned}$$

On pose

$$\begin{cases} p_1 - p_2 = 1 \\ p_1 p_2 = 1 \end{cases}$$

la formule(2.12) devient

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} S_{j+2}(p_1 + [-p_2])z^j &= \frac{1+1+z}{1-z-z^2} \\ &= \frac{2+z}{1-z-z^2} \\ &= (2+z)\sum_{j=0}^{\infty} F_j z^j,\end{aligned}$$

la dernière formule représente une fonction génératrice pour les nombres de Fibonacci tel que

$$S_{j+2}(p_1 + [-p_2]) = (2+z)F_j.$$

b- En remplaçant p_1 par $(2p_1)$ et p_2 par $(-2p_2)$ dans la formule(2.11), on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} S_{j+2}(2p_1 + [-2p_2])z^j &= \frac{(2p_1 - 2p_2)^2 + 4p_1p_2 + 4p_1p_2(2p_1 - 2p_2)z}{1 - 2(p_1 - p_2)z - 4p_1p_2z^2} \\ &= \frac{4(p_1 - p_2)^2 + 4p_1p_2 + 8p_1p_2(p_1 - p_2)z}{1 - 2(p_1 - p_2)z - 4p_1p_2z^2} \\ &= \frac{4(p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2) + 4p_1p_2 + 8p_1p_2(p_1 - p_2)z}{1 - 2(p_1 - p_2)z - 4p_1p_2z^2} \\ &= \frac{4p_1^2 + 4p_2^2 - 8p_1p_2 + 4p_1p_2 + 8p_1p_2(p_1 - p_2)z}{1 - 2(p_1 - p_2)z - 4p_1p_2z^2} \qquad (2.13)\end{aligned}$$

On pose $4p_1p_2 = -1$, la formule (2.13) devient

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} S_{j+2}(2p_1 + [-2p_2])z^j &= \frac{4p_1^2 + 4p_2^2 + 2 - 1 - 2(p_1 - p_2)z}{1 - 2(p_1 - p_2)z + z^2} \\ &= \frac{4p_1^2 + 4p_2^2 + 1 - 2(p_1 - p_2)z}{1 - 2(p_1 - p_2)z + z^2} \\ &= (4p_1^2 + 4p_2^2 + 1 - 2(p_1 - p_2)z)\sum_{j=0}^{\infty} U_j(p_1 - p_2)z^j,\end{aligned}$$

la dernière formule représente une fonction génératrice pour les polynômes de Tchebychev de deuxième espèce tel que

$$S_{j+2}(2p_1 + [-2p_2]) = (4p_1^2 + 4p_2^2 + 1 - 2(p_1 - p_2)z)U_j(p_1 - p_2).$$

De la formule (2.7) nous pouvons déduire

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} T_{j+2}(p_1+[-p_2])z^j &= \sum_{j=0}^{\infty}[S_{j+2}(2p_1+[-2p_2])-(p_1-p_2)S_{j+1}(2p_1+[-2p_2])]z^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} S_{j+2}(2p_1+[-2p_2])z^j-(p_1-p_2)\sum_{j=0}^{\infty} S_{j+1}(2p_1+[-2p_2])z^j \\
&= \frac{4p_1^2+4p_2^2+1-2(p_1-p_2)z}{1-2(p_1-p_2)z+z^2}-(p_1-p_2)\frac{2(p_1-p_2)-z}{1-2(p_1-p_2)z+z^2} \\
&= \frac{4p_1^2+4p_2^2+1-2(p_1-p_2)z-2(p_1-p_2)^2+(p_1-p_2)z}{1-2(p_1-p_2)z+z^2} \\
&= \frac{4p_1^2+4p_2^2+1-(p_1-p_2)z-2p_1^2-2p_2^2+4p_1p_2}{1-2(p_1-p_2)z+z^2} \\
&= \frac{2p_1^2+2p_2^2+4p_1p_2+1-(p_1-p_2)z}{1-2(p_1-p_2)z+z^2} \\
&= \frac{2p_1^2+2p_2^2-1+1-(p_1-p_2)z}{1-2(p_1-p_2)z+z^2} \\
&= \frac{2p_1^2+2p_2^2-(p_1-p_2)z}{1-2(p_1-p_2)z+z^2} \\
&= \frac{2p_1^2+2p_2^2-(p_1-p_2)z}{1-(p_1-p_2)z}.\frac{1-(p_1-p_2)z}{1-2(p_1-p_2)z+z^2} \\
&= \frac{2p_1^2+2p_2^2-(p_1-p_2)z}{1-(p_1-p_2)z}\sum_{j=0}^{\infty} T_j(p_1-p_2)z^j,
\end{aligned}$$

ce qui représente une nouvelle fonction génératrice pour les polynômes de Tchebychev de première espèce tel que

$$S_{j+2}(2p_1+[-2p_2])-(p_1-p_2)S_{j+1}(2p_1+[-2p_2]) = \frac{2p_1^2+2p_2^2-(p_1-p_2)z}{1-(p_1-p_2)z}T_j(p_1-p_2).$$

4) Si $k=4$, le corollaire 2.3.1 s'écrit alors

$$\frac{S_3(P)-S_4(P)z}{(1-p_1z)(1-p_2z)} = \sum_{j=0}^{3} p_1^j p_2^j S_{3-j}(P)z^j - p_1^4p_2^4z^5\sum_{j=0}^{\infty} S_j(P)z^j,$$

avec $S_0(P)=1$, $S_1(P)=p_1+p_2$, $S_2(P)=p_1^2+p_1p_2+p_2^2$,
$S_3(P)=p_1^3+p_1p_2^2+p_1^2p_2+p_2^3$ et $S_4(P)=p_1^4+p_1^3p_2+p_1^2p_2^2+p_1p_2^3+p_2^4$, alors

