



Faculté des Sciences Exacte et Informatique
Département de Mathématique

N° d'ordre :

N° de séries :

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Option : EDP et Applications

Thème

**Résolution d'E.D.P. sur un domaine
axisymétrique**

Présenté par :

- Rafiaa Bouhlassa
- Besma Boufoula

Devant le jury :

Président	: N.Arada	M.C.A	Université de Jijel
Encadreur	: Y.Daikh	M.C.A	Université de Jijel
Examineur	: H.Benhassine	M.C.B	Université de Jijel

Remerciements

Nous remercions tout d'abord **ALLAH**, le tout puissant et maître de l'univers qui nous a donné la capacité nécessaire, la forte volonté et la patience afin d'accomplir ce travail, et qui nous a toujours guidé vers le bon chemin.

Nous tenons à exprimer notre gratitude à Madame **Y. Daikh** qui a encadré ce mémoire et nous à guidé tout au long de ce travail avec patience et beaucoup d'intérêt. Merci de nous avoir montré le bon exemple.

Nous adressons aussi nos remerciements au président du jury, **Monsieur N. Arada** et à **Monsieur H. Benhassine** pour nous avoir honoré par leur évaluation du travail en tant qu'examineurs.

Nous souhaitons enfin remercier nos familles pour leur soutien et leur aide tout au long de cette période.

Table des matières

Introduction	3
1 Préliminaires	5
1.1 Espaces de Sobolev	5
1.2 Rappel sur le lemme de Lax-Milgram	8
1.3 Problèmes invariants par rotation	8
1.4 Espaces de polynômes	9
2 Résolution du Laplacien sur un Cylindre	11
2.1 Géométrie	11
2.2 Espaces fonctionnels et notations	13
2.3 Coefficients de Fourier	14
2.4 Le problème et la formulation variationnelle	16
2.4.1 Position du problème	16
2.4.2 Formulation variationnelle	17
3 Discrétisation par la méthode Spectrale-Fourier	21
3.1 Outils de la discrétisation	21
3.1.1 Polynômes orthogonaux dans $L^2(\Lambda)$	21
3.1.2 Formule de quadrature	22
3.1.3 Erreur d'approximation et d'interpolation polynomiale	23

3.1.4	Polynômes orthogonaux dans $L_1^2(\Lambda)$	25
3.1.5	Formules de Quadrature à poids	27
3.1.6	Erreur d'approximation et d'interpolation polynomiale en une dimension	31
3.1.7	Erreur d'approximation et d'interpolation Polynomiale en dimension 2 .	32
3.2	Approximation par la méthode de Galerkin avec intégration numérique	34
3.3	Estimation d'erreur	38

Bibliographie	46
----------------------	-----------

Introduction

Nous nous intéressons dans ce mémoire à l'analyse numérique du problème de Dirichlet non homogène pour le Laplacien dans un domaine axisymétrique. Parmi les très nombreuses techniques utilisées pour la discrétisation d'équations aux dérivées partielles elliptiques, nous avons choisi de présenter une méthode de type variationnel, à savoir la méthode **Spectrale-Fourier**.

Les méthodes spectrales, ont été introduites pour la première fois par D. Gottlieb et S. Orszag [13][18], et développées par C. Bernardi et Y. Maday [7], reposent sur l'approximation des solutions d'équations aux dérivées partielles. Les méthodes spectrales utilisent des formules de quadrature numériques pour évaluer les intégrales obtenues dans la formulation variationnelle, plus précisément la formule de Gauss-Lobatto, le problème est discrétisé aux nœuds de cette formule qui sont les racines de polynômes dérivés des polynômes de Legendre. Pour ces raisons, le domaine de base de ces méthodes est construit par tensorisation : c'est un carré et plus généralement un rectangle.

Dans [5], Bernardi, Dauge et Maday, ont établi les arguments de base pour l'étude numérique sur les domaines axisymétriques. Le domaine axisymétrique le plus simple est évidemment le cylindre généré par un rectangle unique. Avec ce genre de géométrie, on réduit les équations tridimensionnelles en un nombre fini d'équations bidimensionnelles. Le seul inconvénient de cette géométrie est l'apparition d'un poids dans la direction de la variable radiale ($rdrdz$ ou $r^{-1}drdz$) dans les espaces de Sobolev intervenant dans la formulation variationnelle. Dans le cas de données axisymétriques l'étude se réduit à un seul problème. Dans le cas général, le problème discret est obtenu à partir de la formulation variationnelle en coefficients de Fourier, en remplaçant les espaces de fonctions par des espaces discrets de polynômes et les intégrales par des formules de quadrature appropriées.

Dans notre mémoire, on considère donc le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta\check{u} &= \check{f} \text{ dans } \check{\Omega}, \\ \check{u} &= \check{g} \text{ sur } \partial\check{\Omega}, \end{cases}$$

où $\check{\Omega}$ est un cylindre centré en $(0, 0, 0)$. Le problème de Dirichlet admet une formulation va-

riationnelle équivalente, reposant sur les espaces de Sobolev que nous décrivons et dont nous rappelons les principales propriétés dans le premier chapitre.

Dans **le deuxième chapitre**, on introduit le domaine d'étude $\check{\Omega}$ qui est axisymétrique, ensuite on définit les espaces fonctionnels à poids. Puis on décrit le problème de Laplace avec l'inconnu \check{u} et on réduit les équations tridimensionnelles (à cause de l'invariance par rapport à l'axe de rotation) en un nombre fini d'équations bidimensionnelles indépendantes, en passant par les coordonnées cylindriques et par la série de Fourier et en négligeant les coefficients de Fourier de grand ordre. On présente le problème continu sous sa forme variationnelle et nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution.

Dans **le troisième chapitre**, on étudie la discrétisation par la méthode Spectrale-Fourier qui repose sur la formulation variationnelle et s'effectue par la méthode de Galerkin avec intégration numérique. On commence par introduire les outils de base pour la méthode : les polynômes orthogonaux dans $L^2(]-1, 1[)$ puis dans $L^2_1(]-1, 1[)$, les formules de quadrature et les opérateurs d'interpolation et d'approximation polynomiale sur un segment $\Lambda =]-1, 1[$, puis par tensorisation sur le carré Λ^2 . On présente ensuite les estimations d'erreur associées, voir [5], [7] et [9]. Ensuite nous présentons le problème discret dans les espaces de polynômes. On prouve que ce problème est uniquement résoluble. On termine l'étude par l'estimation d'erreur entre la solution continue et la solution discrète basée sur l'approximation par troncature et la méthode de Galerkin avec intégration numérique.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on rappelle les définitions et propriétés fondamentales des espaces de Sobolev et des espace des polynômes qui constituent le cadre de l'analyse numérique des méthodes spectrales.

1.1 Espaces de Sobolev

Les notations utilisées dans ce mémoire pour les espaces de Sobolev sont classiques. Les démonstrations des propriétés indiquées figurent en particulier dans les ouvrages de références suivants : Adams [1], Dautray et Lions [12], Grisvard [14], Lions et Magenes [15] et Nečas [17].

Dans ce qui suit, d est un entier positif représentant la dimension de l'espace dans lequel on se place. Le symbole ∂ suivi d'un nom d'ouvert, désigne la frontière de l'ouvert. Deux définitions sont nécessaires pour caractériser la géométrie des ouverts que l'on considère. Dans la suite, on note Ω un ouvert borné assez régulier de \mathbb{R}^d . On note x le point générique de Ω , et (x_1, \dots, x_d) ses coordonnées. Finalement, on utilise la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^d , que l'on écrit soit dx soit $dx_1 \dots dx_d$.

On rappelle que $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω , et que $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ désigne l'espaces des restrictions à $\bar{\Omega}$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans \mathbb{R}^d . Le dual $\mathcal{D}'(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω . On introduit également $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$. On note maintenant $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions v mesurables telles que

$$\int_{\Omega} v^2(x) dx < +\infty.$$

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{0, \Omega} = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx.$$

On note $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ la norme

$$\|v\|_{0,\Omega} = \left(\int_{\Omega} v^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.1)$$

On sait que l'espace $L^2(\Omega)$ contient les deux espaces $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ comme sous-espaces denses, et que l'espace $L^2(\Omega)$ est contenu dans l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$. Le produit de dualité entre les espaces $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}'(\Omega)$ étant alors une extension du produit scalaire dans $L^2(\Omega)$. La théorie des distributions (voir Schwartz [19]) permet de définir, pour les fonctions de $L^2(\Omega)$, des dérivées d'ordre quelconque à valeurs dans $\mathcal{D}'(\Omega)$: pour tout d -uplet $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ de \mathbb{N}^d , $|\alpha|$ représente la longueur $\alpha_1 + \dots + \alpha_d$ et on note ∂^α la dérivée partielle d'ordre total $|\alpha|$ et d'ordre α_j par rapport à la j -ième variable, $1 \leq j \leq d$. On utilisera également la notation $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d}$ pour désigner les dérivées partielles d'ordre 1 par rapport aux différentes variables x_1, \dots, x_d , et le symbole ∇ pour le vecteur à d composantes formé par ces dérivées.

Définition 1.1.1. *Pour tout entier $m \geq 0$, on définit l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ de la façon suivante :*

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \partial^\alpha v \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq m\},$$

muni de la norme

$$\|v\|_{m,\Omega} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha v)^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.2)$$

L'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire associé à la norme (1.2) :

$$(u, v)_{1,\Omega} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u)(x) (\partial^\alpha v)(x) dx \right).$$

Une autre propriété fondamentale est rappelée dans le lemme suivant (la démonstration se trouve dans le livre d'Adams [1, Théorème 3.16]) :

Lemme 1.1.2. *Pour tout entier positif m , l'espace $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$.*

Ce résultat conduit à la définition suivante :

Définition 1.1.3. *Soit m un entier positif. On note $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace $H^m(\Omega)$.*

Corollaire 1.1.4. *Soit Ω un ouvert borné assez régulier. L'espace $H_0^m(\Omega)$ coïncide avec le sous-espace de $H^m(\Omega)$ constitué des fonctions qui s'annulent sur le bord $\partial\Omega$.*

Corollaire 1.1.5. *La semi norme*

$$|v|_{1,\Omega} = \left(\int_{\Omega} \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right)^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.3)$$

est une norme sur l'espace $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme $\|\cdot\|_{1,\Omega}$.

Définition 1.1.6. Soit m un entier positif. On note $H^{-m}(\Omega)$ le dual de $H_0^m(\Omega)$ et on le munit de la norme duale :

$$\|f\|_{-m,\Omega} = \sup_{v \in H_0^m(\Omega)} \frac{\langle f, v \rangle}{|v|_{m,\Omega}}, \quad (1.4)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit de dualité entre $H_0^m(\Omega)$ et son dual.

• Opérateur de traces

La caractérisation des espaces $H_0^m(\Omega)$ s'effectue au moyen du théorème de traces, que l'on trouve démontré dans Grisvard [14]. On rappelle que l'ouvert Ω étant assez régulier il existe en presque tout point de la frontière $\partial\Omega$, un vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ et dirigé vers l'extérieur de Ω , que l'on note \mathbf{n} . Les composantes de \mathbf{n} s'écrivent (n_1, \dots, n_d) , on désigne par $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ l'opérateur de dérivée normale $n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + n_d \frac{\partial}{\partial x_d}$.

Théorème 1.1.7. L'application $\gamma_0 : u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \mapsto \gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$ se prolonge de manière unique, et de façon continue à l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$, l'opérateur γ_0 n'est pas surjectif sur $L^2(\partial\Omega)$. L'image de γ_0 est un espace de Sobolev fractionnaire appelé $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ et qui est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|v\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega} = \inf \{ \|u\|_{1,\Omega}, u \in H^1(\Omega), \gamma_0 u = v \}.$$

Dans ces conditions, il existe un opérateur linéaire continu $R_0 : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega)$, dit de relèvement, qui vérifie $\gamma_0 \circ R_0 = Id_{\partial\Omega}$.

Définition 1.1.8 (Inégalité de Poincaré). Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d borné dans au moins une direction de l'espace. il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx. \quad (1.5)$$

Théorème 1.1.9 (Formule d'intégration par parties). Soit Ω un ouvert assez régulier de frontière $\partial\Omega$, alors pour tous $u, v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) \mathbf{n}_i(x) d\sigma. \quad (1.6)$$

Corollaire 1.1.10. Soit Ω un ouvert assez régulier, de frontière $\partial\Omega$ on a pour tout $u \in H^2(\Omega)$ et tout $v \in H^1(\Omega)$ la formule d'intégration par parties suivante

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) v(x) d\sigma, \quad (1.7)$$

où $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i \leq N}$ est le vecteur gradient de u , et $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u \cdot \mathbf{n}$.

1.2 Rappel sur le lemme de Lax-Milgram

On écrit tout de suite l'énoncé de ce lemme, dû à Lax-Milgram [9] qui est à la base de l'étude des équations aux dérivées partielles que l'on considère

Lemme 1.2.1. *On suppose que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ vérifie les propriétés de continuité*

$$\forall u \in X, \forall v \in X_\diamond, \quad |a(u, v)| \leq \gamma \|u\|_X \cdot \|v\|_X,$$

et d'ellipticité, pour une constante $\alpha > 0$,

$$\forall v \in X_\diamond, \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2.$$

Alors, pour toute donnée f dans X'_\diamond , le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ dans } X_\diamond \text{ tel que :} \\ \forall v \in X_\diamond, \quad a(u, v) = \langle f, v \rangle_{X'_\diamond, X_\diamond}, \end{cases} \quad (1.8)$$

admet une solution unique u dans X_\diamond . De plus cette solution vérifie

$$\|u\|_X \leq \alpha^{-1} \|f\|_{X'_\diamond}.$$

1.3 Problèmes invariants par rotation

On considère le problème elliptique $[\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}]$ défini dans $\check{\Omega}$ (écrit en coordonnées cartésiennes) par :

$$\begin{cases} \check{\mathbf{A}}\check{\mathbf{u}} = \check{f} & \text{dans } \check{\Omega}, \\ \check{\mathbf{B}}\check{\mathbf{u}} = \check{g} & \text{sur } \partial\check{\Omega}, \end{cases} \quad (1.9)$$

où $\check{\mathbf{A}}$ et $\check{\mathbf{B}}$ sont respectivement des $M \times M$ et $m \times M$ opérateurs différentiels, $\check{\mathbf{u}}$ est une inconnue à M composantes et \check{f} et \check{g} sont des données correspondant aux force extérieures.

On note \mathbf{R}_η la rotation de \mathbb{R}^3 d'angle η autour de l'axe $r = 0$, elle est définie par :

$$\mathbf{R}_\eta(x, y, z) = (x \cos \eta - y \sin \eta, x \sin \eta + y \cos \eta, z). \quad (1.10)$$

Définition 1.3.1. *Le problème $[\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}]$ est dit invariant par rotation si, pour toute fonction régulière $\check{\mathbf{u}} : \check{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^M$ et pour tout $\eta \in [-\pi, \pi]$ on a :*

$$\begin{cases} \check{\mathbf{A}}((\check{\mathbf{u}} \circ \mathbf{R}_\eta)) = (\check{\mathbf{A}}\check{\mathbf{u}}) \circ \mathbf{R}_\eta, \\ \check{\mathbf{B}}((\check{\mathbf{u}} \circ \mathbf{R}_\eta)) = (\check{\mathbf{B}}\check{\mathbf{u}}) \circ \mathbf{R}_\eta. \end{cases} \quad (1.11)$$

Une propriété équivalente à la définition 1.3.1 est la suivante.

