



Faculté des Sciences Exacte et Informatique

Département de Mathématique

N° d'ordre :

N° de séries :

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : E.D.P et application

Thème

Étude théorique d'une classe de méthodes de points intérieurs pour la programmation semi définie linéaire

Présenté par :

Nom et Prénom : Bourouaih Rim

Nom et Prénom : Khidour Meriem

Devant le jury :

Président : Touil Imene M.C.B Université de Jijel

Encadreur : Menniche Linda M.C.B Université de Jijel

Examineur : Haddad Touma M.C.B Université de Jijel

Promotion **2018/2019**

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à madame L. Menniche Maître de conférences à l'université de Jijel, qui a dirigé ce travail, pour ses conseils, ses encouragements, sa disponibilité, qui ont contribué à l'élaboration de ce travail.

Je remercie madame. I. Touil, Maître de conférences à l'université de Jijel, qui m'a honoré en acceptant de présider ce jury, je lui exprime mon respect et toute ma reconnaissance.

Mes vifs remerciements vont également à madame : T,Haddad Maître de conférences à l'université de jijel qui est accepté de juger ce travail et d'être les membres du jury.

Enfin, mes vifs remerciements à tous les enseignants du département de mathématiques de l'université de Jijel.

Table des matières

Introduction	v
1 Préliminaires	1
1.1 Analyse convexe	1
1.1.1 Ensembles et applications affines	1
1.1.2 Ensembles convexes	1
1.1.3 Fonctions convexes	3
1.1.4 Rappel sur les dérivées	4
1.2 Programmation linéaire (PL)	5
1.2.1 Fondements théoriques	5
1.2.2 Dualité en programmation linéaire	8
1.2.3 Résolution d'un programme linéaire	9
2 Programmation semi-définie linéaire	12
2.1 Préliminaires matriciels	12
2.1.1 Matrices semi-définies positives	12
2.2 Formulation du problème	14
2.2.1 Dualité en programmation semi-définie	16
2.2.2 Exemples des problèmes convertibles en (<i>SDP</i>)	19

2.2.3	Résolution de (SDP)	22
3	Méthode barrière logarithmique via les fonction majorantes	24
3.1	Introduction	24
3.2	Problème (DL_r) : Aspects théoriques	26
3.2.1	Propriétés fondamentales de f_r	26
3.2.2	Existence de la solution du problème (DL_r)	27
3.2.3	Comportement de la solution lorsque $r \mapsto 0$	28
3.3	Direction de descente de Newton	29
3.3.1	Calcul des différentes valeurs de \hat{t}	32
3.4	Fonctions majorantes de θ	34
3.4.1	Première fonction majorante	34
3.4.2	Deuxième fonction majorante	36
3.4.3	Troisième fonction majorante	37
3.5	Algorithme Prototype	40
	Conclusion	41
	Bibliographie	42

Introduction

La programmation semi-définie (*SDP*) linéaire est une généralisation de la programmation linéaire au sens que, chaque vecteur $x \in \mathfrak{R}^n$ est remplacé par une matrice $n \times n$ symétrique semi-définie positive, le coût est remplacé par la trace du produit de deux matrices et la contrainte $x \geq 0$ est remplacé par la matrice semi-définie positive.

La théorie de la programmation linéaire est facilement transportable à (*SDP*), à quelques petites différences au niveau des résultats de dualité.

L'étude de ce problème a commencé dès le début des années 60, malheureusement les résultats obtenues sont principalement d'ordre théorique. Depuis les 90, grâce notamment aux travaux fondateurs de Alizadeh [1], Nemirovski et Nesterov [13] entre autre, les méthodes de points intérieurs ont pu être étendues à la résolution de problème (*SDP*) tout en gardant la plupart des bonnes propriétés qui avaient été observées pour les programmes linéaires. En fait, de nombreux résultats sur les programmes linéaires, notamment en termes de dualité et d'optimalité ont été étendus aux problèmes (*SDP*).

Plusieurs méthodes ont été proposé pour résoudre les problèmes de programmation semi-définie linéaire à savoir les méthodes projectives [3], les méthodes de trajectoires centrales [7] et les méthodes barrières logarithmiques [6]. Notre travail est basé sur ce dernier type de méthodes des points intérieurs.

Le principal obstacle pour construire une itération est la détermination et le calcul du pas de déplacement.

Plusieurs alternatives sont proposé pour résoudre ce problème parmi lesquelles les méthodes de recherche linéaire [9] malheureusement le calcul du pas de déplacement par ces méthodes est coûteux et encore délicat dans les problèmes de programmation semi-définie linéaire [6]. Nous proposons dans ce mémoire une approche barrière logarithmique dans la quelle, on introduit une procédure originale pour le calcul du pas de déplacement basée sur les fonctions majorantes.

Ce mémoire est réparti en trois chapitre, Le premier chapitre contient une présentation générale de quelques notions de base nécessaires par la suite telle que l'analyse convexe et quelques résultats d'existence et d'unicité d'un programme linéaire. Le deuxième chapitre est consacré à la programmation semi-définie linéaire. En fin, nous terminons le troisième chapitre par l'introduction des fonctions majorantes qui constituent l'originalité de notre étude.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Analyse convexe

1.1.1 Ensembles et applications affines

Définition 1.1. *Un sous-ensemble F de \mathfrak{R}^n est dit affine si*

$$\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathfrak{R}, (1 - \lambda)x + \lambda y \in F.$$

Autrement dit, un sous-ensemble affine contient toujours la droite passant par deux de ses points x et y .

Définition 1.2. *On appelle hyperplan de \mathfrak{R} toute partie affine de dimension $(n + 1)$.*

Définition 1.3. *Une application*

$$T : \mathfrak{R}^n \longmapsto \mathfrak{R}$$

$$x \longmapsto Tx$$

est dite affine si

$$T[(1 + \lambda)x + \lambda y] = (1 + \lambda)Tx + \lambda Ty, \forall x, y \in \mathfrak{R}^n, \forall \lambda \in \mathfrak{R}.$$

1.1.2 Ensembles convexes

Définition 1.4. *(Les sous-ensembles convexes)*

Un sous-ensemble C de \mathfrak{R}^n est dit convexe si

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1], (1 - \lambda)x + (\lambda)y \in C.$$

Autrement dit, un ensemble convexe contient toujours le "segment" joignant deux de ses points x et y .

Sachant que

$$[x, y] = \{(1 - \lambda)x + \lambda y, 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Remarque. Tout ensemble affine est convexe, La réciproque est fausse.

Définition 1.5. Un sous-ensemble K de \mathfrak{R}^n , est un cône ssi $\forall x \in K, \forall \lambda \geq 0, \lambda x \in K$. Un cône est donc une union de demi-droites positives issues de l'origine, ce dernier peut (ne peut pas) appartenir à K .

Définition 1.6. Un cône est dit pointé ou saillant ssi $K \cap (-K) = \{0\}$,

Propriétés 1.7. 1. Tout ensemble de la forme $K = \{x \in \mathfrak{R}^n, b_i^t \leq 0, i \in I \subseteq \mathbb{N}, b_i \in \mathfrak{R}^n\}$ est un cône convexe.

2. De même l'ensemble des solutions du système d'inégalités homogènes

$$\{x \in \mathfrak{R}^n, Ax \leq 0, A \text{ est une matrice de } n \times m\}$$

est un cône convexe.

Cône de récession

Soit C un convexe non vide de \mathfrak{R} et $a \in C$, on pose

$$C_\infty(a) = \{d \in \mathfrak{R}, a + \lambda d \in C, \forall \lambda > 0\},$$

Alors $C_\infty(a)$ est un cône convexe non vide. En général, $C_\infty(a)$ dépend de a .

Définition 1.8. On appelle cône de récession (ou asymptote) de C l'ensemble

$$C_\infty = \bigcap_{a \in C} C_\infty(a).$$

Un élément $d \in C_\infty$, est appelée **direction de récession**.

Théorème 1.9. Si $C \neq \emptyset$ convexe fermé $C_\infty(a) = C_\infty(b)$, $\forall a, b \in C$, c'est-à-dire, $C_\infty(a)$ est indépendant de a , De plus C_∞ est fermé.

Proposition 1.10. Soit C un convexe fermé non vide de \mathfrak{R} , alors, C est borné ssi $C_\infty = \{0\}$.

Remarque. Le cône de récession est introduit en 1913 par Steinitz pour C non vide non nécessairement convexe, C'est le cône fermé défini par

$$C_\infty = \{d \in \mathfrak{R}, \exists x_n \in C, t_n \longrightarrow +\infty, \frac{x_n}{t_n} \longrightarrow d\}.$$

La raison principale de son importance est la caractérisation des ensembles compacts de \mathfrak{R} traduite par la proposition précédente pour C fermé de \mathfrak{R} .

Définition 1.11. (Ensembles strictement convexes)

Un sous-ensemble $C \subseteq \mathfrak{R}$ est dit **strictement convexe** s'il vérifie

$$\forall x, y \in C, (x \neq y),]x, y[= \left\{ (1-t)x + ty, t \in]0, 1[\right\} \subset \text{int}(C).$$

Définition 1.12. (Ensembles fortement convexes)

Une partie $C \subseteq \mathfrak{R}$ est dite **fortement convexe** si

$$\forall x, y \in C, (x \neq y), \forall t \in]0, 1[, \exists \gamma > 0 \text{ tel que } B\left[(1-t)x + ty, \gamma\right] \subset C.$$

Remarque. Nous avons les implications suivantes

$$C \text{ fortement convexe} \Rightarrow C \text{ strictement convexe} \Rightarrow C \text{ convexe.}$$

1.1.3 Fonctions convexes

Pour introduire les fonctions convexes, il est plus commode de considérer des fonctions définies sur \mathfrak{R} tout entier, susceptibles de prendre des valeurs infinies, i.e., des fonctionnelles avec la convention suivante

$$\infty + \alpha = \alpha + \infty = \infty \quad \alpha - \infty = -\infty + \alpha = -\infty, \forall \alpha \in \mathfrak{R}$$

$$\infty + \infty = +\infty \quad \infty - \infty = (-\infty) + \infty = +\infty$$

Cela nous dispense d'avoir à préciser chaque fois le domaine de définition. Si toute fois f est une fonction définie sur un sous-ensemble $C \subset \mathfrak{R}$ et $C \neq \emptyset$, on la remplace par l'extension suivante

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit alors

$$f : \mathfrak{R} \longrightarrow [-\infty; +\infty] = \bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R} \cup \pm\{\infty\}.$$

Remarque. $f : C \subset \mathfrak{R}^n \longrightarrow \bar{\mathfrak{R}}$ est convexe sur C ssi son extension \tilde{f} (définie précédemment) est convexe sur \mathfrak{R}^n .

Proposition 1.13. $f : \mathfrak{R}^n \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ est convexe si l'une des deux propriétés équivalentes suivantes est vérifiée

1. $f[(1-\lambda)x + \lambda y] \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y), \forall \lambda \in [0, 1], \forall x, y \in \mathfrak{R}^n.$

$$2. f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i), \forall m \in \mathbb{N}, \forall \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \forall x_i \in \mathfrak{R}^n.$$

L'inégalité (1) est stricte pour $x \neq y$ et $\lambda \in]0, 1[$, f est dite **strictement convexe**.

L'inégalité (2) est appelée **inégalité de Jensen**.

Lemme 1.14. Soit $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \bar{\mathfrak{R}}$ alors f est convexe sur \mathfrak{R} ssi $\forall x, d \in \mathfrak{R}^n$ la fonction a une variable réelle $\varphi_{x,d}(t) = f(x + td)$ est convexe sur \mathfrak{R} .

