

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

**UNIVERSITE Mohamed Seddik Ben Yahia – Jijel**

**Faculté des Sciences Exactes et Informatique**

**Département de Mathématiques**



## **Mémoire**

**Pour l'obtention du diplôme de : Master**

**Spécialité: Mathématiques Appliquées**

**Option : EDP et Application**

**Thème**

**Modèles mathématiques et leur discrétisation  
en électromagnétisme**

**Présenté par :**

**Aichouna Sabrina et Djeghri Razika**

**Devant le jury :**

|                                  |              |                            |
|----------------------------------|--------------|----------------------------|
| <b>Président : W. Chikouche</b>  | <b>M.C.A</b> | <b>Université de Jijel</b> |
| <b>Encadreur : H. Benhassine</b> | <b>M.C.B</b> | <b>Université de Jijel</b> |
| <b>Examineur : W. Khallaf</b>    | <b>M.C.B</b> | <b>Université de Jijel</b> |
| <b>Examineur : I.Soualhia</b>    | <b>M.C.B</b> | <b>Université de Jijel</b> |

**Promotion 2016/2017**

# Remerciements

*Au début avant tout nous remercions **Dieu** de nous avoir donné la patience et la volonté pour terminer ce travail.*

*Nous tenons à formuler notre gratitude, et nos sincères remerciements à notre encadreur « **Mr H. Benhassine** » pour son encadrement précieux, sa confiance, sa grande patience, pour tout l'aide précieuse et les conseils pour la bonne réalisation de ce mémoire. Et pour tout le temps qu'il a consacré pour nous aider à la rédaction de ce travail.*

*Nous remercions aussi « **Mme W. ChiKouche** » qui nous a fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.*

*Nos plus sincères remerciements s'adressent aux membres du jury « **Mme W. Khallaf** » « **Mme I. Soualhia** » d'avoir accepté de juger ce travail.*

*Toutes notre gratitude va aussi à nos **chers parents** pour leurs soutiens tout au long de nos études et durant ce mémoire.*

*Enfin, nous tenons à exprimer nos profonds remerciements à tous nos enseignants du département de mathématiques pour leur sincérité, nos frères et nos amies qui ont été toujours de notre côté avec leurs aides.*

*Merci*

# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introduction</b>  | <b>3</b>  |
| <b>1 Cadre fonctionnel</b>   | <b>5</b>  |
| 1.1 Espace vectoriel normé . . . . .   | 5         |
| 1.2 Espaces de Hilbert . . . . .   | 6         |
| 1.3 Forme linéaire et espace dual . . . . .  | 6         |
| 1.4 Espace $D(\Omega)$ . . . . .   | 7         |
| 1.5 Espaces de Sobolev . . . . .   | 8         |
| 1.6 Espaces $H(\mathbf{rot}, \Omega)$ , $H(\mathbf{div}, \Omega)$ Principales propriétés . . . . . | 12        |
| 1.7 Espaces fonctionnels généraux en électromagnétisme . . . . .                                   | 19        |
| <b>2 Equations de Maxwell</b>  | <b>21</b> |
| 2.1 Petite introduction à l'électromagnétisme . . . . .  | 21        |
| 2.2 Equations de Maxwell sous forme intégrale . . . . .  | 23        |
| 2.3 Equations de Maxwell sous forme différentielle . . . . .                                       | 25        |
| 2.4 Bilan de l'énergie électromagnétique . . . . .   | 27        |
| 2.5 Formulation des équations de Maxwell à l'aide de potentiels . . . . .                          | 29        |
| <b>3 Formulation variationnelle : cas statique</b>   | <b>32</b> |
| 3.1 Régularités . . . . .  | 33        |
| 3.2 Existence et unicité de la solution . . . . .  | 37        |
| 3.2.1 Problème électrostatique . . . . .   | 37        |
| 3.2.2 Problème magnétostatique . . . . .   | 41        |
| <b>4 Formulation variationnelle : cas dépendant du temps</b>                                       | <b>46</b> |
| 4.1 Régularités . . . . .  | 47        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 4.2      | Réécriture sous forme d'un problème du second ordre . . . . .                   | 49        |
| 4.3      | Existence et unicité pour le problème électrique . . . . .                      | 54        |
| <b>5</b> | <b>Discrétisation par éléments finis</b>  | <b>58</b> |
| 5.1      | Principe de l'approximation de type Galerkin . . . . .                          | 58        |
| 5.2      | Formulation mixte des équations de Maxwell . . . . .                            | 59        |
| 5.2.1    | Formulation du second ordre en $\mathbf{B}$ (induction magnétique) . . . . .    | 60        |
| 5.2.2    | Formulation du second ordre en $\mathbf{E}$ (champ électrique) . . . . .        | 60        |
| 5.2.3    | Généralités sur les problèmes mixtes . . . . .                                  | 61        |
| 5.3      | Existence et unicité de la formulation mixte des équations de Maxwell . . . . . | 64        |
| 5.4      | Formulation mixte approchée des équations de Maxwell . . . . .                  | 67        |
| 5.5      | Approximation par une méthode d'éléments finis conformes . . . . .              | 71        |
|          | <b>Conclusion</b>   | <b>79</b> |
|          | <b>Bibliographie</b>  | <b>79</b> |

# Introduction générale

Ce travail rentre dans le cadre d'une discrétisation par une méthode d'éléments finis de phénomènes électromagnétiques. Nous allons nous intéresser plus précisément aux équations de Maxwell qui décrivent ce genre de phénomènes.

On s'inspirera grandement pour cela du cours de DEA de F. Assous et P. Ciarlet [2]. Le but étant d'essayer de faire une formulation variationnelle et de démontrer l'existence et l'unicité de la solution des équations de Maxwell dans les espaces  $H(\mathbf{rot}, \Omega)$ ,  $H(\mathbf{div}, \Omega)$ . On introduira pour cela l'inégalité de Weber, (équivalent de l'inégalité de Poincaré dans les espaces de Sobolev) et le théorème de Lions-Magenes (qui est une généralisation du théorème de Lax-Milgram) pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution dans le cas où l'on a une dépendance du temps.

Ensuite on fera une approximation par éléments finis en se basant sur une formulation mixte où l'on doit vérifier la condition inf-sup discrète (dite aussi condition de Babuska-Brezzi).

Ce mémoire, se composera de cinq chapitres, dans le premier chapitre on s'attellera à introduire le cadre fonctionnel correspondant à une formulation variationnelle des équations de Maxwell. Nous commencerons par introduire les définitions et les propriétés des espaces de Sobolev et les espaces  $H(\mathbf{rot}, \Omega)$ ,  $H(\mathbf{div}, \Omega)$  : théorème de trace, formules de Green généralisées et inégalité de Weber. Puis les définitions et les propriétés des espaces fonctionnels généraux en électromagnétisme.

Dans le second chapitre, on commencera par décrire les phénomènes électromagnétiques qui aboutissent aux équations de Maxwell (équations de Maxwell sous leur forme intégrale, sous leur forme différentielle et nouvelle formulation à l'aide de potentiels).

Dans le troisième chapitre on donnera quelques résultats de régularité et on traitera l'existence et l'unicité de la solution dans le cas statique des équations de Maxwell réécrites

sous leur forme potentiel. A cet effet, on utilisera le théorème de Lax-Milgram.

Dans le quatrième chapitre on commencera par énoncer quelques résultats de régularité, ensuite on traitera l'existence et l'unicité de la solution dans le cas où l'on a une dépendance du temps de l'équation de Maxwell réécrite sous forme d'un problème du second ordre. Pour ce faire on utilisera le théorème de Lions-Magenes.

Enfin dans le dernier chapitre, une discrétisation par éléments finis est présentée.

# Chapitre 1

## Cadre fonctionnel

Dans ce chapitre nous allons introduire le cadre fonctionnel nécessaire à la suite de ce travail. En particulier, on donnera les définitions des espaces  $H(\mathbf{rot}, \Omega)$ ,  $H(\mathbf{div}, \Omega)$ , leurs traces sur la frontière d'un domaine borné et les propriétés relatives à ces espaces. On s'est basé, pour cela sur plusieurs ouvrages de G.Allaire [1] et de R.Dautray, J.Louis Lions [8], qui ont traité de manière détaillée ce cadre-là.

### 1.1 Espace vectoriel normé

**Définition 1.1.1** Soit  $V$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{R}$  des réels. L'application

$\|\cdot\|_V : V \longrightarrow \mathbb{R}^+$  est une norme si et seulement si:

$$1) \forall u \in V : \|u\|_V = 0 \iff u = 0,$$

$$2) \forall u \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda u\|_V = |\lambda| \|u\|_V,$$

$$3) \forall u, v \in V : \|u + v\|_V \leq \|u\|_V + \|v\|_V. \quad (\text{Inégalité triangulaire})$$

• On appelle espace vectoriel normé le couple  $(V, \|\cdot\|_V)$  formé par un espace vectoriel réel et une norme  $\|\cdot\|_V$  définie sur  $V$ .

• On appelle semi-norme sur  $V$  l'application  $|\cdot| : V \longrightarrow \mathbb{R}^+$  qui vérifie les propriétés (2) et (3).

**Définition 1.1.2** On dit que deux normes  $\|\cdot\|_V$  et  $\|\cdot\|_E$  définies sur le même espace vectoriel normé  $V$  sont équivalentes s'il existe deux constantes positives  $\alpha$  et  $\beta$  telle que:

$$\alpha \|u\|_V \leq \|u\|_E \leq \beta \|u\|_V, \quad \forall u \in V. \quad (1.1)$$

**Remarque 1.1.3** Dans un espace de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

## 1.2 Espaces de Hilbert

**Définition 1.2.1** Soit  $H$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

Un produit scalaire sur  $H$  est une application de  $H \times H$  dans  $\mathbb{R}$  notée  $(\cdot, \cdot)_H$  telle que:

- 1)  $\forall u, v, w \in H, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: (\alpha u + \beta v, w)_H = \alpha(u, w)_H + \beta(v, w)_H,$
- 2)  $\forall u, v \in H: (u, v)_H = (v, u)_H,$
- 3)  $\forall u \in H: (u, u)_H \geq 0$  et  $(u, u)_H = 0 \iff u = 0.$

L'espace  $H$  muni d'un tel produit est appelé espace préhilbertien.

**Définition 1.2.2** Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la norme associée au produit scalaire

$$\|\cdot\|_H = \sqrt{(\cdot, \cdot)_H}.$$

**Définition 1.2.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**

Soit  $H$  un espace préhilbertien de produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_H$  et de norme  $\|\cdot\|_H$ , alors on a l'inégalité suivante :

$$|(u, v)_H| \leq \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall u, v \in H.$$

## 1.3 Forme linéaire et espace dual

**Définition 1.3.1** Soit  $(V, \|\cdot\|_V)$  un espace normé.

- Une forme sur  $V$  est un opérateur associant un nombre réel à tout élément de  $V$ .
- Une forme  $F$  est linéaire si:

$$F(\lambda u + \mu w) = \lambda F(u) + \mu F(w), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u, w \in V. \quad (1.2)$$

- Une forme linéaire est bornée s'il existe une constante  $C > 0$  telle que:

$$|F(v)| \leq C \|v\|_V, \forall v \in V.$$

- L'espace des formes linéaires et bornées sur  $V$

$$V' = \{F: V \longrightarrow \mathbb{R} \mid F \text{ linéaire et bornée}\}, \quad (1.3)$$

s'appelle l'espace dual de  $V$ , on le munit de la norme

$$\|F\|_{V'} = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|F(v)|}{\|v\|_V}.$$



## 1.4 Espace $D(\Omega)$

**Définition 1.4.1** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  et soit  $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur  $\Omega$ .

1) On appelle support de  $f$  l'ensemble:

$$\text{supp}f = \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}. \quad (1.4)$$

2) On dira que  $f$  est à support compact dans  $\Omega$  s'il existe un sous ensemble compact  $K \subset \Omega$  telle que :  $\text{supp}f \subset K$ .

Ces notions nous permettent d'introduire les définitions suivantes :

**Définition 1.4.2**  $D(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions indéfiniment continûment différentiables et à support compact dans  $\Omega$ . C'est-à-dire :

$$D(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) \mid \exists K \subset \Omega, K \text{ compact telle que: } \text{supp}f \subset K\}.$$

**Définition 1.4.3** On appelle espace de distributions, et on note  $D'(\Omega)$  l'ensemble des applications linéaires et continues de  $D(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}$ .

Soient  $T \in D'(\Omega)$  et  $f \in D(\Omega)$  on notera l'action de  $T$  sur  $f$  par des crochets de dualité, c'est-à-dire  $\langle T, f \rangle$ .

**Remarque 1.4.4** L'espace  $D'(\Omega)$  est le dual topologique de l'espace  $D(\Omega)$ .

**Définition 1.4.5** Pour toute distributions  $T \in D'(\Omega)$ , sa dérivée  $\frac{\partial T}{\partial x_j}$  ( $j = 1, \dots, N$ ) est une distribution définie par :

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, f \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\rangle, \forall f \in D(\Omega). \quad (1.5)$$

Plus généralement

$$\langle \partial_\alpha T, f \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial_\alpha f \rangle, \forall f \in D(\Omega), \quad (1.6)$$

où  $\alpha$  est un multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  donné, avec  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$ , et

$$\partial_\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

L'application  $T \longmapsto \frac{\partial T}{\partial x_j}$  est linéaire et continue de  $D'(\Omega)$  dans  $D'(\Omega)$ .

## 1.5 Espaces de Sobolev

Nous allons donner dans ce paragraphe, les définitions des espaces de Sobolev et leurs propriétés. Ce sont des espaces très naturels pour les solutions des équations aux dérivées partielles.

Soit  $\Omega$  un ouvert quelconque de  $\mathbb{R}^3$ . On introduit l'espace des fonctions mesurables de la façon suivante :

**Définition 1.5.1** *L'espace  $L^2(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions mesurables  $f$  sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , et telle que :*

$$\|f\|_{0,\Omega} = \left( \int_{\Omega} f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

- $L^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert, munit du produit scalaire suivant :

$$(f, g)_{0,\Omega} = \int_{\Omega} f g dx.$$

### Remarque 1.5.2

1) Il est possible d'identifier tout élément  $f$  de  $L^2(\Omega)$  à une distribution toujours notée  $f$ , et l'on écrit :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f g dx, \quad \forall g \in L^2(\Omega).$$

2)  $D(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset D'(\Omega)$ .

3) Comme  $L^2(\Omega)$  est un sous-espace de  $D'(\Omega)$  il est loisible de dériver au sens des distributions ses éléments.

Nous sommes en mesure maintenant de définir les espaces de Sobolev qui sont des sous-espaces particuliers de  $L^2(\Omega)$ , leur norme associée ainsi que quelques propriétés importantes de ces espaces.

**Définition 1.5.3** *Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , l'espace de Sobolev d'ordre  $m$  que l'on note  $H^m(\Omega)$ , est l'ensemble des fonctions  $f \in L^2(\Omega)$  telles que les dérivées de  $f$  jusqu'à l'ordre  $m$  s'identifient à des fonctions de  $L^2(\Omega)$ . Autrement dit :*

$$H^m(\Omega) := \{ f \in L^2(\Omega), \partial_{\alpha} f \in L^2(\Omega), \forall \alpha \text{ multi-indice vérifiant } |\alpha| \leq m \}.$$

On munit l'espace  $H^m(\Omega)$  du produit scalaire suivant:

$$(f, g)_{m, \Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial_\alpha f, \partial_\alpha g)_{0, \Omega}.$$

$H^m(\Omega)$  est un espace de Hilbert pour la norme associée:

$$\begin{aligned} \|f\|_{m, \Omega} &= (f, f)_{m, \Omega}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial_\alpha f\|_{0, \Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

La semi-norme associée sera définie par :

$$|f|_{m, \Omega} = \left( \sum_{|\alpha|=m} \|\partial_\alpha f\|_{0, \Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- Plus particulièrement on définit l'espace de sobolev d'ordre 1 :

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega), \partial_j f \in L^2(\Omega), j = 1, 2, 3\},$$

et la norme associée :

$$\|f\|_{1, \Omega} = \left( \|f\|_{0, \Omega}^2 + \sum_{j=1}^3 \|\partial_j f\|_{0, \Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Remarque 1.5.4**

- 1) Pour  $m = 0$ , on a :  $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ .
- 2) Aussi on a les inclusions suivantes :  $D(\Omega) \subset H^{m+1}(\Omega) \subset H^m(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ .

**Définition 1.5.5** Pour  $m \geq 1$ , l'espace  $H_0^m(\Omega)$  est par définition l'adhérence de  $D(\Omega)$  dans l'espace  $H^m(\Omega)$  c'est-à-dire:

$$H_0^m(\Omega) = \overline{D(\Omega)}.$$

**Définition 1.5.6** Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ , on définit l'espace de Sobolev  $H^{-m}(\Omega)$  comme étant le dual topologique de  $H_0^m(\Omega)$  c'est-à-dire:

$$H^{-m}(\Omega) = (H_0^m(\Omega))'.$$

On a alors, pour:  $m > l \in \mathbb{N}$  la suite d'inclusions strictes:

$$L^2(\Omega) \subset H^{-l}(\Omega) \subset H^{-m}(\Omega) \subset D'(\Omega). \tag{1.7}$$

Maintenant, pour tout ouvert borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  à frontière assez régulière  $\Gamma$ , on peut introduire la notion de trace de  $H^1(\Omega)$  sur la frontière. Pour cela on donnera la définition suivante :

**Définition 1.5.7** Soit  $\Omega$  un ouvert borné à frontière assez régulière  $\Gamma$ , on définit l'espace  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  par:

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \left\{ g \in L^2(\Gamma) : \iint_{\Gamma} \frac{(g(x) - g(y))^2}{\|x - y\|^3} d\Gamma(x) d\Gamma(y) < \infty \right\} \quad (1.8)$$

où  $d\Gamma$  représente la mesure de Lebesgue sur la frontière  $\Gamma$  que l'on munit de la norme :

$$\|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 = \|f\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \iint_{\Gamma} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^3} d\Gamma(x) d\Gamma(y).$$

On notera que l'on a les inclusions :

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma) \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad (1.9)$$

où  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  est le dual topologique de  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .

On a alors le résultat suivant, qui permet de définir la trace de toute fonction  $f$  de  $H^1(\Omega)$  sur la frontière :

**Théorème 1.5.8 (Théorème de trace)**

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un ouvert borné à frontière assez régulière  $\Gamma$ . On définit alors, l'application trace  $\gamma_0$ , qui à toute fonction  $f$  de  $D(\overline{\Omega})$  associe sa trace sur la frontière  $\Gamma$  :

$$\begin{aligned} \gamma_0 : D(\overline{\Omega}) &\longrightarrow C(\Gamma) \\ f &\longmapsto f|_{\Gamma}. \end{aligned}$$

C'est une application linéaire et continue.

Alors, il est possible de prolonger l'application  $\gamma_0$  en une application linéaire continue et surjective de  $H^1(\Omega)$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . En particulier, il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C \|f\|_{H^1(\Omega)}.$$

De plus

$$H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) \mid f|_{\Gamma} = 0\}.$$

**Preuve.** Voir par exemple [1, p.92]. ■

**Remarque 1.5.9** Grâce au théorème précédant on peut donc parler de la valeur d'une fonction  $f$  de  $H^1(\Omega)$  sur la frontière dans le cas d'un ouvert borné à frontière régulière. Ce qui n'est pas le cas en général pour une fonction de  $L^2(\Omega)$ .

Le théorème de la trace, permet de généraliser la formule de Green définie pour des fonctions de  $C^1(\overline{\Omega})$  à des fonctions moins régulières de  $H^1(\Omega)$  (voir [1, p.93]).

**Théorème 1.5.10 (Formule de Green dans  $H^1(\Omega)$ )**

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un ouvert borné à frontière assez régulière  $\Gamma$ ,  $f$  et  $g$  deux fonctions appartenant à  $H^1(\Omega)$  on a :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} g \, dx = - \int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Gamma} f g n_i \, d\Gamma, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.10)$$

où  $\mathbf{n} = (n_i)_{1 \leq i \leq 3}$  est la normale unité extérieure à la frontière  $\Gamma$ .

**Remarque 1.5.11** La formule de Green décrite précédemment reste valable en dimension 2.

**Théorème 1.5.12 (Inégalité de Poincaré)**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  alors il existe une constante  $C_{\Omega} > 0$  qui ne dépend que du diamètre de  $\Omega$ , telle que :

$$\|f\|_{0,\Omega} \leq C_{\Omega} |f|_{1,\Omega} \quad \forall f \in H_0^1(\Omega). \quad (1.11)$$

**Preuve.** Elle est basée sur l'argument de densité de  $D(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , voir par exemple [1, p.90]. ■

**Corollaire 1.5.13** La semi norme  $|\cdot|_{1,\Omega}$  est une norme sur l'espace  $H_0^1(\Omega)$  équivalente à la norme de l'espace  $H^1(\Omega)$ .

Enfin, on donnera le théorème important de Lax-Milgram suivant, permettant d'assurer l'existence et l'unicité de la solution d'un problème variationnel donné dans des espaces de Hilbert et donc en particulier dans des espaces de Sobolev.

**Théorème 1.5.14** (*Théorème de Lax-Milgram*)

Soient :

- $V$  un espace de Hilbert de produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_V$  et de norme  $\|\cdot\|_V$ .
- $a$  une forme bilinéaire continue et coercive sur  $V \times V$  c'est-à-dire:

$$\exists M > 0 : |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V, \forall u, v \in V. \quad (\text{La continuité}) \quad (1.12)$$

$$\exists \alpha > 0 : a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2, \forall v \in V. \quad (\text{La coercivité}) \quad (1.13)$$

- $L$  est une forme linéaire continue sur  $V$  c'est-à-dire:

$$\exists C > 0 : |L(v)| \leq C \|v\|_V, \forall v \in V. \quad (1.14)$$

Alors le problème suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V \end{array} \right.$$

admet une solution unique, de plus la solution dépend continûment de la forme  $L$ :

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|L\|_{V'}.$$

**Preuve.** Voir par exemple [1, p.74]. ■

## 1.6 Espaces $H(\mathbf{rot}, \Omega)$ , $H(\mathbf{div}, \Omega)$ Principales propriétés

Dans ce paragraphe, nous allons introduire les opérateurs différentiels linéaires vectoriels qui interviennent dans la formulation mathématique des phénomènes électromagnétiques. Dans un premier temps, on donnera la définition des opérateurs grad, div et **rot** ensuite celle des espace de Sobolev  $H(\mathbf{rot}, \Omega)$ ,  $H(\mathbf{div}, \Omega)$  ainsi que leurs principales propriétés.

**Définition 1.6.1** On définit les opérateurs différentiels gradient, rotationnel et divergence de la façon suivante :

- 1) **Gradient:** Le gradient d'un champ scalaire  $f \in \mathbb{R}$  est défini par:

$$\begin{aligned} \text{grad} & : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f & \longmapsto \text{grad} f = \nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \end{aligned} \quad (1.15)$$

2) **Rotationnel**: Le rotationnel d'un champ vectoriel  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^3$  tel que  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$  est défini comme suit:

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} &: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{f} &\longmapsto \mathbf{rot} \mathbf{f} = \nabla \wedge \mathbf{f} = \left( \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (1.16)$$

où  $\wedge$  désigne le produit vectoriel et l'opérateur gradient est  $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$ .

3) **Divergence**: La divergence d'un champ vectoriel  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^3$  est défini comme suit:

$$\begin{aligned} \text{div} &: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{f} &\longmapsto \text{div} \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (1.17)$$

### Remarque 1.6.2

1) Il est aisé de vérifier par un simple calcul l'exactitude des relations entre opérateurs suivantes:

$$\text{div} \mathbf{rot} \mathbf{f} = 0, \forall \mathbf{f} \in \mathbb{R}^3 \quad (1.18)$$

$$\mathbf{rot} \text{grad} f = \mathbf{0}, \forall f \in \mathbb{R} \quad (1.19)$$

$$\text{div} \text{grad} f = \Delta f, \forall f \in \mathbb{R} \quad (1.20)$$

$$\text{grad} \text{div} \mathbf{f} - \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{f} = \Delta \mathbf{f}, \forall \mathbf{f} \in \mathbb{R}^3 \quad (1.21)$$

où  $\Delta$  désigne l'opérateur du laplacien :  $\Delta f = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ .

2) En dimension 2, l'opérateur rotationnel sera défini comme étant:

$$\text{rot} \mathbf{f} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}.$$

Nous sommes en mesure de définir les espaces  $H(\mathbf{rot}, \Omega)$  et  $H(\text{div}, \Omega)$  qui fournissent le cadre fonctionnel nécessaire par la suite quand à formulation mathématique des équations de Maxwell.