Propriété Le problème $[\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}]$ est invariant par rotation si et seulement si les opérateurs $\check{\mathbf{A}}$ et $\check{\mathbf{B}}$ écrits en coordonnées cylindriques (r, θ, z) , ont des coefficients indépendants de θ , c'est à dire qu'il peuvent être écrits sous la forme :

$$\begin{aligned}\check{\mathbf{A}}(x, y, z; \partial_x, \partial_y, \partial_z) &= \check{\mathbf{A}}(r, z; \partial_r, \partial_\theta, \partial_z) \\ \check{\mathbf{B}}(x, y, z; \partial_x, \partial_y, \partial_z) &= \check{\mathbf{B}}(r, z; \partial_r, \partial_\theta, \partial_z)\end{aligned}\tag{1.12}$$

Exemple 1.3.2. Le laplacien $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ ($M = 1$) s'écrit en coordonnées cylindriques $\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 + \partial_z^2$, lorsqu'il est associé à des conditions de Dirichlet sur le bord ($m = 1$), il est donc invariant par rotation.

Définition 1.3.3. Si $\check{\mathbf{u}} \in \mathcal{D}'(\check{\Omega})$, $\check{\mathbf{u}}$ est dit invariant par rotation si :

$$\forall \eta \in [-\pi, \pi], \quad \check{\mathbf{u}} \circ \mathbf{R}_\eta = \check{\mathbf{u}}.\tag{1.13}$$

Maintenant, si toutes les données du problème (1.9), à savoir $\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}, \check{f}$ et \check{g} sont invariants par rotation, alors celui ci se réduit au problème bidimensionnel suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{A} \mathbf{u} = f & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{B} \mathbf{u} = g & \text{sur } \Gamma, \end{cases}\tag{1.14}$$

où Ω est le domaine méridien en (r, z) associé à $\check{\Omega}$ défini dans la page 11 et Γ sa frontière.

$$\begin{aligned}f(r, z) &= \check{f}(x, y, z), \quad g(r, z) = \check{g}(x, y, z), \\ \mathbf{A}(r, z; \partial_r, \partial_z) &= \check{\mathbf{A}}(r, z; \partial_r, 0, \partial_z), \\ \mathbf{B}(r, z; \partial_r, \partial_z) &= \check{\mathbf{B}}(r, z; \partial_r, 0, \partial_z).\end{aligned}\tag{1.15}$$

Il suffit de prendre $\eta = -\theta$ dans (1.10).

1.4 Espaces de polynômes

On définit les espaces de polynômes, tout d'abord en dimension $d = 1$, puis dans des domaines de dimension $d \geq 2$ qui sont produits d'intervalles.

Notation 1.4.1. Pour tout entier $n \geq 0$, on définit \mathbb{P}_n comme l'espace des polynômes sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} de degré $\leq n$. Pour tout intervalle ouvert borné Λ de \mathbb{R} , on note $\mathbb{P}_n(\Lambda)$ l'espace des restrictions à Λ des fonctions de l'ensemble \mathbb{P}_n .

Notation 1.4.2. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout intervalle ouvert borné Λ de \mathbb{R} , on note $\mathbb{P}_n^\circ(\Lambda)$ l'espace des polynômes de $\mathbb{P}_n(\Lambda)$ qui s'annulent aux deux extrémités de Λ .

Une des bases de $\mathbb{P}_n(\Lambda)$ est formée par les x^m , $0 \leq m \leq n$, on en déduit facilement le résultat suivant :

$$\dim \mathbb{P}_n(\Lambda) = n + 1, \quad \dim \mathbb{P}_n^\circ(\Lambda) = n - 1.$$

En dimension $d \geq 2$, on travaille dans des domaines Ω dits tensorisés, c'est-à-dire du type $\Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_d$, où les Λ_i sont des intervalles de \mathbb{R} .

Notation 1.4.3. *Pour tout entier $n \geq 0$ et pour tout domaine Ω de \mathbb{R} égal au produit $\Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_d$ d'intervalles ouverts de \mathbb{R} , on note $\mathbb{P}_n(\Omega)$ l'espace des restrictions à Ω des polynômes à valeurs dans \mathbb{R} et de degré $\leq n$ par rapport à chaque variable x_i , $1 \leq i \leq d$.*

D'après cette définition, tout polynôme p de $\mathbb{P}_n(\Omega)$ s'écrit sous la forme

$$p(x_1, \dots, x_d) = \sum_{m_1=0}^n \cdots \sum_{m_d=0}^n \alpha_{m_1 \dots m_d} x_1^{m_1} \cdots x_d^{m_d}, \quad (1.16)$$

où les $\alpha_{m_1 \dots m_d}$ sont des réels. On en déduit la propriété de tensorisation suivante, qui est à la base de l'analyse numérique des méthodes spectrales.

Proposition 1.4.4. *Soit Ω_d le produit $\Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_d$ d'intervalles ouverts de \mathbb{R} et Ω_{d-1} le produit $\Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_{d-1}$. Pour tout entier $n \geq 0$ et toute base $\{\varphi_m, 0 \leq m \leq n\}$ de $\mathbb{P}_n(\Lambda_d)$, un polynôme p appartient à $\mathbb{P}_n(\Omega_d)$ si et seulement s'il s'écrit*

$$p(x_1, \dots, x_d) = \sum_{m=0}^n q_m(x_1, \dots, x_{d-1}) \varphi_m(x_d), \quad (1.17)$$

où les q_m , $0 \leq m \leq n$, appartiennent à $\mathbb{P}_n(\Omega_{d-1})$.

Remarque 1.4.5. *Considérons pour simplifier le cas où Ω est égal à Λ^d pour un intervalle ouvert Λ de \mathbb{R} . La Proposition 1.4.4 est alors équivalente au résultat suivant : pour tout entier $n \geq 0$ et toute base $\{\varphi_m; 0 \leq m \leq n\}$ de $\mathbb{P}_n(\Lambda)$, les polynômes $\varphi_{m_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{m_d}$ définis par*

$$(\varphi_{m_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{m_d})(x_1, \dots, x_d) = \varphi_{m_1}(x_1) \cdots \varphi_{m_d}(x_d), \quad (1.18)$$

forment lorsque chaque m_i décrit les entiers de 0 à n , une base de $\mathbb{P}_n(\Omega)$.

Finalement, pour traiter les problèmes avec conditions aux limites essentielles, on introduit les espaces suivants :

Notation 1.4.6. *Pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout ouvert Ω de \mathbb{R}^d égal au produit $\Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_d$ d'intervalles ouverts bornés de \mathbb{R} , on note $\mathbb{P}_n^\circ(\Omega)$ l'espace des polynômes de $\mathbb{P}_n(\Omega)$ qui s'annulent sur $\partial\Omega$.*

Chapitre 2

Résolution du Laplacien sur un Cylindre

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'étude du problème de Dirichlet non homogène pour le Laplacien dans un domaine cylindrique centré en $(0, 0, 0)$. Nous décrivons la géométrie et les espaces fonctionnels et nous écrivons les formulations variationnelles associées dans un premier lieu à des données axisymétriques, ensuite à des données générales.

2.1 Géométrie

On définit le domaine $\check{\Omega}$ en coordonnées cartésiennes (x, y, z) comme suit :

$$\check{\Omega} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x^2 + y^2 < 1 \text{ et } -1 < z < 1\}.$$

L'idée dans un premier temps est d'utiliser les coordonnées cylindriques (r, θ, z) avec

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad \theta \in [-\pi, \pi[,$$

et donc

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \begin{cases} -\arccos\left(\frac{x}{r}\right), & \text{si } y \geq 0, \\ \arccos\left(\frac{x}{r}\right), & \text{si } y \leq 0. \end{cases}$$

Le domaine $\check{\Omega}$ exprimé en coordonnées cylindriques est noté $\tilde{\Omega}$. On a alors

$$\tilde{\Omega} = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3, (r, z) \in \Omega \cup \Gamma_0, -\pi \leq \theta < \pi\},$$

où Ω est le rectangle :

$$\Omega = \{(r, z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}; 0 < r < 1 \text{ et } -1 < z < 1\},$$

l'équivalence suivante :

$$(x, y, z) \in \check{\Omega} \Leftrightarrow (r, z) \in \Omega \text{ et } -\pi \leq \theta < \pi.$$

Le rectangle Ω est appelé le domaine méridien de $\check{\Omega}$.

Soit Γ_0 l'intérieur de la partie de la frontière de Ω sur l'axe $\{r = 0\}$,

$$\Gamma_0 := \bar{\Omega} \cap \{r = 0\}.$$

On note par Γ la partie de la frontière de Ω qui n'est pas contenue dans Γ_0 i.e.

$$\Gamma = \partial\Omega \setminus \Gamma_0.$$

On a la relation d'équivalence suivante :

$$(r, \theta, z) \in \partial\check{\Omega} \Leftrightarrow (r, z) \in \Gamma \text{ et } -\pi \leq \theta < \pi.$$

Les domaines sont illustrés dans les figures ci-dessous.

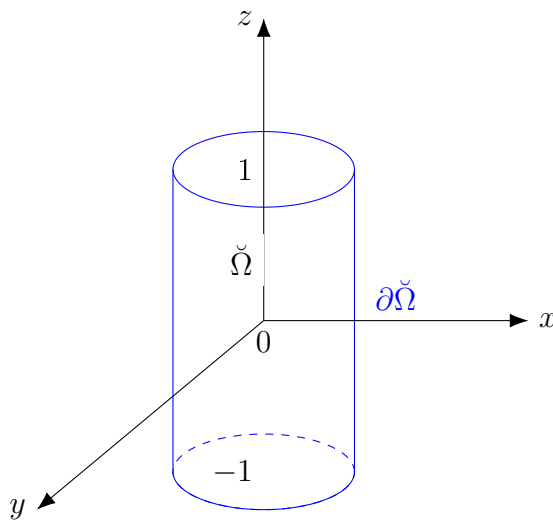


Fig. 1 Le domaine $\check{\Omega}$
en coordonnées cartésiennes.

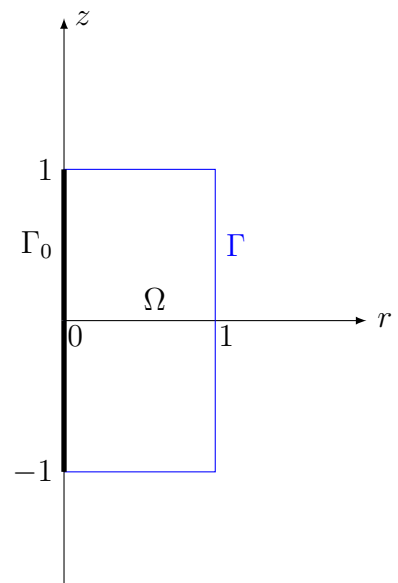


Fig. 2 Le domaine méridien Ω .

2.2 Espaces fonctionnels et notations

Par le changement de variables des coordonnées cartésiennes en coordonnées cylindriques, la mesure $dx dy dz$ se transforme en $r dr d\theta dz$. En écrivant le problème de Laplace sous forme variationnelle réduite définie sur Ω , il apparaît des mesures comme $r dr dz$ ou $r^{-1} dr dz$. Ce changement de mesure donne lieu à de espaces de Sobolev à poids.

Définition 2.2.1. 1) On définit les espaces

$$L_1^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable; } \int_{\Omega} |u(r, z)|^2 r dr dz < +\infty \right\}, \quad (2.1)$$

et

$$L_{-1}^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable; } \int_{\Omega} |u(r, z)|^2 r^{-1} dr dz < +\infty \right\}, \quad (2.2)$$

qui sont des espaces de Hilbert quand ils sont munis des normes suivantes

$$\|u\|_{L_{\pm 1}^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(r, z)|^2 r^{\pm 1} dr dz \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2) Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on définit l'espace

$$H_1^m(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable; } \left(\sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^k \|\partial_r^l \partial_z^{k-l} u\|_{L_1^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\}, \quad (2.3)$$

qui est un espace de Hilbert quand il est muni de la norme suivante

$$\|u\|_{H_1^m(\Omega)} = \left(\sum_{l=0}^m |u|_{H_1^l(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

il est aussi muni de la semi-norme

$$|u|_{H_1^m(\Omega)} = \left(\sum_{l=0}^m \|\partial_r^l \partial_z^{m-l} u\|_{L_1^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3) On définit l'espace de Hilbert $V_1^1(\Omega)$ par :

$$V_1^1(\Omega) = H_1^1(\Omega) \cap L_{-1}^2(\Omega).$$

Il a été prouvé dans [4, Théorème 2.b.6] que l'opérateur de trace sur $\Gamma_0 : v \longmapsto v|_{\Gamma_0}$ est continu de H_1^1 dans $L^2(\Gamma_0)$. L'espace $V_1^1(\Omega)$ est caractérisé par (voir [16])

$$V_1^1(\Omega) = \left\{ u \in H_1^1(\Omega); u = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{V_1^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \left(|u|^2 + |\partial_r u|^2 + |\partial_z u|^2 + \frac{k^2}{r^2} |u|^2 \right) r dr dz.$$

4) Les espaces $H_{1\circ}^1(\Omega)$ et $V_{1\circ}^1(\Omega)$ sont donnés par :

$$H_{1\circ}^1(\Omega) = \{u \in H_1^1(\Omega); u = 0 \text{ sur } \Gamma\}, \quad (2.4)$$

et

$$V_{1\circ}^1(\Omega) = \{u \in V_1^1(\Omega); u = 0 \text{ sur } \Gamma\}. \quad (2.5)$$

5) On introduit enfin l'espace intervenant dans l'approximation spectral-Fourier du problème de Poisson

$$H_{(k)}^1(\Omega) = \begin{cases} V_1^1(\Omega), & \text{si } k \neq 0, \\ H_1^1(\Omega), & \text{si } k = 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

munis des normes

$$\|u\|_{H_{(k)}^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{H_1^1(\Omega)}^2 + k^2 \|u\|_{L_{-1}^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2.3 Coefficients de Fourier

Un moyen naturel de réduire un problème axisymétrique défini sur $\check{\Omega}$ en une suite de problèmes posés sur Ω est d'utiliser le développement de Fourier par rapport à la variable angulaire θ .

Définition 2.3.1. Soit \check{u} une fonction définie sur $\check{\Omega}$ et soit

$\tilde{u}(r, \theta, z) = \check{u}(x, y, z)$ la fonction correspondante en coordonnées cylindriques définie dans $\tilde{\Omega}$.

Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$ on associe le coefficient de Fourier

$$u^k(r, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{u}(r, \theta, z) e^{-ik\theta} d\theta.$$

Théorème 2.3.2. Soit m un entier positif alors l'application :

$$\begin{aligned} H^m(\check{\Omega}) &\longrightarrow \prod_{k \in \mathbb{Z}} H_{(k)}^m(\Omega) \\ \check{u} &\mapsto (u^k)_{k \in \mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Où les espaces $H_{(k)}^m(\Omega)$ sont définis par :

i) Si $k \neq 0$, $H_{(k)}^m(\Omega) = V_1^m(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{H_{(k)}^m(\Omega)} = \left(\|u\|_{H_1^m(\Omega)}^2 + |k|^{2m} \|r^{-m}u\|_{L_1^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.7)$$

ii) Si $k = 0$, $H_{(k)}^m(\Omega) = H_1^m(\Omega)$.

On a en plus la relation d'équivalence suivante :

$$c \|\check{u}\|_{H^m(\check{\Omega})} \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|u^k\|_{H_{(k)}^m(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c' \|\check{u}\|_{H^m(\check{\Omega})}. \quad (2.8)$$

Pour la preuve, on renvoie à [5, Théorème 2.3.1].

Définition 2.3.3. Soit $\check{u} \in H^m(\check{\Omega})$. On définit la série de Fourier tronquée pour chaque entier positif K par :

$$\check{u}_{[K]}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-K}^K u^k(r, z) e^{ik\theta}. \quad (2.9)$$

Où les u^k sont les coefficients de Fourier de $\tilde{u}(r, \theta, z)$ avec $\tilde{u}(r, \theta, z) = \check{u}(x, y, z)$.

Proposition 2.3.4. Soient t et m deux entiers positifs tels que $t \leq m$. Pour tout entier positif K il existe une constante

$c > 0$ qui ne dépend pas de K , telle que

$$\|\check{u} - \check{u}_{[K]}\|_{H^t(\check{\Omega})} \leq cK^{t-m} \|\check{u}\|_{H^m(\check{\Omega})}, \quad \check{u} \in H^m(\check{\Omega}).$$

La preuve de cette proposition repose sur le lemme suivant :

Lemme 2.3.5. Pour t et m deux entiers positifs tels que $t \leq m$, l'inégalité suivante est vérifiée pour toute fonction u dans $H_{(k)}^m(\Omega)$:

$$\|u\|_{H_{(k)}^t(\Omega)} \leq c|K|^{t-m} \|u\|_{H_{(k)}^m(\Omega)},$$

où la constante c ne dépend pas de K et u .

On renvoie à [5] pour la démonstration de ce lemme.

Preuve de la Proposition 2.3.4 :

Du théorème 2.3.2, on a

$$\|\check{u} - \check{u}_{[K]}\|_{H^t(\check{\Omega})} \leq c \left(\sum_{|k|>K} \|u^k\|_{H_{(k)}^t(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

du lemme précédent, on constate que

$$\begin{aligned} \|\check{u} - \check{u}_{[K]}\|_{H^t(\check{\Omega})} &\leq cK^{t-m} \left(\sum_{|k|>K} \|u^k\|_{H_{(k)}^m(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ &\leq cK^{t-m} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|u^k\|_{H_{(k)}^m(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En utilisant encore une fois (2.8), on obtient

$$\|\check{u} - \check{u}_{[K]}\|_{H^t(\check{\Omega})} \leq cK^{t-m} \|\check{u}\|_{H^m(\check{\Omega})}.$$

■

2.4 Le problème et la formulation variationnelle

2.4.1 Position du problème

On considère le problème de Dirichlet pour le Laplacien tridimensionnel dans $\check{\Omega}$

$$\begin{cases} -\Delta \check{u} = \check{f} & \text{dans } \check{\Omega}, \\ \check{u} = \check{g} & \text{sur } \partial\check{\Omega}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Dans les coordonnées cylindriques le problème (2.10) devient :

$$\begin{cases} -\partial_r^2 \tilde{u} - \frac{1}{r} \partial_r \tilde{u} - \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \tilde{u} - \partial_z^2 \tilde{u} = \tilde{f} & \text{dans } \tilde{\Omega}, \\ \tilde{u} = \tilde{g} & \text{sur } \partial\tilde{\Omega}. \end{cases} \quad (2.11)$$

Si les données sont **invariantes par rotation**, c'est à dire si \check{f} et \check{g} sont indépendantes de l'angle de rotation θ , alors le problème (2.10) se ramène au problème **bidimensionnel** défini sur Ω par

$$\begin{cases} -\partial_r^2 u - \frac{1}{r} \partial_r u - \partial_z^2 u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (2.12)$$

où u , f et g sont des fonctions de r et z .

Dans le **cas général**, l'idée est de faire un développement en série de Fourier de \tilde{u} , \tilde{f} et de \tilde{g} par rapport à θ dans (2.11) : on obtient formellement :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\partial_r^2 u^k(r, z) - \frac{1}{r} \partial_r u^k(r, z) - \partial_z^2 u^k(r, z) + \frac{k^2}{r^2} u^k(r, z) - f^k(r, z)) e^{ik\theta} = 0,$$

avec

$$\tilde{u}(r, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u^k(r, z) e^{ik\theta}, \quad \text{et} \quad \tilde{f}(r, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f^k(r, z) e^{ik\theta},$$

et

$$u^k(r, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{u}(r, \theta, z) e^{-ik\theta} d\theta.$$

On obtient la famille d'équations, pour $k \in \mathbb{Z}$:

$$\partial_r^2 u^k(r, z) - \frac{1}{r} \partial_r u^k(r, z) - \partial_z^2 u^k(r, z) + \frac{k^2}{r^2} u^k(r, z) = f^k(r, z),$$

D'où le problème :

$$\begin{cases} -\partial_r^2 u^k - \frac{1}{r} \partial_r u^k - \partial_z^2 u^k + \frac{k^2}{r^2} u^k = f^k & \text{dans } \Omega, \\ u^k = g^k & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.13)$$

Où pour $k \in \mathbb{Z}$, u^k , f^k et g^k sont les coefficients de Fourier de \tilde{u} , \tilde{f} et de \tilde{g} respectivement.

2.4.2 Formulation variationnelle

Grâce au théorème de relèvement 1.1.7, on peut se ramener au cas $\check{u} - \check{g} = 0$ sur $\partial\check{\Omega}$. La formulation variationnelle du problème (2.10) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \check{u} \in H^1(\check{\Omega}), \text{ avec } \check{u} = \check{g} \text{ sur } \partial\check{\Omega}, \text{ telle que} \\ \check{a}(\check{u}, \check{v}) = \langle \check{f}, \check{v} \rangle, \quad \forall \check{v} \in H_0^1(\check{\Omega}), \end{array} \right. \quad (2.14)$$

où $\check{a}(\cdot, \cdot)$ est la forme bilinéaire symétrique elliptique, définie par :

$$\check{a}(\check{u}, \check{v}) = \int_{\check{\Omega}} \nabla \check{u} \cdot \nabla \check{v} \, dx dy dz \quad \forall \check{u}, \check{v} \in H_0^1(\check{\Omega}),$$

et si $f \in L_1^2(\check{\Omega})$

$$\langle \check{f}, \check{v} \rangle = (f, v) \quad \forall \check{v} \in H_0^1(\check{\Omega}).$$

Ce problème admet une solution unique dans $H^1(\check{\Omega})$ par application du lemme de Lax-Milgram, dès que \check{f} est dans $H^{-1}(\check{\Omega})$ et \check{g} dans $H^{\frac{1}{2}}(\partial\check{\Omega})$. La fonction trace \check{g} admet un prolongement dans $H^1(\check{\Omega})$. Dans la suite, on note aussi par \check{g} ce prolongement.

En passant aux coordonnées cylindriques, on distingue deux cas :

- Quand les données \check{f} et \check{g} sont **invariantes par rotation**, c'est à dire lorsque \check{f} et \check{g} sont indépendantes de l'angle de rotation θ . On commence par donner une caractérisation des fonctions de $H^m(\check{\Omega})$ qui sont invariantes par rotation. On note l'espace correspondant $\check{H}^m(\check{\Omega})$. Soit $\check{u} \in \check{H}^m(\check{\Omega})$, \check{u} est caractérisée par l'existence d'une fonction u définie sur Ω par :

$$u(r, z) = \check{u}(x, y, z).$$

On note que $\check{H}^1(\check{\Omega})$ est isomorphe à $H_1^1(\Omega)$ (voir [5, théorème 2.2.1]). En prenant en compte la condition au bord, on constate que l'application

$$\begin{aligned} \check{H}_0^1(\check{\Omega}) &:= \check{H}^1(\check{\Omega}) \cap H_0^1(\check{\Omega}) \longrightarrow H_{1\circ}^1(\Omega), \\ \check{u} &\longmapsto u, \end{aligned}$$

définie par $u(r, z) = \check{u}(x, y, z)$ est un isomorphisme appelé opérateur de réduction. On rappelle que

$$H_{1\circ}^1(\Omega) = \{u \in H_1^1(\Omega); u = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

On note $H_{1\circ}^1(\Omega)'$ l'espace dual de $H_{1\circ}^1(\Omega)$. On a pour $f \in H_{1\circ}^1(\Omega)'$, $\check{f} \in H^{-1}(\check{\Omega})$ et

$$\forall f \in H_{1\circ}^1(\Omega)', \forall v \in H_{1\circ}^1(\Omega), \langle f, v \rangle = \langle \check{f}, \check{v} \rangle. \quad \text{Si } f \in L_1^2(\Omega)$$

$$\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f(r, z) \cdot v(r, z) \, r dr dz. \quad (2.15)$$

Soit $u, v \in H_1^1(\Omega)$. La forme bilinéaire associée naturellement au problème (2.12) est donnée par :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\partial_r u \partial_r v + \partial_z u \partial_z v) r dr dz. \quad (2.16)$$

On a l'identité suivante, pour tout \check{u}, \check{v} dans $\check{H}^1(\check{\Omega})$.

$$a(u, v) = \check{a}(\check{u}, \check{v}), \quad \forall (u, v) \in H_1^1(\Omega). \quad (2.17)$$

Le problème variationnel associé au problème (2.12) s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_1^1(\Omega) \text{ avec } u = g \text{ sur } \Gamma, \text{ telle que} \\ a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H_{1\circ}^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.18)$$

Où g est l'image de \check{g} par l'isomorphisme $\check{H}^1(\check{\Omega}) \rightarrow H_1^1(\Omega)$. Les propriétés du problème (2.18) sont énoncées dans la proposition suivante :

Proposition 2.4.1. *La forme $a(\cdot, \cdot)$ est elliptique sur $H_{1\circ}^1(\Omega)$. Pour toute f dans $H_{1\circ}^1(\Omega)'$ et g dans $H_1^1(\Omega)$, le problème (2.18) admet une solution unique u dans $H_1^1(\Omega)$. Elle coïncide avec l'image de l'opérateur de réduction de la solution \check{u} du problème (2.14) avec \check{f} dans $H^{-1}(\check{\Omega})$ et \check{g} dans $H^1(\check{\Omega})$. De plus si on suppose que $f \in L_1^2(\Omega)$, alors il existe $c > 0$ telle que*

$$\|u\|_{H_1^1(\Omega)} \leq c(\|f\|_{L_1^2(\Omega)} + \|g\|_{H_1^1(\Omega)}). \quad (2.19)$$

Preuve. L'ellipticité de la forme $a(\cdot, \cdot)$ vient de l'identité (2.17) et de l'ellipticité de $\check{a}(\cdot, \cdot)$, de même pour la continuité.

D'autre part, pour l'inégalité (2.19). On a

$$\forall v \in H_{1\circ}^1(\Omega), \quad a(u - g, v) = \langle f, v \rangle - a(g, v).$$

En prenant v égal à $u - g$, et en utilisant l'ellipticité, la continuité de a et l'inégalité de Poincaré, on trouve

$$\|u - g\|_{H_1^1(\Omega)}^2 \leq c(\|f\|_{L_1^2(\Omega)} + \|g\|_{H_1^1(\Omega)}) \|u - g\|_{H_1^1(\Omega)},$$

donc

$$\|u - g\|_{H_1^1(\Omega)} \leq c(\|f\|_{L_1^2(\Omega)} + \|g\|_{H_1^1(\Omega)}).$$

Par une inégalité triangulaire, on obtient la majoration (2.19). ■

•Cas général :

Dans le cas général, i.e. lorsque les données \check{f} et \check{g} dépendent de l'angle de rotation θ . D'après le théorème 2.3.2, si \check{u} est dans $H^1(\check{\Omega})$, alors son coefficient de Fourier u^0 d'ordre 0 est dans l'espace $H_1^1(\Omega)$ alors que pour $k > 0$, $u^k \in V_1^1(\Omega)$. On introduit alors l'espace variationnel

$$V_{1\circ}^1(\Omega) = \{u \in V_1^1(\Omega); u = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

Par une intégration par parties et un argument de densité, la formulation variationnelle associée au problème (2.13) est la suivante

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^k \in V_1^1(\Omega), \text{ avec } u^k = g^k \text{ sur } \Gamma \text{ telle que} \\ a_k(u^k, v) = \langle f^k, v \rangle, \quad \forall v \in V_{1\circ}^1(\Omega), \end{cases} \quad (2.20)$$

où

$$a_k(u, v) = \int_{\Omega} (\partial_r u \partial_r \bar{v} + \partial_z u \partial_z \bar{v}) r dr dz + k^2 \int_{\Omega} \frac{u \bar{v}}{r} dr dz.$$

et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le crochet de dualité de $V_{1\circ}^1(\Omega)'$. Quand f^k sont les coefficients de Fourier de \check{f} , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donné par (2.15). Et quand $k = 0$, la forme sesquilinéaire a_0 coïncide avec la forme a définie dans (2.16).

Proposition 2.4.2. *Soit k un entier non nul. Pour f^k dans $V_{1\circ}^1(\Omega)'$ et g^k dans $V_1^1(\Omega)$, le problème (2.20) a une unique solution $u^k \in V_1^1(\Omega)$. Cette solution coïncide avec le k -ème coefficient de Fourier u^k de \check{u} , quand \check{u} est la solution du problème (2.14), où f^k et g^k sont respectivement les k -èmes coefficients de Fourier de \check{f} et \check{g} . De plus, il existe une constante $c > 0$ indépendante de k telle que*

$$\|u^k\|_{V_1^1(\Omega)} \leq c(\|f^k\|_{L_1^2(\Omega)} + \|g^k\|_{H_{(k)}^1(\Omega)}). \quad (2.21)$$

Preuve. 1. La continuité de a_k : Soient $u, v \in V_{1\circ}^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} |a_k(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \left(\partial_r u \partial_r \bar{v} + \partial_z u \partial_z \bar{v} + \frac{k^2}{r^2} u \bar{v} \right) r dr dz \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\partial_r u \partial_r \bar{v} + \partial_z u \partial_z \bar{v}| r dr dz + k^2 \int_{\Omega} |u \bar{v}| r^{-1} dr dz. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz on obtient

$$\begin{aligned} |a_k(u, v)| &\leq \|\nabla u\|_{L_1^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L_1^2(\Omega)} + k^2 \|u\|_{L_{-1}^2(\Omega)} \|v\|_{L_{-1}^2(\Omega)} \\ &= \|u\|_{H_1^1(\Omega)} \|v\|_{H_1^1(\Omega)} + k^2 \|u\|_{L_{-1}^2(\Omega)} \|v\|_{L_{-1}^2(\Omega)} \\ &\leq \|u\|_{H_1^1(\Omega)} \|v\|_{H_1^1(\Omega)} + k^2 \|u\|_{L_{-1}^2(\Omega)} \|v\|_{L_{-1}^2(\Omega)} \\ &\leq \|u\|_{V_1^1(\Omega)} \|v\|_{V_1^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

2. L'ellipticité de a_k : Soit $u \in V_{1\circ}^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} a_k(u, u) &= \int_{\Omega} \left(|\partial_r u|^2 + |\partial_z u|^2 + \frac{k^2}{r^2} |u|^2 \right) r dr dz \\ &= |u|_{V_1^1(\Omega)}^2 \\ &\geq c |u|_{V_1^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il est clair que $v \mapsto \langle f^k, v \rangle$ est continue sur $V_{1\circ}^1(\Omega)'$.