Définition 1.15. (Semi-continuité inférieure)

Une fonction $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \bar{\mathfrak{R}}$ est dite **semi-continue inférieurement** (s.c.i) en $x^0 \in \mathfrak{R}^n$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, f(x) \geq f(x^0) - \varepsilon, \|x - x^0\| \leq \delta.$$

f est dite **semi-continue supérieurement** (s.c.s) en x^0 si $-f$ est (s.c.i) en x^0 . évidemment, f est continue en x^0 ssi elle est à la fois (s.c.i) et (s.c.s) en x^0 . En fin, on dit que f est (s.c.i), si elle est (s.c.i) en tout point $x \in \mathfrak{R}^n$.

Remarque. 1. On peut remplacer \mathfrak{R}^n dans la définition précédente par un sous-ensemble quelconque $C \subset \mathfrak{R}^n$.

2. La semi-continuité inférieure de f en x^0 peut être exprimée par $f(x^0) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k)$, pour chaque suite $f(x^k)$ convergeant vers x^0 et telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) \in \bar{\mathfrak{R}}$. Autrement dit f est (s.c.i) en x^0 ssi $f(x^0) = \lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_{\|x-x^0\| \rightarrow 0} f(x) \right)$.

3. On peut également exprimer la (s.c.i) en termes de voisinages comme c'est le cas pour la continuité. A ce propos, on dit que f est (s.c.i) en x^0 si $\forall \lambda \in \bar{\mathfrak{R}}$ vérifiant $\lambda < f(x^0)$, $\exists V$ (voisinage de x) tel que $\forall x \in V$ on ait $\lambda < f(x)$.

1.1.4 Rappel sur les dérivées

Définition 1.16. Le gradient d'une fonction $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \bar{\mathfrak{R}}$ continûment différentiable évalué au point $x \in \mathfrak{R}^n$ s'écrit

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} \quad \dots \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)^t,$$

et le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice Hessienne s'écrit

$$[\nabla^2 f(x)]_{i,j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Proposition 1.17. Si $f \in C^1(C)$, où C est un ensemble convexe, alors on a l'équivalences suivantes

- f est convexe si et seulement si

$$f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle, \forall x, y \in C.$$

- f est convexe si et seulement si

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in C.$$

De plus, f est dite strictement convexe si l'une ou l'autre des inégalités précédentes sont stricte pour $x \neq y$.

Proposition 1.18. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable sur un domaine convexe D .

1. f est une fonction convexe sur D si et seulement si la matrice hessienne $\nabla^2 f(x)$ est semi-définie positive, c'est-à-dire

$$\forall x \in D, \quad y^t \nabla^2 f(x) y \geq 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

ou encore toutes les valeurs propres de $\nabla^2 f(x)$ sont positives.

2. f est une fonction strictement convexe sur D si et seulement si la matrice hessienne $\nabla^2 f(x)$ est définie positive, c'est-à-dire

$$\forall x \in D, \quad y^t \nabla^2 f(x) y > 0, \quad y \in \mathbb{R}^n - \{0\},$$

ou encore tous les valeurs propres de $\nabla^2 f(x)$ sont strictement positives.

1.2 Programmation linéaire (PL)

1.2.1 Fondements théoriques

Définition d'un programme linéaire

La programmation linéaire est une technique d'optimisation utilisée aujourd'hui dans beaucoup de domaines et diverses applications, notamment dans l'industrie pétrolière, l'énergie, le transport, les réseaux....

En termes d'optimisation, un programme linéaire (PL) consiste à minimiser (ou maximiser) une forme linéaire ou fonction coût (appelée objectif ou économique) soumise à des contraintes linéaires (ou plutôt affines).

Formes usuelles d'un programme linéaire

un PL peut être écrit sous l'une des trois formulations suivantes

1. Forme canonique

$$(1) \begin{cases} \min c^t x \\ Ax \geq b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

où A est une $m \times n$ -matrice, $b \in \mathfrak{R}^m$ (constant), $0 \neq c \in \mathfrak{R}^n$ (vecteur constant) et x est un vecteur inconnu de \mathfrak{R}^n (à chercher).

De nombreux modèles d'application se ramènent de manière naturelle à cette forme qui se prête mieux à l'analyse théorique.

2. Forme standard

$$(2) \begin{cases} \min c^t x \\ Ax = b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

C'est la forme à laquelle on se ramène le plus souvent à cause de sa convenance pour l'analyse théorique et le traitement numérique.

3. Forme canonique

$$(3) \begin{cases} \min c^t x \\ Ax \leq b, Bx \leq b', x \geq 0. \end{cases}$$

tel que B est une matrice de taille $p \times n$ et $b' \in \mathfrak{R}^p$. Cette forme qui généralise les formes (1) et (2), est parfois commode pour le traitement des programmes linéaires à variables non astreintes en signe. On parle alors de programmation linéaire généralisée.

Remarque. *Les trois formes précédentes sont équivalentes au sens suivant*

1. On peut convertir un (PL) d'une forme à l'autre moyennant des transformations algébriques élémentaires.
2. Une inégalité se transforme en égalité en ajoutant (ou retranchant), selon le sens de l'inégalité, une variable supplémentaire **non négative** appelée **variable d'écart**

$$a_i^t x \leq b_i \longrightarrow a_i^t x + y_i = b_i, y_i \geq 0,$$

$$a_j^t x \leq b_j \longrightarrow a_j^t x + y_j = b_j, y_j \geq 0.$$

De même, une égalité est équivalente à deux inégalités

$$a_k^t x = b_k \Leftrightarrow \begin{cases} a_k^t x \leq b_k, \\ \text{et} \\ -a_k^t x \leq -b_k. \end{cases}$$

Une variable x non astreinte en signe, peut être soit éliminée à partir d'une contrainte d'égalité (s'il en a une), soit remplacée par deux variables astreintes

$$x = x^+ - x^- \text{ et } x^- \geq 0, x^+ \geq 0$$

où rappelons le

$$\forall i, x_i^+ = \max(0, x_i), \quad x_i^- = \max(0, -x_i).$$

2. Toute méthode de résolution valable pour une forme, permet également de résoudre les autres, en ce sens que si l'on connaît la solution de l'un on peut en déduire celle de l'autre. Cependant, sur le plan numérique, on préfère souvent la forme standard.

3. Le vecteur c est appelé **vecteur coût**, et A est une $m \times n$ - matrice de plein rang.

Définition 1.19. Un ensemble convexe de la forme $P = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax = b, x \geq 0\}$ est appelé **polyèdre convexe**.

Définition 1.20. Un polyèdre convexe borné est appelé **polytope convexe**.

Définition 1.21. Soit C un convexe non vide de \mathbb{R}^n . Un point $x \in C$ est dit **extrémal** (ou **sommet** de C) si l'on a

$$y, z \in C \text{ et } x = (1 - \lambda)y + \lambda z \Rightarrow x = y = z, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Définition 1.22. Tout polytope est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Définition 1.23. Un polytope convexe de \mathbb{R}^n possédant $(n + 1)$ sommets est appelé n -simplexe. Par exemple dans \mathbb{R}^2 le triangle $T = \{e_1, e_2, 0\}$ avec $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ est un 2-simplexe.

Définition 1.24. Ainsi l'ensemble des solutions de (PL) est le polyèdre convexe

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax = b, x \geq 0\},$$

(éventuellement vide, éventuellement non borné).

A ce propos, il est important de signaler qu'un programme linéaire peut ne pas avoir de solution, par exemple s'il n'y a aucun point réalisable, on dit que le problème est **non réalisable**, ou encore si $f(x) \rightarrow -\infty$ pour x réalisable (le problème est non borné), il n'y a cependant aucune difficulté pour détecter ces situations. C'est pourquoi nous ne considérons que le cas où le problème possède une solution (non nécessairement unique).

1.2.2 Dualité en programmation linéaire

La notion de dualité est un concept fondamental en programmation linéaire qui conduit à un résultat de portée théorique en pratique : le théorème de dualité. Aussi, étant donné un programme linéaire (désigné comme primal) on peut toujours lui associer un autre programme linéaire appelé problème dual.

Les deux sont construits à partir des mêmes contraintes, à la différence que si l'un est un problème de minimisation, l'autre est un problème de maximisation. Deux problèmes duaux ne constituent donc pas deux problèmes différents, mais deux aspects du même problème.

Définition formelle d'un programme linéaire dual

Soit le programme linéaire écrit sous forme standard

$$(PL) \begin{cases} \min c^t x \\ Ax = b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

On appelle dual de (PL) , le programme linéaire

$$(DL) \begin{cases} \max b^t y \\ A^t y \leq c, \\ y \in \mathfrak{R}^m. \end{cases}$$

Qui est équivalent au problème suivant

$$(DL) \begin{cases} \max b^t y \\ A^t y + s = c, \\ s \geq 0, \\ y \in \mathfrak{R}^m. \end{cases}$$

On note que les variables du dual sont en bijection avec les contraintes du primal, tandis que les contraintes du dual sont en bijection avec les variables du primal.

Exemple 1.25. Soit le programme linéaire primal

$$(PL) \begin{cases} \min(2x_1 - 3x_2) \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 4, \\ x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \in \mathfrak{R}. \end{cases}$$

Le dual de ce programme s'écrira

$$(DL) \begin{cases} \max(y_1 + 4y_2 + 3y_3) \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \leq 2, \\ -y_1 + 3y_2 + y_3 = -3, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Théorème 1.26. (Résultats fondamentaux)

Si x et y sont réalisables pour (PL) et (DL) respectivement, alors

$$c^t x \geq b^t y.$$

Corollaire 1.27. *Si x^* et y^* sont respectivement réalisables pour (PL) et (DL) et si $c^t x^* = b^t y^*$ alors x^* et y^* sont optimales pour leurs problèmes respectifs.*

Remarque. *Il est évident que si x^* et y^* sont optimales pour (PL) et (DL) respectivement alors*

$$c^t x^* = b^t y^*.$$

Théorème 1.28. (Théorème de dualité)

1. *Si l'un ou l'autre des problèmes (PL) et (DL) admet une solution optimale définie, il est de même pour l'autre, et les valeurs correspondantes des objectifs sont égales.*
2. *Si l'objectif d'un problème n'est pas borné, l'autre problème n'admet pas de solution réalisable.*

Application de la dualité

En plus de l'éclairage qu'apporte la dualité sur certains points d'ordre théorique permettant de mieux caractériser les propriétés du problème donné, les résultats précédents montrent qu'en résolvant un programme linéaire (PL), on résout en même temps son dual.

1.2.3 Résolution d'un programme linéaire

La solution d'un programme linéaire est toujours atteinte en un sommet (point extrémal) de la région admissible, c'est-à-dire : un point réalisable satisfaisant exactement (m) contraintes linéairement indépendantes. Le nombre de sommets associés à un problème pouvant être exponentiellement croissant en fonction de la taille du problème (n est le nombre de variable et m est celui des contraintes), il est de l'ordre $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Une méthode pratique ne devrait donc pas examiner autant de points pour arriver à l'optimum.

La méthode du simplexe

Cette méthode est une procédure qui examine les points extrémaux (réalisables) d'une façon convenable, le passage d'un sommet à un autre entraîne souvent une diminution de l'objectif si le problème est un problème de minimisation.