**Définition 1.6.3** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ . On définit les espaces  $H(\mathbf{rot}, \Omega)$  respectivement  $H(\text{div}, \Omega)$  de la façon suivante:

$$H(\mathbf{rot}, \Omega) := \{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 \mid \mathbf{rot} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 \} \quad (1.22)$$

$$H(\text{div}, \Omega) := \{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 \mid \text{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \} \quad (1.23)$$

que l'on munit respectivement des normes:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{0,\mathbf{rot}} &= \left( \int_{\Omega} (|\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{rot} \mathbf{v}|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{0,\text{div}} &= \left( \int_{\Omega} (|\mathbf{v}|^2 + |\text{div} \mathbf{v}|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\text{div} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ce sont des espaces de Hilbert pour leurs normes associées.

**Remarque 1.6.4**

1) Bien sur, les dérivées qui interviennent dans la définition des espaces  $H(\mathbf{rot}, \Omega)$  et  $H(\text{div}, \Omega)$  et de leurs normes sont prises au sens des distributions.

2) En dimension 2, l'espace rotationnel sera défini par:

$$H(\text{rot}, \Omega) := \{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2 \mid \text{rot} \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \}. \quad (1.24)$$

Maintenant comme dans le cas des espaces de Sobolev  $H^1(\Omega)$ , nous allons définir la notion de trace de fonctions de  $H(\mathbf{rot}, \Omega)$  et  $H(\text{div}, \Omega)$  sur la frontière dans le cas d'un ouvert borné de frontière régulière  $\Gamma$ . Cela se fait comme dans le cas des espaces de Sobolev  $H^1(\Omega)$ , en utilisant les formules d'intégrations par parties (formules de Green) et la densité de  $D(\bar{\Omega})$  dans  $H^1(\Omega)$ .

Commençons par définir des formules d'intégration pas parties relatives aux espaces  $H(\mathbf{rot}, \Omega)$  et  $H(\text{div}, \Omega)$ .



Pour cela considérons deux fonctions,  $\mathbf{f}$  une fonction vectorielle appartient à  $D(\overline{\Omega})^3$  et  $g$  une fonction scalaire appartient à  $D(\overline{\Omega})$  (on peut prendre  $g$  dans  $H^1(\Omega)$ ) alors on a :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} g \, dx = - \int_{\Omega} f_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Gamma} f_i g n_i \, d\Gamma \quad i = 1, 2, 3.$$

En sommant sur  $i$ , on trouve:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{f} g \, dx = - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \operatorname{grad} g \, dx + \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} g \, d\Gamma. \quad (1.25)$$

Soient maintenant  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  sont deux fonction vectorielles appartenant à  $D(\overline{\Omega})^3$ , on a alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{g} \, dx &= \int_{\Omega} \left\{ f_1 \left( \frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \right) + f_2 \left( \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \right) + f_3 \left( \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right) \right\} dx \\ \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \, dx &= \int_{\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) g_1 + \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right) g_2 + \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) g_3 \right\} dx \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{g} - \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) \, dx &= \int_{\Omega} \left\{ \left( f_1 \frac{\partial g_3}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} g_3 \right) - \left( f_1 \frac{\partial g_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} g_2 \right) + \left( f_2 \frac{\partial g_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} g_1 \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( f_2 \frac{\partial g_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} g_3 \right) + \left( f_3 \frac{\partial g_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} g_2 \right) - \left( f_3 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} g_1 \right) \right\} dx \end{aligned}$$

d'après la formule de Green (1.10) on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{g} - \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) \, dx &= \int_{\Gamma} \{ f_1 (g_3 n_2 - g_2 n_3) + f_2 (g_1 n_3 - g_3 n_1) + f_3 (g_2 n_1 - g_1 n_2) \} d\Gamma \\ &= - \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{g} \wedge \mathbf{n}) \, d\Gamma. \end{aligned}$$

Avec  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$  est le vecteur normal orienté vers l'extérieur de  $\Gamma$ .

En inversant  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  dans la formule précédente et en utilisant la commutativité du produit scalaire on obtient

$$\int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{g} - \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) \, dx = \int_{\Gamma} (\mathbf{f} \wedge \mathbf{n}) \cdot \mathbf{g} \, d\Gamma. \quad (1.26)$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer les théorèmes de trace des espaces  $H(\mathbf{rot}, \Omega)$  et  $H(\operatorname{div}, \Omega)$ .

**Théorème 1.6.5** (*Théorème de trace de  $H(\mathbf{div}, \Omega)$* )

Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  ( $N = 2$  ou  $3$ ) de frontière  $\Gamma$  régulière. Alors :

i) L'espace  $D(\overline{\Omega})^N$  est dense dans  $H(\mathbf{div}, \Omega)$ .

ii) L'application trace  $\gamma_n : \mathbf{f} \longmapsto \gamma_n \mathbf{f} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}|_\Gamma$  définie sur  $D(\overline{\Omega})^N$  est linéaire et continue et peut être prolongée par densité de  $H(\mathbf{div}, \Omega)$  vers  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .

iii) L'espace  $H_0(\mathbf{div}, \Omega)$  défini comme étant la fermeture de  $D(\Omega)^N$  dans  $H(\mathbf{div}, \Omega)$  est le noyau de l'application trace  $\gamma_n$ , c'est-à-dire:

$$H_0(\mathbf{div}, \Omega) = \{ \mathbf{f} \in H(\mathbf{div}, \Omega) : \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = 0 \}.$$

**Preuve.** La preuve de ce théorème est détaillée dans l'ouvrage de R.Dautray, J.Louis Lions [8, page241]. On soulignera juste que la preuve de ii) est basée sur la formule de Green (1.25) et la densité de  $D(\overline{\Omega})^N$  dans  $H(\mathbf{div}, \Omega)$ . ■

**Remarque 1.6.6** On notera au passage que par densité de  $D(\overline{\Omega})^N$  dans  $H(\mathbf{div}, \Omega)$  on déduit de (1.25) la formule de Green généralisée:

$$\forall (\mathbf{f}, g) \in H(\mathbf{div}, \Omega) \times H^1(\Omega) : \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{grad} g + \mathbf{div} \mathbf{f} g) dx = \langle \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}, g \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)}. \quad (1.27)$$

De la même manière on peut énoncer le théorème de trace pour l'espace  $H(\mathbf{rot}, \Omega)$ .

**Théorème 1.6.7** (*Théorème de trace de  $H(\mathbf{rot}, \Omega)$* )

Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  ( $N = 2$  ou  $3$ ) de frontière  $\Gamma$  régulière. Alors :

i) L'espace  $D(\overline{\Omega})^N$  est dense dans  $H(\mathbf{rot}, \Omega)$ .

ii) L'application trace  $\gamma_\tau : \mathbf{f} \longmapsto \gamma_\tau \mathbf{f} = \mathbf{f} \wedge \mathbf{n}|_\Gamma$  définie sur  $D(\overline{\Omega})^N$  est linéaire et continue et peut être prolongée par densité de  $H(\mathbf{rot}, \Omega)$  vers  $(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^3$  si  $N = 3$  et  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  si  $N = 2$ .

iii) L'espace  $H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$  défini comme étant la fermeture de  $D(\Omega)^N$  dans  $H(\mathbf{rot}, \Omega)$  est le noyau de l'application trace  $\gamma_\tau$ , c'est-à-dire:

$$H_0(\mathbf{rot}, \Omega) = \{ \mathbf{f} \in H(\mathbf{rot}, \Omega) : \mathbf{f} \wedge \mathbf{n}|_\Gamma = 0 \}.$$

**Preuve.** La preuve de ce théorème est détaillée dans l'ouvrage de R.Dautray, J.Louis Lions [8, p.242]. On soulignera juste que la preuve de ii) est basée sur la formule de Green (1.26) et la densité de  $D(\overline{\Omega})^N$  dans  $H(\mathbf{rot}, \Omega)$ .

Aussi la démonstration du point *i*) on a besoin du fait que si  $\mathbf{f} \in H(\mathbf{rot}, \Omega)$  tel que :

$$(\mathbf{f}, \mathbf{rot} \varphi) - (\mathbf{rot} \mathbf{f}, \varphi) = 0, \forall \varphi \in D(\overline{\Omega})^3$$

alors  $\mathbf{f} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ . ■

**Remarque 1.6.8**

1) On notera au passage que par densité de  $D(\overline{\Omega})^N$  dans  $H(\mathbf{rot}, \Omega)$  on déduit de (1.26) la formule de Green généralisée:

$$\forall (\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in H(\mathbf{rot}, \Omega) \times H^1(\Omega)^3 : \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{g} - \mathbf{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) dx = \langle \mathbf{f} \wedge \mathbf{n}, \mathbf{g} \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)}. \quad (1.28)$$

2) On rappellera que le produit vectoriel  $\wedge$  en dimension 3 est défini par:

$$\mathbf{f} \wedge \mathbf{n} = \begin{pmatrix} f_2 n_3 - f_3 n_2 \\ f_3 n_1 - f_1 n_3 \\ f_1 n_2 - f_2 n_1 \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

On notera qu'en dimension 2 ( $N = 2$ ) le produit vectoriel correspond (est remplacé) par:

$$\mathbf{f} \wedge \mathbf{n} \rightsquigarrow \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau} = f_1 n_2 - f_2 n_1 \quad (1.30)$$

où  $\boldsymbol{\tau} = (n_2, -n_1)$  est le vecteur tangent à  $\Gamma$  avec  $n_1$  et  $n_2$  sont les composante du vecteur normal.

Aussi l'expression du rotationnel en dimension 2 s'écrira :  $\mathbf{rot} \mathbf{f} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ .

Notons aussi que les fonctions vectorielles de certains sous-espaces de

$H(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\text{div}, \Omega)$  vérifient une inégalité de type Poincaré, appelé inégalité de Weber, fort utile par la suite pour démontrer la coercivité et la continuité lors de l'application du théorème de Lax-Milgram.

**Théorème 1.6.9 (Inégalité de Weber)**

Soit un ouvert  $\Omega$  borné de frontière régulière  $\Gamma$  simplement connexe. Alors il existe une constante  $C_w > 0$  dépendant uniquement de  $\Omega$  telle que:

$$\forall \mathbf{f} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\text{div}, \Omega) : \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} \leq C_w |\mathbf{f}|_{\mathbf{rot}, \text{div}}, \quad (1.31)$$

$$\forall \mathbf{f} \in H(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega) : \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} \leq C_w |\mathbf{f}|_{\mathbf{rot}, \text{div}}, \quad (1.32)$$

avec

$$|\mathbf{f}|_{\mathbf{rot}, \text{div}} = \left( \int_{\Omega} (|\mathbf{rot} \mathbf{f}|^2 + |\text{div} \mathbf{f}|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

A partir de ce théorème on peut facilement déduire le corollaire suivant:

**Corollaire 1.6.10**  $\|\cdot\|_{0, \mathbf{rot}, \text{div}}$  et  $|\cdot|_{\mathbf{rot}, \text{div}}$  sont deux normes équivalentes sur  $H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\text{div}, \Omega)$  et sur  $H(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega)$  et l'on a:

$$\forall \mathbf{f} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\text{div}, \Omega) : C_0 \|\mathbf{f}\|_{0, \mathbf{rot}, \text{div}} \leq |\mathbf{f}|_{\mathbf{rot}, \text{div}} \leq C_1 \|\mathbf{f}\|_{0, \mathbf{rot}, \text{div}}, \quad (1.33)$$

$$\forall \mathbf{f} \in H(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega) : C_0 \|\mathbf{f}\|_{0, \mathbf{rot}, \text{div}} \leq |\mathbf{f}|_{\mathbf{rot}, \text{div}} \leq C_1 \|\mathbf{f}\|_{0, \mathbf{rot}, \text{div}}, \quad (1.34)$$

avec:  $C_0 = \frac{1}{\sqrt{1+C_w^2}}$ ,  $C_1 = 1$ , et

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}\|_{0, \mathbf{rot}, \text{div}} &= \left( \int_{\Omega} (|\mathbf{f}|^2 + |\mathbf{rot} \mathbf{f}|^2 + |\text{div} \mathbf{f}|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\|\mathbf{f}\|_{0, \Omega}^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{f}\|_{0, \Omega}^2 + \|\text{div} \mathbf{f}\|_{0, \Omega}^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Enfin, il est important de préciser le rapport entre les espaces  $H(\mathbf{rot}, \Omega)$ ,  $H(\text{div}, \Omega)$  et l'espace  $H^1(\Omega)^3$

**Théorème 1.6.11** Soit un ouvert  $\Omega$  borné de frontière régulière  $\Gamma$ . Alors les espaces de Sobolev :

$$H_{\tau_0}^1(\Omega)^3 = \{\mathbf{f} \in H^1(\Omega)^3, \mathbf{f} \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0\}. \quad (1.36)$$

$$H_{n_0}^1(\Omega)^3 = \{\mathbf{f} \in H^1(\Omega)^3, \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0\}. \quad (1.37)$$

Sont tels que

$$H_{\tau_0}^1(\Omega)^3 = H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\text{div}, \Omega) \quad (1.38)$$

$$H_{n_0}^1(\Omega)^3 = H(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega). \quad (1.39)$$

**Preuve.** La preuve de ce théorème est détaillée dans l'ouvrage de R.Dautray, J.Louis Lions [8, p.245]. ■

On terminera ce paragraphe par donner un résultat relatif au noyau de l'opérateur  $\mathbf{rot}$  et  $\mathbf{div}$  (Lemme de Poincaré) stipulant que, sous certaines conditions sur le domaine  $\Omega$ , on peut écrire qu'un champ vectoriel de divergence nulle peut s'écrire comme le rotationnel d'un champ vectoriel. De même on peut dire qu'un champ vectoriel de rotationnel nul peut s'écrire comme le gradient d'un champ scalaire. Pour une analyse détaillée le lecteur peut se référer à [8, p.249] ou bien [9, p.45]

**Théorème 1.6.12 (Lemme de Poincaré)**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné connexe de frontière régulière  $\Gamma$ . Alors:

Soit  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^3$  tel que  $\mathbf{div} \mathbf{f} = 0$  avec  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0$ . Alors,

$$\exists! \varphi \in H^1(\Omega)^3 : \quad \mathbf{f} = \mathbf{rot} \varphi \quad \text{avec} : \quad \mathbf{div} \varphi = 0 \quad \text{et} \quad \varphi \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0. \quad (1.40)$$

Soit  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^3$  tel que  $\mathbf{rot} \mathbf{f} = 0$  avec  $\mathbf{f} \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0$ . Alors,

$$\exists \varphi \in H^1(\Omega) : \quad \mathbf{f} = \mathbf{grad} \varphi \quad \text{avec} \quad \varphi \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0. \quad (1.41)$$

## 1.7 Espaces fonctionnels généraux en électromagnétisme

Dans le cas d'une dépendance par rapport au temps dans le système d'équations de Maxwell on aura besoin de définir certains espaces fonctionnels permettant de définir des distributions en temps et en espaces. Ceci afin de pouvoir utiliser le théorème de Lions-Magenes que l'on abordera dans le quatrième chapitre. Cette est présentée telle qu'elle l'a été dans F. Assous et P. Ciarlet [2, p.75].

Dans la suite on considère  $T > 0$  le temps final donné,  $X, Y$  deux espaces de Banach et  $H$  un espace de Hilbert.

**Définition 1.7.1**  $C^m(0, T; X)$  est l'ensemble des fonctions de classe  $C^m$  sur  $[0, T]$  à valeurs dans  $X$ . C'est un espace de Banach, muni de la norme:

$$\|f\|_{C^m(0, T; X)} = \sum_{k=0}^m \sup_{t \in [0, T]} \left\| \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(t) \right\|_X.$$

**Définition 1.7.2**  $L^2(0, T; X)$  est l'ensemble des fonctions mesurables de carré intégrable sur  $]0, T[$  à valeurs dans  $X$ . C'est un espace de Banach muni de la norme:

$$\|f\|_{L^2(0, T; X)} := \left( \int_0^T \|f(\cdot, t)\|_X^2 dt \right)^{1/2}.$$

L'espace  $L^2(0, T; H)$  est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$(f, g)_{L^2(0, T; H)} := \int_0^T (f(\cdot, t), g(\cdot, t))_H dt.$$

**Proposition 1.7.3** Soit  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ , alors l'application  $f \longrightarrow Af$  est continue de  $C^0(0, T; X)$  dans  $C^0(0, T; Y)$ .

**Définition 1.7.4** On appelle espace de distributions sur  $]0, T[$  à valeurs dans  $X$ , et on note  $D' (]0, T[; X)$  l'ensemble des applications linéaires continues de  $D (]0, T[)$  dans  $X$ .

**Remarque 1.7.5** L'espace  $L^2(0, T; X)$  et  $C^m(0, T; X)$  sont des sous-espaces de  $D' (]0, T[, X)$ .

**Définition 1.7.6** Soit  $A \in D' (]0, T[; X)$ , alors on a :

$$\forall f \in D (]0, T[) : \left\langle \frac{dA}{dt}, f \right\rangle_t = - \left\langle A, \frac{df}{dt} \right\rangle_t$$

telle que

$$\frac{dA}{dt} \in D' (]0, T[; X).$$

**Définition 1.7.7** Soit  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ , pour tout  $f \in D' (]0, T[; X)$ , on définit  $Af \in D' (]0, T[; Y)$  comme suit:

$$\forall \varphi \in D (]0, T[) : \langle Af, \varphi \rangle_t = A(\langle f, \varphi \rangle_t).$$

**Proposition 1.7.8** L'application  $Af$  est linéaire continue de  $D' (]0, T[; X)$  dans  $D' (]0, T[; Y)$ .

A partir des deux dernières définitions 1.7.6, 1.7.7 et de la proposition 1.7.8 on en déduit le théorème suivant :

**Théorème 1.7.9** Pour tout  $f \in X$  et  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  on a l'égalité:

$$\frac{d}{dt} (Af) = A \left( \frac{df}{dt} \right). \quad (1.42)$$

Enfin on aura besoin par la suite du lemme :

**Lemme 1.7.10 (Lemme de Gronwall)**

Soient  $g \in C^0(0, T; \mathbb{R}^+)$  donnée, et  $\varphi \in C^0(0, T)$ , telles que

$$\varphi(t) \leq \varphi(0) + \int_0^t \varphi(s) ds + \int_0^t g(s) ds.$$

Alors, il existe une constante  $C_T > 0$ , qui ne dépend que de  $T$  telle que

$$\sup_{t_0 \in [0, T]} \varphi(t_0) \leq C_T \left[ \varphi(0) + \int_0^T g(s) ds \right]. \quad (1.43)$$

# Chapitre 2

## Equations de Maxwell

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux équations de Maxwell qui modélisent les phénomènes physiques en électromagnétisme. On essaiera de faire le lien entre la réalité physique et les équations mathématiques qui modélisent le phénomène. Pour cette partie de notre mémoire on s'est grandement inspiré de [12].

### 2.1 Petite introduction à l'électromagnétisme

L'interaction électromagnétique est l'une des 04 interactions que la physique décrit. Elle régit la majeure partie des phénomènes intervenant à notre échelle. Les trois autres sont: les interactions nucléaires (forte et faible) intervenant à l'échelle microscopique et l'interaction de gravitation qui intervient-elle à l'échelle planétaire.

Avant de donner les équations qui décrivent les phénomènes de l'électromagnétisme nous rappellerons quelques notions d'électricité et de magnétisme.

Pour pouvoir appliquer le calcul différentiel mathématique, nous allons modéliser la charge contenue dans un petit volume  $\delta V$  de l'espace entourant un point  $M$ .

Ainsi, au volume  $\delta V$ , nous associons la charge  $\delta q$  (exprimée en Coulomb) qu'il contient et posons:

$$\delta q = \rho(M, t) \delta V \tag{2.1}$$

$\rho(M, t)$  est la **densité volumique de charges** au point  $M$ , dépendant de ce point et du temps, exprimée en  $C.m^{-3}$ .

Une partie de ces charges peut être animée, par rapport à un référentiel d'une vitesse  $\mathbf{v}$ .

Le **vecteur densité de courant**  $J(M, t)$  est alors défini par :

$$J(M, t) = \rho_m(M, t) \mathbf{v}(M, t) \quad (2.2)$$

où  $\rho_m$  représente la densité de charges mobiles, non obligatoirement égale à  $\rho$ .

Le flux du vecteur  $J(M, t)$  à travers une surface  $S$  quelconque représente l'intensité  $I$  du courant à travers cette surface :

$$I = \iint_S J(M, t) \, dS = \frac{\delta q}{dt}. \quad (2.3)$$

Ceci nous amène à définir le principe de **conservation de la charge** qui consiste à affirmer qu'en l'absence de toute création ou disparition de charges à l'intérieur du volume  $V$ , cette variation correspond à un transfert de charges, c'est-à-dire un courant, à travers la surface fermée  $S$  qui entoure le volume  $V$ . Celui-ci s'écrit:

$$I = \iint_S J(M, t) \, dS = \frac{\delta q}{dt} = - \iiint_V \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} \, dV. \quad (2.4)$$

En utilisant le théorème de Gauss Ostrogradsky évoqué plus bas, l'équation de conservation de la charge peut s'écrire sous la forme différentielle:

$$\operatorname{div} J(M, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (2.5)$$

La loi de force associée à l'interaction électromagnétique subie par une particule de charge  $q$  de vitesse  $\mathbf{v}$  par le **champ électrique**  $E$  (qui est de la dimension d'une force par unité de charge mesuré en  $V.m^{-1}$  Volts par mètre) et l'**induction magnétique**  $B$  (qui est de la dimension d'une force par unité de courant mesuré en  $T$  Tesla) connue sous le nom de **force de Lorentz**, est donnée par:

$$\mathbf{f} = q (E + \mathbf{v} \wedge B). \quad (2.6)$$

Aussi, on rappellera la **loi d'Ohm** décrivant le courant électrique dans un conducteur dit ohmique:

$$J = \sigma E \quad (2.7)$$

montrant la proportionnalité du vecteur courant apparaissant dans le conducteur au champ électrique appliqué  $E$ , où  $\sigma$  représente la **conductivité** du conducteur. A titre d'exemple on a  $\sigma = 6107 \, \Omega^{-1}.m^{-1}$  pour le cuivre.



**Remarque 2.1.1**

Lorsqu'un milieu est isolant, on a  $\sigma = 0$  et donc  $J = 0$ , autrement dit, il n'y a pas de courant électrique circulant dans ce milieu. Nous rencontrerons souvent dans la suite le cas d'un **conducteur parfait**, c'est-à-dire dans lequel la conductivité est (supposée) infinie.

Nous allons maintenant donner les 04 équations qui sont les postulats de bases de l'électromagnétisme. Construites et enrichies séparément par les études de nombreux physiciens. Il revient au physicien Maxwell le mérite de les avoir définitivement regroupées pour en faire les fondements de l'électromagnétisme.

## 2.2 Equations de Maxwell sous forme intégrale

Maxwell a résumé en quatre équations, les postulats de base de l'électromagnétisme. On se placera pour cela dans l'espace  $\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_t$  à valeurs vectorielles dans  $\mathbb{R}^3$ .

• Equation du flux magnétique

Cette équation traduit que le flux de l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  à travers toute surface fermée  $S$  est nul:

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \tag{2.8}$$

• Equation de Maxwell-Faraday

Cette équation décrit tous les phénomènes d'induction et montre qu'une induction magnétique variable au travers d'une surface  $S$  peut créer un champ électrique à circulation non nulle sur le bord fermé  $\partial S$  de la surface:

$$\int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \left( \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \right). \tag{2.9}$$

• Equation de Maxwell-Gauss

Cette équation permet de dire que le flux de l'induction électrique  $\mathbf{D}$  à travers toute surface fermée  $S$  est égal à la somme des charges contenues dans le volume  $V$  entouré par la surface  $S$  :

$$\iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho \, dV, \tag{2.10}$$

où : l'induction électrique  $\mathbf{D}$  est définie par la relation :  $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ , où :  $\varepsilon(\cdot)$  est la permittivité électrique du milieu dans lequel on travaille. L'induction électrique  $\mathbf{D}$  est mesurée en  $C.m^{-2}$  (Coulombs par mètre carré).

On rappelle que  $\rho$  est la densité volumique de charge définie précédemment exprimée en  $C.m^{-3}$ .

• **Equation de Maxwell-Ampère**

Cette équation relie le champ magnétique  $\mathbf{H}$  à ses sources et à l'induction électrique  $\mathbf{D}$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \right) - \int_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.11)$$

où : le champ magnétique  $\mathbf{H}$  est défini par la relation :  $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\mu(\mathbf{x})} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ , où :  $\mu(\cdot)$  est la perméabilité magnétique du milieu dans lequel on travaille. Le champ magnétique est mesuré en  $A.m^{-1}$  (Ampère par mètre).