Et le lemme de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de la solution u^k .

La stabilité de u^k découle de l'ellipticité de a_k . En effet : Pour $v \in V_{1\circ}^1(\Omega)$

$$a_k(u^k - g^k, v) = (f^k, v) - a_k(g^k, v).$$

En prenant $v = u^k - g^k$, et en utilisant l'ellipticité de a_k , on obtient

$$\|u^k - g^k\|_{V_1^1(\Omega)} \leq c(\|f^k\|_{L_1^2(\Omega)} + \|g^k\|_{V_1^1(\Omega)}).$$

Par une inégalité triangulaire on obtient la majoration (2.21). ■

Chapitre 3

Discrétisation par la méthode Spectrale-Fourier

Le but de ce chapitre est d'effectuer l'analyse numérique des problèmes (2.12) et (2.13) par une méthode de discrétisation dite **Spectrale-Fourier**. On écrit le problème discret sous sa forme variationnelle et on prouve qu'il admet une solution unique. Ensuite, on établit l'estimation d'erreur basée sur les approximations de troncature des séries de Fourier et de Galerkin avec intégration numérique.

3.1 Outils de la discrétisation

Dans cette section, on construit les principaux éléments intervenant dans la discrétisation : les polynômes orthogonaux, les formules de quadrature et les produits scalaires discrets sur $\Lambda :=]-1, 1[$ puis sur le carré Λ^2 . On construit une nouvelle famille de polynômes orthogonaux sur Λ pour la mesure $(1+x)dx$ (qui correspond à la mesure rdr sur $I =]0, 1[$). Le changement de variable $r = \frac{1+x}{2}$ permet de passer de l'extrémité -1 de Λ à l'extrémité 0 de I .

Notation 3.1.1. *Pour tout entier non négatif n , nous définissons $\mathbb{P}_n^*(\Lambda)$, respectivement $\mathbb{P}_n^\circ(\Lambda)$, comme sous-espace de polynômes dans $\mathbb{P}_n(\Lambda)$ s'annulant en -1 , respectivement en $+1$.*

3.1.1 Polynômes orthogonaux dans $L^2(\Lambda)$

On désigne par Λ l'intervalle ouvert $] - 1, 1[$.

Définition 3.1.2. On appelle famille des polynômes de Legendre, la famille $(L_n)_n$ de polynômes sur Λ , deux à deux orthogonaux dans l'espace $L^2(\Lambda)$. Chaque polynôme L_n est de degré n et vérifie : $L_n(1) = 1$. On peut démontrer que les n zéros de L_n sont des réels distincts de Λ .

Proposition 3.1.3. (Equation différentielle) Pour tout entier $n \geq 0$, le polynôme L_n vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d}{dy}((1-x^2)L'_n) + n(n+1)L_n = 0 \quad (3.1)$$

Proposition 3.1.4. [9] Pour tout entière $n \geq 0$, le polynôme L_n vérifie

$$\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2 = \int_{-1}^1 L_n^2(y) dy = \frac{2}{2n+1}. \quad (3.2)$$

Lemme 3.1.5. [9] Les polynômes de Legendre L_n ont la parité de leur degré.

Proposition 3.1.6. [9](Formule de récurrence) La famille $(L_n)_n$ est donnée par les relations

$$\begin{cases} L_0(y) = 1, & L_1(y) = y \\ (n+1)L_{n+1}(y) = (2n+1)yL_n(y) - nL_{n-1}(y), & \forall n \geq 1. \end{cases} \quad (3.3)$$

Lemme 3.1.7. [9] La famille $(L_n)_{0 \leq n \leq N}$ forme une base de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$.

3.1.2 Formule de quadrature

La formule de quadrature la plus naturelle dans la contexte polynomial est la formule de Gauss-Lobatto, qui est caractérisée par le fait que les extrémités -1 et 1 de l'intervalle Λ sont des noeuds de la formule.

Proposition 3.1.8. [9] Soit N un entier positif fixé. On pose $y_0 = -1$ et $y_N = 1$. Il existe un unique ensemble de $N-1$ points y_j de Λ , $1 \leq j \leq N-1$, et un unique ensemble de $N+1$ poids ρ_j , tel que

$$\forall \Phi \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda), \quad \int_{-1}^1 \Phi(y) dy = \sum_{j=0}^N \Phi(y_j) \rho_j, \quad (3.4)$$

Les noeuds y_j , $1 \leq j \leq N-1$, sont les zéros de L'_N et les ρ_j , $0 \leq j \leq N$ sont positifs.

$$\rho_j = \frac{2}{N(N+1)L_N^2(y_j)}, \quad 0 \leq j \leq N. \quad (3.5)$$

Corollaire 3.1.9. [9] Tout polynôme φ_N de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ vérifie les inégalités

$$\|\varphi_N\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq (\varphi_N, \varphi_N)_N \leq 3\|\varphi_N\|_{L^2(\Lambda)}^2, \quad (3.6)$$

où le produit discret $(\cdot, \cdot)_N$ est défini par

$$(\varphi, \psi)_N = \sum_{j=0}^N \varphi(y_j) \psi(y_j) \rho_j. \quad (3.7)$$

Remarque 3.1.10. On déduit du corollaire précédent que l'application $v \mapsto (v, v)_{\mathbb{P}_N(\Lambda)}^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Lambda)}$ avec des constantes d'équivalence indépendantes de N .

3.1.3 Erreur d'approximation et d'interpolation polynomiale

- Le projecteur π_N :

Notation 3.1.11. On note π_N l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\Lambda)$ sur $\mathbb{P}_N(\Lambda)$. Ceci signifie que pour toute fonction φ de $L^2(\Lambda)$, $\pi_N\varphi$ appartient à $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ et vérifie

$$\forall \psi_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda), \quad \int_{-1}^1 (\varphi - \pi_N\varphi)(y)\psi_N(y)dy = 0. \quad (3.8)$$

Une autre façon de caractériser cet opérateur consiste à remarquer que les polynômes sur Λ forment un sous-espace dense dans l'espace des fonctions continues dans $\bar{\Lambda}$ et donc dans $L^2(\Lambda)$. Par conséquent, la famille $(L_n)_n$ des polynômes de Legendre est une famille totale de l'espace $L^2(\Lambda)$. Comme ces polynômes sont deux à deux orthogonaux dans $L^2(\Lambda)$, toute fonction φ de l'espace $L^2(\Lambda)$ admet le développement

$$\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n L_n, \quad \text{avec} \quad \alpha_n = \frac{1}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2} \int_{-1}^1 \varphi_n L_n(y) dy, \quad (3.9)$$

et l'on a

$$\pi_N\varphi = \sum_{n=0}^N \alpha_n L_n.$$

Théorème 3.1.12. Pour tout entier $m \geq 0$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m telle que, pour toute fonction φ de $H^m(\Lambda)$, on ait

$$\|\varphi - \pi_N\varphi\|_{L^2(\Lambda)} \leq cN^{-m}\|\varphi\|_{H^m(\Lambda)}. \quad (3.10)$$

On a d'abord besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1.13. Pour tout entier $l \geq 0$, l'opérateur \mathbf{A} est continu de $H^{l+2}(\Lambda)$ dans $H^l(\Lambda)$. Pour tous entiers $l \geq 0$ et $m \geq 0$, l'opérateur \mathbf{A}^m est continu de $H^{l+2m}(\Lambda)$ dans $H^l(\Lambda)$. L'opérateur \mathbf{A} défini par

$$\mathbf{A}\varphi = -\frac{d}{dy}((1-y^2)\varphi'). \quad (3.11)$$

Preuve du Théorème : Étant donnée une fonction φ de $H^m(\Lambda)$ pour laquelle on écrit la décomposition (3.9), il faut estimer

$$\|\varphi - \pi_N\varphi\|_{L^2(\Lambda)}^2 = \sum_{n=N+1}^{+\infty} (\alpha_n)^2 \|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2.$$

On va distinguer deux cas, suivant que m est pair ou impair.

1) Lorsque m est pair égal à $2k$, d'après l'équation différentielle 3.1 vérifiée par les polynômes L_n , $n \geq 0$, on a

$$\alpha_n = \frac{1}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2} \int_{-1}^1 \varphi(y) L_n(y) dy = \frac{1}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2} \frac{1}{n(n+1)} \int_{-1}^1 \varphi(y) (\mathbf{A}L_n)(y) dy.$$

Comme l'opérateur \mathbf{A} est auto-adjoint dans $L^2(\Lambda)$, on obtient

$$\alpha_n = \frac{1}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2} \frac{1}{n(n+1)} \int_{-1}^1 (\mathbf{A}\varphi)(y) L_n(y) dy.$$

En itérant k fois ce résultat, on en déduit

$$\alpha_n = \frac{1}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2} \frac{1}{(n(n+1))^k} \int_{-1}^1 (\mathbf{A}^k \varphi)(y) L_n(y) dy.$$

On constate donc que

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|_{L^2(\Lambda)}^2 = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{(n(n+1))^{2k}} \left(\frac{\int_{-1}^1 (\mathbf{A}^k \varphi)(y) L_n(y) dy}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2} \right)^2 \|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2.$$

On minore alors les $n(n+1)$ par N^2 , ce qui donne

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq N^{-4k} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{\int_{-1}^1 (\mathbf{A}^k \varphi)(y) L_n(y) dy}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2} \right)^2 \|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2.$$

Comme les $\frac{\int_{-1}^1 (\mathbf{A}^k \varphi)(y) L_n(y) dy}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2}$ sont les coefficients de $\mathbf{A}^k \varphi$ dans la base des polynômes de Legendre, on a

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq N^{-4k} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\int_{-1}^1 (\mathbf{A}^k \varphi)(y) L_n(y) dy}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2} \right)^2 \|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2 = N^{-4k} \|\mathbf{A}^k \varphi\|_{L^2(\Lambda)}^2.$$

En utilisant le lemme 3.1.13, on conclut (par un résultat en fait un peu moins fin que la ligne précédente, voir [8])

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq cN^{-2m} \|\varphi\|_{H^m(\Lambda)}^2.$$

2) Lorsque m est impair égal à $2k+1$, on obtient comme précédemment

$$\alpha_n = \frac{1}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2} \frac{1}{(n(n+1))^k} \int_{-1}^1 (\mathbf{A}^k \varphi)(y) L_n(y) dy,$$

puis on utilise une fois de plus l'équation différentielle 3.1 et on intègre par parties une seule fois. On en déduit

$$\alpha_n = \frac{1}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2} \frac{1}{(n(n+1))^{k+1}} \int_{-1}^1 (\mathbf{A}^k \varphi)'(y) L_n'(y) (1-y^2) dy.$$

On voit alors que

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|_{L^2(\Lambda)}^2 = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{(n(n+1))^{2(k+1)}} \frac{(\int_{-1}^1 (\mathbf{A}^k \varphi)'(y) L'_n(y) (1-y^2) dy)^2}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2}.$$

On note que, comme les polynômes L'_n , $n \leq 1$, sont deux à deux orthogonaux pour la mesure $(1-y^2)dy$, toute fonction ψ de $H^1(\Lambda)$ admet le développement

$$\psi = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n L_n, \quad \text{avec } \psi_n = \frac{\int_{-1}^1 \psi'(y) L'_n(y) (1-y^2) dy}{\int_{-1}^1 L_n'^2(y) (1-y^2) dy} \quad \text{pour } n \geq 1;$$

de la formule $\int_{-1}^1 L'_m(y) L'_n(y) (1-y^2) dy = n(n+1) \int_{-1}^1 L_m(y) L_n(y) dy$, on déduit alors

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \psi'^2(y) (1-y^2) dy &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\int_{-1}^1 \psi'(y) L'_n(y) (1-y^2) dy)^2}{(\int_{-1}^1 L_n'^2(y) (1-y^2) dy)^2} \int_{-1}^1 L_n'^2(y) (1-y^2) dy \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \frac{(\int_{-1}^1 \psi'(y) L'_n(y) (1-y^2) dy)^2}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2}. \end{aligned}$$

En appliquant cette formule pour la fonction $\psi = \mathbf{A}^k \varphi$ et en minorant $(n(n+1))^{2k+1}$ par $N^{2(2k+1)}$, on voit que

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq N^{-2(2k+1)} \int_{-1}^1 (\mathbf{A}^k \varphi)'(y) (1-y^2) dy.$$

Et on conclut

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq cN^{-2m} \|(\mathbf{A}^k \varphi)'\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq cN^{-2m} \|\mathbf{A}^k \varphi\|_{H^1(\Lambda)}^2,$$

d'où, d'après le lemme 3.1.13,

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq cN^{-2m} \|\varphi\|_{H^m(\Lambda)}^2.$$

■

• **L'opérateur d'interpolation i_N :**

Notation 3.1.14. On note i_N l'opérateur d'interpolation aux points de Gauss-Lobatto : pour toute fonction φ continue sur $\bar{\Lambda}$, $i_N \varphi$ appartient à $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ et vérifie

$$(i_N \varphi)(y_j) = \varphi(y_j), \quad 0 \leq j \leq N. \quad (3.12)$$

3.1.4 Polynômes orthogonaux dans $L_1^2(\Lambda)$

On introduit les polynômes

$$M_n(x) = \frac{L_n(x) + L_{n+1}(x)}{1+x}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Remarque 3.1.15. Les M_n , $n \geq 0$, sont des polynômes car $L_n + L_{n+1}$ est divisible par $1 + x$, puisque -1 est une racine de $L_n + L_{n+1}$.

En effet : puisque les polynômes L_n ont la parité de leur degré, L_n et L_{n+1} sont donc de parités différentes d'où $L_n(-1) = -L_{n+1}(-1)$.

Les polynômes M_n vérifient : pour tous m et n , $m < n$,

$$\int_{-1}^1 M_n(x)M_m(x)(1+x)dx = \int_{-1}^1 (L_n(x) + L_{n+1}(x))M_m(x)dx = 0,$$

puisque le polynôme de Legendre L_n est orthogonal à tous les polynômes de degré $\leq n-1$.