La résolution d'un programme linéaire par cette méthode est traditionnellement divisée en deux phases

Phase 1

Est l'étape d'initialisation, elle consiste à chercher un premier sommet réalisable, et peut être posée (de plusieurs manières) sous forme d'un programme linéaire possédant une solution initiale triviale.

phase 2

Construit une suite de sommets adjacents réalisables diminuant la valeur de l'objectif d'une itération à l'autre. Le nombre de sommets étant défini, la convergence de la méthode du simplexe vers l'optimum est garantie en un nombre fini d'opérations à condition que le problème ne soit pas dégénéré, i.e., aucune composante de la solution réalisable de base n'est pas nulle.

Méthodes de points intérieurs

Les méthodes de points intérieurs comme leur nom l'indique éviteront soigneusement la frontière de l'ensemble admissible et ne souffriront donc pas de l'aspect combinatoire inhérent à la méthode du simplexe. Khachiyan (1979) fut le premier à proposer un algorithme dit polynomial, c'est-à-dire dont le nombre d'itérations grandit d'une manière polynomiale avec la taille du problème. Malheureusement, cet algorithme s'est avéré inefficace en pratique, il a fallu donc attendre les travaux de Karmarkar (1984) pour susciter un engouement pour les méthodes de points intérieurs.

Actuellement, l'importance de ces méthodes a dépassé le cadre de l'optimisation linéaire et elles sont beaucoup plus utilisées dans le cadre de l'optimisation convexe, grâce notamment aux travaux de Nesterov et Nemirovsky (1994). Actuellement, les méthodes de points intérieurs sont devenues compétitives à la méthode du simplexe surtout pour les problèmes de grande taille (> 1000 variables ou contraintes) . Il y a, principalement, quatre grandes catégories des méthodes de points intérieurs

- Les méthodes affines.
- Les méthodes projectives.
- Les méthodes de réduction du potentiel.
- Les méthodes de trajectoire centrale.

Les méthodes de points intérieurs utilisent les fonctions dites fonctions barrières affine d'obliger les itérés à rester dans l'ensemble réalisable.

Définition 1.29. "Fonction barrière"

Soit $C \in \mathfrak{R}^n$, On appelle fonction barrière associée à C toute fonction B définie sur $\text{int}(C)$ telle que

$$\begin{cases} B \text{ est continue} \\ B(x) \geq 0, \forall x \in \text{int}(C), \\ \lim B(x) = +\infty \text{ quand } x \rightarrow x^* \in \text{Fr}(C). \end{cases}$$

Exemple 1.30. Pour

$$C = \{x \in \mathfrak{R}^n, g_i(x) < 0, i = \overline{1, m}\},$$

avec $g_i \in C^1(\mathfrak{R}^n)$ et $\text{int}(C) = \{x \in \mathfrak{R}^n, g_i(x) < 0, i = \overline{1, m}\},$

on peut prendre $B_1(x) = -\sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(x)}$, ou encore $B_2(x) = \sum_{i=1}^m \ln(-g_i(x))$,
le problème pénalisé correspondant est alors

$$(PL) \begin{cases} \min_{x \in \text{int}(C)} (f(x) + \frac{1}{\mu} B(x)) \\ \mu > 0, \end{cases}$$

avec $\mu > 0$ paramètre de pénalisation.

Chapitre 2

Programmation semi-définie linéaire

2.1 Préliminaires matriciels

2.1.1 Matrices semi-définies positives

Notations

Soit $M_n(\mathfrak{R}) = M_n$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans \mathfrak{R}

$S_n(\mathfrak{R}) = S_n$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n , c'est-à-dire : pour toute matrice $A \in M_n$ vérifiant $A = A^t$.

Le produit scalaire de deux matrices A et B de M_n noté $A \cdot B$ (ou $\langle A, B \rangle$) est défini par

$$A \cdot B = \langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^t B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij} = B \cdot A,$$

où $\text{Tr}(A) = \text{Trace}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ (la somme des éléments diagonaux de A).

On a la propriété suivante

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA),$$

à ce produit scalaire, on associe une norme, dite de Frobenius

$$\|A\|_F = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{\text{Tr}(A^t A)},$$

on utilise également la norme spectrale

$$\|A\|_2 = \sqrt{|\lambda_{\max}(A^t A)|},$$

Remarque. Si $A \in S_n$, on a les résultats suivants

$$\|A\|_F = \left(\sum_i^n \lambda_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{ij} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\|A\|_2 = \max_i |\lambda_i| = \rho(A), \text{ le rayon spectral de } A,$$

où les λ_i , $i = \overline{1, n}$ désignent les valeurs propres de A (qui sont toutes réelles)

Définition 2.1. Soit $A \in S_n$

A est dite semi-définie positive ou $A \succeq 0$ si $x^t A x \geq 0$, $\forall x \in \mathfrak{R}^n$.

A est dite définie positive ou $A \succ 0$ si $x \neq 0$ et $x^t A x > 0$, $\forall x \in \mathfrak{R}^n$.

Notations

$$S_n^+(\mathfrak{R}) = S_n^+ = \{A \in S_n, A \succeq 0\},$$

$$S_n^{++}(\mathfrak{R}) = S_n^{++} = \{A \in S_n, A \succ 0\}.$$

Proposition 2.2. Soit $B \in M_n$ inversible, alors

$$A \in S_n^+ \Leftrightarrow B^t A B \in S_n^+,$$

et

$$A \in S_n^{++} \Leftrightarrow B^t A B \in S_n^{++}.$$

Cône S_n

Nous étudions quelques propriétés spécifiques à S_n et sa structure conique.

Proposition 2.3.

1. S_n^+ est un cône fermé pointé dans S_n (car $S_n^+ \cap (-S_n^+) = 0_n$, 0_n est la matrice nulle).
2. S_n^{++} n'est pas un cône (car $0_n \notin S_n^{++}$),
3. S_n^{++} est l'intérieur de S_n^+ (c'est l'intérieur relatif),

à rappeler que $C \subset \mathbb{R}^n$, $C \neq \emptyset$, l'intérieur relatif de C est

$$r_i(C) = \left\{ aff(C), \exists \varepsilon > 0, (x + \varepsilon B) \in C \cap aff(C) \subseteq C \right\},$$

telle que

$$aff(C) = \left\{ x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, x_i \in C, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\},$$

B est la boule unité euclidienne de \mathfrak{R}^n ,

$$B = \left\{ x \in \mathfrak{R}^n, \|x\| \leq 1 \right\},$$

et si

$$\text{aff}(C) = \mathfrak{R}^n \implies \text{ri}(C) = \text{int}(C), \text{int}(C) = \left\{ x \in C, \exists \varepsilon > 0, x + \varepsilon B \subseteq C \right\},$$

et C un convexe de \mathfrak{R}^n .

4. La structure du cône de S_n^+ induit un ordre partiel sur S_n dit "Ordre de Löwner"

$$A \succeq B \iff A - B \in S_n^+,$$

$$A \succ B \iff A - B \in S_n^{++}.$$

(\succ, \succeq : relation d'ordre partiel).

Proposition 2.4. Soient $A, B \in S_n^+$, alors

1. $A + B \succeq B$,

2. $A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}} \succeq 0$,

(à noter que si $A \in S_n$, alors il existe une unique matrice $M \in S_n^+$ telle que $A = M^2$ de plus M commute avec A et vérifie $\text{rg}(A) = \text{rg}(M)$ et on note souvent $M = A^{\frac{1}{2}}$),

3. $\text{Tr}(AB) \leq \text{Tr}(A)\text{Tr}(B)$,

4. Les valeurs propres de la matrice AB sont positives.

Remarque. Le produit de deux matrices semi-définies positives n'est pas nécessairement une matrice semi-définie positive.

Effectivement soient les matrices A et B suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

on a $A \succeq 0$ et $B \succeq 0$ mais $AB \not\succeq 0$.

2.2 Formulation du problème

Un programme semi-défini linéaire de forme standard est défini par

$$(SDP) \begin{cases} \min C \cdot X = \text{Tr}(C^t X) \\ A_i \cdot X = b_i, i = \overline{1, m}, \\ X \in S_n^+. \end{cases}$$

Où $C, A_i \in S_n, b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^t \in \mathfrak{R}^m$.

Remarque.

1. On peut supposer (sans perte de généralité) que les matrices C et A_i sont symétriques.

2.2. Formulation du problème

Dans le cas, où C n'est pas symétrique, on la symétrise en remplaçant C par $\frac{1}{2}(C + C^t)$ de même pour les A_i où on prend $\frac{1}{2}(A_i + A_i^t)$ à la place de A_i .

2. On peut supposer également que les matrices A_i , $i = \overline{1, m}$, sont linéairement indépendantes pour des besoins théoriques.

3. La programmation semi-définie est un cas particulier de la programmation conique, et une généralité de la programmation linéaire, ici on manipule des matrices au lieu des vecteurs.

Effectivement on peut ramener un problème de programmation linéaire en un problème de programmation semi-définie. Pour ce fait, soit le programme linéaire suivant

$$(PL) \begin{cases} \min c^t x \\ Ax = b, \\ x \geq 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Posons

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & c_2 \dots & 0 \\ 0 & 0 \dots & c_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & x_2 \dots & 0 \\ 0 & 0 \dots & x_n \end{pmatrix}$$

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & 0 \dots & 0 \\ 0 & a_{i2} \dots & 0 \\ 0 & 0 \dots & a_{in} \end{pmatrix} \text{ et } b_i = b_i, \forall i = \overline{1, m}$$

On a donc

$$\begin{cases} c^t x \iff \langle C, X \rangle = Tr(C^t X), \\ Ax = b \iff A_i \cdot X = b_i, i = \overline{1, m}, \\ x \geq 0 \text{ (} x_i \geq 0, i = \overline{1, n} \text{)} \iff X \succeq 0. \end{cases}$$

D'où

$$(PL) \begin{cases} \min c^t x \\ Ax = b, \\ x \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \iff (SDP) \begin{cases} \min \langle C, X \rangle \\ A_i \cdot X = b_i, i = \overline{1, m}, \\ X \succeq 0. \end{cases}$$

De plus l'ensemble des contraintes vérifiant $X \succeq 0$ est infini contrairement à la programmation linéaire où il est fini ($x \geq 0$).

Définition 2.5. Une matrice $X \in S_n$ est dite réalisable (resp. strictement réalisable) pour (SDP) si

$$\langle A_i, X \rangle = b_i, i = \overline{1, m} \text{ et } X \in S_n^+,$$

(resp. $\langle A_i, X \rangle = b_i, i = \overline{1, m}$ et $X \in S_n^{++}$).

On note Y (resp. \hat{Y}) l'ensemble des solutions réalisables (resp. strictement réalisables) pour (SDP)

Définition 2.6. La valeur optimale (primale) de (SDP) est définie par $P^* = \min\{\langle C, X \rangle, \langle A_i, X \rangle = b_i, i = \overline{1, m}, X \in S_n^+\}$,

$$X^* \in Y \text{ et } \langle C, X^* \rangle = P^*.$$

2.2.1 Dualité en programmation semi-définie

La dualité en (SDP) est très similaire à la dualité classique en programmation linéaire à quelques différences près.