On rappelle que  $\mathbf{J}$  est le vecteur densité de courant défini précédemment et qui est mesuré en  $A.m^{-2}$ .

**Remarque 2.2.1**

1) *Les relations reliant la permittivité électrique et le champ associé (respectivement la perméabilité et le champ magnétique), données par :*

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \quad (2.12)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\mu(\mathbf{x})} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t). \quad (2.13)$$

*Sont appelées les **relations constitutives** et elles définissent les lois de comportements du milieu dit **parfait et isotrope**.*

2) *Dans le cas où le milieu et en plus homogène la permittivité électrique  $\varepsilon(\cdot)$ , la perméabilité magnétique du milieu  $\mu(\cdot)$  sont constants.*

3) *Les notations  $d\mathbf{l}$ ,  $d\mathbf{S}$  qui représentent des éléments d'intégration, sont définies par:  $d\mathbf{l} = \boldsymbol{\tau} dl$ ,  $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$  où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal à la surface  $S$ , et  $\boldsymbol{\tau}$  le vecteur unitaire tangent à la frontière  $\partial S$ .*

## 2.3 Equations de Maxwell sous forme différentielle

Il est possible à partir de la forme intégrale des 04 équations de Maxwell de déduire une forme différentielle à l'aide des formule de Stokes et d'Ostrogradsky que l'on rappelle ci-après:

### **Théorème 2.3.1 (Théorème de Stokes)**

Soit  $\mathbf{F}$  une fonction vectorielle de classe  $C^1$ , défini sur un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^3$  qui contient une surface  $S$  finie de frontière fermée  $\partial S$ . Alors on a

$$\iint_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.14)$$

### **Théorème 2.3.2 (Théorème de Gauss Ostrogradsky)**

Soit  $\mathbf{F}$  une fonction vectorielle de classe  $C^1$  défini sur un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^3$  qui contient un volume finie  $V$  délimité par une surface  $\partial V$  fermée assez régulière. Alors on a

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.15)$$

Alors on peut écrire les équations de Maxwell, pour tout volume fini  $V$  de frontière assez régulière  $\partial V = S$ , sous la forme équivalente suivante:

- **L'équation du flux magnétique**

En usant du théorème d'Ostrogradsky:

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{B} dV = 0. \quad (2.16)$$

- **L'équation de Maxwell-Faraday**

En usant de la formule de Stokes:

$$\int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \frac{d}{dt} \left( \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \right) = \iint_S \left( \mathbf{rot} \mathbf{E} + \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right) \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{0}. \quad (2.17)$$

- **L'équation de Maxwell-Gauss**

En usant du théorème d'Ostrogradsky:

$$\iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} - \iiint_V \rho dV = \iiint_V (\operatorname{div} \mathbf{D} - \rho) dV = 0. \quad (2.18)$$

• **L'équation de Maxwell-Ampère**

En usant de la formule de Stokes:

$$\frac{d}{dt} \left( \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \right) - \int_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \left( \frac{d\mathbf{D}}{dt} - \mathbf{rot} \mathbf{H} + \mathbf{J} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (2.19)$$

Ces relations sont vraies pour tout volume  $V$ . Alors les intégrantes entre parenthèses sont donc nuls presque partout. Nous sommes en mesure alors de donner les équations de Maxwell sous leur forme différentielles :

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} - \mathbf{rot} \mathbf{H} = -\mathbf{J} \quad (\text{Equation de Maxwell-Ampère}) \quad (2.20)$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \mathbf{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (\text{Equation de Maxwell-Faraday}) \quad (2.21)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{D} = \rho \quad (\text{Equation de Maxwell-Gauss}) \quad (2.22)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{B} = 0. \quad (\text{Equation de conservation du flux magnétique}) \quad (2.23)$$

**Remarque 2.3.3**

1) Les deux premières équations expriment le couplage et l'évolution des grandeurs électriques et magnétiques.

2) Les équations de Maxwell vérifient la relation de **conservation de la charge** décrite précédemment:

$$\mathbf{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (2.24)$$

Elle s'obtient, par dérivation par rapport au temps  $t$  de l'équation (2.22) et par application de la divergence à l'équation (2.20).

On supposera dans la suite que notre milieu est **parfait** et **isotrope** (c'est à dire vérifiant les lois de comportement (2.12) et (2.13)), alors les équations de Maxwell sous leur forme différentielles reviennent à chercher à déterminer que 02 inconnues, en l'occurrence le champ électrique  $\mathbf{E}$  et le champ magnétique  $\mathbf{H}$  :

$$\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \quad (2.25)$$

$$\mu(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.26)$$

$$\mathbf{div}(\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) = \rho(\mathbf{x}, t) \quad (2.27)$$

$$\mathbf{div}(\mu(\mathbf{x}) \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)) = 0. \quad (2.28)$$

C'est ces dernières équations que l'on considérera dans la suite de notre travail.

**Remarque 2.3.4**

1) Dans le cas particulier d'un milieu **homogène**  $\varepsilon$  et  $\mu$  sont des constantes.

2) Il est à noter que le vide est un cas particulier de milieu parfait, isotrope, homogène et isolant. La permittivité électrique et la perméabilité magnétique dans le vide sont notées  $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$  et  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ , et on a la relation  $c^2\varepsilon_0\mu_0 = 1$  où  $c$  désigne la vitesse de la lumière:  $c = 3 \times 10^8 m/s$ .

## 2.4 Bilan de l'énergie électromagnétique

Définissant dès à présent une grandeur qui joue un rôle très important dans les divers phénomènes d'électromagnétisme : l'**énergie électromagnétique**. Tout d'abord, définissons la **densité d'énergie électromagnétique**  $\omega(\mathbf{x}, t)$  pour tout couple  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  comme suit :

$$\omega(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \{ \varepsilon(\mathbf{x}) |\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)|^2 + \mu(\mathbf{x}) |\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)|^2 \}. \quad (2.29)$$

Ceci permet de définir l'**énergie totale électromagnétique** par :

$$W_{tot}(\mathbf{x}, t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \omega(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (2.30)$$

On peut définir l'énergie électromagnétique  $W$  dans un volume quelconque  $V \subset \mathbb{R}^3$  par :

$$W(\mathbf{x}, t) = \iiint_V \omega(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (2.31)$$

On définit l'**énergie électrostatique** comme étant :

$$W_E(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \iiint_V \varepsilon(\mathbf{x}) |\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x}. \quad (2.32)$$

On définit l'**énergie magnétique** comme étant :

$$W_H(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \iiint_V \mu(\mathbf{x}) |\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x}. \quad (2.33)$$

Ainsi les systèmes physiques pour lesquels l'énergie électromagnétique des champs  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  restent finis au cours du temps sont tels que les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  vérifient pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$W_{tot}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} (\varepsilon(\mathbf{x}) |\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)|^2 + \mu(\mathbf{x}) |\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)|^2) d\mathbf{x} < +\infty. \quad (2.34)$$

Aussi on définit le **vecteur de Poynting** comme étant le vecteur champ donné par la relation :

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}. \quad (2.35)$$

Ce vecteur peut être interpréter comme étant le flux de l'énergie électromagnétique. En dérivant (2.29) par rapport au temps

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon(\mathbf{x}) |\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)|^2 + \mu(\mathbf{x}) |\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^3 E_i^2(\mathbf{x}, t) + \mu(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^3 H_i^2(\mathbf{x}, t) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \varepsilon(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial E_i^2}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mu(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial H_i^2}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right) \\ &= \varepsilon(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^3 E_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial E_i}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mu(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^3 H_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial H_i}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \\ &= \sum_{i=1}^3 E_i(\mathbf{x}, t) \left( \varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial E_i}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right) + \sum_{i=1}^3 H_i(\mathbf{x}, t) \left( \mu(\mathbf{x}) \frac{\partial H_i}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right) \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \left( \varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right) + \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \cdot \left( \mu(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right). \end{aligned}$$

Et en utilisant les relations (2.25) et (2.26) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot (\mathbf{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{J}(\mathbf{x}, t)) + \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \cdot (-\mathbf{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \\ &= (\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) - \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

Ensuite en remarquant que l'on a (il est aisé de le vérifier):

$$\operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = -(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)). \quad (2.36)$$

On obtient alors:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = -\operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \quad (2.37)$$

donc

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t). \quad (2.38)$$

Cette relation exprime le bilan de l'énergie électromagnétique.

## 2.5. FORMULATION DES ÉQUATIONS DE MAXWELL À L'AIDE DE POTENTIELS

En intégrant l'équation précédente sur un volume fini  $V \subset \mathbb{R}^3$ , et en utilisant la formule d'Ostrogradsky on a l'équation de conservation de l'énergie totale suivante :

$$\frac{dW}{dt}(\mathbf{x}, t) + \iint_{\partial V} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} \, dS = - \iiint_V \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \, dx.$$

**Remarque 2.4.1** Dans le cas où l'on travail dans l'espace tout entier  $\mathbb{R}^3$  on a l'équation précédente s'écrira:

$$\frac{dW_{tot}}{dt}(\mathbf{x}, t) = - \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \, dx, \quad (2.39)$$

car physiquement les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  sont nulles à l'infini.

## 2.5 Formulation des équations de Maxwell à l'aide de potentiels

Nous introduisons maintenant une autre formulation des équations de Maxwell. Cette formulation sera utilisée pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution dans le cas statique comme nous allons le voir plus loin. Par souci de simplification, nous supposons que nous sommes dans le vide, dans l'espace complet  $\mathbb{R}^3$ . Dans ce cas les équations de Maxwell s'écriront:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \mathbf{rot} \, \mathbf{B} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{J} \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{rot} \, \mathbf{E} = 0 \quad (2.41)$$

$$\mathbf{div} \, \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (2.42)$$

$$\mathbf{div} \, \mathbf{B} = 0. \quad (2.43)$$

Où  $\varepsilon_0, \mu_0$  représente la permittivité électrique et la perméabilité magnétique dans le vide et sont reliés par la relation  $c^2 \varepsilon_0 \mu_0 = 1$  où  $c$  désigne la vitesse de la lumière.

L'équation de conservation du flux magnétique  $\mathbf{div} \, \mathbf{B} = 0$  implique qu'il existe un **potentiel vecteur**  $\mathbf{A}$  tel que:

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \, \mathbf{A} \quad (2.44)$$

puisque tout champ de vecteur à divergence nul dérive d'un rotationnel.

**Remarque 2.5.1** *Ce résultat provient mathématiquement d'une généralisation du lemme de Poincaré à l'espace  $\mathbb{R}^3$  tout entier introduit au chapitre précédent est qui donné dans [8, p.266].*

En reprenant l'équation de Faraday (2.41), on a alors:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{rot} \mathbf{A}) + \mathbf{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (2.45)$$

$$\mathbf{rot} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{E} \right) = 0. \quad (2.46)$$

Or tout champs de vecteur à rotationnel nul dérive d'un gradient (toujours d'après le lemme de Poincaré généralisé [8, p.266]), il existe alors un **potentiel scalaire**  $\phi$  tel que:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{E} = -\mathbf{grad}\phi. \quad (2.47)$$

Ceci nous permet d'introduire **une nouvelle formulation** selon les variables  $(\mathbf{A}, \phi)$  qui sont respectivement le potentiel vecteur et le potentiel scalaire tel que:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{grad}\phi, \quad (2.48)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}. \quad (2.49)$$

Il est important de noter que l'application qui associe aux champs  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  les potentiels  $(\mathbf{A}, \phi)$  n'est pas injective (le vecteur  $\mathbf{A}$  est déterminé à un gradient près), dans le sens où il existe une infinité de couples  $(\mathbf{A}, \phi)$  possibles. En effet, pour un couple de potentiel donné  $(\mathbf{A}, \phi)$  qui vérifie (2.48) (2.49), on peut construire un nouveau couple de potentiel  $(\mathbf{A}_0, \phi_0)$  qui vérifie aussi les relations (2.48) (2.49) de la manière suivante:

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A} + \mathbf{grad}\psi \quad (2.50)$$

$$\phi_0 = \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (2.51)$$

où  $\psi$  est une fonction scalaire quelconque.

Pour assurer l'unicité du couple de potentiel  $(\mathbf{A}, \phi)$ , il est nécessaire d'introduire une condition supplémentaire. En électromagnétisme cette condition est appelée un **jauge**.



## 2.5. FORMULATION DES ÉQUATIONS DE MAXWELL À L'AIDE DE POTENTIELS

La réécriture des équations (2.40) et (2.42) à l'aide des potentiels

(et en utilisant la relation :  $\mathbf{rot rot A} = -\Delta \mathbf{A} + \text{grad div A}$ ) nous donne:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathbf{A} + \text{grad} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + c^2 \text{div A} \right) = \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{J}, \quad (2.52)$$

$$-\Delta \phi - \frac{\partial}{\partial t} (\text{div A}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho. \quad (2.53)$$

Cette dernière écriture suggère que l'on adjoigne l'une ou l'autre des deux conditions qui suivent:

• Jauge de Lorentz:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c^2 \text{div A} = 0. \quad (2.54)$$

Ainsi on aura l'écriture des équations de Maxwell à l'aide de potentiels suivante:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{J} \quad (2.55)$$

$$-\Delta \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho. \quad (2.56)$$

• Jauge de Coulomb:

$$\text{div A} = 0. \quad (2.57)$$

Ainsi on aura l'écriture des équations de Maxwell à l'aide de potentiels suivante:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{J} - \text{grad} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (2.58)$$

$$-\Delta \phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho. \quad (2.59)$$

**Remarque 2.5.2** *Le passage à une écriture des équations de Maxwell à l'aide de potentiel est assurée:*

• *Dans le cas où l'on travaille dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  tout entier par le lemme de Poincaré généralisé [8, p.266] avec une condition de jauge.*

• *Dans le cas où l'on travaille sur un ouvert borné connexe  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  de frontière régulière par le lemme de Poincaré donné au chapitre précédent (où des conditions aux bord sont imposées) : on n'a pas besoin dans ce cas de condition de jauge.*

# Chapitre 3

## Formulation variationnelle : cas statique

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons au cas statique des équations de Maxwell : c'est à dire où il n'y a pas dépendance par rapport au temps. Dans ce cas, en supposant que  $\frac{\partial \cdot}{\partial t} = 0$  dans les équations de Maxwell (2.25)-(2.28) on obtient :

$$\mathbf{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.2)$$

$$\operatorname{div} (\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x})) = \rho(\mathbf{x}) \quad (3.3)$$

$$\operatorname{div} (\mu(\mathbf{x}) \mathbf{H}(\mathbf{x})) = 0. \quad (3.4)$$

On remarque que dans le cas statique, on peut découpler le problème en un problème électrostatique et un problème magnétostatique complètement indépendants (la loi de conservation de la charge ne faisant plus le lien entre  $\mathbf{J}$  et la densité de charge  $\rho$  :  $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$ ).

Nous commencerons, dans un premier temps, par considérer les équations précédentes posées sur l'espace  $\mathbb{R}^3$  tout entier. On supposera que toutes les quantités s'annulent à l'infini. Aussi, on supposera que l'énergie électromagnétique totale est finie. Ces suppositions sont naturelles et vérifiées physiquement.

Il est naturel de supposer aussi que la permittivité électrique  $\varepsilon$  et la perméabilité magnétique  $\mu$  vérifient les hypothèses :

- $\varepsilon$  et  $\mu$  sont mesurables.
- $\varepsilon$  et  $\mu$  sont uniformément bornées et strictement positives c'est-à-dire :

$$\exists (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}_*^{+2}, \text{ telles que : } \varepsilon_1 \leq \varepsilon(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_2 \quad \forall \mathbf{x}. \quad (3.5)$$

$$\exists (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}_*^{+2}, \text{ telles que : } \mu_1 \leq \mu(\mathbf{x}) \leq \mu_2 \quad \forall \mathbf{x}. \quad (3.6)$$

Notons que dans le cas statique, on a les relations (2.48) et (2.49) s'écrivent :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\text{grad}\phi(\mathbf{x}), \quad (3.7)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}). \quad (3.8)$$

### 3.1 Régularités

Nous allons maintenant préciser les hypothèses que nous ferons sur  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{J}$ ,  $\rho$  et les potentiels  $\mathbf{A}$  et  $\phi$  pour que ces quantités vérifient en un sens mathématique les équations de Maxwell.

Pour cela, on se basera sur le fait que l'énergie électromagnétique totale soit finie. A cet effet, on commencera par donner la régularité des quantités électriques  $\mathbf{E}$ ,  $\rho$  et le potentiel associé  $\phi$ , ensuite on s'attellera à donner la régularité des quantités  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{J}$  et le potentiel associé  $\mathbf{A}$ .

En usant de la formule de Green généralisée (1.27) et comme  $\phi$  s'annule à l'infini, l'énergie électrostatique que l'on a supposée finie est égale à :

$$\begin{aligned} W_E(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \varepsilon(\mathbf{x}) |\mathbf{E}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= -\frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \text{grad}\phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \text{div}(\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x})) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < +\infty. \end{aligned} \quad (3.9)$$

En utilisant l'hypothèse faite sur la permittivité  $\varepsilon$  (3.5), on peut écrire l'inégalité suivante :

$$\forall i = 1, 2, 3 : \quad \iiint_{\mathbb{R}^3} E_i^2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \iiint_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{E}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \leq \frac{1}{\varepsilon_1} \iiint_{\mathbb{R}^3} \varepsilon(\mathbf{x}) |\mathbf{E}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \quad (3.10)$$

On en déduit, comme l'énergie électrique  $W_E(\mathbf{x})$  est finie, que  $E_i \in L^2(\mathbb{R}^3)$

$\forall i = 1, 2, 3$ , c'est-à-dire que :

$$\mathbf{E} \in L^2(\mathbb{R}^3)^3$$

d'où, comme  $\mathbf{E} = -\text{grad}\phi$  et que l'on a fait l'hypothèse que  $\phi$  s'annule à l'infinie, on déduit que le potentiel  $\phi$  est tel que :

$$\phi \in H^1(\mathbb{R}^3).$$

L'égalité (3.9) signifie alors la densité volumique de la charge est telle que :

$$\rho \in H^{-1}(\mathbb{R}^3),$$

d'après (3.2) on trouve :

$$\mathbf{E} \in H(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3). \quad (3.11)$$

En effet, montrons que  $\mathbf{rot} \mathbf{E} \in L^2(\mathbb{R}^3)^3$ , on raisonne au sens des distributions :

$\forall \mathbf{f} \in D(\mathbb{R}^3)^3$  :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{rot} \mathbf{E}, \mathbf{f} \rangle &= \langle \mathbf{E}, \mathbf{rot} \mathbf{f} \rangle \\ &= -\langle \text{grad}\phi, \mathbf{rot} \mathbf{f} \rangle \\ &= \langle \phi, \text{div}(\mathbf{rot} \mathbf{f}) \rangle \\ &= 0 \quad (\text{Car } \text{div} \mathbf{rot} \mathbf{f} = 0) \end{aligned}$$

par conséquent :

$\mathbf{rot} \mathbf{E} = 0$  dans  $D'(\mathbb{R}^3)^3$  et comme  $0 \in L^2(\mathbb{R}^3)^3$  on trouve  $\mathbf{rot} \mathbf{E} \in L^2(\mathbb{R}^3)^3$ .

Nous ferons l'hypothèse supplémentaire que  $\rho \in L^2(\mathbb{R}^3)$  car la densité de charge est une fonction que l'on peut supposer bornée physiquement. Donc :

$$\begin{aligned} \rho \in L^2(\mathbb{R}^3) &\iff \text{div}(\varepsilon \mathbf{E}) \in L^2(\mathbb{R}^3) \quad (\text{D'après (3.3)}) \\ &\iff \mathbf{E} \in H(\text{div} \varepsilon, \mathbb{R}^3) \end{aligned} \quad (3.12)$$

où l'on a par définition :  $H(\text{div} \varepsilon, \Omega) := \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 \mid \text{div}(\varepsilon \mathbf{v}) \in L^2(\Omega)\}$ .

D'après (3.11) et (3.12) on trouve :

$$\mathbf{E} \in H(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3) \cap H(\text{div} \varepsilon, \mathbb{R}^3). \quad (3.13)$$

Lorsque le milieu est homogène,  $\varepsilon$  est constant et par conséquent :

$$\mathbf{E} \in H(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3) \cap H(\mathbf{div}, \mathbb{R}^3). \quad (3.14)$$

De manière analogue, on donnera maintenant la régularité des quantités  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{J}$  et le potentiel associé  $\mathbf{A}$ .

En utilisant la formule de Green généralisée (1.28) et comme le champ électromagnétique s'annule à l'infini, l'énergie magnétique que l'on a supposée finie est égale à :

$$\begin{aligned} W_H(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \mu(\mathbf{x}) |\mathbf{H}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \mu(\mathbf{x}) \mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

En utilisant l'hypothèse faite sur la perméabilité (3.6) et puisque l'énergie magnétique est finie on déduit que :

$$\mathbf{H} \in L^2(\mathbb{R}^3)^3.$$

Comme  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{H}$  sont liés par la relation ( $\mu\mathbf{H} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$ ) en usant du fait que le potentiel est borné et s'annule à l'infini, donc il est naturel de prendre :

$$\mathbf{A} \in H(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3).$$

De l'égalité (3.15), il est clair de prendre  $\mathbf{J}$  dans le dual de  $H(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)$ . Comme le vecteur courant  $\mathbf{J}$  est une fonction que l'on peut supposer bornée physiquement et qui s'annule à l'infini, on peut prendre  $\mathbf{J} \in L^2(\mathbb{R}^3)^3$  et donc d'après (3.1) :

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} \in L^2(\mathbb{R}^3)^3.$$

Par ailleurs, on a :

$$\mathbf{div}(\mu\mathbf{H}) \in L^2(\mathbb{R}^3).$$

En effet,  $\forall f \in D(\mathbb{R}^3)$  :

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}), f \rangle &= -\langle \mu \mathbf{H}, \operatorname{grad} f \rangle \\ &= -\langle \mathbf{rot} \mathbf{A}, \operatorname{grad} f \rangle \\ &= -\langle \mathbf{A}, \mathbf{rot} \operatorname{grad} f \rangle \\ &= 0 \quad (\text{car } \mathbf{rot} \operatorname{grad} f = 0) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$\operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0$  dans  $D'(\mathbb{R}^3)$  et comme  $0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$  on trouve  $\operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ .

On en déduit donc que :

$$\mathbf{H} \in H(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3) \cap H(\operatorname{div} \mu, \mathbb{R}^3). \quad (3.16)$$

où l'on a par définition :  $H(\operatorname{div} \mu, \Omega) := \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 \mid \operatorname{div}(\mu \mathbf{v}) \in L^2(\Omega)\}$

Lorsque le milieu est homogène,  $\mu$  est constant et par conséquent :

$$\mathbf{H} \in H(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3) \cap H(\operatorname{div}, \mathbb{R}^3). \quad (3.17)$$

### Remarque 3.1.1

1) On rappellera que le vecteur courant  $\mathbf{J}$  vérifie nécessairement l'équation de conservation de la charge :  $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$ .

2) Par sa définition, l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  vérifie alors la régularité suivante :

$\mathbf{B} \in H(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3) \cap H(\operatorname{div}, \mathbb{R}^3)$  lorsque le milieu est homogène.

3) Dans le cas d'un ouvert borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  de frontière régulière  $\Gamma$ , on a des résultats de régularité similaires à ceux obtenus dans  $\mathbb{R}^3$ . La seule différence est l'introduction des conditions aux limites de type conducteur parfait sur les champ électrique  $\mathbf{E}$  et l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  :

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0 \text{ sur } \Gamma \quad (3.18)$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0 \text{ sur } \Gamma \quad (3.19)$$

pour avoir respectivement :

$$\mathbf{E} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \quad (3.20)$$

$$\mathbf{B} \in H_0(\operatorname{div}, \Omega) \quad (3.21)$$

où le vecteur  $\mathbf{n}$  représente la normale extérieure à  $\Gamma$ .

De plus  $\Omega$  devra être simplement connexe [2, p.40 – 41].

Pour ce qui est du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  on aura la condition aux limites :  $\mathbf{A} \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0$ .

## 3.2 Existence et unicité de la solution

Nous sommes en mesure maintenant, grâce aux résultats de régularité des fonctions qui interviennent dans les équations de Maxwell, de démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.1)-(3.4). On se placera dans le cadre d'un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  borné, simplement connexe et de frontière  $\Gamma$  régulière. On se placera dans le cadre où  $\Omega$  est entouré d'un conducteur parfait, c'est-à-dire que l'on a la condition aux limites :  $\mathbf{E} \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0$ .