$$\begin{aligned}
-p_1^4p_2^4z^5\sum_{j=0}^{\infty} S_j(P)z^j &= \frac{S_3(P)-S_4(P)z}{(1-p_1z)(1-p_2z)} - \sum_{j=0}^{3} p_1^jp_2^jS_{3-j}(P)z^j \\
&= \frac{p_1^3+p_2^3+p_1p_2^2+p_1^2p_2-(p_1^4+p_2^4+p_1^3p_2+p_1p_2^3+p_1^2p_2^2)z}{(1-p_1z)(1-p_2z)} \\
&\quad - S_3(P)-p_1p_2S_2(P)z-p_1^2p_2^2S_1(P)z^2-p_1^3p_2^3S_0(P)z^3
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-p_1^4p_2^4z^5\sum_{j=0}^{\infty}S_j(P)z^j &= \frac{p_1^3+p_2^3+p_1p_2^2+p_1^2p_2-p_1^4z-p_2^4z-p_1^3p_2z-p_1p_2^3z-p_1^2p_2^2z}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&\quad-\frac{(S_3(P)-p_1p_2S_2(P)z)(1-p_1z-p_2z+p_1p_2z^2)}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&\quad-\frac{(p_1^2p_2^2S_1(P)z^2+p_1^3p_2^3S_0(P)z^3)(1-p_1z-p_2z+p_1p_2z^2)}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&= \frac{p_1^3+p_2^3+p_1p_2^2+p_1^2p_2-p_1^4z-p_2^4z-p_1^3p_2z-p_1p_2^3z-p_1^2p_2^2z}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&\quad-\frac{(p_1^3+p_2^3+p_1p_2^2+p_1^2p_2)(1-p_1z-p_2z+p_1p_2z^2)}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&\quad+\frac{(p_1p_2(p_1^2+p_1p_2+p_2^2)z)(1-p_1z-p_2z+p_1p_2z^2)}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&\quad+\frac{(p_1^2p_2^2(p_1+p_2)z^2+p_1^3p_2^3z^3)(1-p_1z-p_2z+p_1p_2z^2)}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&= \frac{p_1^3+p_2^3+p_1p_2^2+p_1^2p_2-p_1^4z-p_2^4z-p_1^3p_2z-p_1p_2^3z-p_1^2p_2^2z}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&\quad-\frac{(p_1^3+p_2^3+p_1p_2^2+p_1^2p_2+p_1^3p_2z)(1-p_1z-p_2z+p_1p_2z^2)}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&\quad+\frac{(p_1^2p_2^2z+p_1p_2^3z+p_1^3p_2^2z^2)(1-p_1z-p_2z+p_1p_2z^2)}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&\quad+\frac{(p_1^2p_2^3z^2+p_1^3p_2^3z^3)(1-p_1z-p_2z+p_1p_2z^2)}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&= \frac{p_1^3+p_2^3+p_1p_2^2+p_1^2p_2-p_1^4z-p_2^4z-p_1^3p_2z-p_1p_2^3z-p_1^2p_2^2z}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&\quad-\frac{p_1^3+p_2^3+p_1p_2^2+p_1^2p_2+p_1^3p_2z+p_1^2p_2^2z+p_1p_2^3z+p_1^3p_2^2z^2}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&\quad-\frac{p_1^2p_2^3z^2+p_1^3p_2^3z^3-p_1^4z-p_1p_2^3z-p_1^2p_2^2z-p_1^3p_2z-p_1^4p_2z^2}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&\quad+\frac{p_1^3p_2^2z^2+p_1^2p_2^3z^2+p_1^4p_2^2z^3+p_1^3p_2^3z^3+p_1^4p_2^3z^4+p_1^3p_2z}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&\quad+\frac{p_2^4z+p_1p_2^3z+p_1^2p_2^2z+p_1^3p_2^2z^2+p_1^2p_2^3z^2+p_1p_2^4z^2+p_1^3p_2^3z^3}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&\quad+\frac{p_1^2p_2^4z^3+p_1^3p_2^4z^4-p_1^4p_2z^2-p_1p_2^4z^2-p_1^2p_2^3z^2-p_1^3p_2^2z^2}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&\quad-\frac{p_1^4p_2^2z^3+p_1^3p_2^3z^3+p_1^2p_2^4z^3+p_1^4p_2^3z^4+p_1^3p_2^4z^4+p_1^4p_2^4z^5}{(1-p_1z)(1-p_2z)}\\
&= \frac{-p_1^4p_2^4z^5}{(1-p_1z)(1-p_2z)},
\end{aligned}
$$

et par suite

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j(P)z^j = \frac{-p_1^4p_2^4z^5}{(1-p_1z)(1-p_2z)(-p_1^4p_2^4z^5)}$$
$$= \frac{1}{(1-p_1z)(1-p_2z)}.$$

D'autre part, on a

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j(P)z^j = S_0(P) + S_1(P)z + S_2(P)z^2 + \sum_{j=0}^{\infty} S_{j+3}(P)z^{j+3}$$
$$= 1 + (p_1+p_2)z + (p_1^2 + p_1p_2 + p_2^2)z^2 + z^3\sum_{j=0}^{\infty} S_{j+3}(P)z^j$$
$$= 1 + p_1z + p_2z + p_1^2z^2 + p_1p_2z^2 + p_2^2z^2 + z^3\sum_{j=0}^{\infty} S_{j+3}(P)z^j,$$

ce qui implique

$$z^3\sum_{j=0}^{\infty} S_{j+3}(P)z^j = \sum_{j=0}^{\infty} S_j(P)z^j - 1 - p_1z - p_2z - p_1^2z^2 - p_1p_2z^2 - p_2^2z^2$$
$$= \frac{1}{(1-p_1z)(1-p_2z)} - \frac{(1+p_1z+p_2z)(1-p_1z)(1-p_2z)}{(1-p_1z)(1-p_2z)}$$
$$+ \frac{(p_1^2z^2 + p_1p_2z^2 + p_2^2z^2)(1-p_1z)(1-p_2z)}{(1-p_1z)(1-p_2z)}$$
$$= \frac{1 - (1 + p_1z + p_2z + p_1^2z^2 + p_1p_2z^2 + p_2^2z^2)(1 - p_1z - p_2z + p_1p_2z^2)}{(1-p_1z)(1-p_2z)}$$
$$= \frac{1 - 1 - p_1z - p_2z - p_1^2z^2 - p_1p_2z^2 - p_2^2z^2 + p_1z + p_1^2z^2 + p_1p_2z^2}{(1-p_1z)(1-p_2z)}$$
$$+ \frac{p_1^3z^3 + p_1^2p_2z^3 + p_1p_2^2z^3 + p_2z + p_1p_2z^2 + p_2^2z^2 + p_1^2p_2z^3 + p_1p_2^2z^3}{(1-p_1z)(1-p_2z)}$$
$$+ \frac{p_2^3z^3 - p_1p_2z^2 - p_1^2p_2z^3 - p_1p_2^2z^3 - p_1^3p_2z^4 - p_1^2p_2^2z^4 - p_1p_2^3z^4}{(1-p_1z)(1-p_2z)}$$
$$= \frac{p_1^3z^3 + p_2^3z^3 + p_1^2p_2z^3 + p_1p_2^2z^3 - p_1^3p_2z^4 - p_1^2p_2^2z^4 - p_1p_2^3z^4}{(1-p_1z)(1-p_2z)},$$

alors

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_{j+3}(P)z^j = \frac{p_1^3z^3 + p_2^3z^3 + p_1^2p_2z^3 + p_1p_2^2z^3 - p_1^3p_2z^4 - p_1^2p_2^2z^4 - p_1p_2^3z^4}{(1-p_1z)(1-p_2z)z^3}$$
$$= \frac{p_1^3 + p_2^3 + p_1^2p_2 + p_1p_2^2 - p_1^3p_2z - p_1^2p_2^2z - p_1p_2^3z}{(1-p_1z)(1-p_2z)}$$
$$= \frac{p_1^3 + p_2^3 + p_1^2p_2 + p_1p_2^2 - p_1^3p_2z - p_1^2p_2^2z - p_1p_2^3z}{1-(p_1+p_2)z + p_1p_2z^2}. \tag{2.14}$$

a- En remplaçant p_2 par $(-p_2)$ dans la formule (2.14), on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} S_{j+3}(p_1+[-p_2])z^j &= \frac{p_1^3-p_2^3-p_1^2p_2+p_1p_2^2+p_1^3p_2z-p_1^2p_2^2z+p_1p_2^3z}{1-(p_1-p_2)z-p_1p_2z^2}\\ &= \frac{(p_1-p_2)^3+3p_1p_2(p_1-p_2)-p_1p_2(p_1-p_2)+p_1p_2(p_1^2-p_1p_2+p_2^2)z}{1-(p_1-p_2)z-p_1p_2z^2}\\ &= \frac{(p_1-p_2)^3+3p_1p_2(p_1-p_2)-p_1p_2(p_1-p_2)+p_1p_2((p_1-p_2)^2+p_1p_2)z}{1-(p_1-p_2)z-p_1p_2z^2}\end{aligned} \tag{2.15}$$