Soit le problème (SDP) linéaire primal sous la forme standard

$$m_p = \min_x \left[\langle C, X \rangle, \langle A_i, X \rangle = b_i, i = \overline{1, m}, X \in S_n^+ \right].$$

Pour obtenir le problème dual de (SDP), on considère la fonction Lagrangienne

$$q(y) = \min_{X \in S_n^+} \left[\langle C, X \rangle + \sum_{i=1}^m (b_i - \langle A_i, X \rangle) y_i, y \in \mathfrak{R}^m \right],$$

d'où

$$\max_{y \in \mathfrak{R}^m} q(y) = \max_{y \in \mathfrak{R}^m} \min_{X \in S_n^+} \left[\left\langle \left(C - \sum_{i=1}^m y_i A_i \right), X \right\rangle + \sum_{i=1}^m b_i y_i \right],$$

donc

$$\max_{y \in \mathfrak{R}^m} q(y) = \begin{cases} \max_{y \in \mathfrak{R}^m} \sum_{i=1}^m b_i y_i & \text{si } C - \sum_{i=1}^m y_i A_i \in S_n^+ \\ -\infty & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

D'où par convention le dual du problème (SDP) est le problème (DSDP) défini par

$$(DSDP) \begin{cases} \max b^t y \\ C - \sum_{i=1}^m y_i A_i \in S_n^+, \\ y \in \mathfrak{R}^m. \end{cases}$$

Définition 2.7. Une solution réalisable de (DSDP) est le couple $(y, S) \in \mathfrak{R}^m \times S_n^+$ tel que

$$C - \sum_{i=1}^m y_i A_i = S.$$

De même le couple (y, S) est dit strictement réalisable pour (DSDP) si

$$C - \sum_{i=1}^m y_i A_i \in S_n^{++}.$$

On note F (resp. \hat{F}) l'ensemble des solutions réalisables (resp. strictement réalisables) pour (DSDP)

Définition 2.8. La valeur optimale de (DSDP) est définie par

$$d^* = m_d = \max \left\{ b^t y : C - \sum_{i=1}^m y_i A_i \in S_n^+, y \in \mathfrak{R}^m \right\}$$

avec

$$(y^*, S^*) \in F, b^t y^* = d^*,$$

et

$$S^* = C - \sum_{i=1}^m y_i^* A_i.$$

Proposition 2.9. "Dualité faible"

Soit $X \in Y$ et $(y, S) \in F$, alors

$$C \cdot X - b^t y = X \cdot S \geq 0.$$

Remarque. $X \cdot S$ est appelé l'écart ou "**Saut de dualité**".

Remarque. Certains résultats de la programmation linéaire ne sont pas valables en (SDP).

Exemple 2.10. $E = S_3$ l'espace des matrice symétriques 3×3 , $m = 2$

$$m_p = \min_X \left[C \cdot X, X \in S_3^+, \langle A_i, X \rangle = b_i, i = \overline{1, m} \right],$$

où

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 \\ x_{12} & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} \end{pmatrix}, b = (0, -1)^t.$$

Ce problème s'écrit aussi sous la forme suivante

$$(SDP) \quad m_p = \min_x \left[x_{12}, X = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & 0 \\ x_{12} & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + x_{12} \end{pmatrix} \geq 0 \right]$$

L'ensemble des solutions réalisables correspond à (SDP) est

$$Y = \{(x_{12}, x_{22}) \in \mathfrak{R}^2 : x_{12} = 0, x_{22} \geq 0\}.$$

En outre l'ensemble des solutions optimales est

$$X^* = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & 0 \\ x_{12} & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + x_{12} \end{pmatrix}, x_{22} \geq 0 \right\}.$$

Il s'ensuit que

$$m_p = 0.$$

Écrivons le problème dual

$$(DSDP) \quad m_d = \max_{y \in \mathfrak{R}^2} \left[b^t y : C - \sum_{i=1}^2 y_i A_i \in S_3^+ \right],$$

qui correspond à la forme

$$(DSDP) \quad m_d = \max_{y \in \mathfrak{R}^2} \left[-y : \begin{pmatrix} -y_1 & \frac{1-y_2}{2} & 0 \\ \frac{1-y_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 \end{pmatrix} \in S_3^+ \right]$$

l'ensemble des solutions réalisables correspond à (DSDP) est

$$\{(y_1, y_2) \in \mathfrak{R}^2 : y_1 \leq 0, y_2 = 1\}.$$

En outre l'ensemble des solutions optimales est

$$Y^* = \{(y_1, 1), y_1 \leq 0\}.$$

Il s'ensuit que

$$m_d = -1 \neq 0 = m_p.$$

Les problèmes (SDP) et (DSDP) sont tous deux réalisables, X^* et Y^* sont tous deux non vides mais

$$-\infty < m_d < m_p < +\infty.$$

Ainsi la réalisabilité des deux problèmes ne suffit pas pour avoir les mêmes valeurs optimales. Pour conserver le résultat de la dualité forte en (SDP), une condition plus forte est indispensable, il s'agit de la stricte réalisabilité comme le montre le théorème suivant.

Théorème 2.11. 1. Si le problème (SDP) primal est strictement réalisable, c'est-à-dire

$$\exists X \in S_n^{++}(\mathfrak{R}) : \langle A_i, X \rangle = b_i, i = \overline{1, m},$$

alors

$$m_d = m_p.$$

2. Si en outre m_p est fini, alors l'ensemble des solutions optimales du problème dual (DSDP) est compact non vide.

3. Si le problème (DSDP) est strictement réalisable, c'est-à-dire

$$\exists y \in \mathfrak{R}^m : C - \sum_{i=1}^m y_i A_i \in S_n^{++},$$

alors

$$m_d = m_p.$$

4. Si en outre m_d est fini, alors l'ensemble des solutions optimales du problème primal (SDP) est compact non vide.

Remarque. Le problème de la recherche d'une solution optimale de (SDP) est équivalent à trouver $X \in S_n^+(\mathfrak{R})$, $S \in S_n^+(\mathfrak{R})$, $y \in \mathfrak{R}^m$ tel que

$$(PCL) \begin{cases} \langle A_i, X \rangle = b_i, i = \overline{1, m}, \\ \sum_{i=1}^m y_i A_i + S = C, \\ X \cdot S = 0. \end{cases}$$

(PCL) est appelé problème de complémentarité linéaire semi-défini qui fait l'objet de plusieurs recherches récentes basées essentiellement sur les approches newtoniennes par résolution numérique.

2.2.2 Exemples des problèmes convertibles en (SDP)

Exemple 2.12. "Le problème Max-cut"

Nous disposons d'un graphe $G(X, U)$ orienté et nous noterons n le nombre de sommets de ce graphe. De plus, nous le supposons valué, c-à-d qu'à chaque arc G (du nœud i au nœud j) est associé un poids P_{ij} .

Le problème que nous souhaitons résoudre est de trouver une coupe de capacité maximum, c-à-d trouver comment séparer les sommets en deux ensembles S et \bar{S} , de manière à ce que la capacité de cette coupe soit maximale.

A rappeler que la capacité d'une coupe étant définie comme la somme des capacités des arcs interconnectant S et \bar{S} .

Mathématiquement, le problème peut être formulé de la manière suivante :

Soit A la matrice $(n \times n)$ adjacente du graphe.

On définit la matrice

$$\begin{cases} L = \text{diag}(Ae) - A, \\ e = (1, 1, \dots, 1)^t \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

La matrice L est dite la matrice laplacienne associée au graphe.

On représente la coupe S par le vecteur x tel qu'à chacun des sommets i du graphe, nous associons une valeur x_i de la manière suivante

$x_i = 1$ si le sommet i est dans S ,

$x_i = -1$ si le sommet i est dans \bar{S} .

On aura donc la formulation suivante de problème

$$\begin{cases} \max \frac{1}{4} x^t L x \\ x = \{-1, 1\}^n. \end{cases}$$

On posant $X = \frac{1}{4} x x^t$, on a l'équivalence suivante

$$\begin{cases} \max \text{Tr}(L^t X) \\ \text{diag}(X) = \frac{1}{4} e, \\ \text{rg}(X) = 1, \\ X \succeq 0. \end{cases}$$

En négligeant la condition ou la contrainte du rang 1 ($\text{rg}(X) = 1$), on obtient un problème de la forme (SDP) suivant

$$m_d = \max \left[\langle L, X \rangle : X \in S_n^+(\mathbb{R}), \langle A_i, X \rangle = \frac{1}{4}, i = \overline{1, n} \right],$$

où

$$A_i[j, k] = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j = k = \overline{1, n}, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Exemple 2.13. "Le problème min-max des valeurs propres"

Ce problème a été étudié vers les années 1950 en Algèbre linéaire comme suit

Chercher une valeur optimale

$$(VP) \quad \lambda^* = \min_{y \in \mathbb{R}^m} \lambda_{\max}(C + A(y)),$$

où $C \in M_n$,

$$E : \mathfrak{R}^n \longrightarrow M_n$$

$$y \longmapsto E(y) = \sum_{i=1}^n y_i A_i, A_i \in M_n,$$

En fait, trouver la plus grande valeur propre d'une matrice symétrique A correspond au problème suivant

$$\max_x \left[x^t A x : \|x\| = 1 \right],$$

où $x \in \mathfrak{R}^n - \{0\}$ est un vecteur propre de la matrice A .

Soit encore en considérant sur les matrices symétriques le produit scalaire $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(AB)$,

$$(P1) \quad \max_x \left[\langle A, x x^t \rangle : \langle I, x x^t \rangle = 1 \right],$$

ou encore, X étant symétrique

$$(P2) \quad \max_X \left[\langle A, X \rangle : \langle I, X \rangle = 1, X \succeq 0 \text{ de rang } 1 \right],$$

Si on considère le problème semi-défini linéaire suivant

$$(P2) \quad \max_X \left[\langle A, X \rangle : \langle I, X \rangle = 1, X \succeq 0 \right],$$

Ce problème admet des solutions optimales car l'ensemble des solutions réalisables est compact. La fonction objective étant linéaire et l'ensemble des solutions réalisables étant convexe, l'optimum est atteint au moins en un point extrémal, donc en un X matrice de rang 1. X est aussi solution optimale du problème (P1). Bien sur, toute solution optimale de (P1) est solution optimale de (P2).

Le problème (VP) s'écrit sous forme d'un problème (SDP) comme suit

$$\left(\lambda^* = \min_{y \in \mathfrak{R}^n} \lambda_{\max}(C + A(y)) \right)$$

équivalent au problème suivant

$$\begin{cases} \min \lambda \\ \lambda I \succeq C + A(y), \\ y \in \mathfrak{R}^n, \end{cases}$$

qu'est équivalent au problème suivant

$$\begin{cases} \min \lambda \\ \lambda I - C - A(y) \succeq 0, \\ y \in \mathfrak{R}^n. \end{cases}$$

Le dual de ce problème est un problème (*SDP*) formulé par

$$\begin{cases} \max \langle C, X \rangle \\ A^t X = 0, \\ X \succeq 0, \\ \text{Tr}(X) = 1. \end{cases}$$

2.2.3 Résolution de (*SDP*)

Nous avons déjà dit que l'ensemble S_n^+ est un cône non-polyédrique, et la notion de sommet n'est plus valable pour les problèmes (*SDP*) ce qui favorise d'avantage l'extension des méthodes de points intérieurs en programmation linéaire pour (*SDP*).

Plusieurs travaux ont été réalisés depuis les années 90 et le grand nombre d'articles parus dans des revues internationales en témoigne, tout particulièrement les travaux de Shapiro, Flécher Craven (1996) qui s'intéressent aux conditions d'optimalité du problème (*SDP*), les travaux de Ramana et Wolkowic (1997) qui ont étudié la dualité forte pour ces problèmes

Du point de vue algorithmique, on rencontre les méthodes de points intérieurs qui sont relativement nouvelles et qui s'apparentent à la méthode projective de Karmarkar pour la programmation linéaire.