Les équations de Maxwell (3.1)-(3.4) dans le cas statique, peuvent être découplées et donc on va étudier séparément le problème électrostatique et magnétostatique.

### 3.2.1 Problème électrostatique

Il est défini par les équations :

$$\mathbf{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.22)$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x})) = \rho(\mathbf{x}) \quad (3.23)$$

avec la condition au bord (conducteur parfait) :  $\mathbf{E} \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0$  et où  $\rho \in L^2(\Omega)$ .

D'après le lemme de Poincaré au premier chapitre, il existe un potentiel  $\phi$  qui vérifie la relation :

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\phi,$$

Et par suite, pour démontrer l'existence et l'unicité du problème électrostatique, on va se baser sur son écriture sous sa forme potentielle :

$$-\operatorname{div}(\varepsilon(\mathbf{x}) \operatorname{grad}\phi(\mathbf{x})) = \rho(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.24)$$

avec la condition au bord suivante :  $\operatorname{grad}\phi \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0$ .

Le potentiel  $\phi$  étant déterminé à une constante près et comme il doit être constant sur le bord de  $\Omega$  (dû au fait que  $\operatorname{grad}\phi \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0$ ) on le prendra nul sur le bord :

$$\phi \in H_0^1(\Omega). \quad (3.25)$$

Nous allons maintenant construire la formulation variationnelle associée au problème (3.24) et utiliser le théorème de Lax-Milgram pour démontrer qu'il existe une solution unique du problème variationnel.

### 3.2. EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION

---

Enfin, nous concluons que cette forme variationnelle est bien équivalente au problème de départ.

En multipliant les deux membres de l'équation (3.24) par une fonction test  $\psi \in H_0^1(\Omega)$  et en intégrant sur  $\Omega$  on trouve :

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}(\varepsilon(\mathbf{x}) \operatorname{grad}\phi(\mathbf{x})) \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

En appliquant la formule de Green généralisée (1.27) on trouve :

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}(\varepsilon(\mathbf{x}) \operatorname{grad}\phi) \psi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{x}) \operatorname{grad}\phi \cdot \operatorname{grad}\psi \, d\mathbf{x} - \langle \varepsilon(\mathbf{x}) \operatorname{grad}\phi \cdot \mathbf{n}, \psi \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)}$$

et comme  $\psi \in H_0^1(\Omega)$  donc :

$$\langle \varepsilon(\mathbf{x}) \operatorname{grad}\phi \cdot \mathbf{n}, \psi \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} = 0$$

alors on a la formulation variationnelle du problème (3.24) qui s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{x}) \operatorname{grad}\phi \cdot \operatorname{grad}\psi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \rho \psi \, d\mathbf{x}, \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \quad (3.26)$$

En posant :

- $V = H_0^1(\Omega)$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ ,
- $a(\phi, \psi) = \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{x}) \operatorname{grad}\phi(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{grad}\psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ ,
- $L(\psi) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ .

on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi \in V \text{ tel que :} \\ a(\phi, \psi) = L(\psi), \forall \psi \in V. \end{array} \right.$$

Nous allons vérifier les hypothèses du théorème de Lax-Milgram énoncé au chapitre premier :

- On sait que  $(V, \|\cdot\|_{1,\Omega})$  est un espace de Hilbert.
- $a(\cdot, \cdot)$  est une forme bilinéaire par la linéarité de la dérivation et de l'intégrale et de



plus elle est continue car pour tout  $\phi, \psi \in V$  :

$$\begin{aligned}
 |a(\phi, \psi)| &= \left| \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{x}) \operatorname{grad} \phi(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{grad} \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right| \\
 &\leq \int_{\Omega} |\varepsilon(\mathbf{x})| |\operatorname{grad} \phi(\mathbf{x})| |\operatorname{grad} \psi(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \\
 &\leq \varepsilon_2 \int_{\Omega} |\operatorname{grad} \phi(\mathbf{x})| |\operatorname{grad} \psi(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \quad (\text{D'après (3.5)}) \\
 &\leq \varepsilon_2 \|\operatorname{grad} \phi\|_{0,\Omega} \|\operatorname{grad} \psi\|_{0,\Omega} \quad (\text{Inégalité de Cauchy-Schwarz}) \\
 &\leq \varepsilon_2 \|\phi\|_{1,\Omega} \|\psi\|_{1,\Omega}.
 \end{aligned}$$

- La forme  $a(\cdot, \cdot)$  est coercive car pour tout  $\psi \in V$  :

$$\begin{aligned}
 a(\psi, \psi) &= \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{x}) |\operatorname{grad} \psi(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \\
 &\geq \varepsilon_1 \|\operatorname{grad} \psi\|_{0,\Omega}^2 \quad (\text{D'après (3.5)}) \\
 &= \varepsilon_1 \|\psi\|_{1,\Omega}^2 \\
 &\geq \varepsilon_1 C^2 \|\psi\|_{1,\Omega}^2.
 \end{aligned}$$

(où  $C$  est la constante de l'inégalité de Poincaré,  $|\cdot|_{1,\Omega}$  est une norme équivalente à  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$  dans  $H_0^1(\Omega)$ ).

- $L(\cdot)$  est une forme linéaire par la linéarité de l'intégrale et continue car pour tout  $\psi \in V$  :

$$\begin{aligned}
 |L(\psi)| &= \left| \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right| \\
 &\leq \|\rho\|_{0,\Omega} \|\psi\|_{0,\Omega} \quad (\text{Inégalité de Cauchy-Schwarz}) \\
 &\leq \|\rho\|_{0,\Omega} \|\psi\|_{1,\Omega}.
 \end{aligned}$$

Toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram étant vérifiées, on déduit l'existence et l'unicité d'une solution  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  de notre problème variationnel.

Enfin en ce qui concerne la dépendance continue par rapport à la donnée en choisissant  $\psi = \phi$  dans notre formulation variationnelle on obtient :

$$\varepsilon_1 C^2 \|\phi\|_{1,\Omega}^2 \leq a(\phi, \phi) = L(\phi) \leq \|\rho\|_{0,\Omega} \|\phi\|_{1,\Omega}$$

D'où

$$\|\phi\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\varepsilon_1 C^2} \|\rho\|_{0,\Omega}.$$

**Retour au problème de départ :**

L'idée maintenant est de montrer que toute solution du problème variationnel et solution du problème de départ (3.24). Ainsi, pour tout  $\psi$  élément de  $D(\Omega)$  on a l'égalité suivante :

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{x}) \operatorname{grad} \phi(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{grad} \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (3.27)$$

Comme on a  $\rho \in L^2(\Omega)$  et  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  et donc  $\operatorname{grad} \phi \in L^2(\Omega)^3$ , les intégrales peuvent être remplacées par les crochets de dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{D'(\Omega) \times D(\Omega)}$ .

D'où (3.27) s'écrit au sens des distributions :

$$\begin{aligned} \langle \rho, \psi \rangle_{D'(\Omega) \times D(\Omega)} &= \langle \varepsilon(\mathbf{x}) \operatorname{grad} \phi(\mathbf{x}), \operatorname{grad} \psi(\mathbf{x}) \rangle_{D'(\Omega) \times D(\Omega)} \\ &= - \langle \operatorname{div}(\varepsilon(\mathbf{x}) \operatorname{grad} \phi(\mathbf{x})), \psi(\mathbf{x}) \rangle_{D'(\Omega) \times D(\Omega)} \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$- \operatorname{div}(\varepsilon(\mathbf{x}) \operatorname{grad} \phi(\mathbf{x})) = \rho(\mathbf{x}) \quad \text{dans } D'(\Omega)$$

et comme  $\rho \in L^2(\Omega)$ , un sous-ensemble de  $D'(\Omega)$ ,  $\operatorname{div}(\varepsilon(\mathbf{x}) \operatorname{grad} \phi(\mathbf{x}))$  appartient aussi à  $L^2(\Omega)$  donc on a :

$$- \operatorname{div}(\varepsilon(\mathbf{x}) \operatorname{grad} \phi(\mathbf{x})) = \rho(\mathbf{x}) \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

On déduit que :

$$- \operatorname{div}(\varepsilon(\mathbf{x}) \operatorname{grad} \phi(\mathbf{x})) = \rho(\mathbf{x}) \quad \text{presque partout dans } \Omega$$

alors l'équation (3.24) est vérifiée et puisque  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  la condition aux limites est vérifiée elle aussi. Donc, toute solution du problème variationnel est solution du problème de départ.

Nous avons démontré donc l'existence et l'unicité du potentiel  $\phi$  du problème électrostatique. Ce qui implique l'existence et l'unicité du champ électrique  $\mathbf{E}$ . De même pour l'induction électrique  $\mathbf{D}$ .

### 3.2.2 Problème magnétostatique

Nous allons démontrer maintenant l'existence et l'unicité du problème magnétostatique défini par les équations :

$$\mathbf{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{x}) \quad (3.28)$$

$$\operatorname{div} (\mu(\mathbf{x}) \mathbf{H}(\mathbf{x})) = 0 \quad (3.29)$$

avec la condition au bord :  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0$  et où  $\mathbf{J} \in L^2(\mathbb{R}^3)^3$ .

Ce qui est équivalent à démontrer l'existence et l'unicité de vecteur potentiel  $\mathbf{A}$  vérifiant l'équation :

$$\mathbf{rot} (\mu(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x})) = \mathbf{J}(\mathbf{x}) \quad \text{sur } \Omega, \quad (3.30)$$

où le potentiel  $\mathbf{A}$  est défini comme vu précédemment au chapitre 2 par la relation

$\mathbf{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B} = \mu(\mathbf{x})\mathbf{H}$  et vérifie la condition au bord  $\mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0$ .

#### Remarque 3.2.1

1) Ici contrairement au problème électrostatique où le potentiel  $\phi$  était déterminé à une constante près que l'on a fixée en choisissant  $\phi$  nulle sur le bord, ici le potentiel  $\mathbf{A}$  est déterminé de façon unique grâce à la condition au bord. (voir le lemme de Poincaré).

2) La condition au bord  $\mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0$  est équivalente à la condition :  $\mathbf{A} \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0$  grâce aux formules de Green généralisée (1.27)-(1.28).

En définissant l'espace :

$$\mathcal{X} = H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\operatorname{div}, \Omega) \quad (3.31)$$

il est naturel de chercher  $\mathbf{A}$  dans l'espace :

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{X} : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}, \quad (3.32)$$

(Car dans le paragraphe précédent on a vu  $\mathbf{A} \in H(\mathbf{rot}, \Omega)$  et d'après le lemme de Poincaré  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ ).

En multipliant les deux membres de l'équation (3.30) par une fonction test  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  et en intégrant sur  $\Omega$  on trouve :

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot} (\mu(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

En appliquant la formule de Green généralisée (1.28) on obtient :

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \langle \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)}$$

et comme on a la condition au limites  $\mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0$  sur  $\Gamma$  :

$$\langle \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} = 0.$$

Alors

$$\int_{\Omega} \mu(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (3.33)$$

En posant :

- $V = \mathcal{V}$  muni de la norme  $\| \cdot \|_{0, \mathbf{rot}, \mathbf{div}}$ , (voir la définition de la norme en (1.35))
- $a(\mathbf{A}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mu(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ ,
- $L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ ,

donc la formulation variationnelle peut s'écrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{A} \in V \text{ tel que :} \\ a(\mathbf{A}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in V. \end{array} \right.$$

Nous allons vérifier les hypothèses du théorème de Lax-Milgram :

- On sait que  $(V, \| \cdot \|_{0, \mathbf{rot}, \mathbf{div}})$  est un espace de Hilbert pour la norme associée.
- $a(\cdot, \cdot)$  est une forme bilinéaire par la linéarité de la dérivation et de l'intégrale de plus elle est continue car pout tout  $\mathbf{A}, \mathbf{v} \in V$  :

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{A}, \mathbf{v})| &= \left| \int_{\Omega} \mu(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\mu(\mathbf{x})^{-1}| |\mathbf{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x})| |\mathbf{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \\ &\leq \frac{1}{\mu_1} \int_{\Omega} |\mathbf{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x})| |\mathbf{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \quad (\text{D'après (3.6)}) \\ &\leq \frac{1}{\mu_1} \|\mathbf{rot} \mathbf{A}\|_{0, \Omega} \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|_{0, \Omega} \quad (\text{Inégalité de Cauchy-Schwarz}) \\ &\leq \frac{1}{\mu_1} \|\mathbf{A}\|_{0, \mathbf{rot}, \mathbf{div}} \|\mathbf{v}\|_{0, \mathbf{rot}, \mathbf{div}}. \end{aligned}$$

- La forme  $a(\cdot, \cdot)$  est coercive car pour tout  $\mathbf{v} \in V$  :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mu(\mathbf{x})^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ &\geq \frac{1}{\mu_2} \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 \quad (\text{D'après (3.6)}) \\ &\geq \frac{c_0^2}{\mu_2} \|\mathbf{v}\|_{0,\mathbf{rot},\text{div}}^2. \quad (\text{Inégalité de Weber (1.33)}) \end{aligned}$$

- La forme  $L(\cdot)$  est linéaire par la linéarité de l'intégrale de plus elle est continue :

$$\begin{aligned} |L(\mathbf{v})| &= \left| \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \|\mathbf{J}\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega} \quad (\text{Inégalité de Cauchy-Schwarz}) \\ &\leq \|\mathbf{J}\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{0,\mathbf{rot},\text{div}}. \end{aligned}$$

Toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram étant vérifiées, on déduit l'existence et l'unicité d'une solution  $\mathbf{A} \in V$  du problème variationnel.

Enfin en ce qui concerne la dépendance continue par rapport à la donnée  $\mathbf{J}$ , en choisissant  $\mathbf{v} = \mathbf{A} \in V$  on obtient :

$$\frac{c_0^2}{\mu_2} \|\mathbf{A}\|_{0,\mathbf{rot},\text{div}}^2 \leq a(\mathbf{A}, \mathbf{A}) = L(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{J}\|_{0,\Omega} \|\mathbf{A}\|_{0,\mathbf{rot},\text{div}}.$$

D'où

$$\|\mathbf{A}\|_{0,\mathbf{rot},\text{div}} \leq \frac{\mu_2}{c_0^2} \|\mathbf{J}\|_{0,\Omega}.$$

### Retour au problème de départ :

Pour revenir au problème de départ à partir de la solution du problème variationnel, comme on l'a vu dans le problème statique, on doit passer par les distributions. Sauf qu'ici n'a on a pas l'inclusion de  $D(\Omega)^3$  dans  $\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{X} : \text{div} \mathbf{v} = 0\}$  où  $\mathcal{X} = H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\text{div}, \Omega)$ .

Pour contourner cette difficulté on procédera comme suit :

Soit  $\boldsymbol{\omega} \in D(\Omega)^3$ , nous définissons  $p_{\boldsymbol{\omega}}$  comme étant l'unique solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } p_{\boldsymbol{\omega}} \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \Delta p_{\boldsymbol{\omega}} = \text{div} \boldsymbol{\omega}. \end{array} \right.$$

Posons :

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} - \text{grad} p_{\boldsymbol{\omega}}.$$

Cette fonction vérifie les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_\omega \in L^2(\Omega)^3, \\ \mathbf{rot} \mathbf{v}_\omega = \mathbf{rot} \omega, \quad \text{tel que } \mathbf{rot} \mathbf{v}_\omega \in L^2(\Omega)^3 \\ \mathbf{v}_\omega \wedge \mathbf{n}|_\Gamma = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_\omega = \operatorname{div} \omega - \Delta p_\omega = 0. \end{array} \right.$$

Par conséquent :

$$\mathbf{v}_\omega \in V.$$

Alors, en remplaçant  $\mathbf{v}$  dans la forme variationnelle (3.33) par :

$$\mathbf{v}_\omega = \omega - \operatorname{grad} p_\omega$$

on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}_\omega \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}_\omega \, d\mathbf{x} \\ \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{rot} (\omega - \operatorname{grad} p_\omega) \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot (\omega - \operatorname{grad} p_\omega) \, d\mathbf{x} \\ \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{rot} \omega \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{rot} (\operatorname{grad} p_\omega) \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \omega \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \operatorname{grad} p_\omega \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Comme on a  $\mathbf{rot} (\operatorname{grad} p_\omega) = 0$  et comme aussi d'après la formule de Green généralisée (1.27) on trouve :

$$\int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \operatorname{grad} p_\omega \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{J} p_\omega \, d\mathbf{x} + \langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}, p_\omega \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} = 0$$

car d'après la loi de conservation de la charge  $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$  et  $p_\omega$  est nul sur la frontière.

D'où l'on a :

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{rot} \omega \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \omega \, d\mathbf{x} \quad \forall \omega \in D(\Omega)^3.$$

C'est-à-dire que l'on a au sens des distributions l'égalité :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{J}, \omega \rangle_{D'(\Omega)^3 \times D(\Omega)^3} &= \langle \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A}, \mathbf{rot} \omega \rangle_{D'(\Omega)^3 \times D(\Omega)^3} \\ &= \langle \mathbf{rot} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A}), \omega \rangle_{D'(\Omega)^3 \times D(\Omega)^3}. \end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$\mathbf{rot}(\mu^{-1}\mathbf{rot} \mathbf{A}) = \mathbf{J} \quad \text{dans } D'(\Omega)^3.$$

Et comme  $\mathbf{J} \in L^2(\Omega)^3$ , un sous-ensemble de  $D'(\Omega)^3$  et que  $\mathbf{rot}(\mu^{-1}\mathbf{rot} \mathbf{A})$  appartient aussi à  $L^2(\Omega)^3$  on a :

$$\mathbf{rot}(\mu^{-1}\mathbf{rot} \mathbf{A}) = \mathbf{J} \quad \text{dans } L^2(\Omega)^3.$$

On en déduit que :

$$\mathbf{rot}(\mu^{-1}\mathbf{rot} \mathbf{A}) = \mathbf{J} \quad \text{presque partout dans } \Omega,$$

alors l'équation (3.30) est vérifiée et la condition aux limites  $\mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0$  est vérifiée car  $\mathbf{A} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ .

Donc, toute solution du problème variationnel est solution du problème de départ et la boucle est bouclée.

# Chapitre 4

## Formulation variationnelle : cas dépendant du temps

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons au cas des équations de Maxwell dépendant du temps (2.25)-(2.28) :

$$\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \quad (4.1)$$

$$\mu(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (4.2)$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) = \rho(\mathbf{x}, t) \quad (4.3)$$

$$\operatorname{div}(\mu(\mathbf{x}) \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)) = 0. \quad (4.4)$$

Avec l'équation de conservation de la charge qui doit être vérifiée (elle fait le lien entre les données  $\mathbf{J}$  et  $\rho$ ):

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (4.5)$$

Aussi on aura les deux conditions initiales suivantes:

$$\mathbf{E}(\cdot, 0) = \mathbf{E}_0, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{H}(\cdot, 0) = \mathbf{H}_0. \quad (4.7)$$

On commencera par donner quelques résultats de régularité sur l'espace  $\mathbb{R}^3 \times [0, T]$  avec  $T \in \mathbb{R}_*^+$ , ensuite on donnera une nouvelle formulation d'ordre 2 par rapport au temps de ces équations dans le cas d'un ouvert borné. Cette formulation va nous permettre de découpler les champs électrique et magnétique.

Pour démontrer l'existence et l'unicité on utilisera le théorème de Lions-Magenes que nous nous allons introduire par la suite.



## 4.1 Régularités

Dans ce qui suit, nous allons à partir d'hypothèses raisonnables faites sur l'énergie totale et sur les données  $\mathbf{J}$  et  $\rho$ , déduire la régularité de  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  pour que ces quantités vérifient en un sens mathématique les équations de Maxwell sur l'espace  $\mathbb{R}^3 \times [0, T]$  avec  $T \in \mathbb{R}_*^+$ .

Hypothèse première: L'énergie électromagnétique totale est finie, c'est-à-dire:

$$W_{tot}(t) = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \{ \varepsilon(\mathbf{x}) |\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)|^2 + \mu(\mathbf{x}) |\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)|^2 \} d\mathbf{x} < \infty.$$

Alors on a:

$$\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{E}(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^3)^3 \quad (4.8)$$

$$\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{H}(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^3)^3. \quad (4.9)$$

De plus, il est naturel de supposer que  $W_{tot}$  est mesurable :

$$t \longmapsto W_{tot}(t) \in L^2([0, T]). \quad (4.10)$$

On peut en déduire alors que :

$$(\mathbf{x}, t) \longmapsto \mathbf{E}(\cdot, \cdot) \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3) \quad (4.11)$$

$$(\mathbf{x}, t) \longmapsto \mathbf{H}(\cdot, \cdot) \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3) \quad (4.12)$$

Hypothèse deuxième : Le vecteur densité de courant :  $\mathbf{J}(\cdot, \cdot)$  ainsi que sa dérivée  $\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}(\cdot, \cdot) \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3)$ . Ainsi, en dérivant l'énergie totale par rapport au temps et en utilisant la relation (2.39) du deuxième chapitre on a:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W_{tot}(t) &= - \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ &= \iiint_{\mathbb{R}^3} \left( \varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mu(\mathbf{x}) \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

La variation par rapport au temps  $W_{tot}$  étant borné par hypothèse, on déduit donc que :  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \in L^1(0, T; L^1(\mathbb{R}^3))$  et  $W_{tot} \in C^0$  en temps.

Enfin on considère que :

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3) \text{ et } \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3).$$

Comme  $\mathbf{E} \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3)$ ,  $\mathbf{H} \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3)$  et d'après les équations (4.4), (4.2) respectivement on déduit que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H} \in L^2(0, T; H(\operatorname{div} \mu, \mathbb{R}^3)), \\ \text{et} \\ \mathbf{E} \in L^2(0, T; H(\operatorname{rot}, \mathbb{R}^3)). \end{array} \right.$$

Enfin l'équation de Maxwell-Ampère (4.1) nous donne :

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(\mathbf{x}, t).$$

Et donc

$$\mathbf{H} \in L^2(0, T; H(\operatorname{rot}, \mathbb{R}^3) \cap H(\operatorname{div} \mu, \mathbb{R}^3)). \quad (4.13)$$

Pour ce qui est de la régularité de la donnée de densité de charges, l'équation de conservation de la charge (4.5) permet d'affirmer que :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\cdot, t) \in H^{-1}(\mathbb{R}^3) \quad \text{presque pour tout } t \in [0, T].$$

(Car  $\mathbf{J}(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ ).

On fera souvent l'hypothèse troisième que : La densité de charges :  $\rho(\cdot, \cdot)$  ainsi que sa dérivée  $\frac{\partial \rho}{\partial t}(\cdot, \cdot) \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^3))$ , ce qui permet alors grâce à l'équation (4.3) d'avoir :

$$\mathbf{E} \in L^2(0, T; H(\operatorname{rot}, \mathbb{R}^3) \cap H(\operatorname{div} \varepsilon, \mathbb{R}^3)). \quad (4.14)$$

**Remarque 4.1.1** Dans le cas d'un ouvert borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  de frontière régulière  $\Gamma$ , on a des résultats de régularité similaires à ceux obtenus dans  $\mathbb{R}^3$ . A ces équations, on joindra la condition aux limites de type conducteur parfait c'est-à-dire :

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma} = \mathbf{0}, \quad (4.15)$$

où le vecteur  $\mathbf{n}$  représente la normale extérieure à  $\Gamma$ . De plus  $\Omega$  devra être simplement connexe [2].