La famille $(M_n)_{n \geq 0}$ est donc une famille de polynômes orthogonaux dans $L_1^2(\Lambda)$ où

$$L_1^2(\Lambda) = \left\{ \varphi : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable; } \int_{-1}^1 \varphi^2(x)(1+x)dx < +\infty \right\}.$$

Proposition 3.1.16. La famille $(M_n)_{n \geq 0}$ est donnée par la relation de pseudo-réurrence suivante

$$\begin{cases} M_0(x) = 1, \\ (n+1)M_n(x) = (2n+1)L_n(x) - nM_{n-1}(x), \quad \forall n \geq 1. \end{cases} \quad (3.13)$$

Preuve. On a

$$M_0(x) = \frac{L_0(x) + L_1(x)}{1+x} = \frac{1+x}{1+x} = 1,$$

et

$$M_n(x) = \frac{L_n(x) + L_{n+1}(x)}{1+x},$$

d'après la formule de récurrence sur les L_n , on a

$$L_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)}{n+1},$$

alors

$$\begin{aligned} (n+1)M_n(x) &= \frac{(n+1)L_n(x) + (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)}{1+x} \\ &= \frac{(1+(2n+1)x)L_n(x) - n(L_{n-1}(x) - L_n(x))}{1+x} \\ &= (2n+1)L_n(x) - n \frac{(L_{n-1}(x) - L_n(x))}{1+x} \\ &= (2n+1)L_n(x) - nM_{n-1}(x). \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Proposition 3.1.17. Pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$\|M_n\|_{L_1^2(\Lambda)} = \sqrt{\frac{2}{n+1}}. \quad (3.14)$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\|M_n\|_{L^2_1(\Lambda)}^2 &= \int_{-1}^1 M_n(x)^2(1+x)dx \\ &= \int_{-1}^1 M_n(x)(L_n(x) + L_{n+1}(x))dx \\ &= \int_{-1}^1 M_n(x)L_n(x) + M_n(x)L_{n+1}(x)dx,\end{aligned}$$

puisque le polynôme L_n est orthogonal à tous les polynômes de degré $\leq n-1$, alors

$$\int_{-1}^1 M_n(x)L_{n+1}(x)dx = 0,$$

d'où

$$\|M_n\|_{L^2_1(\Lambda)}^2 = \int_{-1}^1 M_n(x)L_n(x)dx.$$

De la relation (3.13), on obtient

$$\begin{aligned}\|M_n\|_{L^2_1(\Lambda)}^2 &= \frac{1}{n+1} \left((2n+1) \int_{-1}^1 L_n^2(x)dx - n \overbrace{\int_{-1}^1 M_{n-1}(x)L_n(x)dx}^{=0} \right) \\ &= \frac{2n+1}{n+1} \|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2 = \frac{2n+1}{n+1} \frac{2}{2n+1} \\ &= \frac{2}{n+1}.\end{aligned}$$

■

3.1.5 Formules de Quadrature à poids

• **Formule de quadrature sur l'intervalle :** On définit à présent une formule de quadrature dite de Gauss-Lobatto associée aux polynômes M_n .

Théorème 3.1.18. [5] Soient $x_1 = -1$ et $x_{N+1} = 1$. Il existe un unique ensemble de $(N-1)$ noeuds x_j , $2 \leq j \leq N$ sur Λ et $(N+1)$ poids ω_j tels que,

$$\forall \Phi \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda), \quad \int_{-1}^1 \Phi(x)(1+x) dx = \sum_{j=1}^{N+1} \Phi(x_j)\omega_j, \quad (3.15)$$

les noeuds x_j , $2 \leq j \leq N$ sont les zéros de M'_N . Les poids ω_j , $1 \leq j \leq N+1$, sont données par

$$\omega_1 = \frac{8}{N(N+2)M_N^2(-1)}, \quad \omega_j = \frac{4}{N(N+2)M_N^2(x_j)}, \quad 2 \leq j \leq N+1. \quad (3.16)$$

Remarque 3.1.19. La formule de Gauss-Lobatto tient en compte les extrémités de l'intervalle $] -1, 1[$.

Proposition 3.1.20. *On a la relation d'équivalence suivante*

$$\|\varphi_N\|_{L_1^2(\Lambda)}^2 \leq (\varphi_N, \varphi_N)_N^{(1)} \leq 4\|\varphi_N\|_{L_1^2(\Lambda)}^2, \quad \text{pour tout } \varphi_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda), \quad (3.17)$$

où le produit discret $(\cdot, \cdot)_N^{(1)}$ est donné par

$$(\varphi, \psi)_N^{(1)} = \sum_{j=1}^{N+1} \varphi(x_j)\psi(x_j)\omega_j. \quad (3.18)$$

Pour la preuve de cette proposition on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1.21. *On a l'égalité :*

$$\sum_{j=1}^{N+1} M_N^2(x_j)\omega_j = \left(2 + \frac{2}{N}\right)\|M_N\|_{L_1^2(\Lambda)}^2, \quad (3.19)$$

Preuve. En remplaçant les ω_j , $1 \leq j \leq N+1$ par leurs expressions dans (3.16), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N+1} M_N^2(x_j)\omega_j &= M_N^2(x_1)\omega_1 + \sum_{j=2}^{N+1} M_N^2(x_j)\omega_j \\ &= M_N^2(-1)\frac{8}{N(N+2)M_N^2(-1)} + \sum_{j=2}^{N+1} M_N^2(x_j)\frac{4}{N(N+2)M_N^2(x_j)} \\ &= \frac{4}{N} \\ &= \left(2 + \frac{2}{N}\right)\|M_N\|_{L_1^2(\Lambda)}^2, \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

On a aussi besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1.22. *La famille $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ forme une base de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$.*

Preuve. Comme $\dim(\mathbb{P}_N(\Lambda)) = \text{card}\{M_n, 0 \leq n \leq N\} = N+1$, donc il suffit de montrer que : $\{M_n, 0 \leq n \leq N\}$ est libre.

Soit $(\alpha_n)_{0 \leq n \leq N} \in \mathbb{R}^{N+1}$, tels que $\sum_{n=0}^N \alpha_n M_n = 0$. De la formule de M_n , on a

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n M_n = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} \sum_{n=0}^N \alpha_n (L_n(x) + L_{n+1}(x)) = 0.$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \alpha_n M_n = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{1+x} (\alpha_0 L_0 + (\alpha_0 + \alpha_1)L_1(x) + (\alpha_1 + \alpha_2)L_2(x) + \cdots \\ &\quad + (\alpha_{N-1} + \alpha_N)L_N + \alpha_N L_{N+1}) = 0. \end{aligned}$$

Comme $\{L_n\}_{0 \leq n \leq N}$ est une famille libre, alors $\alpha_n = 0$, $\forall 0 \leq n \leq N$. ■

Revenant à la Preuve de la Proposition 3.1.20.

Puisque la famille $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ forme une base de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$, on écrit le polynôme φ_N de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ sous la forme $\sum_{n=0}^N \alpha_n M_n$. Grâce à l'orthogonalité de M_n dans $L_1^2(\Lambda)$ et la proposition 3.1.17 on peut calculer la norme de φ_N .

$$\|\varphi_N\|_{L_1^2(\Lambda)}^2 = \left(\sum_{n=0}^N \alpha_n M_n, (1+x) \sum_{n=0}^N \alpha_n M_n \right) = \sum_{n=0}^N \alpha_n^2 \|M_n\|_{L_1^2(\Lambda)}^2 = \sum_{n=0}^N (\alpha_n)^2 \frac{2}{n+1}.$$

(où (\cdot, \cdot) est le produit scalaire associé à la norme $\|\cdot\|_{L_1^2(\Lambda)}$).

D'autre part,

$$\begin{aligned} (\varphi_N, \varphi_N)_N^{(1)} &= \sum_{j=1}^{N+1} \varphi_N^2(x_j) \omega_j \\ &= \sum_{j=1}^{N+1} \left(\sum_{n=0}^N \alpha_n M_n(x_j) \right)^2 \omega_j \\ &= \sum_{j=1}^{N+1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n M_n(x_j) + \alpha_N M_N(x_j) \right)^2 \omega_j \\ &= \sum_{j=1}^{N+1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n M_n(x_j) \right)^2 \omega_j + 2 \sum_{j=1}^{N+1} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n \alpha_N M_n(x_j) M_N(x_j) \omega_j \\ &\quad + \alpha_N^2 \sum_{j=1}^{N+1} M_N^2(x_j) \omega_j. \end{aligned}$$

Pour calculer le terme $\sum_{j=1}^{N+1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n M_n(x_j) \right)^2 \omega_j$, on a d'abord

$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n M_n(x_j) \right)^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n^2 M_n^2(x_j) + 2 \sum_{\substack{n=0 \\ k < n}}^{N-1} \alpha_n \alpha_k M_n(x_j) M_k(x_j),$$

d'où :

$$\sum_{j=1}^{N+1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n M_n(x_j) \right)^2 \omega_j = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n^2 \sum_{j=1}^{N+1} M_n^2(x_j) \omega_j + 2 \sum_{\substack{n=0 \\ k < n}}^{N-1} \alpha_n \alpha_k \sum_{j=1}^{N+1} M_n(x_j) M_k(x_j) \omega_j. \quad (3.20)$$

En appliquant la propriété d'exactitude (3.15) sur le premier terme de droite de (3.20), on trouve qu'il est égale à $\sum_{n=0}^{N-1} (\alpha_n)^2 \|M_n\|_{L_1^2(\Lambda)}^2$. Ainsi que pour le second terme (car les polynômes $M_n M_k$, $n, k = 0, \dots, N-1$ sont de degré inférieur à $2N-1$). Ce terme est nul grâce à l'orthogonalité de $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$.

D'où

$$\sum_{j=1}^{N+1} \varphi_N^2(x_j) \omega_j = \sum_{n=0}^{N-1} (\alpha_n)^2 \|M_n\|_{L_1^2(\Lambda)}^2 + \alpha_N^2 \sum_{j=1}^{N+1} M_N^2(x_j) \omega_j,$$

du lemme 3.1.21, on obtient l'égalité

$$\sum_{j=1}^{N+1} \varphi_N^2(x_j) \omega_j = \sum_{n=0}^{N-1} (\alpha_n)^2 \|M_n\|_{L_1^2(\Lambda)}^2 + \left(2 + \frac{2}{N}\right) \alpha_N^2 \|M_N\|_{L_1^2(\Lambda)}^2,$$

puisque

$$1 \leq \left(2 + \frac{2}{N}\right) \leq 4,$$

alors

$$\|\varphi_N\|_{L_1^2(\Lambda)}^2 \leq \sum_{j=1}^{N+1} \varphi_N^2(x_j) \omega_j \leq 4 \|\varphi_N\|_{L_1^2(\Lambda)}^2.$$

■

• **Formule de quadrature sur le carré :**

On introduit d'abord la proposition suivante :

Proposition 3.1.23. *La famille $\{M_n(x)L_m(y)\}_{0 \leq n, m \leq N}$ forme une base de $\mathbb{P}_N(\Lambda^2)$.*

Preuve. Comme $\dim \mathbb{P}_N(\Lambda^2) = (N+1)^2 = \text{card}\{M_n(x)L_m(y)\}_{0 \leq n, m \leq N}$, il reste à démontrer que la famille $\{M_n(x)L_m(y)\}_{0 \leq n, m \leq N}$ est libre. i.e

$$\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \alpha_{n,m} M_n(x) L_m(y) = 0 \Rightarrow \alpha_{n,m} = 0.$$

On a

$$\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \alpha_{n,m} M_n(x) L_m(y) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^N \left(\sum_{m=0}^N \alpha_{n,m} L_m(y) \right) M_n(x) = 0,$$

on pose $\beta_n = \sum_{m=0}^N \alpha_{n,m} L_m(y)$, on trouve

$$\sum_{n=0}^N \beta_n M_n(x) = 0,$$

comme la famille $\{M_n(x)\}_{0 \leq n \leq N}$ forme une base de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$, alors $\beta_n = 0$, donc

$$\sum_{m=0}^N \alpha_{n,m} L_m(y) = 0,$$

et comme la famille $\{L_m(y)\}_{0 \leq m \leq N}$ forme une base de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$, alors $\alpha_{n,m} = 0$.

D'où le résultat. ■

On introduit maintenant le maillage et le produit scalaire sur le carré Λ^2 , obtenus par tensorisation. On considère alors, la grille Σ aux noeuds x_j et y_j , tels que les x_j, y_j sont les zéros de M'_n, L'_n respectivement,

$$\Sigma = \{(x_i, y_j), 1 \leq i \leq N+1 \text{ et } 0 \leq j \leq N\}.$$

Proposition 3.1.24. [3] Soit N un entier positif fixé. Pour tout polynôme Φ de $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda^2)$, on a

$$\forall \Phi \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda^2), \int_{\Lambda^2} \Phi(x, y)(1+x) dx dy = \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=0}^N \Phi(x_i, y_j) \omega_i \rho_j,$$

Par un argument de tensorisation (Proposition 3.1.23) et en utilisant les relations (3.6) et (3.17), on obtient la relation d'équivalence suivante

Proposition 3.1.25. Tout polynôme $\varphi_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda^2)$

$$\|\varphi_N\|_{L_1^2(\Lambda^2)}^2 \leq ((\varphi_N, \varphi_N))_N \leq 12 \|\varphi_N\|_{L_1^2(\Lambda^2)}^2,$$

où pour φ_N, ψ_N continues sur $\overline{\Lambda^2}$:

$$((\varphi_N, \psi_N))_N = \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=0}^N \varphi_N(x_i, y_j) \psi_N(x_i, y_j) \omega_i \rho_j,$$

Preuve. Soit φ_N un polynôme de $\mathbb{P}_N(\Lambda^2)$.

On a

$$((\varphi_N, \varphi_N))_N = \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=0}^N \varphi_N^2(x_i, y_j) \omega_i \rho_j,$$

en utilisant l'inégalité (3.6), on trouve

$$\int_{-1}^1 \sum_{i=1}^{N+1} \varphi_N^2(x_i, y) \omega_i dy \leq \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=0}^N \varphi_N^2(x_i, y_j) \omega_i \rho_j \leq 3 \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^{N+1} \varphi_N^2(x_i, y) \omega_i dy.$$

En utilisant l'inégalité (3.17), on trouve que

$$\|\varphi_N\|_{L_1^2(\Lambda^2)}^2 \leq \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=0}^N \varphi_N^2(x_i, y_j) \omega_i \rho_j \leq 12 \|\varphi_N\|_{L_1^2(\Lambda^2)}^2.$$

■

3.1.6 Erreur d'approximation et d'interpolation polynomiale en une dimension

- Le projecteur $\pi_N^{(1)}$:

Notation 3.1.26. On note par $\pi_N^{(1)}$ l'opérateur de projection orthogonale de l'espace $L_1^2(\Lambda)$ sur l'espace de Polynômes $\mathbb{P}_N(\Lambda)$. Ceci signifie que pour toute fonction φ de $L_1^2(\Lambda)$, $\pi_N^{(1)}\varphi$ appartient à $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ et vérifie

$$\forall \psi_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda), \int_{-1}^1 (\varphi - \pi_N^{(1)}\varphi)(x) \psi_N(x) (1+x) dx = 0. \quad (3.21)$$

Proposition 3.1.27. [3] Pour tout entier $m \geq 0$, il existe une constante positive c telle que pour tout $\varphi \in H_1^m(\Lambda)$, on ait

$$\|\varphi - \pi_N^{(1)}\varphi\|_{L_1^2(\Lambda)} \leq cN^{-m}\|\varphi\|_{H_1^m(\Lambda)}.$$

• **L'opérateur d'interpolation $i_N^{(1)}$:**

On introduit maintenant l'opérateur d'interpolation aux points de Gauss-Lobatto.