Ces dernières années, plusieurs chercheurs ont proposé des méthodes pour résoudre les problèmes (*SDP*) qui sont généralement des extensions des méthodes de points intérieurs pour la programmation linéaire.

En effet, en (1994) Farid Alizadeh est le 1^{ier} er chercheur qui a fait une étude profonde pour (*SDP*) et a proposé un algorithme primal-dual de points intérieurs du type projectif appelé "Algorithme de réduction du potentiel". Depuis, plusieurs algorithmes sont proposés dans la littérature, on cite par exemple

- F. Alizadeh (1995) propose une méthode projective primale-duale.
- Vanderbeghe et all (1996) ont proposé un algorithme primal-dual.
- Monteiro (1997) propose une méthode de type trajectoire centrale.
- Todd et all (1998) ont proposé des variantes newtoniennes pour résoudre le problème de complémentarité linéaire.
- J. Ji et all (1999) ont étudié la convergence de la méthode de prédicteur-correcteur.
- M. Halicka et all (2002) ont étudié la convergence de la méthode de trajectoire centrale.
- Dj. Benterki, et all (2004) ont proposé une étude théorique et numérique de certains algorithmes projectifs de Alizadeh.

Toutes ces méthodes de différents types à savoir les méthodes de trajectoire centrale réalisable et non-réalisable, primale, duale et primale-duale ont un problème majeur commun celui de l'initialisation.

En (2007) Dj. Benterk, et all ont propose une méthode de point intérieur réalisable pour résoudre (*SDP*).

L'avantage principal de cette méthode est le calcul d'une solution réalisable initiale pour (*SDP*).

Chapitre 3

Méthode barrière logarithmique via les fonction majorantes

3.1 Introduction

On propose dans cette partie une approche barrière pour résoudre (*SDP*). La méthode est basée sur une fonction de pénalisation logarithmique donnant lieu à un algorithme de type. La difficulté est au niveau de la recherche linéaire : la présence du déterminant dans la définition de la fonction barrière logarithmique entraîne un coût très élevé dans les procédures classiques de la recherche linéaire. Dans notre approche, au lieu de la minimiser, le long de la direction de descente en un point courant y , on propose des fonctions majorantes G pour lesquelles la solution optimale du pas de déplacement t est obtenue explicitement.

On s'intéresse à résolution du problème suivant

$$(DL) \begin{cases} \min b^t y \\ \sum_{i=1}^m y_i A_i - C \in S_n^+, \\ y \in \mathfrak{R}^m. \end{cases}$$

S_n^+ désigne le cône des matrices symétriques semi-définie positive $n \times n$.

C, A_i , avec $i = \overline{1, m}$, sont des matrices symétriques données et $b \in \mathfrak{R}^m$.

Son dual s'écrit sous la forme

$$(PL) \begin{cases} \max \langle C, X \rangle \\ \langle A_i, X \rangle = b_i, i = \overline{1, m}, \\ X \in S_n^+. \end{cases}$$

avec $\langle C, X \rangle$, $\langle A_i, X \rangle$ sont les traces des matrices $(C^t X)$ et $(A_i^t X)$. A priori, un des avantages du problème (DL) par rapport au problème (PL) est que l'argument de la fonction que l'on minimise est un vecteur, alors qu'il est une matrice dans (PL) .

D'autre part sous des hypothèses convenables, la résolution de (DL) est équivalente à celle de (PL) au sens que la solution optimale de l'un des deux problèmes se déduit directement de l'autre via le théorème des écarts complémentaires.

Dans toute la suite, on représentera les ensembles des solutions réalisables est strictement réalisables par

$$\begin{aligned} Y &= \{y \in \mathfrak{R}^m : \sum_{i=1}^m y_i A_i - C \in S_n^+\}, \\ \widehat{Y} &= \{y \in \mathfrak{R}^m : \sum_{i=1}^m y_i A_i - C \in S_n^{++}\}, \\ F &= \{X \in S_n^+ : \langle A_i, X \rangle = b_i, \quad \forall i = \overline{1, m}\}, \\ \widehat{F} &= \{X \in F : X \in S_n^{++}\}. \end{aligned}$$

Tous ces ensembles sont convexes.

Pour étudier théoriquement et numériquement le problème (DL) , On le remplace par une suite de problèmes perturbés sans contrainte comme suit

$$(DL_r) \begin{cases} \min f_r(y) \\ y \in \mathfrak{R}^m. \end{cases}$$

avec $r > 0$ est un paramètre barrière et f_r la fonction barrière défini par

$$f_r(y) = \begin{cases} b^t y + nr \ln r - r \ln[\det(\sum_{i=1}^n y_i A_i - C)] & \text{si } y \in \widehat{Y}, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour résoudre (DL_r) , on utilise une méthode de descente classique de type Newton.

On va minimiser une fonction G telle que

$$\frac{1}{r}[f_r(y + td) - f_r(y)] = \theta(t) \leq G(t), \forall t > 0, \theta(0) = G(0), \theta'(0) = G'(0) < 0,$$

et la bonne qualité des approximations de θ est assurée par la condition $\theta''(0) = G''(0)$.

3.2 Problème (DL_r) : Aspects théoriques

Rappelons que (DL_r) , $r > 0$ est le problème

$$(DL_r) \begin{cases} \min f_r(y) \\ y \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Où $f_r : \mathbb{R}^m \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est définie par

$$f_r(y) = \begin{cases} b^t y + n r \ln r - r \ln[\det(\sum_{i=1}^n y_i A_i - C)] & \text{si } y \in \widehat{Y}, \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Les hypothèses suivantes sont nécessaires

H1. Le système d'équation $\langle A_i, X \rangle = b_i, i = \overline{1, m}$ est de rang m .

H2. Les ensembles \widehat{Y} et \widehat{F} sont non vides. On sait alors que

1. Les ensembles de solutions optimales de (PL) et (DL) sont convexes compacts non vides.
2. Si X^* est solution optimale de (PL) , alors y^* est solution optimale de (DL) si et seulement si

$$y^* \in Y \text{ et } (\sum_{i=1}^m y_i^* A_i - C) X^* = 0.$$

3. Si y^* est solution optimale de (DL) , alors X^* est solution optimale de (PL) si et seulement si

$$X^* \in Y \text{ et } (\sum_{i=1}^m y_i^* A_i - C) X^* = 0.$$

Dans ces conditions, la résolution du problème (DL) permet d'obtenir celle de (PL) et vice versa.

3.2.1 Propriétés fondamentales de f_r

Pour $y \in \widehat{Y}$, on introduit la matrice $B(y)$ symétrique définie positive de taille m , et la matrice $L(y)$ triangulaire inférieure telles que

$$B(y) = \sum_{i=1}^m y_i A_i - C = L(y) L^t(y).$$

Et pour $i, j = \overline{1, m}$, on définit

$$\begin{aligned} \widehat{A}_i(y) &= [L(y)]^{-1} A_i [L^t(y)]^{-1}, \\ b_i(y) &= Tr(\widehat{A}_i(y)) = Tr(A_i B^{-1}(y)), \end{aligned}$$

$$\Delta_{ij}(y) = \text{Tr}(B^{-1}(y)A_iB^{-1}(y)A_j) = \text{Tr}(\widehat{A}_i(y)\widehat{A}_i(y)).$$

Ainsi, $b(y)$ est un vecteur de \mathfrak{R}^m et $\Delta(y)$ est une matrice symétrique de taille m .

Théorème 3.1. [8] *La fonction f_r est deux fois continument différentiable sur \widehat{Y} . Plus précisément, pour tout $y \in \widehat{Y}$ on a*

1. $\nabla f_r(y) = b - rb(r)$,
2. $\nabla^2 f_r(y) = r\Delta(y)$,
3. *La matrice $\nabla^2 f_r(y)$ est définie positive.*

3.2.2 Existence de la solution du problème (DL_r)

Puisque la fonction f_r prend la valeur $+\infty$ sur la frontière du domaine réalisable et différentiable à l'intérieur, alors elle est semi-continue inférieurement. Pour prouver que DL_r possède une solution, il suffit de prouver que le cône de récession est réduit à l'origine, avant cela on montre le résultat suivant

Proposition 3.2. [8] *$d = 0$ quand $[b^t d \leq 0$ et $\sum_{i=1}^m d_i A_i \in S_n^+$].*

Preuve.

Admettons que $d \neq 0$, $b^t d \leq 0$ et $U = \sum_{i=1}^m d_i A_i$, alors d'une part (H_1) implique que $U \neq 0$. D'autre part, d'après (H_2) il existe une matrice \widehat{X} , telle que $\widehat{X} \in \widehat{F} \subset S_n^+$, et

$$0 < \langle U, \widehat{X} \rangle = \sum_{i=1}^m d_i \langle A_i, \widehat{X} \rangle = b^t d.$$

La proposition est ainsi prouvée. ■

Proposition 3.3. [8] *$d = 0$ si $(f_r)_\infty \leq 0$,*

Preuve.

D'après (H_2) , il existe $y \in \widehat{Y}$. La fonction de récession $(f_r)_\infty$ de f_r est définie par

$$(f_r)_\infty(d) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\varepsilon(t) = \frac{f_r(y + td) - f_r(y)}{t} \right].$$

soit $B = B(y) = \sum_{i=1}^m y_i A_i - C$, puisque B est une matrice symétrique définie positive, alors il existe une matrice non singulière triangulaire inférieure telle que $B = LL^t$. Pour $d \in \mathfrak{R}^m$, on pose $H(d) = \sum_{i=1}^m d_i A_i$. Alors, pour tout $t \in \mathfrak{R}$ telle que la matrice $B + tH(d)$ est définie positive, on a

$$\varepsilon(t) = b^t - rt^{-1} \left[\ln \det(B + tH(d)) - (\ln \det(B)) \right]$$

$$= b^t - rt^{-1} \left[\ln \det(I + tE(d)) \right].$$

Avec $E(d) = L^{-1}H(d)(L^{-1})^t$.

On en déduit que

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} b^t - rt^{-1} \ln \det(I + tE(d)) & \text{si } I + tE(d) \in S_n^{++}, \\ +\infty & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

La condition $[f_r]_\infty(d) \leq 0$ est aussi équivalent à dire que $H(d)$ est semi-définie positive et par suite $E(d)$ est définie positive et

$$b^t d \leq r \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \det(I + tE(d)) = r \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t} \ln(1 + t\lambda_i(d)) = 0,$$

où les $\lambda_i(d)$ désignent les valeurs propres de $E(d)$. On a

$$\det(I + tE(d)) = \prod_{i=1}^n (1 + t\lambda_i(d)).$$

Passant à la limite lorsque t tend vers $+\infty$, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} rt^{-1} \ln \det(I + tE(d)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} r \sum_{i=1}^n \frac{\ln(1 + t\lambda_i(d))}{t} = 0,$$

on obtient par la suite que $[f_r]_{+\infty}(d) \leq 0$ implique $\langle b, d \rangle \leq 0$ et $\sum_{i=1}^n d_i A_i \in S_n^+$.

La proposition 3.3 nous dit alors que $d = 0$. Ainsi f_r est inf-compact.

Notons par $y(r)$ ou y_r l'unique solution de (DL_r) . ■

3.2.3 Comportement de la solution lorsque $r \mapsto 0$

Dans ce qui suit, on s'intéresse au comportement de la valeur optimale et la solution optimale du problème (DL_r) . Pour cela on introduit la fonction ψ , définie par

Pour tout $y \in \hat{Y}$ et $r > 0$

$$\psi(y, r) = f_r(y) = \begin{cases} f_r(y) & \text{si } r > 0 \\ b^t y & \text{si } r = 0, y \in Y, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Tel que $f(y) = b^t y$.