## 4.2 Réécriture sous forme d'un problème du second ordre

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème défini par les équations (4.1)-(4.4), on construira une nouvelle formulation d'ordre 2 par rapport au temps qui permettra de découpler en un certain sens les inconnues : le champ électrique  $\mathbf{E}$  et le champ magnétique  $\mathbf{H}$ . Cette nouvelle formulation est donnée par les deux théorèmes suivants :

### **Théorème 4.2.1** (*Le problème électrique*)

Dans le problème du premier ordre en temps (4.1)-(4.4) avec les conditions (4.6), (4.7) et (4.15), on peut remplacer (4.1) par :

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mathbf{rot} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E}) = -\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} (\cdot, 0) = \varepsilon^{-1} (\mathbf{rot} \mathbf{H}_0 - \mathbf{J}) := \mathbf{E}_1 \quad (4.17)$$

**Preuve.** En dérivant l'équation de Maxwell-Ampère (4.1), par rapport au temps on obtient :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} &= \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{rot} \mathbf{H}) \\ &= \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mathbf{rot} \left( \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \\ &= \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mathbf{rot} (-\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E}) \quad (\text{D'après (4.2)}) \\ &= \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mathbf{rot} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E}). \end{aligned}$$

En considérant (4.1) à l'instant  $t = 0$ , on trouve :

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} (\cdot, 0) - \mathbf{rot} \mathbf{H} (\cdot, 0) = -\mathbf{J}$$

Alors

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} (\cdot, 0) = \mathbf{rot} \mathbf{H} (\cdot, 0) - \mathbf{J}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} (\cdot, 0) &= \varepsilon^{-1} (\mathbf{rot} \mathbf{H} (\cdot, 0) - \mathbf{J}) \\ &= \varepsilon^{-1} (\mathbf{rot} \mathbf{H}_0 - \mathbf{J}) := \mathbf{E}_1. \end{aligned}$$

■

**Théorème 4.2.2 (Le problème magnétique)**

Dans le problème du premier ordre en temps (4.1)-(4.4) avec les conditions (4.6), (4.7) et (4.15), on peut remplacer (4.2) par:

$$\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \mathbf{rot} (\varepsilon^{-1} (\mathbf{rot} \mathbf{H} - \mathbf{J})) = 0 \quad (4.18)$$

$$\varepsilon^{-1} (\mathbf{rot} \mathbf{H} - \mathbf{J}) \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0 \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} (\cdot, 0) = -\mu^{-1} (\mathbf{rot} \mathbf{E}_0) := \mathbf{H}_1 \quad (4.20)$$

**Preuve.** En dérivant l'équation (4.2), par rapport au temps on trouve :

$$\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{rot} \mathbf{E}) = 0$$

$$\iff \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \mathbf{rot} \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\stackrel{(4.1)}{\iff} \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \mathbf{rot} (\varepsilon^{-1} (\mathbf{rot} \mathbf{H} - \mathbf{J})) = 0$$

D'autre part d'après l'équation (4.1) on a :

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \varepsilon^{-1} (\mathbf{rot} \mathbf{H} - \mathbf{J})$$

Et comme

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma} = \mathbf{0}$$

Donc on déduit que :

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma} = \mathbf{0}$$

D'où

$$\varepsilon^{-1} (\mathbf{rot} \mathbf{H} - \mathbf{J}) \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma} = \mathbf{0}$$

Enfin, dans l'équation (4.2) en prend  $t = 0$  on obtient :

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} (\cdot, 0) + \mathbf{rot} \mathbf{E} (\cdot, 0) = 0 \\ \iff & \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} (\cdot, 0) = -\mu^{-1} (\mathbf{rot} \mathbf{E} (\cdot, 0)) \\ & = -\mu^{-1} (\mathbf{rot} \mathbf{E}_0) := \mathbf{H}_1. \end{aligned}$$

■

Maintenant, nous allons construire une borne supérieure de la variation du champ électrique  $\mathbf{E}$  au cours du temps, entre les instants 0 et  $T$ . En d'autres termes, il s'agit de borner uniformément la valeur de  $\mathbf{E}$  à un instant donné  $t_0$  en fonction d'une part de sa valeur initiale, et d'autre part des données. Il en sera de même pour le champ magnétique  $\mathbf{H}$ .

**Théorème 4.2.3 (Majoration pour le problème électrique)**

Soit  $t_0$  un élément appartenant à l'intervalle  $[0, T]$ , il existe une constante  $C_T > 0$  telle que :

$$\begin{aligned} & \sup_{t_0 \in [0, T]} \left[ \int_{\Omega} \left\{ \varepsilon \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right|^2 + \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{E}|^2 \right\} (\mathbf{x}, t_0) \, d\mathbf{x} \right] \\ & \leq C_T \left[ \int_{\Omega} \{ \varepsilon |\mathbf{E}_1|^2 + \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{E}_0|^2 \} \, d\mathbf{x} + \int_0^T \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \left| \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial s} \right|^2 \, d\mathbf{x} ds \right]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

**Preuve.** Multiplions (4.16) par  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(\cdot, t)$ , et intégrons sur  $\Omega$  on obtient :

$$\int_{\Omega} \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{rot} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E}) \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \, d\mathbf{x}.$$

D'après la formule de Green généralisée (1.28), et la condition aux limites (4.15) qui est également valable pour  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(\cdot, t)$  on trouve :

$$\int_{\Omega} \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \, d\mathbf{x}.$$

On sait que :

$$\int_{\Omega} \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \, d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} \varepsilon \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{E}|^2 \, d\mathbf{x} \right].$$

Par conséquent

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} \left( \varepsilon \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right|^2 + \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{E}|^2 \right) \, d\mathbf{x} \right] = -2 \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \, d\mathbf{x}.$$

En utilisant l'inégalité,  $-2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$  pour  $\mathbf{u} = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}$  et  $\mathbf{v} = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} \left( \varepsilon \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right|^2 + \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{E}|^2 \right) \, d\mathbf{x} \right] \leq \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \left| \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \right|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \varepsilon \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right|^2 \, d\mathbf{x}.$$

En intégrant sur l'intervalle  $[0, t]$ , on arrive à :

$$\begin{aligned} \left[ \int_{\Omega} \left( \varepsilon \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial s} \right|^2 + \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{E}|^2 \right) d\mathbf{x} \right]_0^t &\leq \int_0^t \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \left| \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial s} \right|^2 d\mathbf{x} ds + \int_0^t \int_{\Omega} \varepsilon \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial s} \right|^2 d\mathbf{x} ds \\ \int_{\Omega} \left( \varepsilon \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right|^2 + \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{E}|^2 \right) (\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} &\leq \int_{\Omega} \left( \varepsilon \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} (\mathbf{x}, 0) \right|^2 + \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{E} (\mathbf{x}, 0)|^2 \right) d\mathbf{x} \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \left| \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial s} \right|^2 d\mathbf{x} ds + \int_0^t \int_{\Omega} \varepsilon \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial s} \right|^2 d\mathbf{x} ds. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \varepsilon \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right|^2 + \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{E}|^2 \right) (\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} &\leq \int_{\Omega} (\varepsilon |\mathbf{E}_1|^2 + \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{E}_0|^2) d\mathbf{x} \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \left| \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial s} \right|^2 d\mathbf{x} ds + \int_0^t \int_{\Omega} \varepsilon \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial s} \right|^2 d\mathbf{x} ds \end{aligned}$$

En posant

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(t) = \int_{\Omega} \left( \varepsilon \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right|^2 + \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{E}|^2 \right) (\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ \text{et} \\ g(t) = \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \left| \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} (\mathbf{x}, t) \right|^2 d\mathbf{x}. \end{array} \right.$$

Alors, grâce au lemme de Gronwell (voir le chapitre 01) on déduit que :

$$\begin{aligned} &\sup_{t_0 \in [0, T]} \left[ \int_{\Omega} \left\{ \varepsilon \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right|^2 + \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{E}|^2 \right\} (\mathbf{x}, t_0) d\mathbf{x} \right] \\ &\leq C_T \left[ \int_{\Omega} \{ \varepsilon |\mathbf{E}_1|^2 + \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{E}_0|^2 \} d\mathbf{x} + \int_0^T \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \left| \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial s} \right|^2 d\mathbf{x} ds \right]. \end{aligned}$$

On a ainsi borné le champ électrique inconnue  $\mathbf{E}$  du problème en fonction des données  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_0$  et  $\mathbf{J}$ . ■

**Théorème 4.2.4 (Majoration pour le problème magnétique)**

Soit  $t_0$  un élément appartenant à l'intervalle  $[0, T]$ , il existe une constante  $C_T > 0$  telle que:

$$\begin{aligned} & \sup_{t_0 \in [0, T]} \left[ \int_{\Omega} \left( \mu \left| \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right|^2 + \varepsilon^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{H}|^2 \right) (\mathbf{x}, t_0) \, d\mathbf{x} \right] \\ \leq & \quad C'_T \left\{ \int_{\Omega} \{ \mu |\mathbf{H}_1|^2 + \varepsilon^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{H}_0|^2 \} \, d\mathbf{x} + \int_0^T \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \left| \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial s} \right|^2 \, d\mathbf{x} ds \right. \\ & \left. + \sup_{t_0 \in [0, T]} \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} |\mathbf{J}|^2 (\mathbf{x}, t_0) \, d\mathbf{x} \right\} \end{aligned} \quad (4.22)$$

**Preuve.** La majoration précédente se déduit de la majoration obtenue pour le problème électrique. En effet, on a d'après l'équation de Maxwell-Faraday (4.2)

$$\int_{\Omega} \mu \left| \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right|^2 \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{E}|^2 \, d\mathbf{x}.$$

Et d'après l'équation de Maxwell-Ampère (4.1) on écrit la relation suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{H}|^2 \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \left\{ \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \mathbf{J} \right\}^2 \, d\mathbf{x} \\ &\leq 2 \int_{\Omega} \left\{ \varepsilon \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right|^2 + \varepsilon^{-1} |\mathbf{J}|^2 \right\} \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\Omega} \mu \left| \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{H}|^2 \, d\mathbf{x} \leq \int_{\Omega} \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{E}|^2 \, d\mathbf{x} + 2 \int_{\Omega} \left\{ \varepsilon \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right|^2 + \varepsilon^{-1} |\mathbf{J}|^2 \right\} \, d\mathbf{x}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \mu \left| \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right|^2 + \varepsilon^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{H}|^2 \right) \, d\mathbf{x} &\leq \int_{\Omega} \left( \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{E}|^2 + 2\varepsilon \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right|^2 + 2\varepsilon^{-1} |\mathbf{J}|^2 \right) \, d\mathbf{x} \\ &\leq 2 \left( \int_{\Omega} \left( \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{E}|^2 + \varepsilon \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right|^2 \right) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} |\mathbf{J}|^2 \, d\mathbf{x} \right). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} & \sup_{t_0 \in [0, T]} \int_{\Omega} \left( \mu \left| \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right|^2 + \varepsilon^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{H}|^2 \right) (\mathbf{x}, t_0) \, d\mathbf{x} \\ & \leq 2 \left( \sup_{t_0 \in [0, T]} \int_{\Omega} \left( \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{E}|^2 + \varepsilon \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right|^2 \right) (\mathbf{x}, t_0) \, d\mathbf{x} + \sup_{t_0 \in [0, T]} \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} |\mathbf{J}|^2 (\mathbf{x}, t_0) \, d\mathbf{x} \right) \end{aligned}$$

Donc, d'après (4.21) on trouve :

$$\begin{aligned} & \sup_{t_0 \in [0, T]} \left[ \int_{\Omega} \left\{ \mu \left| \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right|^2 + \varepsilon^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{H}|^2 \right\} (\mathbf{x}, t_0) \, d\mathbf{x} \right] \\ & \leq C'_T \left( \int_{\Omega} \{ \mu |\mathbf{H}_1|^2 + \varepsilon^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{H}_0|^2 \} \, d\mathbf{x} + \int_0^T \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \left| \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial s} \right|^2 \, d\mathbf{x} \, ds + \sup_{t_0 \in [0, T]} \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} |\mathbf{J}|^2 (\mathbf{x}, t_0) \, d\mathbf{x} \right), \end{aligned}$$

car par définition on avait :  $-\mu^{-1} (\mathbf{rot} \mathbf{E}_0) := \mathbf{H}_1$  et  $\varepsilon^{-1} (\mathbf{rot} \mathbf{H}_0 - \mathbf{J}) := \mathbf{E}_1$  avec  $C'_T = 2(2C_T + 1)$ .

On a ainsi borné le champ magnétique inconnue  $\mathbf{H}$  du problème en fonction des données  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{H}_0$  et  $\mathbf{J}$ . ■

### 4.3 Existence et unicité pour le problème électrique

Dans ce qui suit, on va s'intéresser au problème électrique d'ordre 2 (4.16). Cette démonstration est basée sur le théorème de Lions-Magenes [11]. L'existence et l'unicité du problème magnétique se déduira de celle du problème électrique.

Cette démonstration de l'existence et l'unicité dans le cas d'une dépendance au temps dépasse le cadre du travail de ce mémoire. Néanmoins, on va essayer d'en présenter les principales étapes.

On rappelle comme on l'a vu précédemment que le problème électrique du second ordre s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mathbf{rot} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E}) &= -\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} & (4.23) \\ \mathbf{E} \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{E}(\cdot, 0) &= \mathbf{E}_0 \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(\cdot, 0) &= \mathbf{E}_1. \end{aligned}$$



Pour qu'on puisse borner le champ électrique  $\mathbf{E}$  grâce à la majoration (4.21) on doit avoir  $\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)$ .

On a  $\mathbf{rot} \mathbf{E} \in L^2(\Omega)^3$ , ce qui entraîne  $\mathbf{rot}(\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E}) \in (H_0(\mathbf{rot}, \Omega))'$  et comme  $\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)$  donc  $\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \in (H_0(\mathbf{rot}, \Omega))'$ . Alors en multipliant les deux membres de l'équation (4.23) par une fonction test  $\mathbf{v} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$  et en intégrant sur  $\Omega$  on trouve :

$$\begin{aligned} \left\langle \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mathbf{rot}(\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E}), \mathbf{v} \right\rangle_{H_0(\mathbf{rot}, \Omega)' \times H_0(\mathbf{rot}, \Omega)} &= - \left\langle \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}, \mathbf{v} \right\rangle_{H_0(\mathbf{rot}, \Omega)' \times H_0(\mathbf{rot}, \Omega)} \\ \left\langle \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \mathbf{v} \right\rangle_{H_0(\mathbf{rot}, \Omega)' \times H_0(\mathbf{rot}, \Omega)} + \left\langle \mathbf{rot}(\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E}), \mathbf{v} \right\rangle_{H_0(\mathbf{rot}, \Omega)' \times H_0(\mathbf{rot}, \Omega)} &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ \left\langle \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \mathbf{v} \right\rangle_{H_0(\mathbf{rot}, \Omega)' \times H_0(\mathbf{rot}, \Omega)} + (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E}, \mathbf{rot} \mathbf{v})_{L^2(\Omega)^3} &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ \left\langle \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \mathbf{v} \right\rangle_{H_0(\mathbf{rot}, \Omega)' \times H_0(\mathbf{rot}, \Omega)} + \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Cette formulation variationnelle du second ordre rentre dans le cadre général du théorème de Lions-Magenes [11] dont l'énoncé :

**Théorème 4.3.1 (Théorème de Lions-Magenes)**

Soient  $V \subset H$  deux espaces hilbertiens, l'injection étant continue et dense. Et soit  $a(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire symétrique continue sur  $V \times V$  telle que :

$$\exists \alpha > 0 : \quad a(v, v) + \lambda \|v\|_H^2 \geq \alpha \|v\|_V^2, \forall v \in V. \quad (4.24)$$

où  $\lambda$  est une constante positive.

Alors le problème variationnel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in L^2(0, T; V) \text{ tel que } \forall t \in [0, T] : \\ \langle u''(t), v \rangle_{V' \times V} + a(u(t), v) = (f(t), v)_H \quad \forall v \in V, \\ u(0) = u_0, u'(0) = u_1, \end{array} \right. \quad (4.25)$$

admet une solution unique lorsque :  $f \in L^2(0, T; H)$ ,  $u_0 \in V$  et  $u_1 \in H$ .

De plus l'application :

$$\begin{aligned} g : L^2(0, T; H) \times V \times H &\longrightarrow C^0(0, T; V) \times C^0(0, T; H) \\ (f, u_0, u_1) &\longmapsto (u, u') \end{aligned}$$

est continue.

**Application du théorème de Lions-Magenes :**

En posant :

- $H = L^2(\Omega)^3, V = H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$
- $a(\mathbf{E}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} \, dx$
- $f(t) = -\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}$ .

On a alors :

•  $(V, \|\cdot\|_{0,\mathbf{rot}}), (H, \|\cdot\|_{0,\Omega})$  sont deux espaces de Hilbert tels que  $V$  est dense dans  $H$  puisque  $V$  contient  $D(\Omega)$ .

•  $a(\cdot, \cdot)$  est une forme bilinéaire par la linéarité de la dérivation et de l'intégration. Elle est symétrique par définition.

- $a(\cdot, \cdot)$  est continue en effet,  $\forall \mathbf{E}, \mathbf{v} \in V$  :

$$\begin{aligned}
 |a(\mathbf{E}, \mathbf{v})| &= \left| \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} \, dx \right| \\
 &\leq \int_{\Omega} |\mu^{-1}| |\mathbf{rot} \mathbf{E}| |\mathbf{rot} \mathbf{v}| \, dx \\
 &\leq \frac{1}{\mu_1} \int_{\Omega} |\mathbf{rot} \mathbf{E}| |\mathbf{rot} \mathbf{v}| \, dx \\
 &\leq \frac{1}{\mu_1} \|\mathbf{rot} \mathbf{E}\|_{0,\Omega} \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|_{0,\Omega} \\
 &\leq \frac{1}{\mu_1} \|\mathbf{E}\|_{0,\mathbf{rot}} \|\mathbf{v}\|_{0,\mathbf{rot}}.
 \end{aligned}$$

- La forme  $a(\cdot, \cdot)$  vérifie  $\forall \mathbf{v} \in V, \forall \lambda > 0$  :

$$\begin{aligned}
 a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \lambda \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^3}^2 &= a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \lambda \int_{\Omega} |\mathbf{v}|^2 \, dx \\
 &= \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} \, dx + \lambda \int_{\Omega} |\mathbf{v}|^2 \, dx \\
 &= \int_{\Omega} \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{v}|^2 \, dx + \lambda \int_{\Omega} |\mathbf{v}|^2 \, dx \\
 &\geq \min\left(\frac{1}{\mu_2}, \lambda\right) \left[ \int_{\Omega} |\mathbf{rot} \mathbf{v}|^2 \, dx + \int_{\Omega} |\mathbf{v}|^2 \, dx \right] \\
 &\geq \min\left(\frac{1}{\mu_2}, \lambda\right) \left( \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 \right) \\
 &\geq \alpha \|\mathbf{v}\|_{0,\mathbf{rot}}^2.
 \end{aligned}$$

$$\text{Avec } \alpha = \min \left( \frac{1}{\mu_2}, \lambda \right).$$

Toutes les hypothèses du théorème de Lions-Magenes étant vérifiées, on déduit l'existence et l'unicité d'une solution  $\mathbf{E}$  du problème électrique.

**Remarque 4.3.2** *Le théorème de Lions-Magenes regroupe les trois étapes (l'existence et l'unicité de la solution du problème écrit sous forme variationnelle, puis retour au problème de départ) en une seule.*

# Chapitre 5

## Discrétisation par éléments finis

Nous présentons dans ce chapitre la discrétisation par éléments finis des équations de Maxwell. Nous commencerons par reformuler ces équations sous forme d'un problème variationnel continu mixte et nous montrons que cette nouvelle formulation est bien posée dans le sens où la **condition de Babuska-Brezzi** (c'est-à-dire la condition inf-sup) est vérifiée. On passera ensuite à la discrétisation par une méthode d'éléments finis, de type Taylor-Hood, où l'on vérifiera la condition inf-sup discrète.

### 5.1 Principe de l'approximation de type Galerkin

L'idée de la méthode de Galerkin est de remplacer l'espace de Hilbert de dimension infini  $V$  par un sous-espace de dimension fini  $V_h$  avec  $h$  un paramètre positif qui tend vers 0. Le principe de cette méthode est décrit ci-dessous :

Soit  $V$  un espace de Hilbert,  $a(\cdot, \cdot)$  est une forme bilinéaire continue et coercitive sur  $V \times V$  et  $L(\cdot)$  une forme linéaire continue sur  $V$ .

D'après le théorème de Lax-Milgram le problème variationnel général suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \quad \text{tell que :} \\ a(u, v) = L(v), \forall v \in V \end{array} \right.$$

admet une solution unique dans  $V$ .

Soit  $V_h$  une famille d'espace dépendant d'un paramètre  $h$  positif (qui tend vers 0),

tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_h \subset V \\ \dim V_h = N_h < \infty \quad \forall h > 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} V_h = V \end{array} \right.$$

Le problème variationnel approché prend alors la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \quad \text{tel que :} \\ a(u_h, v_h) = L(v_h), \forall v_h \in V_h. \end{array} \right.$$

Et cette méthode d'approximation est appelée approximation de Galerkin.

**Remarque 5.1.1** *La méthode de Galerkin est la première étape pour la résolution numérique des équations aux dérivées partielles.*

## 5.2 Formulation mixte des équations de Maxwell

Nous introduisons dans ce paragraphe une formulation mixte des équations de Maxwell. Cette formulation sera utilisée pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution. Pour ce faire on utilisera les équations de Maxwell dans le vide (2.40)-(2.43) décrit dans le chapitre 02 c'est-à-dire :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mathbf{rot} \mathbf{B} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (5.2)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{B} = 0. \quad (5.4)$$

où  $\varepsilon_0, \mu_0, c$  représentent respectivement la permittivité électrique, la perméabilité magnétique et la vitesse de la lumière et sont reliés par la relation  $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$ .

Le problème sera défini sur un ouvert borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  connexe à frontière régulière  $\Gamma$ , avec les conditions initiales :

$$\mathbf{E}(\cdot, 0) = \mathbf{E}_0, \quad (5.5)$$

$$\mathbf{B}(\cdot, 0) = \mathbf{B}_0. \quad (5.6)$$

Et la condition aux limites de type conducteur parfait :

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma} = \mathbf{0}, \quad (5.7)$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0. \quad (5.8)$$

A ces équations, on rappelle que l'on a l'équation de conservation de la charge :

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

qui doit être vérifiée.

Dans la suite, comme dans le chapitre 04 (dans le cas d'une dépendance par rapport au temps), on va considérer une formulation du second ordre qui permettra de découpler le problème relatif à l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  et celui relatif au champ électrique  $\mathbf{E}$ .

### 5.2.1 Formulation du second ordre en $\mathbf{B}$ (induction magnétique)

Pour avoir une formulation indépendante du champ électrique  $\mathbf{E}$ , on dérive (5.2) par rapport au temps et on utilise le rotationnel de (5.1) on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + c^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{rot} \mathbf{J}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \end{cases} \quad (5.9)$$

complété avec la condition aux limites de type conducteur parfait :

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0,$$

et des deux conditions initiales :

$$\begin{cases} \mathbf{B}(\cdot, 0) = \mathbf{B}_0, \\ \text{et} \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\cdot, 0) = \mathbf{B}_1 := -\operatorname{rot} \mathbf{E}_0. \end{cases}$$

### 5.2.2 Formulation du second ordre en $\mathbf{E}$ (champ électrique)

De manière équivalente, on donnera maintenant une formulation du second ordre du champ électrique  $\mathbf{E}$  indépendant de l'induction magnétique  $\mathbf{B}$ . A cet effet, en dérivant (5.1)

par rapport au temps, et en utilisant le rotationnel de (5.2) on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + c^2 \mathbf{rot rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \end{cases} \quad (5.10)$$

complété avec la condition aux limites de type conducteur parfait :

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0,$$

et des deux conditions initiales :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\cdot, 0) = \mathbf{E}_0, \\ \text{et} \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(\cdot, 0) = \mathbf{E}_1 := c^2 \mathbf{rot} \mathbf{B}_0 - \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{J}(\cdot, 0). \end{cases}$$

Les formulations du second ordre du champ électrique  $\mathbf{E}$  et de l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  précédentes peuvent s'écrire dans le cadre général suivant :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + c^2 \mathbf{rot rot} \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (5.11)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = g. \quad (5.12)$$

### Remarque 5.2.1

1) Dans la présentation des deux formulations précédentes (du champ électrique  $\mathbf{E}$  et de l'induction magnétique  $\mathbf{B}$ ) on a la présence d'une contrainte de divergence.

2) Dans les deux formulations du second ordre (5.10) et (5.9) les inconnues  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  ne sont plus couplées que par les conditions initiales et les données (via l'équation de conservation de la charge (2.24)).

3) Les formulations du second ordre en temps (5.10) et (5.9) sont du type équations des ondes, hyperbolique pour le champ électrique  $\mathbf{E}$  et l'induction magnétique  $\mathbf{B}$ .