Notation 3.1.28. On note $i_N^{(1)}$ l'opérateur d'interpolation aux points de Gauss-Lobatto, c'est à dire les zéros du polynôme M'_N . Il est caractérisé par :

i) : pour toute fonction φ continue sur $\bar{\Lambda}$, $i_N^{(1)}\varphi$ appartient à $\mathbb{P}_N(\Lambda)$.

ii) : $(i_N^{(1)}\varphi)(x_j) = \varphi(x_j)$, $1 \leq j \leq N + 1$.

3.1.7 Erreur d'approximation et d'interpolation Polynomiale en dimension 2

• **Le projecteur Π_N :**

Notation 3.1.29. On note par Π_N l'opérateur de projection orthogonale de $L_1^2(\Lambda^2)$ dans $\mathbb{P}_N(\Lambda^2)$. Cet opérateur est caractérisé par :

i) : $\forall \varphi \in L_1^2(\Lambda^2)$, $\Pi_N\varphi \in \mathbb{P}_N(\Lambda^2)$.

ii) : $\forall \psi_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda^2)$, $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\varphi - \Pi_N\varphi)(x, y)\psi_N(x, y)(1 + x)dxdy = 0$.

Il est analysé par des arguments de tensorisation.

Proposition 3.1.30. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on ait

$$\Pi_N = \pi_N^{(1)} \circ \pi_N.$$

Preuve. i) : Il est clair que $\forall \varphi \in L_1^2(\Lambda^2)$, $\pi_N^{(1)} \circ \pi_N(\varphi) \in \mathbb{P}_N(\Lambda^2)$ par définition de $\pi_N^{(1)}$ et π_N .

ii) : Reste donc à vérifier (ii). Il suffit de le vérifier pour les éléments de la base $\{M_n(x)L_m(y)\}_{0 \leq n, m \leq N}$.
Soit $v \in L_1^2(\Lambda^2)$

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(v(x, y) - \pi_N^{(1)}(\pi_N v(x, y)) \right) M_n(x) L_m(y) (1+x) \, dx dy \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(v(x, y) - \pi_N v(x, y) + \pi_N v(x, y) - \pi_N^{(1)}(\pi_N v(x, y)) \right) M_n(x) L_m(y) (1+x) \, dx dy \\
 &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 (v(x, y) - (\pi_N v(x, y))) L_m(y) dy \right) M_n(x) (1+x) dx \\
 &+ \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 (\pi_N v(x, y) - \pi_N^{(1)}(\pi_N v(x, y))) M_n(x) (1+x) dx \right) L_m(y) dy.
 \end{aligned}$$

Par caractérisation de π_N sur Λ , on a

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 (v(x, y) - \pi_N v(x, y)) L_m(y) dy \right) M_n(x) (1+x) dx = 0.$$

Posons $\gamma_N(x, y) := \pi_N v(x, y)$.

Alors

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 (\pi_N v(x, y) - \pi_N^{(1)}(\pi_N v(x, y))) M_n(x) (1+x) dx \right) L_m(y) dy \\
 &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 (\gamma_N(x, y) - \pi_N^{(1)}\gamma_N(x, y)) M_n(x) (1+x) dx \right) L_m(y) dy \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Par caractérisation de $\pi_N^{(1)}$. D'où le résultat. ■

Par un argument de tensorisation et en utilisant les résultats de la dimension 1, on obtient le résultat suivant :

Proposition 3.1.31. [3] *Pour tout $m \geq 0$, il existe une constante positive c telle que, pour tout $\varphi \in H_1^m(\Lambda^2)$*

$$\|\varphi - \Pi_N \varphi\|_{L_1^2(\Lambda^2)} \leq c N^{-m} \|\varphi\|_{H_1^m(\Lambda^2)}.$$

• **L'opérateur d'interpolation \mathcal{I}_N :**

Notation 3.1.32. *Soit \mathcal{I}_N un opérateur appelé opérateur d'interpolation de Lagrange pour la grille Σ à valeur dans $\mathbb{P}_N(\Lambda^2)$, définis par*

$$\mathcal{I}_N := i_N^{(1)} \circ i_N.$$

On a les résultats suivants :

Proposition 3.1.33. [3]

i) Pour tout entier m , $m \geq 2$, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $\varphi \in H_1^m(\Lambda^2)$,

$$\|\varphi - \mathcal{I}_N \varphi\|_{L_1^2(\Lambda^2)} \leq c N^{-m} \|\varphi\|_{H_1^m(\Lambda^2)}.$$

ii) Pour tout entier m , $m \geq 4$, il existe une $c > 0$ telle que pour tout $\varphi \in H_1^m(\Lambda^2) \cap V_1^1(\Lambda^2)$

$$\|\varphi - \mathcal{I}_N \varphi\|_{V_1^1(\Lambda^2)} \leq cN^{1-m} \|\varphi\|_{H_1^m(\Lambda^2)}.$$

Remarque 3.1.34. 1. Le produit discret sur un domaine rectangulaire $\Omega =]a, b[\times]c, d[$ est donné par,

$$((u, v))_N = \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=0}^N (u \circ F)(x_i, y_j) (v \circ F)(x_i, y_j) |J| w_i \rho_j,$$

F étant la transformation du carré de référence $\Lambda^2 =]-1, 1[^2$ au domaine Ω et $|J|$ étant le déterminant jacobien de cette transformation c'est à dire

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{b-a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{d-c}{2} \end{vmatrix}$$

F est la somme d'une translation et d'une homothétie, donnée par les formules suivantes :

$$(x, y) \mapsto (x', y') = \left(\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}, \frac{d-c}{2}y + \frac{d+c}{2} \right).$$

Le produit discret $((\cdot, \cdot))_N$ sur Ω s'écrit alors,

$$((u, v))_N = \left(\frac{b-a}{2} \right)^2 \left(\frac{d-c}{2} \right) \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=0}^N u(x'_i, y'_j) v(x'_i, y'_j) w_i \rho_j.$$

2. Dans notre cas, le rectangle Ω est $]0, 1[\times]-1, 1[$, le changement de variable suivant :

$$(x, y) \mapsto \left(r = \frac{1+x}{2}, y \right).$$

transforme le carré de référence Λ^2 en le rectangle Ω .

3.2 Approximation par la méthode de Galerkin avec intégration numérique

Notation 3.2.1. Les espaces discrets utilisés lors de la discrétisation spectrale sont les espaces des polynômes $\mathbb{P}_N(\Omega)$: l'ensemble des polynômes de degré $\leq N$ par rapport à chaque coordonnée radiale et axiale. On note $\mathbb{P}_N^*(\Omega)$ le sous-espace des polynômes de $\mathbb{P}_N(\Omega)$ nuls sur Γ_0 ,

$$\mathbb{P}_N^*(\Omega) = \mathbb{P}_N(\Omega) \cap V_1^1(\Omega) = \{v_n \in \mathbb{P}_N(\Omega), v_n = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}.$$

On définit aussi les espaces polynômiaux suivants :

$$\mathbb{P}_N^\circ(\Omega) = \mathbb{P}_N(\Omega) \cap H_{1\circ}^1(\Omega),$$

$$\mathbb{P}_N^\circ(\Omega) = \mathbb{P}_N(\Omega) \cap V_{1\circ}^1(\Omega).$$

Les problèmes discrets sont obtenus à partir des formulations variationnelles continues (2.18) et (2.20), et à partir de la méthode de Galerkin avec intégration numérique. Le degré des Polynômes N étant le paramètre de la discrétisation.

On cherche à construire une solution approchée-tronquée du problème (2.14), sous la forme :

$$\check{u}_{K,N}^*(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-K}^K u_{K,N}^k(r, z) e^{ik\theta}, \quad (3.22)$$

où $u_{K,N}^k$ sont les solutions des problèmes discrets suivants :

pour $k = 0$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_{K,N}^0 \in \mathbb{P}_N(\Omega), \text{ avec } u_{K,N}^0 - \mathcal{I}_N g_K^0 \in \mathbb{P}_N^\circ(\Omega), \text{ telle que} \\ a_N(u_{K,N}^0, v_N) = ((f_K^0, v_N))_N, \quad \forall v_N \in \mathbb{P}_N^\circ(\Omega), \end{array} \right. \quad (3.23)$$

où la forme bilinéaire symétrique $a_N(\cdot, \cdot)$ est donnée par

$$a_N(u_N, v_N) = ((\partial_r u_N, \partial_r v_N))_N + ((\partial_z u_N, \partial_z v_N))_N. \quad (3.24)$$

Dans le cas général, les données \check{f} et \check{g} ne sont pas axisymétriques et le calcul des coefficients de Fourier n'est pas exact. On procède alors par une interpolation trigonométrique en θ , décrite comme suit : sur un intervalle $]-\pi, \pi[$, on introduit les $2K+1$ noeuds équidistants $\theta_l = \frac{2l\pi}{2K+1}$, $-K \leq l \leq K$. Pour toute fonction f telle que $\tilde{f}(r, \theta, z) = \check{f}(x, y, z)$ est continue par rapport à θ , on note par f_K^k le coefficient de Fourier interpolé

$$f_K^k(r, z) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2K+1} \sum_{|l| \leq K} \tilde{f}(r, \theta_l, z) e^{-ik\theta_l}, \quad \text{où } \theta_l = \frac{2l\pi}{2K+1}. \quad (3.25)$$

Le problème variationnel est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_{K,N}^k \in \mathbb{P}_N^*(\Omega), \text{ avec } u_{K,N}^k - \mathcal{I}_N g_K^k \in \mathbb{P}_N^\circ(\Omega), \text{ telle que} \\ a_{k,N}(u_{K,N}^k, v_N) = ((f_K^k, v_N))_N, \quad \forall v_N \in \mathbb{P}_N^\circ(\Omega), \end{array} \right. \quad (3.26)$$

tel que \mathcal{I}_N est l'opérateur d'interpolation au points de Gauss-Lobatto (x_i, y_j) où la forme bilinéaire $a_{k,N}(\cdot, \cdot)$ est donnée par

$$a_{k,N}(u_N, v_N) = a_N(u_N, v_N) + k^2 \left(\left(\frac{u_N}{r}, \frac{v_N}{r} \right) \right)_N. \quad (3.27)$$

Démontrons maintenant que les problèmes discrets (3.23) et (3.26) sont bien posés :

Lemme 3.2.2. 1. La forme bilinéaire symétrique (3.24) vérifie les deux propriétés : de continuité

$$\forall u_N, v_N \in \mathbb{P}_N(\Omega), \quad |a_N(u_N, v_N)| \leq 4 |u_N|_{H_1^1(\Omega)} |v_N|_{H_1^1(\Omega)},$$

et d'ellipticité

$$\forall u_N \in \mathbb{P}_N(\Omega), \quad a_N(u_N, u_N) \geq |u_N|_{H_1^1(\Omega)}^2.$$

2. Pour $k \neq 0$, la forme bilinéaire symétrique (3.27) vérifie les deux propriétés : de continuité

$$\forall u_N, v_N \in \mathbb{P}_N(\Omega), \quad |a_{k,N}(u_N, v_N)| \leq 4 \|u_N\|_{H_{(k)}^1(\Omega)} \|v_N\|_{H_{(k)}^1(\Omega)},$$

et d'ellipticité

$$\forall u_N \in \mathbb{P}_N(\Omega), \quad a_{k,N}(u_N, u_N) \geq \|u_N\|_{H_{(k)}^1(\Omega)}^2.$$

Preuve. – Continuité de $a_{k,N}(\cdot, \cdot)$: On a pour tout $u_N, v_N \in \mathbb{P}_N(\Omega)$:

$$a_{k,N}(u_N, v_N) = ((\partial_r u_N, \partial_r v_N))_N + ((\partial_z u_N, \partial_z v_N))_N + k^2 \left(\frac{u_N}{r}, \frac{v_N}{r} \right)_N. \quad (3.28)$$

Le terme $\partial_r u_N \partial_r v_N$ est de degré $\leq 2N - 2$ par rapport à r , de même pour le polynôme $\frac{u_N}{r} \cdot \frac{v_N}{r}$. Le terme $\partial_z u_N \partial_z v_N$ est de degré $\leq 2N - 2$ par rapport à z . Pour estimer le premier terme de (3.28), on utilise la formule d'exactitude (3.15), on trouve

$$\begin{aligned} ((\partial_r u_N, \partial_r v_N))_N &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=0}^N \partial_r u_N(r_i, y_j) \partial_r v_N(r_i, y_j) \omega_i \rho_j \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^N \partial_r u_N(r, y_j) \partial_r v_N(r, y_j) \rho_j \right) r dr, \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$((\partial_r u_N, \partial_r v_N))_N \leq \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^N (\partial_r u_N(r, y_j))^2 \rho_j \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=0}^N (\partial_r v_N(r, y_j))^2 \rho_j \right)^{\frac{1}{2}} r dr,$$

l'inégalité (3.6), donne

$$((\partial_r u_N, \partial_r v_N))_N \leq 3 \int_0^1 (\|\partial_r u_N(r, \cdot)\|_{L^2(\Lambda)} \|\partial_r v_N(r, \cdot)\|_{L^2(\Lambda)}) r dr,$$

on utilise une autre fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$((\partial_r u_N, \partial_r v_N))_N \leq 3 \|\partial_r u_N\|_{L_1^2(\Omega)} \|\partial_r v_N\|_{L_1^2(\Omega)}.$$