Lemme 3.4. *Pour $r > 0$, soit y_r une solution optimale du problème (DL_r) , alors $y^* = \lim_{r \rightarrow 0} y_r$ est une solution optimale du problème (DL) .*

Preuve. La fonction ψ est différentiable au point (y_r, r) et on a

$$\nabla_y \psi(y_r, r) = \nabla f_r(y_r) = 0.$$

On a $\forall y \in \widehat{Y}$

$$f(y) = \psi(y, 0) \geq \psi(y_r, r) + \langle y - y_r, \nabla_y \psi(y_r, r) \rangle + (0 - r) \nabla_r \psi(y_r, r).$$

Donc

$$f(y) \geq f(y_r) + nr \ln r - r \ln \left[\det \left(\sum_{i=1}^m y_i A_i - C \right) \right] - r \left[n \ln r + n - \ln \left[\det \left(\sum_{i=1}^m y_i A_i - C \right) \right] \right],$$

ce qui donne

$$f(y) \geq f(y_r) - nr, \forall y \in \widehat{Y},$$

d'où

$$\min_{y \in Y} f(y) \geq f(y_r) - nr,$$

et

$$f(y_r) \geq \min_{y \in Y} f(y) \geq f(y_r) - nr.$$

Si r tend vers zéro alors on a

$$\min_{y \in Y} f(y) = \lim_{r \rightarrow 0} f(y_r),$$

d'où si y_r est une solution optimale du problème (DL_r) , alors il existe y^* une solution optimale de problème (DL) tel que

$$\lim_{r \rightarrow 0} y_r = y^*.$$

■

3.3 Direction de descente de Newton

De part la présence de la fonction barrière, le problème (DL_r) peut être considéré comme sans contraintes. On peut donc le résoudre par une méthode de descente classique. Comme f_r prend la valeur $+\infty$ sur la frontière de Y , alors les itérés y sont dans \widehat{Y} , Ainsi la méthode que nous proposons est une méthode de points intérieurs.

Soit $y \in \widehat{Y}$ l'itéré en cours. Comme direction de descente en y , prenons la direction de Newton d solution du système linéaire

$$[\nabla^2 f_r(y)]d = -\nabla f_r(y).$$

En vertu du théorème 3.1, le système linéaire est équivalent au système

$$\Delta(y)d = b(y) - \frac{1}{r}b, \quad (3.1)$$

$b(y)$ et $\Delta(y)$ sont définies en 3.2.1

La matrice $\Delta(y)$ étant symétrique, définie positive, le système linéaire (3.1) peut être efficacement résolu via la décomposition de Choleski. Bien évidemment, on admet que $\nabla f(y) \neq 0$ (sinon l'optimum est atteint). Il s'ensuit que $d \neq 0$. La direction d étant calculée, on cherche $\bar{t} > 0$ donnant une décroissance significative à f_r sur la demi-droite $y + td$, $t > 0$, tout en conservant la définie positivité de la matrice $B(y + \bar{t}d)$. Pour se faire, on considère la fonction

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \frac{1}{r}[f_r(y + td) - f_r(y)], y + td \in \widehat{Y}, \\ \theta(t) &= \frac{1}{r}b^t d - \ln \det(B(y + td)) + \ln \det(B(y)). \end{aligned}$$

Puisque $\nabla^2 f_r(y)d = -\nabla f_r(y)$, on a

$$d^t \nabla f_r(y)d = d^t \nabla f_r(y) = d^t b(y) - r d^t b.$$

Pour simplifier les notations, on prend

$$B = B(y) = \sum_{i=1}^m y_i A_i - C \text{ et } H = \sum_{i=1}^m d_i A_i.$$

B étant symétrique définie positive, il existe une matrice triangulaire inférieure L telle que $B = LL^t$.

Par la suite ,on pose

$$E = L^{-1}H(L^{-1})^t.$$

Puisque $d \neq 0$, l'hypothèse (H1) implique que $H \neq 0$ et par suite $E \neq 0$.

En prenant compte de cette notation , pour tout $t > 0$, tel que $I + tE$ est définie positive, Désignons par λ_i les valeurs propres de la matrice symétrique E .

Remarque. Pour que la fonction $\theta(t)$ soit bien définie, il faut que toutes les itérations soient strictement réalisable pour (DL), c'est-à-dire, que si le vecteur $y \in \widehat{Y}$, il faut que $(y + td)$ reste dans \widehat{Y} . Ce qui revient à trouver \widehat{t} tel que pour tout $t \in [0, \widehat{t}]$,

$$y + td \in \widehat{Y}.$$

Lemme 3.5. Pour tout $t \in [0, \widehat{t}]$, la fonction $\theta(t)$ est bien définie et s'écrit sous la forme suivante

$$\theta(t) = \sum_{i=1}^n \left[t(\lambda_i - \lambda_i^2) - \ln(1 + t\lambda_i) \right], \quad t \in [0, \widehat{t}], \quad (3.2)$$

où

$$\widehat{t} = \sup\{t, 1 + t\lambda_i > 0, i = \overline{1, n}\}.$$

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \frac{1}{r} \left(f_r(y + td) - f_r(y) \right) \\ &= \frac{1}{r} b^t d - \ln \det \left(\sum_{i=1}^n (y_i + td) A_i - C \right) + \ln \det \left(\sum_{i=1}^n y_i A_i - C \right)\end{aligned}$$

et

$$\sum_{i=1}^n (y_i + td) A_i - C = \left(\sum_{i=1}^n y_i A_i - C \right) + t \sum_{i=1}^n d_i A_i = B + tH = B(I + tB^{-1}H)$$

On a aussi

$$\nabla f_r(y) = b - rb(y),$$

d'où

$$d^t \nabla f_r(y) = d^t b - r d^t b(y),$$

ce qui donne

$$d^t b = d^t \nabla f_r(y) + r d^t b(y), \quad (3.3)$$

la direction d vérifie $\nabla^2 f_r(y) d = -\nabla f_r(y)$

d'où

$$d^t \nabla^2 f_r(y) d = -d^t \nabla f_r(y). \quad (3.4)$$

D'après (3.2), l'équation (3.3) s'écrit

$$\begin{aligned}d^t b &= d^t \nabla f_r(y) + r d^t b(y) \\ &= -d^t [\nabla^2 f_r(y)] d + r d^t b(y) \\ &= -d^t [\nabla^2 f_r(y)] d + r \sum_{i=1}^n d^t \text{Tr}(A_i B^{-1}(y_r)) \\ &= -d^t [\nabla^2 f_r(y)] d + r \text{Tr}(E).\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}d^t [\nabla^2 f_r(y)] d &= d^t [r \Delta(y_r)] d \\ &= r d^t \left[\text{Tr}(B^{-1}(y_r) A_i B^{-1}(y_r) A_j) \right] d \\ &= r \sum_{i=1}^n d_i^2 \text{Tr}(B^{-1}(y_r) A_i B^{-1}(y_r) A_j) \\ &= r \text{Tr}(E^2)\end{aligned}$$

donc

$$d^t b = r \text{Tr}(E) - r \text{Tr}(E^2).$$

Alors

$$\theta(t) = t \left(\text{Tr}(E) - \text{Tr}(E^2) - \ln \det(I + tE) \right).$$

Désignons par λ_i les valeurs propres de la matrice symétrique E ,

$$\theta(t) = \sum_{i=1}^n \left[t(\lambda_i - \lambda_i^2) - \ln(1 + t\lambda_i) \right], \quad t \in [0, \hat{t}],$$

avec

$$\hat{t} = \sup\{t : 1 + t\lambda_i > 0, i = \overline{1, n}\}.$$

Observons que $\hat{t} = +\infty$ si E est semi-définie positive, et $0 < \hat{t} < 1$ sinon. Il est clair que θ est convexe sur $[0, \hat{t}]$, $\theta(0) = 0$ et

$$0 < \sum_i \lambda_i^2 = \theta''(0) = -\theta'(0).$$

En outre, $\theta(t) \rightarrow +\infty$ lorsque $t \rightarrow \hat{t}$. Il s'ensuit, qu'il existe un point unique t_{opt} tel que $\theta'(t_{opt}) = 0$, θ atteint son minimum en ce point. Malheureusement, il n'existe pas de formule explicite donnant t_{opt} , et la résolution de l'équation $\theta'(t_{opt}) = 0$ par des méthodes itératives nécessite à chaque itération le calcul de θ et θ' . Ces calculs sont trop coûteux du fait que l'expression de θ en (2) contient le déterminant qui n'est pas facile à calculer et (3) nécessite la connaissance des valeurs propres de E , c'est un problème numérique de taille. Ces difficultés nous ont conduit à chercher d'autres alternatives. À partir de la donnée de la matrice E , il est facile d'obtenir les quantités suivantes

$$Tr(E) = \sum_i e_{ii} = \sum_i \lambda_i \text{ et } Tr(E^2) = \sum_i e_{ii}^2 = \sum_i \lambda_i^2.$$

■

3.3.1 Calcul des différentes valeurs de \hat{t}

On suppose connaître la moyenne \bar{x} et l'écart type σ_x d'une série statistique $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de n nombres réels et, on cherche certaines informations sur les x_i à partir de ces données. On rappelle que

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \text{ et } \sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Proposition 3.6.

$$\bar{x} - \sigma_x \sqrt{n-1} \leq \min_i x_i \leq \bar{x} - \frac{\sigma_x}{\sqrt{n-1}},$$

$$\bar{x} + \frac{\sigma_x}{\sqrt{n-1}} \leq \max_i x_i \leq \bar{x} + \sigma_x \sqrt{n-1}.$$

En particulier, dans le cas où tous les x_i sont positifs, on déduit que

$$n \ln(\bar{x} - \sigma_x \sqrt{n-1}) \leq \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \leq n \ln(\bar{x} + \sigma_x \sqrt{n-1}),$$

où par convention, $\ln(t) = \infty$ si $t \leq 0$. on donne **la première valeur de \hat{t}**

$$\hat{t}_1 = \sup\{t, 1 + tB_1 > 0\} \text{ avec } B_1 = \bar{\lambda} - \sigma_\lambda \sqrt{n-1},$$

et **la deuxième valeur de \hat{t}**

$$\hat{t}_2 = \sup\{t, 1 + tB_2 > 0\} \text{ avec } B_2 = -\|\lambda\|.$$

Lemme 3.7. La fonction $\theta(t)$ est bien définie sur $[0, \hat{t}_1[$, $[0, \hat{t}_2[$.