On pose

$$\begin{cases} p_1-p_2=1\\ p_1p_2=1\end{cases}$$

la formule (2.15) devient

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} S_{j+3}(p_1+[-p_2])z^j &= \frac{1+3-1+1(1+1)z}{1-z-z^2}\\ &= \frac{3+2z}{1-z-z^2}\\ &= (3+2z)\sum_{j=0}^{\infty} F_j z^j,\end{aligned}$$

la dernière formule représente une fonction génératrice pour les nombres de Fibonacci tel que

$$S_{j+3}(p_1+[-p_2]) = (3+2z)F_j.$$

b- En remplaçant p_1 par $(2p_1)$ et p_2 par $(-2p_2)$ dans la formule (2.14), on trouve

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_{j+3}(2p_1+[-2p_2])z^j = \frac{8p_1^3-8p_2^3-8p_1^2p_2+8p_1p_2^2+16p_1^3p_2z-16p_1^2p_2^2z+16p_1p_2^3z}{1-2(p_1-p_2)z-4p_1p_2z^2} \tag{2.16}$$

On pose $4p_1p_2=-1$, la formule (2.16) devient

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} S_{j+3}(2p_1+[-2p_2])z^j &= \frac{8p_1^3-8p_2^3+2p_1-2p_2-4p_1^2z-z-4p_2^2z}{1-2(p_1-p_2)z+z^2}\\ &= \frac{8(p_1^3-p_2^3)+2(p_1-p_2)-(4p_1^2+1+4p_2^2)z}{1-2(p_1-p_2)z+z^2}\\ &= (8(p_1^3-p_2^3)+2(p_1-p_2)-(4p_1^2+1+4p_2^2)z)\sum_{j=0}^{\infty} U_j(p_1-p_2)z^j,\end{aligned}$$

la dernière formule représente une fonction génératrice pour les polynômes de Tchebychev de deuxième espèce tel que

$$S_{j+3}(2p_1+[-2p_2]) = (8(p_1^3-p_2^3)+2(p_1-p_2)-(4p_1^2+1+4p_2^2)z)U_j(p_1-p_2).$$

De la formule (2.7) nous pouvons déduire

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} T_{j+3}(p_1-p_2)z^j &= \sum_{j=0}^{\infty}[S_{j+3}(2p_1+[-2p_2])-(p_1-p_2)S_{j+2}(2p_1+[-2p_2])]z^j\\
&= \sum_{j=0}^{\infty} S_{j+3}(2p_1+[-2p_2])z^j-(p_1-p_2)\sum_{j=0}^{\infty}S_{j+2}(2p_1+[-2p_2)z^j\\
&= \frac{8(p_1^3-p_2^3)+2(p_1-p_2)-(4p_1^2+1+4p_2^2)z}{1-2(p_1-p_2)z+z^2}\\
&\quad -(p_1-p_2)\frac{4p_1^2+4p_2^2+1-2(p_1-p_2)z}{1-2(p_1-p_2)z+z^2}\\
&= \frac{8(p_1^3-p_2^3)+2(p_1-p_2)-(4p_1^2+1+4p_2^2)z-4p_1^3}{1-2(p_1-p_2)z+z^2}\\
&\quad +\frac{4p_1^2p_2-4p_1p_2^2+4p_2^3-p_1+p_2+2(p_1-p_2)^2z}{1-2(p_1-p_2)z+z^2}\\
&= \frac{4(p_1^3-p_2^3)+(p_1-p_2)+4p_1^2p_2-4p_1p_2^2-2p_1^2z-2p_2^2z-z-4p_1p_2z}{1-2(p_1-p_2)z+z^2}\\
&= \frac{4(p_1^3-p_2^3)+(p_1-p_2)-p_1+p_2-2p_1^2z-2p_2^2z}{1-2(p_1-p_2)z+z^2}\\
&= \frac{4(p_1^3-p_2^3)-2(p_1^2+p_2^2)z}{1-2(p_1-p_2)z+z^2}\\
&= \frac{4(p_1-p_2)^3+12p_1p_2(p_1-p_2)-2(p_1^2+p_2^2)z}{1-2(p_1-p_2)z+z^2}\\
&= \frac{4(p_1-p_2)^3-3(p_1-p_2)-2(p_1^2+p_2^2)z}{1-2(p_1-p_2)z+z^2}\\
&= \frac{4(p_1-p_2)^3-3(p_1-p_2)-2(p_1^2+p_2^2)z}{1-(p_1-p_2)z}.\frac{1-(p_1-p_2)z}{1-2(p_1-p_2)z+z^2}\\
&= \frac{4(p_1-p_2)^3-3(p_1-p_2)-2(p_1^2+p_2^2)z}{1-(p_1-p_2)z}\sum_{j=0}^{\infty}T_j(p_1-p_2)z^j,
\end{aligned}$$

ce qui représente une nouvelle fonction génératrice pour les polynômes de Tchebychev de première espèce tel que

$$S_{j+3}(2p_1-2p_2)-(p_1-p_2)S_{j+2}(2p_1-2p_2) = \frac{4(p_1-p_2)^3-3(p_1-p_2)-2(p_1^2+p_2^2)z}{1-(p_1-p_2)z}T_j(p_1-p_2).$$

2.3.2 Le cas $\dfrac{1}{1+z} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j z^j$

Corollaire 2.3.2. *Étant donné un alphabet $P = \{p_1, p_2\}$ et k un entier naturel, alors*

$$\frac{S_{k-1}(P)+S_k(P)z}{(1+p_1z)(1+p_2z)} = \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j p_1^j p_2^j S_{k-j-1}(P)z^j - p_1^k p_2^k z^{k+1}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j+k-1}S_j(P)z^j.$$

1) Si $k=1$, le corollaire 2.3.2 s'écrit alors

$$\frac{S_0(P)+S_1(P)z}{(1+p_1z)(1+p_2z)} = 1 - p_1p_2z^2\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^jS_j(P)z^j,$$

mais comme $S_0(P)=1$ et $S_1(P)=p_1+p_2$, alors

$$\frac{1-(p_1+p_2)z}{(1+p_1z)(1+p_2z)} = 1 - p_1p_2z^2\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^jS_j(P)z^j,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^jS_j(P)z^j &= \frac{1}{(1+p_1z)(1+p_2z)}\\ &= \frac{1}{1+(p_1+p_2)z+p_1p_2z^2}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

a-En remplaçant p_2 par $(-p_2)$ dans la formule (2.17), on trouve

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^jS_j(p_1+[-p_2])z^j = \frac{1}{1+(p_1-p_2)z-p_1p_2z^2} \tag{2.18}$$