Pour le second terme, grâce à la formule d'exactitude (3.4), on a

$$\begin{aligned} ((\partial_z u_N, \partial_z v_N))_N &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=0}^N \partial_z u_N(r_i, y_j) \partial_z v_N(r_i, y_j) \omega_i \rho_j \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \left(\sum_{i=1}^{N+1} \partial_z u_N(r_i, z) \partial_z v_N(r_i, z) \omega_i \right) dz, \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$((\partial_z u_N, \partial_z v_N))_N \leq \int_{-1}^1 \left(\sum_{i=1}^{N+1} (\partial_z u_N(r_i, z))^2 \omega_i \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{N+1} (\partial_z v_N(r_i, z))^2 \omega_i \right)^{\frac{1}{2}} dz,$$

l'inégalité (3.6) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donnent

$$\begin{aligned} ((\partial_z u_N, \partial_z v_N))_N &\leq 4 \int_{-1}^1 (\|\partial_z u_N(\cdot, z)\|_{L_1^2(]0,1[)} \|\partial_z v_N(\cdot, z)\|_{L_1^2(]0,1[)}) dz \\ &\leq 4 \|\partial_z u_N\|_{L_1^2(\Omega)} \cdot \|\partial_z v_N\|_{L_1^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Concernant le dernier terme de (3.28), on a

$$k^2 \left(\left(\frac{u_N}{r}, \frac{v_N}{r} \right) \right)_N = \frac{k^2}{4} \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=0}^N \frac{1}{r^2} u_N(r_i, y_j) v_N(r_i, y_j) w_i \rho_j,$$

on utilise la formule d'exactitude (3.15), on trouve

$$k^2 \left(\left(\frac{u_N}{r}, \frac{v_N}{r} \right) \right)_N = k^2 \int_0^1 \frac{1}{r^2} \left(\sum_{j=0}^N u_N(r, y_j) v_N(r, y_j) \rho_j \right) r dr.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz, donne

$$\begin{aligned} k^2 \left(\left(\frac{u_N}{r}, \frac{v_N}{r} \right) \right)_N &\leq k^2 \int_0^1 \|u_N\|_{L^2(\Lambda)} \|v_N\|_{L^2(\Lambda)} r^{-1} dr \\ &\leq k^2 \|u_N\|_{L_{-1}^2(\Omega)} \|v_N\|_{L_{-1}^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} a_{k,N}(u_N, v_N) &\leq 3(\|\partial_r u_N\|_{L_1^2(\Omega)} \|\partial_r v_N\|_{L_1^2(\Omega)}) + 4(\|\partial_z u_N\|_{L_1^2(\Omega)} \|\partial_z v_N\|_{L_1^2(\Omega)}) \\ &\quad + k^2(\|u_N\|_{L_{-1}^2(\Omega)} \|v_N\|_{L_{-1}^2(\Omega)}) \\ &\leq 4(|u_N|_{H_1^1(\Omega)} |v_N|_{H_1^1(\Omega)}) + k^2(\|u_N\|_{L_{-1}^2(\Omega)} \|v_N\|_{L_{-1}^2(\Omega)}). \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} |a_{k,N}(u_N, v_N)| &\leq 4\|u_N\|_{H_1^1(\Omega)} \|v_N\|_{H_1^1(\Omega)} + k^2 \|u_N\|_{L_{-1}^2(\Omega)} \|v_N\|_{L_{-1}^2(\Omega)} \\ &\leq 4\|u_N\|_{H_{(k)}^1(\Omega)} \|v_N\|_{H_{(k)}^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

– ellipticité de $a_{k,N}(\cdot, \cdot)$: On a pour $u_N \in \mathbb{P}_N(\Omega)$

$$a_{k,N}(u_N, u_N) = \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=0}^N \left((\partial_r u_N)^2 + (\partial_z u_N)^2 \right) (r_i, y_j) w_i \rho_j + k^2 \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=0}^N \frac{1}{r^2} u_N^2(r_i, y_j) w_i \rho_j.$$

On remarque que $\partial_r u_N$, $\partial_z u_N$ ont des degrés $\leq N - 1$ en r respectivement en z et $\frac{u_N}{r}$, $\frac{v_N}{r}$ ont des degrés $\leq N - 1$ par rapport à r , alors on utilise les formules d'exactitude (3.4) et (3.15) pour obtenir :

$$\begin{aligned} a_{k,N}(u_N, u_N) &= \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^N (\partial_r u_N)^2(r, y_j) \rho_j \right) r dr + \int_{-1}^1 \left(\sum_{i=1}^{N+1} (\partial_z u_N)^2(r_i, z) w_i \right) dz \\ &\quad + k^2 \int_0^1 \frac{1}{r^2} \left(\sum_{j=0}^N u_N^2(r, y_j) \omega_j \right) r dr. \end{aligned}$$

Les inégalités (3.6) et (3.17) permettent de déduire que

$$\begin{aligned} a_{k,N}(u_N, u_N) &\geq \int_0^1 \|\partial_r u_N(r, \cdot)\|_{L^2(\Lambda)}^2 r dr + \int_{-1}^1 \|\partial_z u_N(\cdot, z)\|_{L^2_1(0,1D)}^2 dz \\ &\quad + k^2 \int_0^1 \|u_N(r, \cdot)\|_{L^2(\Lambda)}^2 r^{-1} dr. \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} a_{k,N}(u_N, u_N) &\geq \|\partial_r u_N\|_{L^2_1(\Omega)}^2 + \|\partial_z u_N\|_{L^2_1(\Omega)}^2 + k^2 \|u_N\|_{L^2_{-1}(\Omega)}^2 \\ &= \|u_N\|_{H^1_1(\Omega)}^2 + k^2 \|u_N\|_{L^2_{-1}(\Omega)}^2 \\ &= \|u_N\|_{V^1_1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Les mêmes arguments permettent d'avoir la continuité et l'ellipticité de $a_N(\cdot, \cdot)$. ■

Corollaire 3.2.3. *Le problème (3.26) admet une solution unique $u_{K,N}^k$. De plus elle vérifie*

$$\|u_{K,N}^k\|_{H^1_{(k)}(\Omega)} \leq c \left(\|f_K^k\|_{L^2_1(\Omega)} + \|g_K^k\|_{H^1_{(k)}(\Omega)} \right). \quad (3.29)$$

Preuve. D'après l'ellipticité de $a_{K,N}(\cdot, \cdot)$, on a

$$\|u_{K,N}^k\|_{H^1_{(k)}(\Omega)}^2 \leq a_{K,N}(u_{K,N}^k, u_{K,N}^k).$$

Posons $u_{K,N}^k = v_N$ dans la formulation variationnelle (3.26), il vient que

$$\|u_{K,N}^k\|_{H^1_{(k)}(\Omega)}^2 \leq a_{K,N}(u_{K,N}^k, u_{K,N}^k) = ((f_K^k, u_{K,N}^k))_N - a_{K,N}(g_K^k, u_{K,N}^k),$$

d'après la continuité de $((f_K^k, \cdot))_N$ et $a_{K,N}(\cdot, \cdot)$, on obtient

$$\|u_{K,N}^k\|_{H^1_{(k)}(\Omega)} \leq c \left(\|f_K^k\|_{L^2_1(\Omega)} + \|g_K^k\|_{H^1_{(k)}(\Omega)} \right). \quad \blacksquare$$

3.3 Estimation d'erreur

Dans cette section, on cherche à estimer l'erreur entre \check{u} la solution exacte de (2.10) et $\check{u}_{K,N}^*$ la solution approchée donnée par (3.22). Pour cela, on introduit la fonction intermédiaire

$$\check{u}_{K,N}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-K}^K u_N^k(r, z) e^{ik\theta}, \quad (3.30)$$

$(u_N^k)_k$ étant les solutions des problèmes discrets (3.23) et (3.26), en remplaçant les coefficients de Fourier tronqués f_K^k et g_K^k des données \check{f} et \check{g} , par ceux calculés d'une façon exacte, notés

f^k et g^k . Les u_N^k sont les solutions des problèmes discrets suivants :
pour $k = 0$,

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_N^0 \in \mathbb{P}_N(\Omega), \text{ avec } u_N^0 - \mathcal{I}_N g^0 \in \mathbb{P}_N^\circ(\Omega), \text{ telle que} \\ a_N(u_N^0, v_N) = ((f^0, v_N))_N, \quad \forall v_N \in \mathbb{P}_N^\circ(\Omega), \end{cases} \quad (3.31)$$

pour $k \neq 0$,

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_N^k \in \mathbb{P}_N^*(\Omega), \text{ avec } u_N^k - \mathcal{I}_N g^k \in \mathbb{P}_N^\circ(\Omega), \text{ telle que} \\ a_{k,N}(u_N^k, v_N) = ((f^k, v_N))_N, \quad \forall v_N \in \mathbb{P}_N^\circ(\Omega), \end{cases} \quad (3.32)$$

où $a_N(\cdot, \cdot)$ et $a_{k,N}(\cdot, \cdot)$ sont données par (3.24) et (3.27).

Remarque 3.3.1. *Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution des problèmes (3.31), (3.32), on utilise les arguments de la section précédente, de plus on a*

$$\|u_N^k\|_{H^1_{(k)}(\Omega)} \leq c(\|f^k\|_{L^2_1(\Omega)} + \|g^k\|_{H^1_{(k)}(\Omega)}).$$

On cherche maintenant à estimer l'erreur $\|\check{u} - \check{u}_{K,N}^*\|_{H^1(\check{\Omega})}$: D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\|\check{u} - \check{u}_{K,N}^*\|_{H^1(\check{\Omega})} \leq \|\check{u} - \check{u}_{K,N}\|_{H^1(\check{\Omega})} + \|\check{u}_{K,N} - \check{u}_{K,N}^*\|_{H^1(\check{\Omega})}.$$

Étape 1 : Dans cette étape, on va estimer $\|\check{u} - \check{u}_{K,N}\|_{H^1(\check{\Omega})}$. Pour cela, on introduit une nouvelle fonction intermédiaire :

$$\check{u}_{[K]}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-K}^K u^k(r, z) e^{ik\theta},$$

où u^k est le coefficient de Fourier de \check{u} . D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\|\check{u} - \check{u}_{K,N}\|_{H^1(\check{\Omega})} \leq \|\check{u} - \check{u}_{[K]}\|_{H^1(\check{\Omega})} + \|\check{u}_{[K]} - \check{u}_{K,N}\|_{H^1(\check{\Omega})}. \quad (3.33)$$

Pour estimer le premier terme de droite de l'inégalité précédente, on utilise la proposition 2.3.4. Pour le second terme, on a

$$\begin{aligned} \|\check{u}_{[K]} - \check{u}_{K,N}\|_{H^1(\check{\Omega})}^2 &= \int_{\check{\Omega}} |\check{u}_{[K]} - \check{u}_{K,N}|^2 r dr d\theta dz + \int_{\check{\Omega}} |\partial_r(\check{u}_{[K]} - \check{u}_{K,N})|^2 + \\ &\quad |\partial_z(\check{u}_{[K]} - \check{u}_{K,N})|^2 + |\partial_\theta(\check{u}_{[K]} - \check{u}_{K,N})|^2 r dr d\theta dz, \end{aligned}$$

en remplaçant $\check{u}_{[K]}$, $\check{u}_{K,N}$ par leurs expressions, on trouve

$$\begin{aligned} \|\check{u}_{[K]} - \check{u}_{K,N}\|_{H^1(\check{\Omega})}^2 &\leq \int_{\check{\Omega}} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-K}^K |u^k(r, z) - u_N^k(r, z)|^2 r dr d\theta dz \\ &+ \int_{\check{\Omega}} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-K}^K |\partial_r(u^k(r, z) - u_N^k(r, z))|^2 r dr d\theta dz \\ &+ \int_{\check{\Omega}} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-K}^K |\partial_z(u^k(r, z) - u_N^k(r, z))|^2 r dr d\theta dz \\ &+ \int_{\check{\Omega}} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-K}^K k^2 |u^k(r, z) - u_N^k(r, z)|^2 r dr d\theta dz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\check{u}_{[K]} - \check{u}_{K,N}\|_{H^1(\check{\Omega})}^2 &\leq \sum_{k=-K}^K \left(\int_{\Omega} |u^k(r, z) - u_N^k(r, z)|^2 r dr dz \right. \\ &+ \int_{\Omega} |\partial_r(u^k(r, z) - u_N^k(r, z))|^2 r dr dz \\ &+ \int_{\Omega} |\partial_z(u^k(r, z) - u_N^k(r, z))|^2 r dr dz \\ &\left. + \frac{k^2}{r^2} \int_{\Omega} |u^k(r, z) - u_N^k(r, z)|^2 r dr dz \right), \end{aligned}$$

alors

$$\|\check{u}_{[K]} - \check{u}_{K,N}\|_{H^1(\check{\Omega})}^2 \leq \sum_{k=-K}^K \left(\|u^k - u_N^k\|_{H^1_1(\Omega)}^2 + k^2 \|u^k - u_N^k\|_{L^2_{-1}(\Omega)}^2 \right),$$

d'où

$$\|\check{u}_{[K]} - \check{u}_{K,N}\|_{H^1(\check{\Omega})}^2 \leq c \sum_{k=-K}^K \|u^k - u_N^k\|_{H^1_{(k)}(\Omega)}^2. \quad (3.34)$$

Étape 2 : Estimation de $\|u^k - u_N^k\|_{H^1_{(k)}(\Omega)}^2$.

Définition 3.3.2. Soit $\Pi_N^{(k)}$ l'opérateur de projection orthogonale de $H^1_{(k)}(\Omega)$ sur $\mathbb{P}_N(\Omega) \cap H^1_{(k)}(\Omega)$.

Proposition 3.3.3. [7] Pour tout $m \geq 1$, il existe une constante positive c telle que, pour tout $u \in H^m_1(\Omega)$.

$$\|u - \Pi_N^{(k)} u\|_{H^1_{(k)}(\Omega)} \leq c N^{1-m} \|u\|_{H^m_1(\Omega)},$$

la constante c étant indépendante de k .

On a donc l'estimation d'erreur suivante :

Proposition 3.3.4. *Pour $k \neq 0$, l'erreur entre le coefficient de Fourier u^k de la solution exacte du problème (2.20) et celui de la solution approchée u_N^k du problème (3.32), est majorée par :*
 pour $w_N \in \mathbb{P}_N^*(\Omega)$, vérifiant $u_N^k - w_N \in \mathbb{P}_N^\circ(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \|u^k - u_N^k\|_{H_{(k)}^1(\Omega)} &\leq c(\|u^k - w_N\|_{H_{(k)}^1(\Omega)} + \|u^k - \Pi_{N-1}^{(k)}u^k\|_{H_{(k)}^1(\Omega)} \\ &\quad + \|f^k - \Pi_{N-1}^+f^k\|_{L_1^2(\Omega)} + \|f^k - \mathcal{I}_Nf^k\|_{L_1^2(\Omega)}). \end{aligned}$$

Preuve. Soit $w_N \in \mathbb{P}_N^*(\Omega)$, avec $u_N^k - w_N \in \mathbb{P}_N^\circ(\Omega)$.