Preuve. On a

$$\theta(t) = \sum_{i=1}^n \left[t(\lambda_i - \lambda_i^2) - \ln(1 + t\lambda_i) \right], \quad t \in [0, \hat{t}],$$

avec

$$\hat{t} = \sup \left\{ 1 + t\lambda_i > 0, \text{ pour tout } i \right\},$$

on a

$$\bar{x} - \sigma_x \sqrt{n-1} \leq \min_i x_i \leq \bar{x} - \frac{\sigma_x}{\sqrt{n-1}},$$

on pose $x_i = 1 + t\lambda_i$

$$1 + t\bar{\lambda} - t\sigma_\lambda \sqrt{n-1} \leq \min_i (1 + t\lambda_i) \leq 1 + t\bar{\lambda} - \frac{t\sigma_\lambda}{\sqrt{n-1}},$$

alors

$$1 + t(\bar{\lambda} - \sigma_\lambda \sqrt{n-1}) \leq \min_i (1 + t\lambda_i) \leq 1 + t(\bar{x} - \frac{\sigma_\lambda}{\sqrt{n-1}}).$$

D'où

$$1 + t\lambda_i > 1 + t(\bar{\lambda} - \sigma_\lambda \sqrt{n-1}) \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Donc

$$\hat{t}_1 = \sup \left\{ t, 1 + t\beta_1 > 0 \right\} \text{ avec } \beta_1 = \bar{\lambda} - \sigma_\lambda \sqrt{n-1}.$$

On a aussi

$$|\lambda_i| \leq \|\lambda\|, \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

D'où

$$-\|\lambda\| \leq \lambda_i \leq \|\lambda\|,$$

alors

$$1 - t\|\lambda\| \leq 1 + t\lambda_i \leq 1 + t\|\lambda\|, \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

D'où

$$1 + t\lambda_i \geq 1 - t\|\lambda\| > 0,$$

on a

$$\hat{t}_2 = \sup \left\{ t, 1 + t\beta_2 > 0 \right\} \text{ avec } \beta_2 = -\|\lambda\|.$$

■

3.4 Fonctions majorantes de θ

On cherche une fonction majorante G de θ sur $[0, \widehat{t}_i[$, $i = \overline{1, 2}$ tel que

$$G(0) = 0, \|\lambda\|^2 = G''(0) = -G'(0)$$

Proposition 3.8. [7] *On suppose que $x_i > 0$ pour tout $i = \overline{1, n}$, alors*

$$n \ln(\bar{x} - \sigma_x \sqrt{n-1}) \leq A \leq \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \leq B \leq n \ln(\bar{x}),$$

avec

$$A = (n-1) \ln\left(\bar{x} + \frac{\sigma_x}{\sqrt{n-1}}\right) + \ln(\bar{x} - \sigma_x \sqrt{n-1})$$

et

$$B = \ln(\bar{x} + \sigma_x \sqrt{n-1}) + (n-1) \ln\left(\bar{x} - \frac{\sigma_x}{\sqrt{n-1}}\right)$$

3.4.1 Première fonction majorante

Cette stratégie, consiste à minimiser des approximations majorantes G de θ sur $[0, \widehat{t}]$. Pour être efficace, cette approximation doit être simple et suffisamment proche de θ . Dans notre cas on exige

$$0 = G(0), \|\lambda\|^2 = G''(0) = -G'(0).$$

Alors on définit la fonction majorante G_0 sur $[0, \widehat{t}]$

$$G_0(t) = \gamma_0 t - (n-1) \ln(1 + \alpha_0 t) - \ln(1 + \beta_0 t).$$

avec

$$\gamma_0 = n\bar{\lambda} - \|\lambda\|^2, \alpha_0 = \bar{\lambda} - \frac{\sigma_\lambda}{\sqrt{n-1}} \text{ et } \beta_0 = \bar{\lambda} + \sigma_\lambda \sqrt{n-1}.$$

Les logarithmes sont bien définis dès que $t \leq \widehat{t}_0$ avec

$$\widehat{t}_0 = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha_0} \text{ si } \alpha_0 < 0, \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases}$$

Lemme 3.9. $\theta(t) \leq G_0(t)$, $\forall t \in [0, \widehat{t}]$.

Preuve. Soient $x_i, i = \overline{1, n}$, on a

$$A \leq \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \iff A + t\|\lambda\|^2 \leq t\|\lambda\|^2 + \sum_{i=1}^n \ln(x_i)$$

ce qui est équivalent à

$$-A - t\|\lambda\|^2 \geq -t\|\lambda\|^2 - \sum_{i=1}^n \ln(x_i),$$

ceci implique

$$t \sum_{i=1}^n \lambda_i - A - t\|\lambda\|^2 \geq t \sum_{i=1}^n \lambda_i - t\|\lambda\|^2 - \sum_{i=1}^n \ln(x_i),$$

alors

$$\theta(t) \leq t \sum_{i=1}^n \lambda_i - A - t\|\lambda\|^2,$$

tel que

$$\theta(t) = t \sum_{i=1}^n \lambda_i - t\|\lambda\|^2 - \sum_{i=1}^n \ln(x_i),$$

donc

$$G_0(t) = t \sum_{i=1}^n \lambda_i - \left[(n-1) \ln(\bar{x} + \frac{\sigma_x}{\sqrt{n-1}}) + \ln(\bar{x} - \sigma_x \sqrt{n-1}) \right] - t\|\lambda\|^2.$$

Rappelons que l'on a

$$\gamma_0 = n\bar{\lambda} - \|\lambda\|^2.$$

On a alors les relations suivantes

$$\gamma_0 + (n-1)\alpha_0 + \beta_0 = (n-1)\alpha_0^2 + \beta_0^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

D'où

$$\gamma_0 = (n-1)(\alpha_0 - \alpha_0^2) + \beta_0 - \beta_0^2.$$

D'autre part pour tout $t \in [0, \hat{t}_0[$

$$G'_0(t) = \gamma_0 - \frac{(n-1)\alpha_0}{1 + \alpha_0 t} - \frac{\beta_0}{1 + \beta_0 t}$$

et

$$G''_0(t) = \frac{(n-1)\alpha_0^2}{(1 + \alpha_0 t)^2} - \frac{\beta_0^2}{(1 + \beta_0 t)^2}.$$

On sait alors que

$$\theta'(0) = G'_0(t) = -n(\bar{\lambda}^2 + \sigma_\lambda^2) = -\sum_{i=1}^n \lambda_i^2,$$

$$\theta''(0) = G''_0(0) = n(\bar{\lambda}^2 + \sigma_\lambda^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \text{Tr}(E^2).$$

G_0 est strictement convexe sur $]0, +\infty[$ et $G'_0(t) < 0$. Si t tend vers ∞ et puisque G_0 majore θ qui est inf-compacte, G_0 admet un minimum sur $[0, \hat{t}_0[$.

Si $\hat{t}_0 < 1$, alors $G_0(t)$ tend vers 1 si t tend vers \hat{t}_0 , donc G_0 admet un minimum unique sur

$[0, \widehat{t}_0[$. Ce minimum est obtenu en t_{opt} telle que $G'_0(t_{opt}) = 0$.

On est donc ramené à résoudre l'équation du second degré

$$\alpha_0\beta_0\gamma_0 t^2 + ((\alpha_0 + \beta_0)\gamma_0 - n\alpha_0\beta_0)t + (\gamma_0 - (n-1) - \alpha_0 - \beta_0) = 0,$$

les racines de cette équation sont de type

$$\bar{t}_0 = \frac{-1}{2\alpha_0\beta_0\gamma_0} \left[\alpha_0\gamma_0 + \beta_0\gamma_0 - n\alpha_0\beta_0 \pm \sqrt{[(\alpha_0 - \beta_0)\gamma_0 - n\alpha_0\beta_0]^2 + 4\alpha_0\beta_0\gamma_0(\alpha_0 - \beta_0)} \right].$$

On prend une seule des deux racines qui appartient à $[0, \widehat{t}_0[$. ■

3.4.2 Deuxième fonction majorante

L'idée consiste à utiliser l'inégalité suivante

$$\left(-\|\lambda\| - \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) t - \ln(1 - t\|\lambda\|) \geq - \sum_{i=1}^n \ln(1 + t\lambda_i).$$

En remplaçant dans (3.2), on obtient

$$\theta(t) \leq -\|\lambda\|(\|\lambda\| + 1)t - \ln(1 - t\|\lambda\|),$$

d'où

$$G_2(t) = -\|\lambda\|(\|\lambda\| + 1)t - \ln(1 - t\alpha_2),$$

tel que $\alpha_2 = \|\lambda\|$ définie par $[0, \widehat{t}_2[$ avec $\widehat{t}_2 = \frac{1}{\|\lambda\|}$.

Lemme 3.10. *Pour tout $t \in [0, \widehat{t}_2[$, on a*

1. $G_2(0) = \theta(0) = 0$ et $G'_2(0) = \theta'(0) = -\|\lambda\|^2 < 0$
2. $G''_2(0) = \theta''(0) = \|\lambda\|^2$.
3. $\theta(t) \leq G_2(t)$.

Preuve. 1. À partir de la définition, on a $G_2(0) = \theta(0) = 0$ et

$$G'_2(t) = \frac{\|\lambda\|}{1 - t\|\lambda\|} - \|\lambda\|(1 + \|\lambda\|),$$

ce qui donne $G'_2(0) = -\|\lambda\|^2 < 0$, d'où $\theta'(0) = G'_2(0) < 0$.

2. D'autre part

$$G''_2(t) = \frac{\|\lambda\|^2}{(1 - t\|\lambda\|)^2} > 0,$$

d'où $G''_2(0) = \theta''(0) = \|\lambda\|^2$.

On considère la fonction

$$h(t) = \theta(t) - G_2(t)$$

$$= \left(\|\lambda\| - \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) t - \ln(1 + t\|\lambda\|) + \sum_{i=1}^n \ln(1 + t\lambda_i).$$

On a par définition $h(0) = 0$ et pour étudier le signe de la fonction h , on distingue deux cas :

1. S'il existe i tel que $\|\lambda\| = -\lambda_i$ alors $h(t) = 0$ pour tout $t \in [0, \hat{t}]$,
2. Dans le cas contraire, on sait que $-\|\lambda\| \leq \lambda_i \leq \|\lambda\|$.

En outre

$$h'(t) = t \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \left[(1 + t\|\lambda\|)^{-1} - (1 + t\lambda_i)^{-1} \right].$$

Puisque $1 - t\|\lambda\| < 1 + t\lambda_i$, pour tout i , alors $h'(t) > 0$ pour tout $t \in [0, \hat{t}]$, d'où la fonction $h(t)$ est strictement croissante et comme $h(0) = 0$, alors $h(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, \hat{t}]$, ce qui donne

$$\theta(t) \geq G_2(t) \text{ pour tout } t \in [0, \hat{t}].$$

■

Lemme 3.11. *La fonction G_2 est strictement convexe. Elle atteint son minimum sur $[0, \hat{t}_2[$ au point $\bar{t}_2 = (1 + \|\lambda\|)^{-1}$ et on a*

$$G_2(\bar{t}_2) = \ln(1 + \|\lambda\|) - \|\lambda\|.$$

Preuve. On note que l'on a

$$G_2'(t) = \frac{\|\lambda\|}{1 - t\|\lambda\|} - \|\lambda\|(1 + \|\lambda\|),$$

$$G_2''(t) = \frac{\|\lambda\|^2}{(1 - t\|\lambda\|)^2} > 0.$$

D'où G_2 est strictement convexe et alors, G_2 atteint son minimum sur $[0, \hat{t}_2[$ au point \bar{t} si et seulement si $G_2'(\bar{t}_2) = 0$, ce qui donne $\bar{t}_2 = (1 + \|\lambda\|)^{-1}$ et

$$G_2(\bar{t}_2) = \ln(1 + \|\lambda\|) - \|\lambda\|.$$

■

3.4.3 Troisième fonction majorante

On peut aussi penser à d'autres fonctions plus simples que G_0 , qui font intervenir un seul logarithme et qui nous permettent de trouver une relation entre G_0 et G_2 . On considère les fonctions suivantes

$$G_1(t) = \tilde{\gamma}t - \tilde{\delta} \ln(1 + \tilde{\beta}t) \quad t \in [0, \tilde{t}[, \tilde{t} = \sup[t, 1 + t\tilde{\beta} > 0],$$

tels que

$$\tilde{\beta} = \beta_0 = \beta_1 = \bar{\lambda} - \sigma_\lambda \sqrt{n-1},$$

et

$$\|\lambda\|^2 = \tilde{\delta}\tilde{\beta}^2 = \tilde{\delta}\tilde{\beta} - \tilde{\gamma}, \quad (3.5)$$

alors

$$\tilde{\delta} = \frac{\|\lambda\|^2}{\tilde{\beta}^2},$$

et

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\delta}\tilde{\beta} - \|\lambda\|^2.$$

En outre l'introduction des fonctions de type

$$G(t) = \tilde{\gamma}t - \tilde{\delta} \ln(1 + \tilde{\beta}t) \quad t \in [0, \tilde{t}],$$

permettent d'avoir une comparaison entre G_0, G_1 et G_2 en admettant (3.5) qui se traduit dans la proposition suivante où l'on voit clairement l'efficacité et l'intérêt majeur apporté par l'introduction de telles fonctions.