### 5.2.3 Généralités sur les problèmes mixtes

Nous sommes en mesure maintenant, grâce à la formulation du second ordre (5.11)-(5.12) d'écrire les équations de Maxwell sous la forme d'un problème mixte. Pour cela, on gèle le temps et on introduit un paramètre  $\lambda^2 > 0$  où le carré représente la dérivée seconde. On peut écrire alors le problème (5.11)-(5.12) sous la forme suivante :

Pour deux fonctions  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^3$  et  $g \in L^2(\Omega)$  données on cherche  $\mathbf{u}$  solution de :

$$\mathbf{rot rot u} + \lambda^2 \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \quad (5.13)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = g \quad \text{dans } \Omega \quad (5.14)$$

satisfaisant une condition aux limites du type :

Dirichlet pour le problème électrique

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad (5.15)$$

ou bien de type Neumann pour le problème magnétique

$$(\mathbf{rot u}) \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \quad (5.16)$$

Les données  $\mathbf{f}$  et  $g$  sont reliés par la relation suivante :

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \lambda^2 g \quad (5.17)$$

En effet en introduisant la divergence de (5.13) on trouve :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{f} &= \operatorname{div} (\mathbf{rot rot u}) + \operatorname{div} \lambda^2 \mathbf{u} \\ &= \operatorname{div} \mathbf{rot} (\mathbf{rot u}) + \operatorname{div} \lambda^2 \mathbf{u} \end{aligned}$$

On a  $\operatorname{div} \mathbf{rot} (\cdot) = 0$  donc

$$\lambda^2 \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div} \mathbf{f}$$

D'après (5.14) on obtient :

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \lambda^2 g.$$

Cette relation n'est en fait que l'expression de l'équation de conservation de la charge (2.24) correspondant à la formulation d'ordre 2 des équations de Maxwell.

**Remarque 5.2.2** *La relation (5.17) doit être vérifiée exactement. Car si elle n'est vérifiée que numériquement (c'est-à-dire que l'égalité est approchée), l'équation de conservation de la charge n'est pas satisfaite au sens exact et cela générera des instabilités du schéma numérique dues à des incompatibilités entre les équations (5.1) et (5.2).*



Pour satisfaire (5.17) on ajoute un multiplicateur de Lagrange notée  $p$  associé à cette contrainte dans (5.13) et alors on considère le problème suivant :

Pour deux fonctions  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^3$  et  $g \in L^2(\Omega)$  données on cherche  $(\mathbf{u}, p)$  solution de :

$$\mathbf{rot rot u} + \lambda^2 \mathbf{u} - \text{grad} p = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \quad (5.18)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = g \quad \text{dans } \Omega \quad (5.19)$$

où  $p$  doit vérifier la condition aux limites :  $p = 0$  sur  $\Gamma$ .

En effet, en utilisant la divergence de (5.18) on trouve :

$$\text{div } \mathbf{rot}(\mathbf{rot } \mathbf{u}) + \lambda^2 \text{div } \mathbf{u} - \text{div } \text{grad} p = \text{div } \mathbf{f}$$

Donc

$$\lambda^2 \text{div } \mathbf{u} - \Delta p = \text{div } \mathbf{f}$$

D'après (5.19) on a :

$$\lambda^2 g - \Delta p = \text{div } \mathbf{f}$$

Alors

$$\Delta p = \lambda^2 g - \text{div } \mathbf{f}.$$

Pour que (5.17) soit vérifiée on doit choisir  $p$  solution de

$$\Delta p = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Il est alors naturel de choisir comme condition aux limites :

$$p = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

de sorte que :  $p \equiv 0$  sur  $\Omega$ .

### Remarque 5.2.3

1) *L'introduction du multiplicateur de Lagrange  $p$  n'a pas modifié le problème initial (5.13)-(5.14) car  $p \equiv 0$ . Autrement dit, le problème (5.18)-(5.19) est bien équivalent au problème initial (5.13)-(5.14).*

2) *Nous venons d'écrire la formulation du second ordre des équations de Maxwell sous la forme d'un problème mixte (5.18)-(5.19) où le multiplicateur que l'on a rajouté doit être nulle.*

Ci-après, on va rappeler un théorème important permettant d'assurer l'existence et l'unicité de la solution d'un problème variationnel mixte (comme le problème (5.18)-(5.19)).

Etant donné deux espaces de Hilbert  $X$  et  $Q$  munis des normes  $\|\cdot\|_X$  et  $\|\cdot\|_Q$  respectivement, deux formes bilinéaires continues  $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$  et  $b : X \times Q \longrightarrow \mathbb{R}$  et deux formes linéaires continues  $L : X \longrightarrow \mathbb{R}$  et  $\Phi : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ . Et on cherche à trouver  $(u, p) \in X \times Q$  solution du problème mixte suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u, p) \in X \times Q \text{ solution de} \\ a(u, v) + b(v, p) = L(v) \quad \forall v \in X, \\ b(u, q) = \Phi(q) \quad \forall q \in Q. \end{cases} \quad (5.20)$$

Alors on a le théorème important suivant (voir par exemple [9]) qui permet d'assurer l'existence et l'unicité de tels problèmes.

**Théorème 5.2.4** (*Existence et unicité du problème mixte*)

En définissant le sous espace  $V \subset X$  :

$$V := \{v \in X : b(v, q) = 0, \forall q \in Q\}. \quad (5.21)$$

Si on a les hypothèses suivantes :

i)  $a(\cdot, \cdot)$  est  $V$ -elliptique c'est-à-dire :

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in V.$$

ii)  $b(\cdot, \cdot)$  vérifie la condition inf-sup (ou condition de Babuska-Brezzi) c'est-à-dire :

$$\exists \beta > 0 \text{ tel que } \inf_{q \in Q} \sup_{v \in X} \frac{|b(v, q)|}{\|v\|_X \|q\|_Q} \geq \beta. \quad (5.22)$$

Alors le problème (5.20) admet une unique solution  $(u, p) \in X \times Q$ .

**Preuve.** La preuve de ce théorème est détaillée dans l'ouvrage de [9]. ■

## 5.3 Existence et unicité de la formulation mixte des équations de Maxwell

En nous basant sur le théorème précédant, nous allons démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (5.18)-(5.19). On se placera dans le cadre d'un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  borné, et de frontière  $\Gamma$  régulière.

### 5.3. EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA FORMULATION MIXTE DES ÉQUATIONS DE MAXWELL

---

On se placera dans le cadre où  $\Omega$  est entouré d'un conducteur parfait. c'est-à-dire que l'on a la condition aux limite :  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0$ .

En multipliant les équations (5.18)-(5.19) par des fonctions test  $\mathbf{v} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ ,  $q \in H_0^1(\Omega)$  respectivement et en intégrant sur  $\Omega$  on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \lambda^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{grad} p \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ \int_{\Omega} \mathbf{div} \mathbf{u} \cdot q \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g \, q \, d\mathbf{x} \end{array} \right.$$

En appliquant les formules de Green généralisées (1.27)-(1.28) et en utilisant la condition aux limites et le fait que la fonction test  $q$  est nulle sur le bord on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} (\mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} + \lambda^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{grad} p \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} q \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g \, q \, d\mathbf{x} \end{array} \right. \quad (5.23)$$

en posant :

- $X = H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ ,  $Q = H_0^1(\Omega)$  muni des deux normes  $\|\cdot\|_{0,\mathbf{rot}}$  et  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$  respectivement.
- $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} + \lambda^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x}$
- $b(\mathbf{v}, q) = - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} q \, d\mathbf{x}$
- $L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}$  et  $\Phi(q) = \int_{\Omega} g \, q \, d\mathbf{x}$

On sait que :  $(X, \|\cdot\|_{0,\mathbf{rot}})$ ,  $(Q, \|\cdot\|_{1,\Omega})$  sont des espaces de Hilbert.

Il est clair que :  $a(\cdot, \cdot)$  et  $b(\cdot, \cdot)$  sont deux formes bilinéaires continues sur  $X \times X$  et  $X \times Q$  respectivement. Aussi  $L(\cdot)$  et  $\Phi(\cdot)$  sont deux formes linéaires continues.

Vérifions les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité de la solution des problèmes mixtes :

- $a(\cdot, \cdot)$  est  $V$ -elliptique en effet elle l'est sur l'espace  $X = H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$  tout entier :

$$\begin{aligned}
 a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} (\mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} + \lambda^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\Omega} |\mathbf{rot} \mathbf{v}|^2 \, d\mathbf{x} + \lambda^2 \int_{\Omega} |\mathbf{v}|^2 \, d\mathbf{x} \\
 &= \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \lambda^2 \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 \\
 &\geq \min(1, \lambda^2) \left( \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 \right) \\
 &= \min(1, \lambda^2) \|\mathbf{v}\|_{0,\mathbf{rot}}^2.
 \end{aligned}$$

On rappelle que :  $V := \{\mathbf{v} \in X : b(\mathbf{v}, q) = 0, \forall q \in Q\}$ .

Reste donc à vérifier la deuxième hypothèse, la condition inf-sup. Pour ce faire, on a besoin du lemme suivant :

**Lemme 5.3.1** *Si  $q \in H_0^1(\Omega)$ , alors  $\mathbf{v} = \text{grad}q \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ .*

**Preuve.** Pour montrer que  $\mathbf{v} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ , on doit montrer que :  $\mathbf{v} \in H(\mathbf{rot}, \Omega)$  et  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0$  sur  $\Gamma$ .

On a  $q \in H_0^1(\Omega)$  donc  $\mathbf{v} = \text{grad}q \in L^2(\Omega)$ .

D'autre part

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} = \text{grad}q &\implies \mathbf{rot} \mathbf{v} = \mathbf{rot}(\text{grad}q) \\
 &\implies \mathbf{rot} \mathbf{v} = 0
 \end{aligned}$$

puisque  $0 \in L^2(\Omega)$ , donc  $\mathbf{rot} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)$ . D'où  $\mathbf{v} \in H(\mathbf{rot}, \Omega)$ .

Comme  $q \in H_0^1(\Omega)$  on a  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma} = \text{grad}q \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0$ . ■

Soit  $q \in H_0^1(\Omega)$ , d'après le lemme précédent on prend  $\mathbf{v} = \text{grad}q \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$

on a alors pour  $\mathbf{v}$  choisit de la sorte:

$$\begin{aligned}
 |b(\mathbf{v}, q)| &= \left| \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \text{grad}q \, d\mathbf{x} \right| \\
 &= \left| \int_{\Omega} \text{grad}q \cdot \text{grad}q \, d\mathbf{x} \right| \\
 &= \|\text{grad}q\|_{0,\Omega}^2 \\
 &= \|\text{grad}q\|_{0,\Omega} \|\text{grad}q\|_{0,\Omega} \\
 &= \|\mathbf{v}\|_{0,\mathbf{rot}} \|\text{grad}q\|_{0,\Omega} \\
 &\geq C_0 \|\mathbf{v}\|_{0,\mathbf{rot}} \|q\|_{1,\Omega} \quad (\text{Grâce à l'inégalité de Poincaré}).
 \end{aligned}$$

Donc

$$\forall q \in H_0^1(\Omega), \exists \mathbf{v} = \text{grad}q \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega) : \frac{|b(\mathbf{v}, q)|}{\|\mathbf{v}\|_{0,\mathbf{rot}}} \geq C_0 \|q\|_{1,\Omega}$$

$$\forall q \in H_0^1(\Omega) : \sup_{\mathbf{v} \in X} \frac{|b(\mathbf{v}, q)|}{\|\mathbf{v}\|_{0,\mathbf{rot}}} \geq C_0 \|q\|_{1,\Omega}$$

C'est-à-dire :

$$\inf_{q \in Q} \sup_{\mathbf{v} \in X} \frac{|b(\mathbf{v}, q)|}{\|\mathbf{v}\|_{0,\mathbf{rot}} \|q\|_{1,\Omega}} \geq C_0.$$

Par conséquent

$$\exists \beta = C_0 > 0 \text{ tel que } \inf_{q \in Q} \sup_{\mathbf{v} \in X} \frac{|b(\mathbf{v}, q)|}{\|\mathbf{v}\|_{0,\mathbf{rot}} \|q\|_{1,\Omega}} \geq \beta.$$

Toutes les hypothèses du théorème étant vérifiées, on en déduit l'existence et l'unicité d'une solution  $(\mathbf{u}, p) \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \times H_0^1(\Omega)$  du problème (5.23).

## 5.4 Formulation mixte approchée des équations de Maxwell

Dans cette section nous nous intéresserons à la formulation mixte approchée de la formulation (5.20). A cet effet, on considérera les espaces d'approximation de dimensions finies  $X_h \subset X$  et  $Q_h \subset Q$  et on définira le sous-espace de dimension finie  $V_h$  comme suit :

$$V_h = \{v_h \in X_h : b(v_h, q_h) = 0, \forall q_h \in Q_h\},$$

avec  $h$  est un paramètre donné (qui tend vers 0). On a alors le problème approché du problème (5.20) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_h, p_h) \in X_h \times Q_h \text{ solution de} \\ a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in X_h, \\ b(u_h, q_h) = \Phi(q_h) \quad \forall q_h \in Q_h. \end{array} \right. \quad (5.24)$$

L'existence et l'unicité de la solution du problème approchée (5.24) se déduisent, comme dans le cas continue, de la  $V_h$ -ellipticité et de la **condition inf-sup discrète**. Le théorème ci-dessous est la version discrète du théorème que l'on a vu dans le cas continu.

**Théorème 5.4.1**

S'il existe  $\alpha > 0$ , indépendant de  $h$  tel que :

$$a(v_h, v_h) \geq \alpha \|v_h\|_X^2 \quad \forall v_h \in V_h,$$

et s'il existe  $\beta > 0$ , indépendant de  $h$  tel que :

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{v_h \in X_h} \frac{|b(v_h, q_h)|}{\|v_h\|_X \|q_h\|_Q} \geq \beta, \quad (5.25)$$

alors le problème (5.24) admet une solution unique  $(u_h, p_h) \in X_h \times Q_h$ . De plus, il existe  $c > 0$  indépendant de  $h$  tel que

$$\|u - u_h\|_X + \|p - p_h\|_Q \leq c \left( \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X + \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q \right),$$

pour  $(u, p)$  solution du problème continu (5.20).

**Preuve.** Pour la démonstration voir [9, p.114]. ■

**Remarque 5.4.2** La condition inf-sup discrète (5.25) ne se déduit pas de la condition inf-sup du cas continu.

Maintenant, on introduit les espaces de dimension finie relatifs à l'inconnue  $\mathbf{u}_h$  et au multiplicateur  $p_h$  :

$$X_h \subset H(\mathbf{rot}, \Omega), \quad Q_h \subset H^1(\Omega)$$

Et en tenant compte des conditions aux limites, on définit les espaces :

$$X_h^0 := X_h \cap H_0(\mathbf{rot}, \Omega), \quad Q_h^0 := Q_h \cap H_0^1(\Omega).$$

Pour lesquels on suppose que la condition de compatibilité suivante est vérifiée :

$$\forall q_h \in Q_h^0, \quad \text{grad} q_h \in X_h^0. \quad (5.26)$$

(équivalent du lemme 5.3.1).

On a alors le problème approché du problème (5.23) qui s'écrit comme suit :

Trouver  $(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_h^0 \times Q_h^0$  solution de la formulation variationnelle

$$\int_{\Omega} (\mathbf{rot} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}_h + \lambda^2 \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \text{grad} p_h \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_h^0, \quad (5.27)$$

$$- \int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot \text{grad} q_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g q_h \, d\mathbf{x}, \quad \forall q_h \in Q_h^0. \quad (5.28)$$

L'existence et l'unicité de la solution du problème approché précédant est donné dans le théorème suivant :

**Théorème 5.4.3** *Sous l'hypothèse (5.26), le problème (5.27)-(5.28) admet une solution unique  $(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_h^0 \times Q_h^0$ , et pour  $(\mathbf{u}, p)$  solution du problème continu, on a :*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\mathbf{rot}} + \|p_h\|_{1,\Omega} \leq c \left( \inf_{\mathbf{v}_h \in X_h^0} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{0,\mathbf{rot}} \right).$$

**Preuve.** En posant :

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \int_{\Omega} (\mathbf{rot} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}_h + \lambda^2 \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x},$$

$$b(\mathbf{v}_h, q_h) = - \int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{grad} q_h \, d\mathbf{x},$$

$$L(\mathbf{v}_h) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \text{ et } \Phi(q_h) = \int_{\Omega} g q_h \, d\mathbf{x}.$$

La  $V_h$ -ellipticité de  $a(\cdot, \cdot)$  provient de celle du cas continu. Vérifions la condition inf-sup discrète, soit  $q_h \in Q_h^0$ , d'après l'hypothèse (5.26) on choisit  $\mathbf{v}_h = \mathbf{grad} q_h \in X_h^0$

et on a pour ce  $\mathbf{v}_h$

$$\begin{aligned} |b(\mathbf{v}_h, q_h)| &= \left| \int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{grad} q_h \, d\mathbf{x} \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} \mathbf{grad} q_h \cdot \mathbf{grad} q_h \, d\mathbf{x} \right| \\ &= \|\mathbf{grad} q_h\|_{0,\Omega}^2 \\ &= \|\mathbf{grad} q_h\|_{0,\Omega} \|\mathbf{grad} q_h\|_{0,\Omega} \\ &= \|\mathbf{v}_h\|_{0,\mathbf{rot}} \|\mathbf{grad} q_h\|_{0,\Omega} \\ &\geq C_0 \|\mathbf{v}_h\|_{0,\mathbf{rot}} \|q_h\|_{1,\Omega}. \end{aligned} \quad (\text{Grâce à l'inégalité de Poincaré}).$$

Donc

$$\forall q_h \in Q_h^0, \exists \mathbf{v}_h = \mathbf{grad} q_h \in X_h^0 : \frac{|b(\mathbf{v}_h, q_h)|}{\|\mathbf{v}_h\|_{0,\mathbf{rot}}} \geq C_0 \|q_h\|_{1,\Omega}.$$

Alors

$$\inf_{q_h \in Q_h^0} \sup_{\mathbf{v}_h \in X_h^0} \frac{|b(\mathbf{v}_h, q_h)|}{\|\mathbf{v}_h\|_{0,\mathbf{rot}} \|q_h\|_{1,\Omega}} \geq C_0$$

d'où

$$\exists \beta = C_0 > 0 \text{ tel que : } \inf_{q_h \in Q_h^0} \sup_{\mathbf{v}_h \in X_h^0} \frac{|b(\mathbf{v}_h, q_h)|}{\|\mathbf{v}_h\|_{0,\mathbf{rot}} \|q_h\|_{1,\Omega}} \geq \beta.$$

A partir du théorème 5.4.1 on déduit que le problème (5.27)-(5.28) admet une solution unique  $(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_h^0 \times Q_h^0$ . ■

Nous devons nous assurer que le multiplicateur  $p_h$  est bel et bien nul.

**Corollaire 5.4.4** *La solution  $(u_h, p_h)$  du problème approché (5.27)-(5.28) vérifie  $p_h \equiv 0$ .*

**Preuve.** On choisit  $\mathbf{v}_h = \text{grad } q_h$ ,  $q_h \in Q_h^0$  donc la formule (5.27) s'écrit :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{rot } \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{rot} (\text{grad } q_h) + \lambda^2 \mathbf{u}_h \cdot \text{grad } q_h) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \text{grad } p_h \cdot \text{grad } q_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \text{grad } q_h \, d\mathbf{x}$$

comme  $\mathbf{rot} \text{grad} (\cdot) = 0$  on a alors :

$$\int_{\Omega} \lambda^2 \mathbf{u}_h \cdot \text{grad } q_h \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \text{grad } p_h \cdot \text{grad } q_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \text{grad } q_h \, d\mathbf{x}.$$

D'où

$$\int_{\Omega} \text{grad } p_h \cdot \text{grad } q_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\lambda^2 \mathbf{u}_h - \mathbf{f}) \cdot \text{grad } q_h \, d\mathbf{x}.$$

D'après (5.28) on a :

$$\int_{\Omega} \text{grad } p_h \cdot \text{grad } q_h \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \text{grad } q_h + \lambda^2 g q_h) \, d\mathbf{x}.$$

Et par application de la formule de Green généralisée (1.27) on trouve :

$$- \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \text{grad } q_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{f} \, q_h \, d\mathbf{x}.$$

Alors

$$\int_{\Omega} \text{grad } p_h \cdot \text{grad } q_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{f} - \lambda^2 g) q_h \, d\mathbf{x}.$$

Comme on a :

$$\text{div } \mathbf{f} - \lambda^2 g = 0$$

donc  $(\mathbf{u}_h, p_h)$  solution de (5.27)-(5.28) vérifie  $p_h \equiv 0$ . ■

Ceci nous permet de dire que  $\mathbf{u}_h$  est solution de

$$\int_{\Omega} (\mathbf{rot } \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{rot } \mathbf{v}_h + \lambda^2 \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_h^0. \quad (5.29)$$

Les équations de Maxwell sont traitées par plusieurs méthodes numériques, nous allons présenter la méthode des éléments finis conformes qui est l'une des méthodes les plus utilisées.



## 5.5 Approximation par une méthode d'éléments finis conformes

Deux choix s'offrent à nous pour une discrétisation par une méthode d'éléments finis conformes du problème variationnel (5.27)-(5.28).

- Soit on construit notre espace discret  $X_h$  de tel sorte que  $X_h \subset H(\mathbf{rot}, \Omega)$  et cela nous conduit à considérer par exemple l'élément fini de **Raviart-Nédélec** où  $X_h$  est défini de la sorte :

$$X_h := \{ \mathbf{v} \in H(\mathbf{rot}, \Omega) : \mathbf{v}|_K \in R_1, \forall K \in \tau_h \}, \quad (5.30)$$

où,  $\tau_h$  est une triangulation de  $\bar{\Omega}$  et  $R_1 := \left\{ p \in (P^1)^3 : p(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \right\}$ .

Et  $Q_h$  l'espace d'approximation de  $Q$  qui est défini par :

$$Q_h := \{ \phi \in C^0(\bar{\Omega}) : \phi|_K \in P^1, \forall K \in \tau_h \}.$$

- Soit on construit notre espace discret  $X_h$  de tel sorte que :  $X_h \subset H^1(\Omega)^3$ . Pour cela on modifiera la formulation variationnelle (5.27)-(5.28) en se basant sur un résultat théorique important de **M.Costabel** (voir [5] et [6]). Et on présentera brièvement l'élément finis de **Taylor-Hood**, élément finis bien adapté pour l'approximation des équations de Maxwell.

Dans ce qui suit, on ne s'intéressera qu'au deuxième choix. L'objectif est d'aboutir à une formulation variationnelle dans  $H^1(\Omega)^3$  et pouvoir utiliser une approximation par éléments finis conformes de type Taylor-Hood. Pour cela on se basera sur les étapes suivantes :

**Étape 01 : (Réécriture de la forme variationnelle continue (5.23))**

Rappelons notre formulation variationnelle (5.23), qui était de chercher

$(\mathbf{u}, p) \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \times H_0^1(\Omega)$  solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} (\mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} + \lambda^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \text{grad} p \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \forall \mathbf{v} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega), \\ - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \text{grad} q \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g q \, d\mathbf{x}, \forall q \in H_0^1(\Omega), \end{array} \right. \quad (5.31)$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} + \lambda^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega), \quad (5.32)$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \, q \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g \, q \, d\mathbf{x}, \quad \forall q \in H_0^1(\Omega). \quad (5.33)$$

L'idée ici est de relaxer la régularité du multiplicateur  $p$  ( $H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ ) et d'augmenter celle de la solution  $\mathbf{u}$  ( $H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \rightarrow \mathcal{X} = H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\operatorname{div}, \Omega)$ ). Ceci nous conduit à chercher  $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{X} \times L^2(\Omega)$  solution de la formulation variationnelle

$$\int_{\Omega} (\mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} + \lambda^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{X}, \quad (5.34)$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \, q \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g \, q \, d\mathbf{x}, \quad \forall q \in L^2(\Omega). \quad (5.35)$$

Reste à démontrer que le nouveau problème variationnel ainsi défini reste bien posé (i.e : la  $\mathcal{V}$ -ellipticité et la condition inf-sup restent toujours vérifiées sur les espace  $\mathcal{X} \times L^2(\Omega)$  au lieu de  $H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \times H_0^1(\Omega)$ ).