On pose

$$\begin{cases} p_1-p_2=1\\ p_1p_2=1\end{cases}$$

la formule (2.18) devient

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^jS_j(p_1+[-p_2])z^j &= \frac{1}{1+z-z^2}\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^jF_j.\end{aligned}$$

la dernière formule représente une fonction génératrice pour les nombres de Fibonacci tel que

$$F_j = S_j(p_1+[-p_2]).$$

b- En remplaçant p_1 par $(2p_1)$ et p_2 par $(-2p_2)$ dans la formule (2.17), on trouve

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^jS_j(2p_1+[-2p_2])z^j = \frac{1}{1+2(p_1-p_2)z-4p_1p_2z^2}. \tag{2.19}$$

On pose $4p_1p_2=-1$, la formule (2.19) devient

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^jS_j(2p_1+[-2p_2])z^j &= \frac{1}{1+2(p_1-p_2)z+z^2}\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^jU_j(p_1-p_2)\end{aligned} \tag{2.20}$$

la dernière formule représente une fonction génératrice pour les polynôme de Tchebychev de deuxième espèce tel que

$$U_j(p_1 - p_2) = S_j(2p_1 + [-2p_2]).$$

De la formule (2.20) nous pouvons déduire

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j[S_j(2p_1+[-2p_2]) - (p_1-p_2)S_{j-1}(2p_1+[-2p_2])]z^j &= \frac{1+(p_1-p_2)z}{1+2(p_1-p_2)z+z^2}\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^jT_j(p_1-p_2)\end{aligned} \tag{2.21}$$

ce qui représente une nouvelle fonction génératrice pour les polynôme de Tchebychev de première espèce tel que

$$T_j(p_1 - p_2) = S_j(2p_1 + [-2p_2]) - (p_1 - p_2)S_{j-1}(2p_1 + [-2p_2]).$$

2) Si $k = 2$, le Corollaire 2.3.2 s'écrit alors

$$\frac{S_1(P)+S_2(P)z}{(1+p_1z)(1+p_2z)} = S_1(P) - p_1p_2S_0(P)z - p_1^2p_2^2z^3\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j+1}S_j(P)z^j,$$

avec $S_0(P) = 1$, $S_1(P) = p_1 + p_2$ et $S_2(P) = p_1^2 + p_1p_2 + p_2^2$, alors

$$\begin{aligned}p_1^2p_2^2z^3\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^jS_j(P)z^j &= \frac{S_1(P)+S_2(P)z}{(1+p_1z)(1+p_2z)} - S_1(P) + p_1p_2S_0(P)z\\
&= \frac{S_1(P)+S_2(P)z-(S_1(P)-p_1p_2S_0(P)z)(1+p_1z)(1+p_2z)}{(1+p_1z)(1+p_2z)}\\
&= \frac{(p_1+p_2)+(p_1^2+p_1p_2+p_2^2)z}{(1+p_1z)(1+p_2z)}\\
&\quad - \frac{((p_1+p_2)-p_1p_2z)(1+p_1z)(1+p_2z)}{(1+p_1z)(1+p_2z)}\\
&= \frac{p_1+p_2+p_1^2z+p_1p_2z+p_2^2z-p_1-p_2+p_1p_2z-p_1^2z-p_1p_2z}{(1+p_1z)(1+p_2z)}\\
&\quad + \frac{p_1^2p_2z^2-p_1p_2z-p_2^2z+p_1p_2^2z^2-p_1^2p_2z^2-p_1p_2^2z^2+p_1^2p_2^2z^3}{(1+p_1z)(1+p_2z)}\\
&= \frac{p_1^2p_2^2z^3}{(1+p_1z)(1+p_2z)},\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^jS_j(P)z^j &= \frac{p_1^3p_2^3z^4}{(1+p_1z)(1+p_2z)(p_1^3p_2^3z^4)}\\ &= \frac{1}{(1+p_1z)(1+p_2z)}.\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_j(P)z^j = S_0(P) + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j S_j(P)z^j$$
$$= S_0(P) - z\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_{j+1}(P)z^j,$$

ce qui implique

$$-z\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_{j+1}(P)z^j = \sum_{j=0}^{\infty} S_j(P)z^j - S_0(P)$$
$$= \frac{1}{(1+p_1z)(1+p_2z)} - 1,$$

alors

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_{j+1}(P)z^j &= \frac{1}{(1+p_1z)(1+p_2z)(-z)} - \frac{1}{(-z)}\\
&= \frac{1-(1+p_1z)(1+p_2z)}{(1+p_1z)(1+p_2z)(-z)}\\
&= \frac{1-(1+p_1z+p_2z+p_1p_2z^2)}{(1+p_1z)(1+p_2z)(-z)}\\
&= \frac{1-1-p_1z-p_2z-p_1p_2z^2}{(1+p_1z)(1+p_2z)(-z)}\\
&= \frac{-p_1z-p_2z-p_1p_2z^2}{(1+p_1z)(1+p_2z)(-z)}\\
&= \frac{p_1+p_2+p_1p_2z}{(1+p_1z)(1+p_2z)}\\
&= \frac{p_1+p_2+p_1p_2z}{1+(p_1+p_2)z+p_1p_2z^2}.\end{aligned} \tag{2.22}$$

a- En remplaçant p_2 par $(-p_2)$ dans la formule (2.22),on trouve

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_{j+1}(p_1+[-p_2])z^j = \frac{p_1-p_2-p_1p_2z}{1+(p_1-p_2)z-p_1p_2z^2} \tag{2.23}$$

On pose

$$\begin{cases} p_1-p_2=1\\ p_1p_2=1\end{cases}$$

la formule (2.23) devient

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_{j+1}(p_1+[-p_2])z^j = \frac{1-z}{1+z-z^2}$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j F_{j+1}z^j,$$

la dernière formule représente une fonction génératrice pour les nombres de Fibonacci tel que

$$S_{j+1}(p_1 + [-p_2]) = F_{j+1}.$$

b- En remplaçant p_1 par $(2p_1)$ et p_2 par $(-2p_2)$ dans la formule (2.22), on trouve

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_{j+1}(2p_1 + [-2p_2])z^j = \frac{2(p_1 - p_2) - 4p_1p_2z}{1 + 2(p_1 - p_2)z - 4p_1p_2z^2} \tag{2.24}$$

On pose $4p_1p_2 = -1$, la formule(2.24) devient

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_{j+1}(2p_1 + [-2p_2])z^j &= \frac{2(p_1 - p_2) + z}{1 + 2(p_1 - p_2)z + z^2} \\ &= (2(p_1 - p_2) + z)\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j U_{j+1}(p_1 - p_2)z^j,\end{aligned}$$

la dernière formule représente une fonction génératrice pour les polynômes de Tchebychev de deuxième espèce tel que

$$S_{j+1}(2p_1 + [-2p_2]) = (2(p_1 - p_2) + z)U_{j+1}(p_1 - p_2).$$

De la formule (2.21) nous pouvons déduire

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j T_{j+1}(p_1 - p_2)z^j &= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j [S_{j+1}(2p_1 + [-2p_2]) - (p_1 - p_2)S_j(2p_1 + [-2p_2])]z^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j U_{j+1}(p_1 - p_2)z^j - (p_1 - p_2)\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j U_j(2p_1 + [-2p_2])z^j \\ &= \frac{2(p_1 - p_2) + z}{1 + 2(p_1 - p_2)z + z^2} - (p_1 - p_2)\frac{1}{1 + 2(p_1 - p_2)z + z^2} \\ &= \frac{p_1 - p_2 + z}{1 + 2(p_1 - p_2)z + z^2} \\ &= \frac{(p_1 - p_2) + z}{1 + (p_1 - p_2)z}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j T_j(p_1 - p_2)z^j,\end{aligned}$$

ce qui représente une nouvelle fonction génératrice pour les polynôme de Tchebychev de première espèce tel que

$$S_{j+1}(2p_1 + [-2p_2]) - (p_1 - p_2)S_j(2p_1 + [-2p_2]) = \frac{(p_1 - p_2) + z}{1 + (p_1 - p_2)z}T_j(p_1 - p_2).$$