Proposition 3.12. $G_i, i = \overline{0, 2}$ est strictement convexe sur $G_i(t) \rightarrow \infty$ lorsque $t \rightarrow \hat{t}_i$. En outre, $G_0(t) \leq G_1(t) \leq G_2(t) \leq +\infty$ pour tout $t > 0$

Preuve. La première inégalité est immédiate. L'inégalité $\theta(t) \leq G_0(t)$ est une conséquence directe du théorème (3.8). Posons $\nu(t) = G_1 - G_0$.

Puisque

$\beta_0 = \beta_1$ et $\alpha_0 \geq \beta_0$, on a pour $t > 0$

$$\nu''(t) = \frac{\delta_1\beta_1^2 - \beta_0^2}{(1 + \beta_0t)^2} - \frac{(n-1)\alpha_0^2}{(1 + \alpha_0t)^2} = \frac{(n-1)\alpha_0^2}{(1 + \beta_0t)^2} - \frac{(n-1)\alpha_0^2}{(1 + \alpha_0t)^2},$$

comme $\nu(0) = \nu'(0) = 0$, il vient $\nu(t) \geq 0$ pour $t > 0$.

Puis, on pose $u(t) = G_2 - G_1$. Alors $u(0) = u'(0) = 0$ et

$$u''(t) = \left[\frac{1}{(1 + \beta_2t)^2} - \frac{1}{(1 + \beta_1t)^2} \right] \geq 0,$$

D'où $u(t) \geq 0$ pour tout $t > 0$.

On en déduit que la fonction G_i atteint son minimum en un point unique \bar{t}_i qui est la racine de $G'_i(t) = 0$. Pour $i = \overline{1, 2}$, on a

$$\bar{t}_i = \frac{\delta_i}{\gamma_i} - \frac{1}{\beta_i} \quad \text{et} \quad G_i(\bar{t}_i) = \frac{\|\lambda\|^2}{\beta_i} + \frac{\|\lambda\|^2}{(\beta_i)^2} \ln(1 - \beta).$$

En particulier

$$\bar{t}_2 = \frac{1}{1 + \|\lambda\|} \text{ et } G_2(\bar{t}_2) = -\|\lambda\| + \ln(1 + \|\lambda\|).$$

La solution de l'équation $G_0(t) = 0$ nous ramène à résoudre l'équation du deuxième degré $t^2 - 2bt + ct = 0$, où

$$b = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{\gamma_0} - \frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\beta_0} \right) \text{ et } c = -\frac{\|\lambda\|^2}{\alpha_0 \beta_0 \gamma_0},$$

dont les racines sont données par $t = b \pm \sqrt{b^2 - C}$. Pour \bar{t}_0 on prend la racine qui appartient à l'intervalle $(0, \hat{t}_0)$.

Ainsi, les trois racines \bar{t}_0 , \bar{t}_1 et \bar{t}_2 sont explicitement calculées. Il est clair que

$$\theta(\bar{t}_2) \leq G_2(\bar{t}_2), \theta(\bar{t}_1) \leq G_1(\bar{t}_1) \leq G_1(\bar{t}_2) \leq G_2(\bar{t}_2)$$

et

$$\theta(\bar{t}_0) \leq G_0(\bar{t}_0) \leq G_0(\bar{t}_1) \leq G_1(\bar{t}_1) \leq G_2(\bar{t}_2).$$

■

Lemme 3.13. *Soient y_{k+1} et y_k deux solutions strictement réalisables du problème (DL_r) , obtenues respectivement à l'itération $k + 1$ et k , donc nous avons $f_r(y_{k+1}) < f_r(y_k)$.*

Preuve. on a

$$f_r(y_{k+1}) \simeq f_r(y_k) + \langle \nabla f_r(y_k), y_{k+1} - y_k \rangle,$$

avec

$$y_{k+1} = y_k + t_k d_k,$$

donc

$$\begin{aligned} f_r(y_{k+1}) - f_r(y_k) &\simeq \langle \nabla f_r(y_k), t_k d_k \rangle - t_k \langle \nabla^2 f_r(y_k) d_k, d_k \rangle \\ &\simeq -t_k \langle \nabla^2 f_r(y) d_k, d_k \rangle < 0. \end{aligned}$$

■

3.5 Algorithme Prototype

Initialisation On décide pour la stratégie du pas de déplacement et on fixe les paramètres $\varepsilon > 0$, $r > 0$, $\rho > 0$, $\sigma \in]0, 1[$. On démarre avec $y \in \hat{Y}$.

Itération

1. Calculer $B = B(y)$ et L tq $LL^t = B$.
2. Calculer $g = b - rb(y)$ et $H = r\Delta(y)$.
3. Résoudre le système linéaire $Hd = -g$. Calculer E , $Tr(E)$ et $Tr(E^2)$.
4. Calculer $\bar{\lambda}$ et $\bar{\sigma}_\lambda$.
5. Obtenir \bar{t} l'une des trios stratégie.

Prendre $\bar{y} = y + \bar{t}d$.

6. Si $|b^t y - b^t \bar{y}| > \rho nr$, alors $y = \bar{y}$ et aller en (1.).

si $nr > \varepsilon$, alors $y = \bar{y}$, $r = \sigma r$ et aller en (1.).

7. **Stop** \bar{y} est une solution approximative de (DL) .

On sait de ce qui précède, que la solution optimale de (DL_r) est une approximation de la solution de (DL) , plus r est proche de zéro plus l'approximation est bonne. Malheureusement quand r s'approche de zéro, le problème (DL_r) devient mal conditionné. C'est la raison pour laquelle on utilisera au début de l'itération des valeurs de r pas très proches de zéro, vérifiant le test $nr < \varepsilon$.

On peut expliquer la mise à jour de r comme suit si $y(r)$ est une solution exacte de (DL_r) , alors $b^t y(r) \in [m_D, m_D + nr]$, il est donc inutile de continuer le calcul des itérés quand $|b^t y - b^t \bar{y}| \leq \rho nr$

Pour ρ , on peut considérer les valeurs 1, 2, $\sigma = 0.125$.

Le pas de déplacement \bar{t} sera déterminé par l'une des trois stratégies suivantes

- Stratégies $S_i, i = \overline{0, 2} : \bar{t} = \bar{t}_i$ avec \bar{t}_i minimisant la majorante G_i

Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié un problème de programmation semi-définie (*SDP*) linéaire noté (*DL*).

Nous associons à ce problème un problème perturbé noté (*DL_r*).

nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution optimale du problème (*DL_r*) et nous avons montré ensuite que la solution optimale de problème (*DL_r*) converge vers la solution optimale de problème (*DL*) quand r tend vers 0.

Comme le problème (*DL_r*) est strictement convexe, les conditions d'optimalité sont nécessaires et suffisantes. Pour cela, Nous avons utilisé la méthode de Newton qui nous a permis de calculer une bonne direction et déterminer un nouvel itéré .

Pour calculer le pas de déplacement, plusieurs méthodes ont été proposées par les chercheurs, parmi lesquelles, les méthodes de la recherche linéaire qui sont très coûteuses.

Pour éviter ce problème, nous avons proposé dans ce travail une nouvelle approche basée sur la notion des fonctions majorantes. En effet, trois fonctions majorantes sont proposées pour déterminer aisément le pas de déplacement.

Bibliographie

- [1] **F. Alizadeh**, *Interior point methods in semidefinite programming with application to combinatorial optimization*, SIAM Journal on Optimization 5 (1995), 13-55.
- [2] **F. Alizadeh, J.P.Haberly, and M.L. Overton**, *Primal-dual interior-point methods for semidefinite programming, convergence rates, stability and numerical results*, SIAM Journal on Optimization, 8 (1998), 746-768.
- [3] **D. Benterki**, *Résolution des problèmes de programmation semi-définie par des méthodes de réduction du potentiel*, Thèse de doctorat, Département de mathématique, Université Ferhat Abbas, Sétif (2004).
- [4] **D. Benterki, J.P. Crouzeix, B. Merikhi**, *A feasible primal algorithm for linear semidefinite programming*, Modelling, Computation and optimization in information systems and managements sciences (2004), pp. 114-120.
- [5] **J.F. Bonnans, J.C. Gilbert, C. Lemaréchal, C. Sagastizabal**, *Numerical optimization, theoretical and practical aspects*. Springer-Verlag, 2003.
- [6] **J. P. Crozeix, B. Merikhi**, *Algorithm barrier methode for semi-defini programming*, RAIRO-Operations Research, 42 (2008), 123-139.
- [7] **J.P. Crouzeix, A. Seeger**, *New bounds for the extreme values of a finite sample of real numbers*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 197 (1996), 411-426.
- [8] **M. Halicka, E. De Klerk, C. Roos**, *On the convergence of the central path in semidefinite optimization*, SIAM Journal on Optimization, 12 (2002), . 1090-1099.
- [9] **J. Ji, F.A. Potra, R. Sheng**, *On the local convergence of a predictor-corrector method for semidefinite programming*, SIAM Journal on Optimization, 10 (1999), 195-210.
- [10] **A. Keraghel**, *Étude adaptative et comparative des principales variantes dans l'algorithme de Karmarkar*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, France (1989).
- [11] **T. Kim-Chuan**? *Some new search direction for primal-dual interior point methods in semidefinite programming*, SIAM Journal on Optimization , (2000).

- [12] **M. Kojima, S. Shindoh, S. Hara**, *Interior point methods for the monotone semidefinite linear complementarity problem in symmetric matrices*, SIAM Journal on Optimization 7 (1997), 86-125.
- [13] **R.D.C. Monteiro**, *Primal-dual path-following algorithms for semidefinite programming*, SIAM Journal on Optimization, 7 (1997), 663-678.
- [14] **Y.-E. Nesterov, A. Nemirovski**, *Optimization over positive semidefinite matrices :Mathematical background and user's manual, Technical report, Central economic and mathematical institute, USSR academy of science, Moscow, USSR (1990).*
- [15] **R.-T. Rockafellar**, *Convex analysis*, Princeton University Press, New Jersey, (1970).
- [16] **M. J. Todd, K. C. Toh, R. H. Tütüncü**, *On the Nesterov-Todd direction in semidefinite programming*, SIAM Journal on Optimization, 8 (1998), 769-796.
- [17] **H. Wolkowicz, G.P.H. Styan**, *Bounds for eigenvalues using traces*, Linear Algebra and Appl. 29 (1980), 471-506.