**Théorème 5.5.1** *Le problème (5.34)-(5.35) est bien posé. De plus  $p = 0$ , sous réserve que  $(\operatorname{div} \mathbf{f} - \lambda^2 g = 0)$  est vérifié.*

**Preuve.** Pour démontrer l'existence et l'unicité du problème (5.34)-(5.35) nous appliquerons le théorème 5.2.4 avec

$$X = \mathcal{X}, \quad Q = L^2(\Omega) \text{ et } \mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{X} : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} + \lambda^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x},$$

$$b(\mathbf{v}, q) = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \, q \, d\mathbf{x},$$

$$L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \text{ et } \Phi(q) = \int_{\Omega} g \, q \, d\mathbf{x}.$$

- $a(\cdot, \cdot)$  est  $\mathcal{V}$ -elliptique. En effet,  $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$

$$\begin{aligned}
 a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} (\mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} + \lambda^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\Omega} |\mathbf{rot} \mathbf{v}|^2 \, d\mathbf{x} + \lambda^2 \int_{\Omega} |\mathbf{v}|^2 \, d\mathbf{x} \\
 &= \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \lambda^2 \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 \\
 &\geq \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 = |\mathbf{v}|_{\mathbf{rot},\text{div}}^2 \quad (\text{Puisque on a } \mathbf{v} \in \mathcal{V}) \\
 &\geq C_0 \|\mathbf{v}\|_{0,\mathbf{rot},\text{div}}^2 \quad (\text{Grâce à l'inégalité de Weber}).
 \end{aligned}$$

- Vérifions maintenant la condition inf-sup. Soit  $q \in L^2(\Omega)$ , on considère l'unique solution de

$$\begin{cases} \text{Chercher } \psi \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \Delta \psi = q. \end{cases}$$

On prend  $\mathbf{v} = \text{grad } \psi$ , alors  $\mathbf{v} \in \mathcal{X}$ . On a pour ce  $\mathbf{v}$

$$b(\mathbf{v}, q) = \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{v} \, q \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \Delta \psi \, q \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} q^2 \, d\mathbf{x} = \|q\|_{0,\Omega}^2 = \|q\|_{0,\Omega} \|q\|_{0,\Omega}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
 \|q\|_{0,\Omega} &= \|\Delta \psi\|_{0,\Omega} \\
 &= \left( \int_{\Omega} |\Delta \psi|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left( \int_{\Omega} |\text{div grad } \psi|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left( \int_{\Omega} |\text{div } \mathbf{v}|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left( \int_{\Omega} (|\text{div } \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{rot} \mathbf{v}|^2) \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Car } \mathbf{rot} \mathbf{v} = \mathbf{rot} \text{ grad } \psi = 0) \\
 &= |\mathbf{v}|_{\mathbf{rot},\text{div}}.
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 b(\mathbf{v}, q) &= |\mathbf{v}|_{\mathbf{rot},\text{div}} \|q\|_{0,\Omega} \\
 &\geq C_0 \|\mathbf{v}\|_{0,\mathbf{rot},\text{div}} \|q\|_{0,\Omega} \quad (\text{Grâce à l'inégalité de Weber}).
 \end{aligned}$$

Donc

$$\forall q \in L^2(\Omega), \exists \mathbf{v} = \text{grad} \psi \in \mathcal{X} : \frac{|b(\mathbf{v}, q)|}{\|\mathbf{v}\|_{0, \text{rot}, \text{div}}} \geq C_0 \|q\|_{0, \Omega}$$

Alors

$$\inf_{q \in L^2(\Omega)} \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{X}} \frac{|b(\mathbf{v}, q)|}{\|\mathbf{v}\|_{0, \text{rot}, \text{div}} \|q\|_{0, \Omega}} \geq C_0$$

D'où

$$\exists \beta = C_0 > 0 \text{ tel que : } \inf_{q \in L^2(\Omega)} \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{X}} \frac{|b(\mathbf{v}, q)|}{\|\mathbf{v}\|_{0, \text{rot}, \text{div}} \|q\|_{0, \Omega}} \geq \beta.$$

Toutes les hypothèses du théorème 5.2.4 étant vérifiées, on déduit l'existence et l'unicité d'une solution  $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{X} \times L^2(\Omega)$  du problème (5.34)-(5.35).

Enfin, montrons que  $p = 0$ .

On prend  $\mathbf{v} = \text{grad} \psi$ ,  $\psi \in H_0^1(\Omega)$  telle que  $\Delta \psi = p$ , dans (5.34) on trouve :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot}(\text{grad} \psi) + \lambda^2 \mathbf{u} \cdot \text{grad} \psi) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p \, \text{div}(\text{grad} \psi) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \text{grad} \psi \, d\mathbf{x}.$$

Alors

$$\int_{\Omega} \lambda^2 \mathbf{u} \cdot \text{grad} \psi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p \, \Delta \psi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \text{grad} \psi \, d\mathbf{x}.$$

Donc

$$\int_{\Omega} p^2 \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\mathbf{f} - \lambda^2 \mathbf{u}) \cdot \text{grad} \psi \, d\mathbf{x}.$$

Et par application de la formule de Green généralisée (1.27) on obtient

$$\int_{\Omega} (\mathbf{f} - \lambda^2 \mathbf{u}) \cdot \text{grad} \psi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (-\text{div} \mathbf{f} + \lambda^2 \text{div} \mathbf{u}) \psi \, d\mathbf{x}.$$

D'après (5.35) on a :

$$\int_{\Omega} (-\text{div} \mathbf{f} + \lambda^2 \text{div} \mathbf{u}) \psi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (-\text{div} \mathbf{f} + \lambda^2 g) \psi \, d\mathbf{x}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} p^2 \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} (-\text{div} \mathbf{f} + \lambda^2 g) \psi \, d\mathbf{x} \\ &= - \int_{\Omega} (\text{div} \mathbf{f} - \lambda^2 g) \psi \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Comme on a :

$$\operatorname{div} \mathbf{f} - \lambda^2 g = 0,$$

donc  $(\mathbf{u}, p)$  solution du problème (5.34)-(5.35) vérifie  $p = 0$ . ■

**Étape 02 :**

Dans cette étape on ne va pas travailler directement avec la formulation variationnelle précédente (5.34)-(5.35) mais on travaille sur une **formulation augmentée**. Pour cela, nous utilisons le fait que

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = g$$

Et en ajoutant le terme

$$r \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}$$

avec le paramètre  $r > 0$  dans le premier membre de la formulation (5.34) et le terme

$$r \int_{\Omega} g \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}$$

dans le second membre. Donc la formulation augmentée s'écrit sous la forme :

Trouver  $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{X} \times L^2(\Omega)$  solution de

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} + r \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} + \lambda^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} r g \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{X} & \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} q \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g q \, d\mathbf{x}, \quad \forall q \in L^2(\Omega). \quad (5.37)$$

L'intérêt de cette formulation augmentée est double : d'une part pour pouvoir utiliser le résultat de M. Costabel et d'autre part pour assurer une meilleure stabilité au schéma numérique.

Pour montrer que ce problème est bien posé, on utilise le théorème ci-dessous :

**Théorème 5.5.2** *Le problème (5.36)-(5.37) est équivalent au problème initial et est bien posé.*

**Preuve.** Appliquons le théorème 5.2.4 avec

- $X = \mathcal{X}, Q = L^2(\Omega)$
- $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} + r \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} + \lambda^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x}$
- $b(\mathbf{v}, q) = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \, q \, d\mathbf{x}$
- $L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + r \, g \operatorname{div} \mathbf{v}) \, d\mathbf{x}$  et  $\Phi(q) = \int_{\Omega} g \, q \, d\mathbf{x}$ .

La condition inf-sup est vérifiée de la même manière que dans le théorème précédent donc. Nous allons montrer que  $a(\cdot, \cdot)$  est  $\mathcal{X}$ -elliptique (coercitive sur  $\mathcal{X}$ ).

Soit  $\mathbf{v} \in \mathcal{X}$  :

$$\begin{aligned}
 a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} (\mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} + r \operatorname{div} \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} + \lambda^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\Omega} |\mathbf{rot} \mathbf{v}|^2 \, d\mathbf{x} + r \int_{\Omega} |\operatorname{div} \mathbf{v}|^2 \, d\mathbf{x} + \lambda^2 \int_{\Omega} |\mathbf{v}|^2 \, d\mathbf{x} \\
 &= \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + r \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \lambda^2 \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 \\
 &\geq \min(1, r, \lambda^2) \left( \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 \right) \\
 &= \min(1, r, \lambda^2) \|\mathbf{v}\|_{0,\mathbf{rot},\operatorname{div}}^2
 \end{aligned}$$

Par conséquent on déduit que le problème (5.36)-(5.37) admet une solution unique  $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{X} \times L^2(\Omega)$ . ■

**Étape 03** Nous allons à présent donner une formulation variationnelle dans  $H^1(\Omega)^3$  qui permettra d'introduire les éléments finis de type Taylor-Hood. A cet effet, on fixe le paramètre  $r = 1$  dans la formulation variationnelle augmentée précédente et on utilise le résultat important de M. Costabel suivant :

**Proposition 5.5.3** Soit  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3$ , alors on a la relation

$$\int_{\Omega} (\mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} + \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \operatorname{grad} \mathbf{u} : \operatorname{grad} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \sum_{\alpha=1}^3 \int_{\Gamma} (\operatorname{grad} u_{\alpha} \wedge \mathbf{n}) (e_{\alpha} \wedge \mathbf{v}) \, d\Gamma$$

avec :

- $u_{\alpha}, e_{\alpha}, \alpha = 1, 2, 3$  sont les composantes de  $\mathbf{u}$  et la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  respectivement.
- $\operatorname{grad} \mathbf{u} : \operatorname{grad} \mathbf{v} := \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  le produit contracté de 2 tenseurs.

Puisque d'après le théorème 1.6.11, toute fonction de  $\mathcal{X} = H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\mathbf{div}, \Omega)$  est une fonction de  $H^1(\Omega)^3$  qui vérifie la condition de bord de conducteur parfait, donc en appliquant la proposition précédente (résultat de M. Costabel) dans la formulation (5.36) avec  $r = 1$  on arrive à la formulation suivante : Trouver  $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{X} \times L^2(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (\mathbf{grad} \mathbf{u} : \mathbf{grad} \mathbf{v} + \lambda^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p \, \mathbf{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + g \, \mathbf{div} \mathbf{v}) \, d\mathbf{x}, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{X} \quad (5.38)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{div} \mathbf{u} \, q \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g \, q \, d\mathbf{x}, \forall q \in L^2(\Omega). \quad (5.39)$$

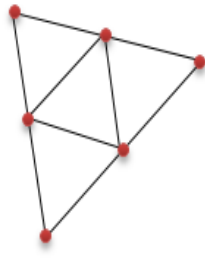
#### Etape 04 (Taylor-Hood)

Maintenant, nous sommes en mesure de présenter l'approximation par éléments finis de **Taylor-Hood** où les espaces d'approximation  $X_h \times Q_h \subset \mathcal{X} \times L^2(\Omega)$  sont définis par :

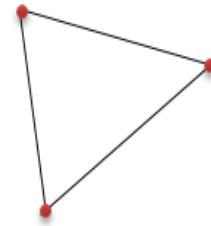
$$X_h : = \left\{ \phi \in C^0(\bar{\Omega})^3 : \phi|_{T_h} \in P_1^3(T_h), \forall T_h \in \tau_h \right\}, \quad (5.40)$$

$$Q_h : = \left\{ \phi \in C^0(\bar{\Omega}) : \phi|_{T_{2h}} \in P_1(T_{2h}), \forall T_{2h} \in \tau_{2h} \right\}, \quad (5.41)$$

où  $\tau_h$  est un maillage fin qu'on obtient à partir d'un maillage grossier  $\tau_{2h}$ . Le paramètre  $h > 0$  est le pas de discrétisation.  $T_h$  représente un tétraèdre en dimension 3 et un triangle en dimension 2. Dans la figure ci-après, on représente les degrés de liberté en dimension 2 :



Les degrés de liberté fin



Les degrés de liberté grossiers

Graphe des degrés de liberté d'élément de Taylor-Hood.

Le problème approché sera alors : Trouver  $(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_h \times Q_h$  solution de

$$\int_{\Omega} (\text{grad } \mathbf{u}_h : \text{grad } \mathbf{v}_h + \lambda^2 \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p_h \, \text{div } \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} g \, \text{div } \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \forall \mathbf{v}_h \in X_h \quad (5.42)$$

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{u}_h \, q_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g \, q_h \, d\mathbf{x}, \forall q_h \in Q_h. \quad (5.43)$$

Pour assurer l'existence et l'unicité de la solution dans les espaces de Taylor-Hood  $(X_h, Q_h)$  du problème précédent on doit vérifier la condition inf-sup **discrète** qui est donnée dans le théorème suivant :

**Théorème 5.5.4** *Pour  $\tau_h$  une tétraédrisation régulière de  $\bar{\Omega}$ , les espaces  $X_h$  et  $Q_h$  vérifient la condition inf-sup discrète c'est-à-dire : il existe  $\beta > 0$ , indépendant de  $h$  tel que*

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in X_h} \frac{\int_{\Omega} q_h \, \text{div } \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}}{\|\mathbf{v}_h\|_{\chi} \|q_h\|_{L^2(\Omega)}} \geq \beta. \quad (5.44)$$

**Preuve.** Cette preuve est détaillée dans [4]. Elle dépasse le cadre de ce travail. ■



# Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons essayé de présenter les équations de Maxwell qui modélisent les phénomènes électromagnétique. Nous avons exprimé ces équations sous une formulation variationnelle pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution dans les deux cas : statique et avec dépendance au temps. Ensuite on a présenté une discrétisation par éléments finis basée sur une formulation mixte.

Il sera fort utile dans le futur de détailler l'article de P. Ciarlet Jr., V. Girault [4] qui démontre la condition inf-sup pour l'élément de Taylor-Hood.

# Bibliographie

- [1] G.Allaire, Analyse Numérique et Optimisation, Éditions de l'École Polytechnique-Mai 2006, 91128 Palaiseau Cedex.
- [2] F.Assous, P.Ciarlet, Modèles et Méthodes pour les équations de Maxwell (Année 2003).
- [3] P.Ciarlet, Master Modélisation et Simulation (M2) Cours C7-1 3e année ENSTA Laboratoire POEMS ENSTA ParisTech 32, boulevard Victor 75739 Paris Cedex 15version 4.0 (2 septembre 2013).
- [4] P. Ciarlet Jr., V. Girault, Condition inf-sup pour l'élément fini de Taylor-Hood P2-iso-P1 ; application aux équations de Maxwell, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335, 827–832 (2002).
- [5] M. Costabel, A coercive bilinear form for Maxwell's equations, J. Math. Anal. and Appl.157, 527–541 (1991).
- [6] M. Costabel, M. Dauge, S. Nicaise, Singularities of Maxwell interface problems, Modél. Math. Anal. Numér., 33, 627–649 (1999).
- [7] R.Dautray, J.Louis Lions, Analyse mathématique et calcul numérique. Vol 1. Masson (1987).
- [8] R.Dautray, J.Louis Lions, Analyse mathématique et calcul numérique Vol 5. Masson (1988).
- [9] V. Girault, P.A. Raviart, Finite element methods for Navier-Stokes equations, Springer Series in Computational Mathematics, Springer Verlag, Berlin (1986).
- [10] E.Jamelot, Résolution des équations de Maxwell avec des éléments finis de Galerkin continus. Thèse de doctorat de l'École Polytechnique (2005). Français. <tel-00440043>.
- [11] J.L. Lions, E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol. 1, Dunod, Paris (1968).

## *BIBLIOGRAPHIE*

---

[12] <http://www.cpge-brizeux.fr/casiers/francoise/cours/elmg/CHELMG1.pdf>.

# *Annexe*

# Condition *inf-sup* pour l'élément fini de Taylor–Hood $P_2$ -iso- $P_1$ , 3-D ; application aux équations de Maxwell

Patrick Ciarlet Jr.<sup>a</sup>, Vivette Girault<sup>b</sup>

<sup>a</sup> ENSTA/UMA, 32 boulevard Victor, 75739 Paris cedex 15, France

<sup>b</sup> Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université P. & M. Curie, 75252 Paris cedex 05, France

Reçu le 1<sup>er</sup> juillet 2002 ; accepté le 13 septembre 2002

Note présentée par Roland Glowinski.

## Résumé

On considère la discrétisation des équations de Maxwell, telle qu'elle a été proposée dans [3,2,1]. Les approximations numériques du champ électromagnétique et du multiplicateur de Lagrange associé à la divergence du champ sont réalisées à l'aide de l'élément fini de Taylor–Hood  $P_2$ -iso- $P_1$ , et complétées de fonctions-test singulières, lorsque le domaine de calcul est non convexe, à bord non régulier. Le but de la Note est de prouver l'existence d'une condition *inf-sup* discrète. On peut également appliquer ce résultat à la discrétisation du système de Stokes en vitesse-pressure [7]. *Pour citer cet article : P. Ciarlet Jr., V. Girault, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 827–832.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## *Inf-sup* condition for the 3-D $P_2$ -iso- $P_1$ Taylor–Hood finite element; application to Maxwell equations

## Abstract

We consider the discretization of Maxwell equations, proposed in [3,2,1]. The electromagnetic field and the Lagrange multiplier related to its divergence are approximated numerically by the  $P_2$ -iso- $P_1$  Taylor–Hood Finite Element. Singular test-functions are added when the domain is non-convex, with a non-smooth boundary. The aim of this Note is to establish a discrete *inf-sup* condition. The result can be applied to the discretization of the velocity-pressure Stokes system [7]. *To cite this article: P. Ciarlet Jr., V. Girault, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 827–832.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## Abridged English version

Bracketed numbers refer to the French version. The curl operator is called **rot** in the French version.

We propose to solve numerically Maxwell equations with the help of the  $P_2$ -iso- $P_1$  Taylor–Hood finite element (FE later on), as is advocated in [3,2,1]. The computational domain  $\Omega$  is bounded by a Lipschitz polyhedral boundary  $\partial\Omega$ . Let  $(\cdot, \cdot)_0$  denote the  $L^2(\Omega)$  scalar product, and let  $(\cdot, \cdot)_{0,K}$  denote the  $L^2(K)$  scalar product, for  $K \subset \Omega$  or  $K \subset \partial\Omega$ . The associated norm is  $\|\cdot\|_0$  or  $\|\cdot\|_{0,K}$ . The semi-norm of  $H^m(\Omega)$  or  $H^m(K)$ ,  $m \geq 1$ , is denoted by  $|\cdot|_m$ , or  $|\cdot|_{m,K}$ .  $L_0^2(\Omega)$  is the subspace of  $L^2(\Omega)$ , which is orthogonal

Adresses e-mail : ciarlet@ensta.fr (P. Ciarlet Jr.); girault@ann.jussieu.fr (V. Girault).

to  $\mathbb{R}$ . The unit outward normal to  $\partial\Omega$  is called  $\vec{n}$ . In the following, let us choose a face  $F$  of  $\partial\Omega$ , and define  $\vec{n}_F = \vec{n}|_F$ . We set  $X = H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\mathbf{div}, \Omega)$  and  $Q = L^2(\Omega)$ .

We are interested in solving the quasiaelectro- or quasimagneto-static Maxwell equations, given by (1). It is easily proven that the quasiaelectro-static equations are equivalent to the saddle-point formulation (2), and that  $p = 0$ . From Weber’s compact imbedding result [11] (of  $X$  into  $L^2(\Omega)^3$ ), one infers easily that the bilinear form  $(\cdot, \cdot)_X : (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto (\mathbf{curl} \vec{u}, \mathbf{curl} \vec{v})_0 + (\mathbf{div} \vec{u}, \mathbf{div} \vec{v})_0$  is *coercive* on  $X \times X$  ( $\|\cdot\|_X$  is the associated norm). If  $\Omega$  is convex, one has  $X \subset H^1(\Omega)^3$ . Otherwise,  $X_R = X \cap H^1(\Omega)^3$  is closed in  $X$ . Then either  $\vec{E} \in H^1(\Omega)^3$  in the convex case, or  $\vec{E} = \vec{E}_R + \vec{E}_S$ , with  $(\vec{E}_R, \vec{E}_S) \in X_R \times X_R^\perp$ . In addition, for elements of  $X_R$ , Costabel identity  $(\vec{u}, \vec{v})_X = (\mathbf{grad} \vec{u}, \mathbf{grad} \vec{v})_0$  is satisfied.

In order to fit into the usual saddle-point theoretical framework, there remains to check the *inf-sup* condition. One way is to prove successively

LEMMA 0.1. –  $\exists \varrho \in C^2(\overline{\Omega})$  s.t. the support of  $\varrho|_{\partial\Omega}$  is compact in  $F$  and (3) holds.

Then  $\vec{\varrho} = \varrho \vec{n}_F$  belongs to  $X \cap C^2(\overline{\Omega})^3$  and  $(\mathbf{div} \vec{\varrho}, 1)_0 = 1$ . Let  $K_1 = \|\vec{\varrho}\|_X = |\varrho|_1$ .

PROPOSITION 0.1. –  $\exists \beta > 0$  s.t. the *inf-sup* condition (4) holds.

*Proof.* – Split  $q \in Q$  into  $q = q^0 + \bar{q}$ , with  $(q^0, \bar{q}) \in L^2_0(\Omega) \times \mathbb{R}$ , cf. (5). Then,  $\exists \vec{v}^0 \in H^1_0(\Omega)^3$  s.t.  $\mathbf{div} \vec{v}^0 = q^0$ , and  $|\vec{v}^0|_1 \leq C_1 \|q^0\|_0$  (cf. [7, p. 24]). Let  $\vec{v} = \alpha \vec{v}^0 + \bar{q} \vec{\varrho}$ ,  $\alpha$  to be fixed. One easily finds (6). Thus, one can choose  $\varepsilon = \alpha$  and then  $\alpha = K_1^{-2}$ ; this yields (4), as one has clearly  $\|\vec{v}\|_X \leq C'_1 \|q\|_0$ .  $\square$

Note that the same can be obtained, without introducing  $\vec{\varrho}$  or Lemma 0.1, for the magnetic case and the velocity-pressure Stokes formulation, respectively in  $(X_H, Q_H)$  and  $(X_S, Q_S)$ , see (7).

In the discrete case, one can choose for instance the  $P_2$ -iso- $P_1$  Taylor–Hood FE to discretize  $(\vec{E}, p)$  in the convex case. In the non-convex case,  $\vec{E}_S$  is discretized by suitable means [2,1], and  $(\vec{E}_R, p)$  is discretized by the Taylor–Hood FE (the divergence constraint is enforced on the total field  $\vec{E}_R + \vec{E}_S$ ). Still, one can prove a uniform discrete *inf-sup* condition (*udisc* later on), in which the explicit knowledge of the discretization of  $\vec{E}_S$  is not needed.

Let  $(\mathcal{T}_h)_h$  be a *regular* family [5] of triangulations of  $\Omega$ , made of tetrahedra  $T$ . Let  $(\mathcal{T}_{h/2})_h$  be a second family of triangulations, obtained by splitting each  $T$  of  $\mathcal{T}_h$  into eight subtetrahedra  $T_i$ , with  $|T_i| = \frac{1}{8}|T|$ .

The Lagrange multiplier  $p$  is discretized in  $Q_h = \{q_h \in C^0(\overline{\Omega}) : q_h|_T \in P_1, \forall T \in \mathcal{T}_h\}$ , whereas  $\vec{E}$  (or  $\vec{E}_R$ ) is discretized with the help of  $Y_h = \{q_h \in C^0(\overline{\Omega}) : q_h|_{T_i} \in P_1, \forall T_i \in \mathcal{T}_{h/2}\}$ , in  $X_h = Y_h^3 \cap X$ . In addition, let  $Q_{0,h} = Q_h \cap L^2_0(\Omega)$  and  $X_{0,h} = X_h \cap H^1_0(\Omega)^3$ .

The main result consists in proving the *udisc* (8). For that, one follows the proof of Proposition 0.1. First, one has to approximate  $\varrho$ . Taking its Lagrange interpolation in  $Y_h$  is not enough, because (3) is not satisfied. So, one has to build a suitable correction, defined on the midpoints of the edges of the interior of  $F$ . This leads to (9).

Then, one proceeds to prove the *udisc* on  $(X_{0,h}, Q_{0,h})$ . Two cases are addressed below.

If the mesh is general, let us follow [4]. First, a local discrete *inf-sup* condition is established on each  $T$ .

LEMMA 0.2. –  $\forall q_h \in P_1(T), \exists \vec{v}_h$ , a restriction of an element of  $X_h$  to  $T$ , such that (10) holds.

Then, the technique developed in [10] allows one to prove

THEOREM 0.3. – Assume  $(\mathcal{T}_h)_h$  is a regular family of triangulations, such that no tetrahedra has more than one face on  $\partial\Omega$ . Then, there exists  $\beta^0 > 0$ , independent of  $h$  s.t. *udisc* (11) is satisfied in  $(X_{0,h}, Q_{0,h})$ .

If the mesh is suitably structured, in that it is made of hexahedra, each one of them split into twelve tetrahedra, it is possible to use the localized process of [8]. The idea is to replace the proof of the *udisc* by the construction of an operator  $\mathcal{P}_h \in \mathcal{L}(H^1_0(\Omega)^3; X_{0,h})$ , which satisfies (12), the so-called Fortin Lemma [7, p. 117]. One obtains a local *inf-sup* condition in each hexahedron, where the inequalities of (10)

are replaced by (13). In this way, one proves the *udisc* in  $(X_h^*, Q_h^*)$ , with  $Q_h^* = \{q_h^* : q_h \in Q_h\}$  and  $X_h^* = \{\vec{v}_h \in X_h : (\operatorname{div} \vec{v}_h, 1)_{0,T} = 0, \forall T \in \mathcal{T}_h\}$ .