3) Si $k = 3$, le corollaire 2.3.2 s'écrit alors

$$\frac{S_2(P) + S_3(P)z}{(1 + p_1z)(1 + p_2z)} = S_2(P) - p_1p_2S_1(P)z + p_1^2p_2^2S_0(P)z^2 - p_1^3p_2^3z^4\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j+2}S_j(P)z^j,$$

avec $S_0(P) = 1,\ S_1(P) = p_1 + p_2,\ S_2(P) = p_1^2 + p_1p_2 + p_2^2$
et $S_3(P) = p_1^3 + p_1p_2^2 + p_1^2p_2 + p_2^3$, alors

$$\begin{aligned}
-p_1^3p_2^3z^4\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j+2}S_j(P)z^j &= \frac{S_2(P)+S_3(P)z}{(1+p_1z)(1+p_2z)} - S_2(P) + p_1p_2S_1(P)z - p_1^2p_2^2S_0(P)z^2\\
&= \frac{S_2(P)+S_3(P)z - S_2(P)(1+p_1z+p_2z+p_1p_2z^2)}{(1+p_1z)(1+p_2z)}\\
&\quad + \frac{p_1p_2S_1(P)z(1+p_1z+p_2z+p_1p_2z^2)}{(1+p_1z)(1+p_2z)}\\
&\quad - \frac{p_1^2p_2^2S_0(P)z^2(1+p_1z+p_2z+p_1p_2z^2)}{(1+p_1z)(1+p_2z)}\\
&= \frac{(p_1^2+p_1p_2+p_2^2)+(p_1^3+p_1p_2^2+p_2p_1^2+p_2^3)z}{(1+p_1z)(1+p_2z)}\\
&\quad - \frac{(p_1^2+p_1p_2+p_2^2)(1+p_1z+p_2z+p_1p_2z^2)}{(1+p_1z)(1+p_2z)}\\
&\quad + \frac{p_1p_2(p_1+p_2)z(1+p_1z+p_2z+p_1p_2z^2)}{(1+p_1z)(1+p_2z)}\\
&\quad - \frac{p_1^2p_2^2z^2(1+p_1z+p_2z+p_1p_2z^2)}{(1+p_1z)(1+p_2z)}\\
&= \frac{p_1^2+p_1p_2+p_2^2+p_1^3z+p_1p_2^2z+p_1^2p_2z+p_2^3z-p_1^2}{(1+p_1z)(1+p_2z)}\\
&\quad - \frac{p_1p_2+p_2^2-p_1^2p_2z-p_1p_2^2z+p_1^2p_2^2z^2+p_1^3z+p_1^2p_2z}{(1+p_1z)(1+p_2z)}\\
&\quad - \frac{p_1p_2^2z-p_1^3p_2z^2-p_1^2p_2^2z^2+p_1^3p_2^2z^3+p_1^2p_2z+p_1p_2^2z}{(1+p_1z)(1+p_2z)}\\
&\quad - \frac{p_2^3z-p_1^2p_2^2z^2-p_1p_2^3z^2+p_1^2p_2^3z^3+p_1^3p_2z^2}{(1+p_1z)(1+p_2z)}\\
&\quad - \frac{p_1^2p_2^2z^2+p_1p_2^3z^2-p_1^3p_2^2z^3-p_1^2p_2^3z^3+p_1^3p_2^3z^4}{(1+p_1z)(1+p_2z)}\\
&= \frac{-p_1^3p_2^3z^4}{(1+p_1z)(1+p_2z)},
\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^jS_j(P)z^j &= \frac{-p_1^3p_2^3z^4}{(1+p_1z)(1+p_2z)(-p_1^3p_2^3z^4)}\\
&= \frac{1}{(1+p_1z)(1+p_2z)}.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_j(P)z^j &= S_0(P) + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j S_j(P)z^j \\
&= S_0(P) - S_1(P)z + \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_{j+2}(P)z^{j+2} \\
&= S_0(P) - S_1(P)z + z^2\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_{j+2}(P)z^{j},
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
z^2\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_{j+2}(P)z^j &= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_j(P)z^j - S_0(P) - S_1(P)z \\
&= \frac{1}{(1+p_1z)(1+p_2z)} - 1 + p_1z + p_2z,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_{j+2}(P)z^j &= \frac{1}{(1+p_1z)(1+p_2z)z^2} - \frac{1-p_1z-p_2z}{z^2} \\
&= \frac{1-(1-p_1z-p_2z)(1+p_1z)(1+p_2z)}{(1+p_1z)(1+p_2z)z^2} \\
&= \frac{1-(1-p_1z-p_2z)(1+p_1z+p_2z+p_1p_2z^2)}{(1+p_1z)(1+p_2z)z^2} \\
&= \frac{1-1+p_1z+p_2z-p_1z+p_1^2z^2+p_1p_2z^2-p_2z}{(1+p_1z)(1+p_2z)z^2} \\
&\quad + \frac{p_1p_2z^2+p_2^2z^2-p_1p_2z^2+p_1^2p_2z^3+p_1p_2^2z^3}{(1+p_1z)(1+p_2z)z^2} \\
&= \frac{p_1^2z^2+p_2^2z^2+p_1p_2z^2+p_1^2p_2z^3+p_1p_2^2z^3}{(1+p_1z)(1+p_2z)z^2} \\
&= \frac{p_1^2+p_2^2+p_1p_2+p_1^2p_2z+p_1p_2^2z}{(1+p_1z)(1+p_2z)} \\
&= \frac{p_1^2+p_2^2+p_1p_2+p_1^2p_2z+p_1p_2^2z}{1+(p_1+p_2)z+p_1p_2z^2}. \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

a- En remplaçant p_2 par $(-p_2)$ dans la formule (2.25), on trouve

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_{j+2}(p_1+[-p_2])z^j &= \frac{p_1^2+p_2^2-p_1p_2-p_1^2p_2z+p_1p_2^2z}{1+(p_1-p_2)z-p_1p_2z^2} \\
&= \frac{(p_1-p_2)^2+p_1p_2-p_1p_2(p_1-p_2)z}{1+(p_1-p_2)z-p_1p_2z^2} \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