De (3.32), on a :

$$\begin{aligned} a_{k,N}(u_N^k - w_N, u_N^k - w_N) &= a_{k,N}(u_N^k, u_N^k - w_N) - a_{k,N}(w_N, u_N^k - w_N) \\ &= ((f^k, u_N^k - w_N))_N - a_{k,N}(w_N, u_N^k - w_N), \end{aligned}$$

on fait intervenir le problème continu (2.20),

$$\begin{aligned} a_{k,N}(u_N^k - w_N, u_N^k - w_N) &= a_k(u^k, u_N^k - w_N) - a_{k,N}(w_N, u_N^k - w_N) \\ &\quad + ((f^k, u_N^k - w_N))_N - \langle f^k, u_N^k - w_N \rangle. \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés d'exactitude de l'intégration numérique pour les polynômes de degré $\leq 2N - 1$, et par définition de \mathcal{I}_N , on a

$$\begin{aligned} a_{k,N}(u_N^k - w_N, u_N^k - w_N) &= a_k(u^k - \Pi_{N-1}^{(k)}u^k, u_N^k - w_N) - a_{k,N}(w_N - \Pi_{N-1}^{(k)}u^k, u_N^k - w_N) \\ &\quad + ((\mathcal{I}_Nf^k - \Pi_{N-1}^+f^k, u_N^k - w_N))_N - \langle f^k - \Pi_{N-1}^+f^k, u_N^k - w_N \rangle. \end{aligned}$$

L'ellipticité de $a_{k,N}(\cdot, \cdot)$ donne

$$\begin{aligned} \|u_N^k - w_N\|_{H_{(k)}^1(\Omega)}^2 &\leq a_k(u^k - \Pi_{N-1}^{(k)}u^k, u_N^k - w_N) - a_{k,N}(w_N - \Pi_{N-1}^{(k)}u^k, u_N^k - w_N) \\ &\quad + ((\mathcal{I}_Nf^k - \Pi_{N-1}^+f^k, u_N^k - w_N))_N - \langle f^k - \Pi_{N-1}^+f^k, u_N^k - w_N \rangle. \end{aligned}$$

La propriété de continuité de $a_k(\cdot, \cdot)$, $a_{k,N}(\cdot, \cdot)$ et de $\langle f^k, \cdot \rangle$ donne

$$\begin{aligned} \|u_N^k - w_N\|_{H_{(k)}^1(\Omega)} &\leq c(\|u^k - \Pi_{N-1}^{(k)}u^k\|_{H_{(k)}^1(\Omega)} + \|w_N - \Pi_{N-1}^{(k)}u^k\|_{H_{(k)}^1(\Omega)} \\ &\quad + \|\mathcal{I}_Nf^k - \Pi_{N-1}^+f^k\|_{L_1^2(\Omega)} + \|f^k - \Pi_{N-1}^+f^k\|_{L_1^2(\Omega)}). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} \|u_N^k - w_N\|_{H_{(k)}^1(\Omega)} &\leq c(\|u^k - \Pi_{N-1}^{(k)}u^k\|_{H_{(k)}^1(\Omega)} + \|w_N - \Pi_{N-1}^{(k)}u^k\|_{H_{(k)}^1(\Omega)} \\ &\quad + \|f^k - \Pi_{N-1}^+f^k\|_{L_1^2(\Omega)} + \|f^k - \mathcal{I}_Nf^k\|_{L_1^2(\Omega)}). \end{aligned}$$

■

Remarque 3.3.5. *Dans la proposition 3.3.4, on peut choisir $w_N = \mathcal{I}_Nu^k$, puisque $\mathcal{I}_Nu^k \in \mathbb{P}_N^*(\Omega)$ et $u_N^k - \mathcal{I}_Nu^k = (u_N^k - \mathcal{I}_Ng^k) + \mathcal{I}_N(g^k - u^k)$, $u_N^k - \mathcal{I}_Ng^k \in \mathbb{P}_N^\circ(\Omega)$ de (3.32) et $u^k - g^k \in V_{1\circ}^1(\Omega)$ de (2.20).*

En utilisant les Propositions 3.1.31, 3.1.33 et 3.3.3, on arrive à trouver le résultat énoncé dans le Théorème suivant :

Théorème 3.3.6. *Pour m et σ deux entiers tels que $m \geq 4$ et $\sigma \geq 2$, si on suppose que $u^k \in H_1^m(\Omega) \cap V_1^1(\Omega)$ et $f^k \in H_1^\sigma(\Omega)$, on a*

$$\|u^k - u_N^k\|_{H_{(k)}^1(\Omega)} \leq c(N^{1-m}\|u^k\|_{H_1^m(\Omega)} + N^{-\sigma}\|f^k\|_{H_1^\sigma(\Omega)}),$$

la constante c ne dépendant pas de k .

Remarque 3.3.7. *Pour $k = 0$, on a les mêmes étapes précédentes, en remplaçant juste l'opérateur de projection $\Pi_{N-1}^{(k)}$ par $\Pi_{N-1}^{+,1}$, où $\Pi_{N-1}^{+,1}$ est l'opérateur de projection orthogonale de $H_1^1(\Omega)$ sur $\mathbb{P}_N(\Omega) \cap H_1^1(\Omega)$.*

En utilisant le théorème 3.3.6, l'inégalité (3.34) et la proposition 2.3.4, on obtient l'estimation d'erreur

Proposition 3.3.8. *Pour m et σ deux entiers tels que $m \geq 4$ et $\sigma \geq 2$, on suppose que la solution du problème (2.10) $\check{u} \in H^m(\check{\Omega})$ et que $\check{f} \in H^\sigma(\check{\Omega})$. On a alors l'estimation d'erreur entre la solution \check{u} et la fonction $\check{u}_{K,N}$ donnée par (3.30) :*

$$\|\check{u} - \check{u}_{K,N}\|_{H^1(\check{\Omega})} \leq c((N^{1-m} + K^{1-m})\|\check{u}\|_{H^m(\check{\Omega})} + N^{-\sigma}\|\check{f}\|_{H^\sigma(\check{\Omega})}). \quad (3.35)$$

Étape 3 : Estimation de $\|\check{u}_{K,N} - \check{u}_{K,N}^*\|_{H^1(\check{\Omega})}$

On a

$$\|\check{u}_{K,N} - \check{u}_{K,N}^*\|_{H^1(\check{\Omega})}^2 \leq c \sum_{k=-K}^K \|u_N^k - u_{K,N}^k\|_{H_{(k)}^1(\Omega)}^2.$$

Pour majorer le terme $\|\check{u}_{K,N} - \check{u}_{K,N}^*\|_{H^1(\check{\Omega})}^2$, il suffit de majorer $\|u_N^k - u_{K,N}^k\|_{H_{(k)}^1(\Omega)}^2$.

D'après l'ellipticité de $a_{k,N}(\cdot, \cdot)$, on a

$$\begin{aligned} \|u_N^k - u_{K,N}^k\|_{H_{(k)}^1(\Omega)}^2 &\leq a_{k,N}(u_N^k - u_{K,N}^k, u_N^k - u_{K,N}^k) \\ &= a_{k,N}(u_N^k, u_N^k - u_{K,N}^k) - a_{k,N}(u_{K,N}^k, u_N^k - u_{K,N}^k), \end{aligned}$$

la continuité de $a_{k,N}(\cdot, \cdot)$, donne

$$\|u_N^k - u_{K,N}^k\|_{H_{(k)}^1(\Omega)} \leq c\left(\|u_N^k\|_{H_{(k)}^1(\Omega)} + \|u_{K,N}^k\|_{H_{(k)}^1(\Omega)}\right).$$

D'après la stabilité de u_N^k et $u_{K,N}^k$, on obtient

$$\begin{aligned} \|u_N^k - u_{K,N}^k\|_{H_{(k)}^1(\Omega)} &\leq c\left(\|f^k - f_K^k\|_{L_1^2(\Omega)} + \|g^k - g_K^k\|_{H_{(k)}^1(\Omega)}\right) \\ &\leq c\left(\|\mathcal{I}_N f^k - \mathcal{I}_N f_K^k\|_{L_1^2(\Omega)} + \|\mathcal{I}_N g^k - \mathcal{I}_N g_K^k\|_{H_{(k)}^1(\Omega)}\right). \end{aligned}$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \|u_N^k - u_{K,N}^k\|_{H^1_{(k)}(\Omega)} &\leq \|f^k - \mathcal{I}_N f^k\|_{L^2_1(\Omega)} + \|f_K^k - \mathcal{I}_N f_K^k\|_{L^2_1(\Omega)} \\ &\quad + \|f^k - f_K^k\|_{L^2_1(\Omega)} + \|g^k - \mathcal{I}_N g^k\|_{H^1_{(k)}(\Omega)} \\ &\quad + \|g_K^k - \mathcal{I}_N g_K^k\|_{H^1_{(k)}(\Omega)} + \|g^k - g_K^k\|_{H^1_{(k)}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Pour estimer le premier terme de droite de l'inégalité (3.36), d'après la proposition 3.1.33, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\|f^k - \mathcal{I}_N f^k\|_{L^2_1(\Omega)} \leq cN^{-\sigma} \|f^k\|_{H^{\sigma}_1(\Omega)},$$

pour m et σ deux entiers, tels que $m \geq 4$ et $\sigma \geq 2$, on suppose que $\check{g} \in H^m(\check{\Omega})$ et $\check{f} \in H^{\sigma}(\check{\Omega})$. Alors, d'après l'inégalité (2.8), on a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|f^k - \mathcal{I}_N f^k\|_{L^2_1(\Omega)} \leq cN^{-\sigma} \|\check{f}\|_{H^{\sigma}(\check{\Omega})}. \quad (3.37)$$

Pour le deuxième terme, d'après la proposition 3.1.33, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on obtient

$$\|f_K^k - \mathcal{I}_N f_K^k\|_{L^2_1(\Omega)} \leq cN^{-\sigma} \|f_K^k\|_{H^{\sigma}_1(\Omega)},$$

d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\|f_K^k - \mathcal{I}_N f_K^k\|_{L^2_1(\Omega)} \leq cN^{-\sigma} (\|f^k - f_K^k\|_{H^{\sigma}_1(\Omega)} + \|f^k\|_{H^{\sigma}_1(\Omega)}).$$

On somme sur k et on utilise la proposition 2.3.4 et l'inégalité (2.8), pour déduire que :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|f^k - f_K^k\|_{H^{\sigma}_1(\Omega)} &\leq c \|\check{f} - \check{f}_K\|_{H^{\sigma}(\check{\Omega})} \\ &\leq c \|\check{f}\|_{H^{\sigma}(\check{\Omega})}, \end{aligned}$$

et que par conséquent

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|f_K^k - \mathcal{I}_N f_K^k\|_{L^2_1(\Omega)} \leq cN^{-\sigma} \|\check{f}\|_{H^{\sigma}(\check{\Omega})}. \quad (3.38)$$

En utilisant les mêmes arguments de l'inégalité (3.38) pour estimer le troisième terme de l'inégalité (3.36), on a le résultat

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|f^k - f_K^k\|_{L^2_1(\Omega)} &\leq c \|\check{f} - \check{f}_K\|_{L^2(\check{\Omega})} \\ &\leq cK^{-\sigma} \|\check{f}\|_{H^{\sigma}(\check{\Omega})}. \end{aligned}$$

On a alors

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|f^k - f_K^k\|_{L^2_1(\Omega)} \leq cK^{-\sigma} \|\check{f}\|_{H^{\sigma}(\check{\Omega})}. \quad (3.39)$$

De même façon, on trouve les résultats suivantes :

Pour le terme $\|g^k - \mathcal{I}_N g^k\|_{H^1_{(k)}(\Omega)}$, d'après la proposition 3.36, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|g^k - \mathcal{I}_N g^k\|_{H^1_{(k)}(\Omega)} \leq cN^{1-m} \|\check{g}\|_{H^m(\check{\Omega})}. \quad (3.40)$$

Et pour le terme $\|g_K^k - \mathcal{I}_N g_K^k\|_{H^1_{(k)}(\Omega)}$, on trouve que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|g_K^k - \mathcal{I}_N g_K^k\|_{H^1_{(k)}(\Omega)} \leq cN^{1-m} \|\check{g}\|_{H^m(\check{\Omega})}. \quad (3.41)$$

Enfin, pour le dernier terme de l'inégalité (3.36), on obtient

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|g^k - g_K^k\|_{H^1_{(k)}(\Omega)} \leq cK^{1-m} \|\check{g}\|_{H^m(\check{\Omega})}. \quad (3.42)$$

Alors d'après les inégalités (3.37), (3.38), (3.39), (3.40), (3.41) et (3.42), on obtient :

$$\begin{aligned} \|\check{u}_{K,N} - \check{u}_{K,N}^*\|_{H^1(\check{\Omega})} &\leq c \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|u_N^k - u_{K,N}^k\|_{H^1_{(k)}(\Omega)} \\ &\leq c((K^{-\sigma} + N^{-\sigma}) \|\check{f}\|_{H^\sigma(\check{\Omega})} + (K^{1-m} + N^{1-m}) \|\check{g}\|_{H^m(\check{\Omega})}). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Le résultat final est le suivant

Proposition 3.3.9. *Pour m un entier tel que $m \geq 4$, on suppose que la solution du problème (2.10) $\check{u} \in H^m(\check{\Omega})$ et que $(\check{f}, \check{g}) \in H^\sigma(\check{\Omega}) \times H^{\sigma+2}(\check{\Omega})$. L'estimation d'erreur entre la solution \check{u} du problème (2.10) et la fonction $\check{u}_{K,N}^*$ donnée par (3.22) est :*

$$\|\check{u} - \check{u}_{K,N}^*\|_{H^1(\check{\Omega})} \leq c (N^{1-m} \|\check{u}\|_{H^m(\check{\Omega})} + (N^{-\sigma} + K^{-\sigma})(\|\check{f}\|_{H^\sigma(\check{\Omega})} + \|\check{g}\|_{H^{\sigma+2}(\check{\Omega})})).$$

Bibliographie

- [1] **R.A. Adams**, *Sobolev Spaces*, Academic Press, San Francisco, London, 1975.
- [2] **G. Allaire**, *Analyse Numérique et Optimisation*, Ecole Polytechnique, Novembre 2007.
- [3] **K. Bellalouna**, *Résolution d'E.D.P. par la Méthode Spectrale sur un Réseau de Cylindres*, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2007.
- [4] **C. Bernardi, M. Dauge, Y. Maday**, *Polynomials in Weighted Sobolev Spaces : basics and trace liftings*, Internal Report 92039, Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Paris 1992.
- [5] **C. Bernardi, M. Dauge, Y. Maday, M. Azaïz**, *Spectral Methods for Axisymmetric Domains*, "Series in Applied Mathematics" 3, Gauthier-Villars North-Holland 1999.
- [6] **C. Bernardi, V. Girault, Y. Maday**, *Approximation Variationnelle : Méthodes d'éléments Finis et Méthodes Spectrales*, Université Pierre et Marie Curie-Paris, Cours de DEA, Octobre 1990.
- [7] **C. Bernardi, Y. Maday**, *Approximations Spectrales de Problèmes aux Limites Elliptiques*, Collection "Mathématiques et application" 10, Springer- Verlag 1992.
- [8] **C. Bernardi, Y. Maday**, *Polynomial Approximation of some Singular Functions*, Applicable Analysis : an International Journal 42,1991,1-32.
- [9] **C. Bernardi, Y. Maday, F. Rapetti**, *Discrétisations Variationnelles de Problème aux Limites Elliptiques*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2004.
- [10] **P. Ciarlet**, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, 1978.
- [11] **M. Crouzeix, A. Mignot**, *Analyse Numérique des Equations Différentielles*, Collection "Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise", Masson, Paris 1984.
- [12] **R. Dautray, J. Lions**, *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les sciences et les Techniques*, Masson, Paris, 1987
- [13] **D. Gottlieb, S.A. Orszag**, *Numerical Analysis of Spectral Methods, Theory and Applications*, SIAM Publications, Philadelphia, 1977.
- [14] **P. Grisvard**, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domain*, Pitman, Boston, London, Melbourne, 1985.

- [15] **J.-L. Lions, E. Magenes**, *Problems aux Limites non Homogènes et Applications*, Volume I, Dunod, Paris, 1968.
- [16] **B. Mercier, G. Raugel** , *Résolution d'un Problème aux Limites dans un ouvert Axisymétrique par Eléments Finis en r , z et séries de Fourier en θ* RAIRO-Analyse numérique, tome 16, n°4 1982.
- [17] **J. Nečas**, *Les Méthodes Directe en Théorie des Equations Elliptiques*, Masson, Paris, 1967.
- [18] **S.A. Orszag**, *Comparison of Pseudospectral and Spectral Aproximations*, Stud. Appl. Math. 51(1972), 253-259.
- [19] **L. Schwartz**, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris, 1966.