Then, one can conclude, after building a suitable (cf. (15)) regularizing operator  $\mathcal{R}_h \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^3; X_{0,h})$  à la Scott and Zhang [9], and a correction  $C_h \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^3; X_h^*)$  solution to (16)–(17): their sum  $\mathcal{P}_h = \mathcal{R}_h + C_h$  is the operator needed to apply the Fortin Lemma.

This approach, or the one à la Verfürth [10], allows one to prove the *udisc* for the magnetic field, and for the velocity-pressure Stokes system. For the electric field, one finally concludes as in the continuous case.

**THEOREM 0.4.** – *Under the assumptions of Theorem 0.3, the pair  $(X_h, M_h)$  satisfies the *udisc* (8).*

### 1. Le cas exact

On se place dans un domaine  $\Omega$  à bord  $\partial\Omega$  polyédrique et lipschitzien. On peut traiter de façon similaire le cas d’un domaine bidimensionnel à bord polygonal.

On note  $(\cdot, \cdot)_0$  le produit scalaire usuel de  $L^2(\Omega)$ , et  $(\cdot, \cdot)_{0,K}$  le produit scalaire usuel de  $L^2(K)$ , pour  $K \subset \Omega$  ou  $K \subset \partial\Omega$ . La norme associée est notée  $\|\cdot\|_0$  ou  $\|\cdot\|_{0,K}$ . De même, la semi-norme de  $H^m(\Omega)$  ou  $H^m(K)$ ,  $m \geq 1$ , est notée  $|\cdot|_m$  ou  $|\cdot|_{m,K}$ . On note  $L_0^2(\Omega)$  le sous-espace des fonctions  $v$  de  $L^2(\Omega)$  vérifiant  $(v, 1)_0 = 0$ . On appelle  $\vec{n}$  la normale unitaire extérieure à  $\partial\Omega$ . Dans la suite, on choisit une face  $F$  de  $\partial\Omega$ , et on définit  $\vec{n}_F = \vec{n}|_F$ .

Soient  $(\vec{f}_E, g) \in L^2(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)$  et  $\vec{f}_H \in L^2(\Omega)^3$ , avec  $\operatorname{div} \vec{f}_E = 0$ ,  $\vec{f}_E \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} = 0$  et  $\operatorname{div} \vec{f}_H = 0$ . On veut résoudre numériquement les problèmes modèles quasiélectro- et quasimagnéto-statiques ci-dessous.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{E} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\operatorname{div}, \Omega) \text{ t.q.} \\ \mathbf{rot} \vec{E} = \vec{f}_E \text{ et } \operatorname{div} \vec{E} = g \text{ dans } \Omega; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{H} \in H(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H_0(\operatorname{div}, \Omega) \text{ t.q.} \\ \mathbf{rot} \vec{H} = \vec{f}_H \text{ et } \operatorname{div} \vec{H} = 0 \text{ dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (1)$$

On peut aisément vérifier que le problème quasiélectrostatique admet une unique solution dans  $X = H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\operatorname{div}, \Omega)$ , et qu’il est équivalent à la formulation de point-selle (où  $Q = L^2(\Omega)$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\vec{E}, p) \in X \times Q \text{ tel que} \\ (\mathbf{rot} \vec{E}, \mathbf{rot} \vec{v})_0 + (\operatorname{div} \vec{E}, \operatorname{div} \vec{v})_0 + (p, \operatorname{div} \vec{v})_0 = (\vec{f}_E, \mathbf{rot} \vec{v})_0 + (g, \operatorname{div} \vec{v})_0, \quad \forall \vec{v} \in X \\ (q, \operatorname{div} \vec{E})_0 = (q, g)_0, \quad \forall q \in Q, \end{array} \right. \quad (2)$$

sous réserve que  $p = 0$  (ce qui est toujours vrai, dès lors que  $\operatorname{div} \vec{f}_E = 0$  et  $\vec{f}_E \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} = 0$ ).

D’après le résultat d’injection compacte de  $X$  dans  $L^2(\Omega)^3$  dû à Weber [11], la forme bilinéaire  $(\cdot, \cdot)_X : (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto (\mathbf{rot} \vec{u}, \mathbf{rot} \vec{v})_0 + (\operatorname{div} \vec{u}, \operatorname{div} \vec{v})_0$  est *coercitive* sur  $X \times X$ . On note  $\|\cdot\|_X$  la norme associée.

Un des aspects attractifs de la méthode est que l’on a l’identité suivante :  $(\vec{u}, \vec{v})_X = (\mathbf{grad} \vec{u}, \mathbf{grad} \vec{v})_0$ , pour  $\vec{u}, \vec{v} \in X \cap H^1(\Omega)^3$ , due à Costabel [6]. En conséquence,  $\|\vec{u}\|_X = |\vec{u}|_1$ , pour  $\vec{u} \in X \cap H^1(\Omega)^3$ .

La *condition inf-sup* entre  $X$  et  $Q$  est aisée à vérifier : il suffit de résoudre une équation de Laplace avec condition de Dirichlet homogène sur le bord et prendre le gradient de la solution. Mais cette démonstration ne se prête pas à la discrétisation conforme dans  $H^1(\Omega)^3$  que nous allons utiliser. Pour cette raison, nous proposons la démarche suivante. On commence donc par le

**LEMME 1.1.** – *Il existe une fonction  $q \in C^2(\overline{\Omega})$  telle que  $q|_{\partial\Omega}$  est à support compact dans  $F$  et*

$$(q, 1)_{0,F} = 1. \quad (3)$$

Alors la fonction  $\vec{q} = q \vec{n}_F$  appartient à  $X \cap C^2(\overline{\Omega})^3$  et  $(\operatorname{div} \vec{q}, 1)_0 = 1$ . On note  $K_1 = \|\vec{q}\|_X = |q|_1$ .

Ce Lemme préliminaire permet de démontrer la condition *inf-sup* suivante.

**PROPOSITION 1.2.** – *Il existe une constante  $\beta > 0$  telle que*

$$\inf_{q \in Q} \sup_{\vec{v} \in X} \frac{(q, \operatorname{div} \vec{v})_0}{\|\vec{v}\|_X \|q\|_0} \geq \beta. \quad (4)$$

*Démonstration.* – On décompose  $q \in Q$  en  $q = q^0 + \bar{q}$ , où

$$\bar{q} = \frac{1}{|\Omega|}(q, 1)_0 \in \mathbb{R}, \quad q^0 \in L_0^2(\Omega). \tag{5}$$

Alors, il existe (cf. [7, p. 24])  $\bar{v}^0 \in H_0^1(\Omega)^3$  tel que  $\operatorname{div} \bar{v}^0 = q^0$ , et  $\|\bar{v}^0\|_1 \leq C_1 \|q^0\|_0$ . On pose  $\bar{v} = \alpha \bar{v}^0 + \bar{q} \bar{e}$ ,  $\alpha$  à déterminer. Alors

$$\begin{aligned} (q, \operatorname{div} \bar{v})_0 &\geq \alpha \|q^0\|_0^2 + \frac{1}{|\Omega|} \|\bar{q}\|_0^2 - \frac{K_1}{|\Omega|^{1/2}} \|\bar{q}\|_0 \|q^0\|_0, \quad \text{puisque } \|\operatorname{div} \bar{e}\|_0 \leq K_1 \\ &\geq \alpha \|q^0\|_0^2 + \frac{1}{|\Omega|} \|\bar{q}\|_0^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \frac{K_1^2}{|\Omega|} \|\bar{q}\|_0^2 - \frac{\varepsilon}{2} \|q^0\|_0^2, \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned} \tag{6}$$

On arrive à (4), en choisissant  $\varepsilon = \alpha$ , puis  $\alpha = K_1^2$ , sachant qu'on a par ailleurs  $\|\bar{v}\|_X \leq C'_1 \|q\|_0$ .  $\square$

On a exactement les mêmes résultats pour le champ magnétique (indice  $H$ ) ou pour le système de Stokes en vitesse-pression (indice  $S$ ), à ceci près que le couple  $(X, Q)$  est respectivement égal à

$$X_H = H(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H_0(\operatorname{div}, \Omega), \quad Q_H = L_0^2(\Omega); \quad X_S = H_0^1(\Omega)^3, \quad Q_S = L_0^2(\Omega). \tag{7}$$

Dans ces deux derniers cas, il n'est pas nécessaire d'introduire la fonction  $\bar{e}$ .

## 2. Le cas discret

Si le domaine  $\Omega$  est convexe, on a l'injection continue  $X \subset H^1(\Omega)^3$ . Sinon,  $X_R = X \cap H^1(\Omega)^3$  est un fermé de  $X$ , et on peut écrire la décomposition continue (voire orthogonale)  $X = X_R \oplus X_S$ . On discrétise donc le champ  $\bar{E}$  (cas  $\Omega$  convexe), ou la partie régulière  $\bar{E}_R$  du champ (cas  $\Omega$  non convexe) par l'élément fini de Lagrange  $P_1$ , composante par composante. Pour la discrétisation de la partie singulière, on renvoie le lecteur à [2,1]. Le multiplicateur (sur le champ total) est discrétisé sur un maillage plus grossier, toujours par l'élément fini  $P_1$ . Ceci étant, comme dans le cas exact, la condition *inf-sup* discrète sera obtenue uniquement à l'aide de champs approchés réguliers, c'est-à-dire grâce à la discrétisation par l'élément fini de Taylor–Hood. Il n'est donc pas nécessaire de connaître une discrétisation de la partie singulière pour démontrer cette condition *inf-sup* discrète.

Comme on utilise l'élément fini de Taylor–Hood  $P_2$ -iso- $P_1$ , on introduit  $(\mathcal{T}_h)_h$  une première famille de triangulations régulière (cf. [5]), de pas  $h$ ; on note  $h_T$  le diamètre de  $T$  et  $\rho_T$  celui de sa sphère inscrite. Pour des raisons techniques, on suppose aussi qu'aucun tétraèdre n'a plus d'une face sur  $\partial\Omega$ . On appelle  $T$  un tétraèdre générique de  $\mathcal{T}_h$ . On définit alors le raffinement standard suivant : chaque tétraèdre  $T$  est divisé en huit sous-tétraèdres  $(T_i)_{i=1,\dots,8}$  dont le volume est  $1/8^{\text{ème}}$  du volume de  $T$ , les nouveaux sommets se trouvant au milieu des six arêtes de  $T$ . Aux tétraèdres  $T_i$  correspond naturellement une seconde famille de triangulations  $(\mathcal{T}_{h/2})_h$ , de pas  $h/2$ , régulière par construction.

Le multiplicateur de Lagrange  $p$  est donc discrétisé sur  $\mathcal{T}_h$ , à partir de l'élément fini  $P_1$ . Soient :

$$Q_h = \{q_h \in C^0(\bar{\Omega}) : q_h|_T \in P_1, \forall T \in \mathcal{T}_h\}, \quad \text{et son sous-espace } Q_{0,h} = Q_h \cap L_0^2(\Omega).$$

Quant à  $\bar{E}$  (ou  $\bar{E}_R$ ), il l'est par l'élément  $(P_1)^3$ , sur  $\mathcal{T}_{h/2}$ . On définit donc

$$Y_h = \{q_h \in C^0(\bar{\Omega}) : q_h|_{T_i} \in P_1, \forall T_i \in \mathcal{T}_{h/2}\}, \quad \text{ainsi que } X_h = Y_h^3 \cap X, \text{ et } X_{0,h} = X_h \cap H_0^1(\Omega)^3.$$

Il s'agit de démontrer que la paire d'espaces  $(X_h, Q_h)$  vérifie l'analogue de (4) avec une constante  $\beta^* > 0$  indépendante de  $h$  :

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\bar{v}_h \in X_h} \frac{(q_h, \operatorname{div} \bar{v}_h)_0}{\|\bar{v}_h\|_X \|q_h\|_0} \geq \beta^*. \tag{8}$$

Cette démonstration est calquée sur celle de la Proposition 1.2 : on décompose  $q_h \in Q_h$  en  $q_h = q_h^0 + \bar{q}_h$ , où  $\bar{q}_h$  est défini comme en (5), on démontre que la paire  $(X_{0,h}, Q_{0,h})$  vérifie une condition *inf-sup*, puis on



approche  $\varrho$  avec une fonction  $\varrho_h$  qui satisfait (3), on pose  $\bar{\varrho}_h = \varrho_h \bar{n}_F$ , et enfin on cherche  $\bar{v}_h \in X_h$  sous la forme  $\alpha \bar{v}_h^0 + \bar{q}_h \bar{\varrho}_h$  où  $\bar{v}_h^0 \in X_{0,h}$  et  $\alpha > 0$  est un réel à choisir.

Commençons par approcher la fonction  $\varrho$ . On définit d’abord  $\Pi_h(\varrho)$ , où  $\Pi_h$  est l’opérateur habituel d’interpolation de Lagrange dans  $Y_h$ , ce qui est loisible puisque  $\varrho$  est régulière. Mais comme  $\Pi_h$  ne conserve pas (3), il faut le corriger. On construit par exemple une correction sur les  $N$  milieux des arêtes intérieures de  $F$ , avec les fonctions de base de  $Y_h$   $(\varphi_i)_{i=1,\dots,N}$  associées. On définit  $\varrho_h \in Y_h$  par :  $\varrho_h = \Pi_h(\varrho) + \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i$ , pour que, par construction  $(\varrho_h - \varrho, 1)_{0,F} = 0$ .

Ceci entraîne que  $\varrho_h$  vérifie (3). Par ailleurs, grâce à la régularité de  $\varrho$ , il existe une constante  $C_2$  indépendante de  $h$  et  $\varrho$ , et donc  $K_2$  indépendante de  $h$ , telles que

$$|\varrho_h|_1 \leq C_2 (|\varrho|_2 + h |\varrho|_{2,F}) \leq K_2. \tag{9}$$

On pose  $\bar{\varrho}_h = \varrho_h \bar{n}_F \in X_h$  qui vérifie, par construction,  $\|\bar{\varrho}_h\|_X = |\varrho_h|_1 \leq K_2$ .

Ensuite, pour établir la condition *inf-sup* pour  $(X_{0,h}, Q_{0,h})$ , on aimerait procéder comme dans [8]. Mais ceci ne semble pas possible lorsque la triangulation  $(\mathcal{T}_h)_h$  est quelconque parce que l’équation

$$\text{Trouver } \bar{v}_h \text{ t.q. } (\text{div } \bar{v}_h, 1)_{0,T} = (\text{div } \bar{v}, 1)_{0,T}, \quad \forall T \in (\mathcal{T}_h)_h,$$

n’a en général pas de solution dans  $X_{0,h}$ .

Il y a alors deux possibilités. Si le maillage est quelconque, on démontre d’abord une condition *inf-sup* locale sur un tétraèdre en s’inspirant de la construction de [4]. Soient  $(b_i)_{i=1,\dots,6}$  (resp.  $(\bar{\tau}_i)_{i=1,\dots,6}$ ) les milieux de (resp. les vecteurs tangents à) chaque arête de  $T$ , arête de longueur  $(\ell_i)_{i=1,\dots,6}$ .

LEMME 2.1. – *Pour chaque  $q_h \in P_1(T)$ , il existe  $\bar{v}_h$  qui est la restriction à  $T$  d’une fonction de  $X_h$  telle que :*

$$\begin{aligned} \bar{v}_h \cdot \bar{n}|_{\partial T} = 0, \quad \bar{v}_h(b_i) \cdot \bar{\tau}_i &= \begin{cases} -\ell_i^2 \text{grad } q_h(b_i) \cdot \bar{\tau}_i, & \text{si } b_i \notin \partial\Omega \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, 6) \\ (q_h, \text{div } \bar{v}_h)_{0,T} &\geq C_3 \rho_T^2 |q_h|_{1,T}^2, \quad |\bar{v}_h|_{1,T} \leq C_4 h_T |q_h|_{1,T}. \end{aligned} \tag{10}$$

Grâce à la technique de [10], ceci entraîne la condition *inf-sup* globale.

THÉORÈME 2.2. – *On suppose que  $(\mathcal{T}_h)_h$  est une famille régulière de triangulations, et qu’aucun de ses tétraèdres n’a plus d’une face sur  $\partial\Omega$ . Alors il existe une constante  $\beta^0$ , indépendante de  $h$  telle que*

$$\inf_{q_h^0 \in Q_{0,h}} \sup_{\bar{v}_h^0 \in X_{0,h}} \frac{(q_h^0, \text{div } \bar{v}_h^0)_0}{\|\bar{v}_h^0\|_X \|q_h^0\|_0} \geq \beta^0. \tag{11}$$

Par contre, si le maillage est convenablement structuré et composé par exemple d’hexaèdres qui sont ensuite décomposés en douze tétraèdres, on peut utiliser la construction de [8], qui a le grand avantage sur celle de [10] de n’utiliser que des arguments locaux et par conséquent permet de démontrer des résultats plus forts que la seule condition *inf-sup*. L’idée est d’appliquer le Lemme de Fortin [7, p. 117] : il suffit de construire un opérateur d’approximation  $\mathcal{P}_h \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^3; X_{0,h})$  tel que pour toute fonction  $\bar{v} \in H_0^1(\Omega)^3$ ,

$$\forall q_h \in Q_{0,h}, (q_h, \text{div}(\mathcal{P}_h(\bar{v}) - \bar{v}))_0 = 0, \quad \forall q_h \in Q_{0,h}, \|\mathcal{P}_h(\bar{v})\|_X \leq C_5 \|\bar{v}\|_X, \tag{12}$$

avec une constante  $C_5$  indépendante de  $h$ . On démontre d’abord une condition *inf-sup locale* sur chaque hexaèdre  $\mathcal{H}$  de  $(\mathcal{T}_h)_h$ . Pour cela, on associe à  $q_h \in Q_{0,h}$  la fonction  $q_h^*|_{\mathcal{H}} = q_h|_{\mathcal{H}} - \frac{1}{|\mathcal{H}|} (q_h, 1)_{0,\mathcal{H}}$  et on introduit les espaces :  $Q_h^* = \{q_h^* : q_h \in Q_{0,h}\}$ ,  $X_h^* = \{\bar{v}_h^* \in X_h : (\text{div } \bar{v}_h^*, 1)_{0,T} = 0, \forall T \in \mathcal{T}_h\}$ . On construit  $\bar{v}_h^* \in X_h^*$  comme dans le Lemme 2.1. Mais en s’inspirant de [7], du fait que  $q_h^* \in L_0^2(\mathcal{H})$ , on remplace cette fois les inégalités de (10) par

$$(q_h^*, \text{div } \bar{v}_h^*)_{0,\mathcal{H}} \geq C_3^* \|q_h\|_{0,\mathcal{H}}^2, \quad \|\bar{v}_h^*\|_{1,\mathcal{H}} \leq C_4^* \|q_h\|_{0,\mathcal{H}}. \tag{13}$$

En sommant (13) sur tous les hexaèdres  $\mathcal{H}$ , on trouve :

$$\forall q_h^* \in Q_h^*, \exists \vec{v}_h^* \in X_h^* \text{ tel que } (q_h^*, \operatorname{div} \vec{v}_h^*)_0 \geq C_3^* \|q_h^*\|_0^2, \|\vec{v}_h^*\|_X = |\vec{v}_h^*|_1 \leq C_4^* \|q_h^*\|_0. \quad (14)$$

Au passage, on vient de démontrer la condition *inf-sup* sur  $(X_h^*, Q_h^*)$ .

En se servant du nœud au milieu de l'arête dans chaque face de  $\mathcal{H}$ , comme pour la correction de  $\varrho$  ci-dessus, on construit ensuite un opérateur de régularisation  $\mathcal{R}_h \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^3; X_{0,h})$  de type Scott et Zhang [9] qui a les mêmes propriétés d'approximation qu'un opérateur usuel d'interpolation et qui vérifie en plus

$$(\mathcal{R}_h(\vec{v}) - \vec{v}, 1)_{0,F} = 0, \text{ sur toutes les faces } F \text{ des hexaèdres de } \mathcal{T}_h. \quad (15)$$

Puis, on définit  $\mathcal{P}_h$  en corrigeant  $\mathcal{R}_h$  :  $\mathcal{P}_h(\vec{v}) = \mathcal{R}_h(\vec{v}) + C_h(\vec{v})$ , où  $C_h(\vec{v}) \in X_h^*$  est solution de :

$$\forall q_h^* \in Q_h^*, (q_h^*, \operatorname{div} C_h(\vec{v}))_0 = (q_h^*, \operatorname{div}(\vec{v} - \mathcal{R}_h(\vec{v})))_0. \quad (16)$$

Grâce à (14) (cf. [7, p. 118]), le système linéaire (16) admet une solution  $C_h(\vec{v}) \in X_h^*$  qui satisfait à :

$$\|C_h(\vec{v})\|_X \leq \frac{C_4^*}{C_3^*} \|\operatorname{div}(\vec{v} - \mathcal{R}_h(\vec{v}))\|_0. \quad (17)$$

Avec les propriétés d'approximation de  $\mathcal{R}_h$ , (17) entraîne que  $\mathcal{P}_h$  vérifie (12b) ; enfin, les conditions sur les fonctions de  $Q_h^*$  et  $X_h^*$  entraînent que (16) a lieu pour tous les  $q_h$  de  $Q_{0,h}$  ; donc  $\mathcal{P}_h$  satisfait (12a). On a de nouveau prouvé le Théorème 2.2. Il permet de conclure à l'existence de la condition *inf-sup* discrète pour le champ magnétique, et bien sûr pour le système de Stokes en vitesse-pressure. Et, en conclusion

**THÉORÈME 2.3.** – *Sous les hypothèses du Théorème 2.2 la paire d'espaces  $(X_h, Q_h)$  vérifie (8).*

*Démonstration.* – On reprend la preuve de la Proposition 1.2 : pour  $q_h$  appartenant à  $Q_h$ , on écrit  $q_h = q_h^0 + \bar{q}_h$ , comme en (5). Puis on choisit  $\vec{v}_h^0 \in X_{0,h}$  qui satisfasse à la condition *inf-sup* du Théorème 2.2 ; ou, ce qui est équivalent [7, p. 118],  $\vec{v}_h^0 \in X_{0,h}$  tel que  $(q_h^0, \operatorname{div} \vec{v}_h^0)_0 = \|q_h^0\|_0^2, \|\vec{v}_h^0\|_X \leq \frac{1}{\beta^0} \|q_h^0\|_0$ . Enfin, on pose  $\vec{v}_h = \alpha \vec{v}_h^0 + \bar{q}_h \vec{\varrho}_h$ , et on conclut ensuite avec  $\alpha = K_2^2$ .  $\square$

### Références bibliographiques

- [1] F. Assous, P. Ciarlet Jr., E. Garcia, Résolution des équations de Maxwell instationnaires avec charge dans un domaine singulier bidimensionnel, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 330 (2000) 391–396.
- [2] F. Assous, P. Ciarlet Jr., E. Sonnendrücker, Resolution of the Maxwell equations in a domain with reentrant corners, Math. Mod. Num. Anal. 32 (1998) 359–389.
- [3] F. Assous, P. Degond, E. Heintzé, P.-A. Raviart, J. Segré, On a finite-element method for solving the three-dimensional Maxwell equations, J. Comput. Phys. 109 (1993) 222–237.
- [4] F. Brezzi, M. Fortin, Mixed and Hybrid Finite Element Methods, Springer, New York, 1991.
- [5] P.G. Ciarlet, Basic error estimates for elliptic problems, in: P.G. Ciarlet, J.-L. Lions (Eds.), Handbook of Numerical Analysis, Vol. II, North-Holland, 1991, pp. 17–351.
- [6] M. Costabel, A coercive bilinear form for Maxwell's equations, J. Math. Anal. Appl. 157 (1991) 527–541.
- [7] V. Girault, P.-A. Raviart, Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations, in: Springer Series in Computational Mathematics, Springer, Berlin, 1986.
- [8] V. Girault, L.R. Scott, A quasi-local interpolation operator preserving the discrete divergence, soumis à Calcolo.
- [9] L.R. Scott, S. Zhang, Finite element interpolation of non-smooth functions satisfying boundary conditions, Math. Comput. 54 (1990) 483–493.
- [10] R. Verfürth, Error estimate for a mixed finite element approximation of the Stokes problem, RAIRO Anal. Numér. 18 (1984) 175–182.
- [11] C. Weber, A local compactness theorem for Maxwell's equations, Math. Meth. Appl. Sci. 2 (1980) 12–25.