On pose

$$\begin{cases} p_1 - p_2 = 1 \\ p_1p_2 = 1 \end{cases}$$

la formule (2.26) devient

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_{j+2}(p_1+[-p_2])z^j &= \frac{1+1-z}{1+z-z^2}\\ &= \frac{2-z}{1+z-z^2}\\ &= (2-z)\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j F_j z^j,\end{aligned}$$

la dernière formule représente une fonction génératrice pour les nombres de Fibonacci tel que

$$S_{j+2}(p_1+[-p_2]) = (2-z)F_j.$$

b- En remplaçant p_1 par $(2p_1)$ et p_2 par $(-2p_2)$ dans la formule (2.25), on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_{j+2}(2p_1+[-2p_2])z^j &= \frac{(2p_1-2p_2)^2+4p_1p_2-4p_1p_2(2p_1-2p_2)z}{1+2(p_1-p_2)z-4p_1p_2z^2}\\ &= \frac{4(p_1-p_2)^2+4p_1p_2-8p_1p_2(p_1-p_2)z}{1+2(p_1-p_2)z-4p_1p_2z^2}\\ &= \frac{4(p_1^2+p_2^2-2p_1p_2)+4p_1p_2-8p_1p_2(p_1-p_2)z}{1+2(p_1-p_2)z-4p_1p_2z^2}\\ &= \frac{4p_1^2+4p_2^2-8p_1p_2+4p_1p_2-8p_1p_2(p_1-p_2)z}{1+2(p_1-p_2)z-4p_1p_2z^2}\end{aligned} \tag{2.27}$$

On pose $4p_1p_2=-1$, la formule (2.27) devient

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_{j+2}(2p_1+[-2p_2])z^j &= \frac{4p_1^2+4p_2^2+2-1+2(p_1-p_2)z}{1+2(p_1-p_2)z+z^2}\\ &= \frac{4p_1^2+4p_2^2+1+2(p_1-p_2)z}{1+2(p_1-p_2)z+z^2}\\ &= (4p_1^2+4p_2^2+1+2(p_1-p_2)z)\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j U_j(p_1-p_2)z^j,\end{aligned}$$

la dernière formule représente une fonction génératrice pour les polynôme de Tchebychev de deuxième espèce tel que

$$S_{j+2}(2p_1+[-2p_2]) = (4p_1^2+4p_2^2+1+2(p_1-p_2)z)U_j(p_1-p_2).$$

de la formule (2.21) nous pouvons déduire

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j T_{j+2}(p_1+[-p_2])z^j &= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j[S_{j+2}(2p_1+[-2p_2])-(p_1-p_2)S_{j+1}(2p_1+[-2p_2])]z^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_{j+2}(2p_1+[-2p_2])z^j \\
&\quad -(p_1-p_2)\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_{j+1}(2p_1+[-2p_2])z^j \\
&= \frac{4p_1^2+4p_2^2+1+2(p_1-p_2)z}{1+2(p_1-p_2)z+z^2}-(p_1-p_2)\frac{2(p_1-p_2)+z}{1+2(p_1-p_2)z+z^2} \\
&= \frac{4p_1^2+4p_2^2+1+2(p_1-p_2)z-2(p_1-p_2)^2-(p_1-p_2)z}{1+2(p_1-p_2)z+z^2} \\
&= \frac{4p_1^2+4p_2^2+1+(p_1-p_2)z-2p_1^2-2p_2^2+4p_1p_2}{1+2(p_1-p_2)z+z^2} \\
&= \frac{2p_1^2+2p_2^2+4p_1p_2+1+(p_1-p_2)z}{1+2(p_1-p_2)z+z^2} \\
&= \frac{2p_1^2+2p_2^2-1+1+(p_1-p_2)z}{1+2(p_1-p_2)z+z^2} \\
&= \frac{2p_1^2+2p_2^2+(p_1-p_2)z}{1+2(p_1-p_2)z+z^2} \\
&= \frac{2p_1^2+2p_2^2+(p_1-p_2)z}{1+(p_1-p_2)z}.\frac{1+(p_1-p_2)z}{1+2(p_1-p_2)z+z^2} \\
&= \frac{2p_1^2+2p_2^2+(p_1-p_2)z}{1+(p_1-p_2)z}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j T_j(p_1-p_2)z^j,
\end{aligned}$$

ce qui représente une nouvelle fonction génératrice pour les polynôme de Tchebychev de première espèce tel que

$$S_{j+2}(2p_1+[-2p_2])-(p_1-p_2)S_{j+1}(2p_1+[-2p_2]) = \frac{2p_1^2+2p_2^2+(p_1-p_2)z}{1+(p_1-p_2)z}T_j(p_1-p_2).$$

4) Si $k=4$, le corollaire 2.3.2 s'écrit alors

$$\frac{S_3(P)+S_4(P)z}{(1+p_1z)(1+p_2z)} = \sum_{j=0}^{3}(-1)^j p_1^j p_2^j S_{3-j}(P)z^j - p_1^4p_2^4z^5\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j+3}S_j(P)z^j,$$

avec $S_0(P)=1$, $S_1(P)=p_1+p_2$, $S_2(P)=p_1^2+p_1p_2+p_2^2$,

$S_3(P) = p_1^3 + p_1p_2^2 + p_1^2p_2 + p_2^3$ et $S_4(P) = p_1^4 + p_1^3p_2 + p_1^2p_2^2 + p_1p_2^3 + p_2^4$, alors

