

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Mohammed Seddik Ben Yahia-Jijel



Faculté des Sciences Exactes et Informatique

*N* d'ordre : ..... Département de Mathématiques

*N* de séries : .....

## **Mémoire**

Présenté pour l'obtention du diplôme de

### **Master**

**Spécialité** Mathématiques Appliquées

**Option** EDP et applications

### **Thème**

# **Contrôle des Systèmes Dynamiques Chaotiques**

Présenté par

**Boulahyoune Meriama**

**Boudraa Sarra**

Devant le jury composé de

Président	<b>T. Haddad</b>	Prof.	Université de Jijel
Encadreur	<b>W. Khellaf</b>	M.C.B.	Université de Jijel
Examineur	<b>W. Chikouche</b>	M.C.A.	Université de Jijel

**Promotion 2017/2018**

# Remerciements

En préambule à ce mémoire nous remercions **ALLAH** qui nous a aidé et nous a donné la patience et le courage durant ces longues années d'étude.

Nous souhaitons adresser nos remerciements les plus sincères aux personnes qui nous ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire et particulièrement notre encadreur **W. Khellaf**. D'avoir voulu proposer et assurer la direction de ce mémoire, pour sa confiance et ses conseils judicieux et sa totale disponibilité.

Nous tenons à remercier sincèrement les membres de jury **T. Haddad** et **W. Chikouche** qui ont accepté de jurer notre travail.

On n'oublie pas nos parents, membres de nos familles pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

*Merci à tous et à toutes.*

# Dédicace

*Je dédie ce travail de fin d'études.*

*À mes chers parents \* Saliha et Houcin \* qui m'ont accompagné*

*et soutenu durant toute ma vie.*

*À ma soeur Nihad.*

*À mes frères, Youcef et Mouhamed.*

*À mes chères Noura, Dounia, Sarra, fouzia, kenza et bessma.*

*À mes amies de ma promotion.*

*À tous qui m'ont aidé de près ou de loin.*

*À tous mes enseignants depuis le primaire jusqu'à maintenant.*

*Enfin, je dédie ce mémoire à ceux qui m'aiment et surtout ceux que j'aime.*

**Meriama**

# Dédicace

*Je dédie ce travail de fin d'études.*

*À la mémoire de mon père, le destin ne m'a pas donné la chance de le connaître et de lui exprimer tout mon amour et mon respect. Puisse Dieu le tout puissant lui accorder sa clémence, et l'accueille dans son vaste paradis. Fi El- Firdaws inchallah.*

*À ma mère qui grâce à elle, j'ai pu continuer, celle qui m'a encouragée par son amour, sa tendresse, ses larmes, celle qui donne toujours sans attendre en retour.*

*À mes très chers frères, Mohamed-Islam et Oussama.*

*À mes chères sœurs, Maissa et Habiba.*

*À mes neveux, Shihab et Ayoub.*

*À ma chère grand-mère.*

*À mes meilleurs amis Amira, Meriama, Nassira, Hanan, Fouzia et Bessma.*

*À mes amies de ma promotion.*

*À tous mes enseignants depuis le primaire jusqu'à maintenant.*

*Enfin, je dédie ce mémoire à ceux qui m'aiment et surtout ceux que j'aime.*

**Sarra**

*”Une cause très petite, qui nous échappe,  
détermine un effet considérable  
que nous ne pouvons pas voir  
et alors nous disons que cet effet est dû au hasard”*

H. Poincaré; *Philosophe et mathématicien.*

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1 Systèmes dynamiques et stabilité</b>	<b>10</b>
1.1 Notations et définitions . . . . .	10
1.1.1 Théorème d'existence et d'unicité . . . . .	11
1.1.2 Flot et trajectoires . . . . .	13
1.1.3 Classifications des solutions des systèmes dynamiques . . . . .	16
1.1.4 Section de Poincaré . . . . .	17
1.2 Stabilité des systèmes dynamiques . . . . .	18
1.2.1 Stabilité des systèmes linéaires . . . . .	19
1.2.2 Stabilité des systèmes non linéaires-Linéarisation . . . . .	20
1.2.3 Fonction de Lyapunov . . . . .	22
1.3 Bifurcations locales . . . . .	23
1.3.1 Sous-variété centrale et formes normales . . . . .	23
1.3.2 Sous-variété centrale . . . . .	25
1.3.3 Types de bifurcations . . . . .	28
1.3.4 Diagramme de bifurcations . . . . .	32
1.4 Systèmes dynamiques en écologie . . . . .	34
1.4.1 Systèmes proie-prédateur . . . . .	34
1.4.2 Formulation générale d'un système proie-prédateur . . . . .	36

<b>2</b>	<b>Théorie du chaos : État de l'art</b>	<b>38</b>
2.1	Introduction . . . . .	38
2.2	Définitions du chaos . . . . .	39
2.3	Exposants de Lyapunov . . . . .	40
2.3.1	Exposants de Lyapunov pour des attracteurs non chaotiques . . . . .	42
2.3.2	Exposants de Lyapunov pour un attracteur étrange . . . . .	42
2.4	Contrôle des systèmes chaotiques . . . . .	43
2.4.1	Introduction . . . . .	43
2.4.2	Méthode du contrôle OGY . . . . .	44
2.4.3	Application de la méthode OGY sur le système de Hénon . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Etude d'un modèle de population tritrophique de type Holling II</b>	<b>53</b>
3.1	Présentation du modèle . . . . .	54
3.2	Etude de la dissipativité du modèle . . . . .	57
3.3	Stabilité locale et bifurcations . . . . .	63
3.3.1	Etude des points d'équilibre triviaux . . . . .	64
3.4	Permanence et stabilité globale . . . . .	73
3.4.1	Étude de $E_0, E_1, E_2, E_3$ et $E_4$ points d'équilibre triviaux en $3D$ . . . . .	73
3.4.2	Permanence . . . . .	82
3.4.3	Etude des points d'équilibre intérieurs . . . . .	84
3.4.4	Stabilité globale du point fixe intérieur . . . . .	87
3.5	Comportement qualitatif des systèmes dynamiques non linéaires. Observations Numériques . . . . .	89
	<b>Annexe</b>	<b>98</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>99</b>