$$
\begin{aligned}
-p_1^4p_2^4z^5\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j+3}S_j(P)z^j &= \frac{S_3(P)+S_4(P)z}{(1+p_1z)(1+p_2z)} - \sum_{j=0}^{3}(-1)^j p_1^j p_2^j S_{3-j}(P)z^j \\
&= \frac{p_1^3 + p_1p_2^2 + p_1^2p_2 + p_2^3 + (p_1^4 + p_1^3p_2 + p_1^2p_2^2 + p_1p_2^3 + p_2^4)z}{(1+p_1z)(1+p_2z)} \\
&\quad - (S_3(P) - p_1p_2S_2(P)z + p_1^2p_2^2S_1(P)z^2 - p_1^3p_2^3S_0(P)z^3) \\
&= \frac{p_1^3 + p_1p_2^2 + p_1^2p_2 + p_2^3 + p_1^4z + p_1^3p_2z + p_1^2p_2^2z + p_1p_2^3z + p_2^4z}{(1+p_1z)(1+p_2z)} \\
&\quad - \frac{(S_3(P) - p_1p_2S_2(P)z)(1+(p_1+p_2)z + p_1p_2z^2)}{(1+p_1z)(1+p_2z)} \\
&\quad - \frac{(p_1^2p_2^2S_1(P)z^2 - p_1^3p_2^3S_0(P)z^3)(1+(p_1+p_2)z + p_1p_2z^2)}{(1+p_1z)(1+p_2z)} \\
&= \frac{p_1^3 + p_1p_2^2 + p_1^2p_2 + p_2^3 + p_1^4z + p_1^3p_2z + p_1^2p_2^2z + p_1p_2^3z + p_2^4z}{(1+p_1z)(1+p_2z)} \\
&\quad - \frac{(p_1^3 + p_1p_2^2 + p_1^2p_2 + p_2^3)(1+(p_1+p_2)z + p_1p_2z^2)}{(1+p_1z)(1+p_2z)} \\
&\quad - \frac{p_1p_2(p_1^2 + p_1p_2 + p_2^2)z(1+(p_1+p_2)z + p_1p_2z^2)}{(1+p_1z)(1+p_2z)} \\
&\quad - \frac{(p_1^2p_2^2(p_1+p_2)z^2 - p_1^3p_2^3z^3)(1+(p_1+p_2)z + p_1p_2z^2)}{(1+p_1z)(1+p_2z)} \\
&= \frac{p_1^3 + p_2^3 + p_1p_2^2 + p_1^2p_2 - p_1^4z - p_2^4z - p_1^3p_2z - p_1p_2^3z - p_1^2p_2^2z}{(1+p_1z)(1+p_2z)} \\
&\quad - \frac{(p_1^3 + p_2^3 + p_1p_2^2 + p_1^2p_2 + p_1^3p_2z)(1+(p_1+p_2)z + p_1p_2z^2)}{(1+p_1z)(1+p_2z)} \\
&\quad - \frac{(p_1^2p_2^2z + p_1p_2^3z - p_1^3p_2^2z^2)(1+(p_1+p_2)z + p_1p_2z^2)}{(1+p_1z)(1+p_2z)} \\
&\quad + \frac{(p_1^2p_2^3z^2 + p_1^3p_2^3z^3)(1+(p_1+p_2)z + p_1p_2z^2)}{(1+p_1z)(1+p_2z)} \\
&= \frac{p_1^3 + p_1p_2^2 + p_1^2p_2 + p_2^3 + p_1^4z + p_2^4z + p_1^3p_2z + p_1p_2^3z + p_1^2p_2^2z}{(1+p_1z)(1+p_2z)} \\
&\quad - \frac{p_1^3 + p_1p_2^2 + p_1^2p_2 + p_2^3 - p_1^3p_2z - p_1^2p_2^2z - p_1p_2^3z + p_1^3p_2^2z^2}{(1+p_1z)(1+p_2z)} \\
&\quad - \frac{p_1^2p_2^3z^2 - p_1^3p_2^3z^3 + p_1^4z + p_1^2p_2^2z + p_1^3p_2z + p_1p_2^3z - p_1^4p_2z^2}{(1+p_1z)(1+p_2z)} \\
&\quad + \frac{p_1^3p_2^2z^2 + p_1^2p_2^3z^2 - p_1^4p_2^2z^3 - p_1^3p_2^3z^3 + p_1^4p_2^3z^4 - p_1^3p_2z}{(1+p_1z)(1+p_2z)} \\
&\quad - \frac{p_1p_2^3z + p_1^2p_2^2z + p_2^4z - p_1^3p_2^2z^2 - p_1^2p_2^3z^2 - p_1p_2^4z^2 + p_1^3p_2^3z^3}{(1+p_1z)(1+p_2z)} \\
&\quad - \frac{p_1^2p_2^4z^3 - p_1^3p_2^4z^4 + p_1^4p_2z^2 + p_1^2p_2^3z^2 + p_1^3p_2^2z^2 + p_1p_2^4z^2}{(1+p_1z)(1+p_2z)} \\
&\quad + \frac{p_1^4p_2^2z^3 + p_1^3p_2^3z^3 + p_1^2p_2^4z^3 - p_1^4p_2^3z^4 - p_1^3p_2^4z^4 + p_1^4p_2^4z^5}{(1+p_1z)(1+p_2z)} \\
&= \frac{p_1^4p_2^4z^5}{(1+p_1z)(1+p_2z)},
\end{aligned}
$$

et par suite

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_j(P)z^j = \frac{p_1^4p_2^4z^5}{(1+p_1z)(1+p_2z)(p_1^4p_2^4z^5)}$$
$$= \frac{1}{(1+p_1z)(1+p_2z)}.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_j(P)z^j &= S_0(P) - S_1(P)z + S_2(P)z^2 + \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_{j+3}(P)z^{j+3}\\ &= 1-(p_1+p_2)z+(p_1^2+p_1p_2+p_2^2)z^2 - z^3\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_{j+3}(P)z^j\\ &= 1-p_1z-p_2z+p_1^2z^2+p_1p_2z^2+p_2^2z^2 - z^3\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_{j+3}(P)z^j.\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}-z^3\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_{j+3}(P)z^j &= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_j(P)z^j - 1 + p_1z + p_2z - p_1^2z^2 - p_1p_2z^2 - p_2^2z^2\\ &= \frac{1}{(1+p_1z)(1+p_2z)} - \frac{(1-p_1z-p_2z)(1+p_1z)(1+p_2z)}{(1+p_1z)(1+p_2z)}\\ &\quad + \frac{(p_1^2z^2+p_1p_2z^2+p_2^2z^2)(1+p_1z)(1+p_2z)}{(1+p_1z)(1+p_2z)}\\ &= \frac{1-(1-p_1z-p_2z+p_1^2z^2+p_1p_2z^2+p_2^2z^2)(1+p_1z+p_2z+p_1p_2z^2)}{(1+p_1z)(1+p_2z)}\\ &= \frac{1-1+p_1z+p_2z-p_1^2z^2-p_1p_2z^2-p_2^2z^2-p_1z+p_1^2z^2+p_1p_2z^2}{(1+p_1z)(1+p_2z)}\\ &\quad - \frac{p_1^3z^3+p_1^2p_2z^3+p_1p_2^2z^3+p_2z-p_1p_2z^2-p_2^2z^2+p_1^2p_2z^3+p_1p_2^2z^3}{(1+p_1z)(1+p_2z)}\\ &\quad - \frac{p_2^3z^3+p_1p_2z^2-p_1^2p_2z^3+p_1p_2^2z^3+p_1^3p_2z^4+p_1^2p_2^2z^4+p_1p_2^3z^4}{(1+p_1z)(1+p_2z)}\\ &= \frac{-p_1^3z^3-p_2^3z^3-p_1^2p_2z^3-p_1p_2^2z^3-p_1^3p_2z^4-p_1^2p_2^2z^4-p_1p_2^3z^4}{(1+p_1z)(1+p_2z)}\end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_{j+3}(P)z^j &= \frac{-p_1^3z^3-p_2^3z^3-p_1^2p_2z^3-p_1p_2^2z^3-p_1^3p_2z^4-p_1^2p_2^2z^4-p_1p_2^3z^4}{(1+p_1z)(1+p_2z)(-z^3)}\\ &= \frac{p_1^3+p_2^3+p_1^2p_2+p_1p_2^2+p_1^3p_2z+p_1^2p_2^2z+p_1p_2^3z}{(1+p_1z)(1+p_2z)}\\ &= \frac{p_1^3+p_2^3+p_1^2p_2+p_1p_2^2+p_1^3p_2z+p_1^2p_2^2z+p_1p_2^3z}{1+(p_1+p_2)z+p_1p_2z^2}. \qquad (2.28)\end{aligned}$$

a- En remplaçant p_2 par $-p_2$ dans la formule (2.28), on trouve

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_{j+3}(p_1+[-p_2])z^j &= \frac{p_1^3 - p_2^3 - p_1^2p_2 + p_1p_2^2 - p_1^3p_2z + p_1^2p_2^2z - p_1p_2^3z}{1+(p_1-p_2)z - p_1p_2z^2} \\
&= \frac{(p_1-p_2)(p_1^2+p_1p_2+p_2^2) - p_1p_2(p_1-p_2)}{1+(p_1-p_2)z-p_1p_2z^2} \\
&\quad - \frac{(p_1^3p_2 - p_1^2p_2^2 + p_1p_2^3)z}{1+(p_1-p_2)z-p_1p_2z^2} \\
&= \frac{(p_1-p_2)(p_1^2+p_1p_2+p_2^2-p_1p_2) - p_1p_2(p_1^2-p_1p_2+p_2^2)z}{1+(p_1-p_2)z-p_1p_2z^2} \\
&= \frac{(p_1-p_2)(p_1^2+p_2^2) - p_1p_2[(p_1-p_2)^2+p_1p_2]z}{1+(p_1-p_2)z-p_1p_2z^2} \\
&= \frac{(p_1-p_2)^3 + 3p_1p_2(p_1-p_2) - p_1p_2(p_1-p_2)}{1+(p_1-p_2)z-p_1p_2z^2} \\
&\quad - \frac{p_1p_2((p_1-p_2)^2+p_1p_2)z}{1+(p_1-p_2)z-p_1p_2z^2} \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

On pose

$$\begin{cases} p_1 - p_2 = 1 \\ p_1p_2 = 1 \end{cases}$$

la formule (2.29) devient

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_{j+3}(p_1+[-p_2])z^j &= \frac{1+3-1-1(1+1)z}{1+z-z^2} \\
&= \frac{3-2z}{1+z-z^2} \\
&= (3-2z)\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j F_j z^j,
\end{aligned}$$

la dernière formule représente une fonction génératrice pour les nombres de Fibonacci tel que

$$S_{j+3}(p_1+[-p_2]) = (3-2z)F_j.$$

b- En remplaçant p_1 par $(2p_1)$ et p_2 par $(-2p_2)$ dans la formule (2.28), on trouve

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_{j+3}(2p_1+[-2p_2])z^j = \frac{8p_1^3 - 8p_2^3 - 8p_1^2p_2 + 8p_1p_2^2 - 16p_1^3p_2z + 16p_1^2p_2^2z - 16p_1p_2^3z}{1+2(p_1-p_2)z-4p_1p_2z^2} \qquad (2.30)$$

On pose $4p_1p_2 = -1$, la formule (2.30) devient

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_{j+3}(2p_1+[-2p_2])z^j = \frac{8p_1^3 - 8p_2^3 + 2p_1 - 2p_2 + 4p_1^2z + z + 4p_2^2z}{1+2(p_1-p_2)z+z^2}$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_{j+3}(2p_1+[-2p_2])z^j &= \frac{8(p_1^3-p_2^3)+2(p_1-p_2)+(4p_1^2+1+4p_2^2)z}{1+2(p_1-p_2)z+z^2}\\ &= (8(p_1^3-p_2^3)+2(p_1-p_2))\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j U_j(p_1-p_2)z^j\\ &\quad + (4p_1^2+1+4p_2^2)z\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j U_j(p_1-p_2)z^j,\end{aligned}$$

la dernière formule représente une fonction génératrice pour les polynôme de Tchebychev de deuxième espèce tel que

$$S_{j+3}(2p_1+[-2p_2]) = (8(p_1^3-p_2^3)+2(p_1-p_2)+(4p_1^2+1+4p_2^2)z)U_j(p_1-p_2).$$

de la formule(2.21) nous pouvons déduire

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j T_{j+3}(p_1-p_2)z^j &= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j[S_{j+3}(2p_1+[-2p_2])-(p_1-p_2)S_{j+2}(2p_1+[-2p_2])]z^j\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_{j+3}(2p_1+[-2p_2])z^j\\ &\quad -(p_1-p_2)\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j S_{j+2}(2p_1+[-2p_2])z^j\\ &= \frac{8(p_1^3-p_2^3)+2(p_1-p_2)+(4p_1^2+1+4p_2^2)z}{1+2(p_1-p_2)z+z^2}\\ &\quad -(p_1-p_2)\frac{4p_1^2+4p_2^2+1+2(p_1-p_2)z}{1+2(p_1-p_2)z+z^2}\\ &= \frac{8(p_1^3-p_2^3)+2(p_1-p_2)+(4p_1^2+1+4p_2^2)z-4p_1^3}{1+2(p_1-p_2)z+z^2}\\ &\quad + \frac{4p_1^2p_2-4p_1p_2^2+4p_2^3-p_1+p_2-2(p_1-p_2)^2z}{1+2(p_1-p_2)z+z^2}\\ &= \frac{4(p_1^3-p_2^3)+(p_1-p_2)+4p_1^2p_2-4p_1p_2^2+2p_1^2z+2p_2^2z+z+4p_1p_2z}{1+2(p_1-p_2)z+z^2}\\ &= \frac{4(p_1^3-p_2^3)+(p_1-p_2)-(p_1-p_2)+2p_1^2z+2p_2^2z}{1+2(p_1-p_2)z+z^2}\\ &= \frac{4(p_1^3-p_2^3)+2(p_1^2+p_2^2)z}{1+2(p_1-p_2)z+z^2}\\ &= \frac{4(p_1-p_2)^3+12p_1p_2(p_1-p_2)+2(p_1^2+p_2^2)z}{1+2(p_1-p_2)z+z^2}\\ &= \frac{4(p_1-p_2)^3-3(p_1-p_2)+2(p_1^2+p_2^2)z}{1+2(p_1-p_2)z+z^2}\\ &= \frac{4(p_1-p_2)^3-3(p_1-p_2)+2(p_1^2+p_2^2)z}{1+(p_1-p_2)z}\,\frac{1+(p_1-p_2)z}{1+2(p_1-p_2)z+z^2}\\ &= \frac{4(p_1-p_2)^3-3(p_1-p_2)+2(p_1^2+p_2^2)z}{1+(p_1-p_2)z}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j T_j(p_1-p_2)z^j,\end{aligned}$$

ce qui représente une nouvelle fonction génératrice pour les polynôme de Tchebychev de première espèce tel que

$$S_{j+3}(2p_1-2p_2)-(p_1-p_2)S_{j+2}(2p_1-2p_2) = \frac{4(p_1-p_2)^3-3(p_1-p_2)+2(p_1^2+p_2^2)z}{1+(p_1-p_2)z}T_j(p_1-p_2).$$

Conclusion

Le théorème principale pour les fonctions symétriques réussit toujours pour déterminer des nouveaux fonctions génératrices mais conduit souvent à des calculs assez longs.

Les travaux futurs seront autour de l'extension des éléments de l'alphabet P et l'étude des valeurs du paramètre k.

Bibliographie

[1] A.Abderrezzak, *Généralisation d'identités de Carlitz, Howard et Lehmer*, Aequationes Math. vol.49, p.36-46 (1995).

[2] A .Abdrrezzak, *Généralisation de la transformation d'Euler d'une série formelle*, ADV.Math, vol.103, p.180-195 (1994).

[3] A. Boussayoud, M. Kerada, R.Sahali *Symmetrizing operations on some orthogonal polynomials*, Int. Electron.J.Pure Appl Math, vol.9, p.191-199 (2015).

[4] A. Lascoux, Addition of ± 1 : *Application to Arithmetic*, Séminaire lotharingien de Combinatoire. vol.52, p.1-9 (2004).

[5] I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomias*, second edition, Oxford Mathematical Monographs,(1995).

[6] JP.Chabert, *Equations algébriques et fonctions symétriques*, 1-36.

[7] Valet Ludovic, *Généralité sur les polynômes orthogonaux*, DEA. Polynômes orthogonaux, pp.49 (2000).