---

# TABLE DES FIGURES

1.1	L'application de Poincaré $P$ autour d'un point fixe $x_f$ . Ici le linéarisé tangent de $P$ en $x_f$ est instable. . . . .	17
1.2	Le diagramme de stabilité. . . . .	20
1.3	Portrait de phase d'un système linéaire hyperbolique, $\frac{dx}{dt} = Ax$ , de dimension 3 à partir des espaces vectoriels rentrant $E^s$ et sortant $E^i$ . . . . .	24
1.4	Diagramme de la bifurcation fourche. . . . .	29
1.5	Diagramme de la bifurcation noeud-col . . . . .	29
1.6	Diagramme de la bifurcation transcritique . . . . .	30
1.7	Diagramme de la bifurcation de Hopf . . . . .	31
1.8	Cascade de bifurcations pour $f(x) = rx(1 - x)$ . . . . .	32
1.9	Diagramme de bifurcation du système de Rössler pour $a = 0.2$ et $b = 0.2$ . . . . .	33
1.10	Diagramme de bifurcation du système de Hénon pour $b = 0.3$ . . . . .	34
2.1	Attracteur étrange de Lorenz. . . . .	39
2.2	Exposant de Lyapunov du système discret de Hénon (1.23). . . . .	42
2.3	Exposant de Lyapunov du système continu de Lorenz (2.1). . . . .	43
2.4	Exposant de Lyapunov du système discret de Hénon en fonction du paramètre $a$ . . . . .	48
2.5	Diagramme de bifurcation en fonction du paramètre $a$ . . . . .	49
2.6	Contrôle du système de Hénon par la méthode OGY. . . . .	51
2.7	Contrôle de l'attracteur de Hénon. . . . .	52

3.1	Point intérieur stable pour le système (3.35), pour l'ensemble des paramètres donné par (3.36) mais pour $a_0 = 1.3$ , $v_2 = 0.4$ , $c_3 = 0.03$ , $v_3 = 1.0$ et $d_3 = 10.0$ .	92
3.2	Portraits de phases du système (3.35), pour l'ensemble des paramètres donné par (3.36) et pour $a_0 = 3.05$ . Vue tridimensionnelle, projection en $XY$ , en $XZ$ et en $YZ$ .	92
3.3	Séries temporelles du système (3.35), pour l'ensemble des paramètres donné par (3.36) et pour $a_0 = 3.05$ . (a) en $(t, x)$ , (b) en $(t, y)$ et (c) en $(t, z)$ .	93
3.4	Spectre de puissance de la coordonnée $X$ , pour les même paramètres que la figure précédente.	93
3.5	Sensibilité aux conditions initiales (SCI) du système (3.35), pour l'ensemble des paramètres donné par (3.36) et pour $a_0 = 3.05$ .	94
3.6	Diagramme de bifurcation montrant clairement une fenêtre de dédoublement de période, d'un cycle limite de période 5 à un comportement chaotique. La figure est donnée en $(a_0, X)$ , toujours pour le système (3.35), pour l'ensemble des paramètres donnée par (3.36), $a_0 \notin [2.833, 2.903]$ . Ceci permet de présenter la figure suivante qui montre un $-5, -10, \dots$ -cycle limite.	94
3.7	Portraits de phases en $XY$ du système (3.35), $a_0$ est donné dans chaque figure.	95
3.8	Portraits de phases en $XY$ du système (3.35), $a_0$ est donné dans chaque figure.	95
3.9	Portraits de phases en $XY$ du système (3.35) pour l'ensembles des paramètres donné par (3.36) et pour $a_0 \in [1.4, 2.2]$ , $a_0$ est donné dans chaque figure.	96
3.10	Suite de la figure précédente. Vues tridimensionnelles, des cycles limites de la figure précédente.	96
3.11	Portraits de phases en $XY$ du système (3.35) pour l'ensemble des paramètres donné par (3.36) et pour $a_0 \in [2.3, 3.0]$ .	97
3.12	Suite de la figure précédente. Vues tridimensionnelles, des cycles limites de la figure précédente.	97

---

# INTRODUCTION

Un bond prodigieux a été fait dans les années 60 et 70 dans l'analyse des systèmes dynamiques, pour la première fois, on réussissait à reconnaître et à quantifier un comportement nouveau, le chaos. Lorenz en 1963 pose la première brique importante en mettant en évidence la sensibilité aux conditions initiales de son modèle atmosphérique. Cette sensibilité deviendra la définition du chaos.

Le chaos constitue encore un champ de recherche important à l'heure actuelle, notamment en ce qui concerne le contrôle. L'existence du chaos, appelé également chaos déterministe pour bien le différencier d'un phénomène aléatoire, avait en fait été pressentie par Poincaré à la fin du 19<sup>ème</sup> siècle.

Bien que l'histoire de la théorie du chaos remonte à plus d'un siècle, la révolution de l'ordinateur a donné naissance à leurs applications pratiques. Il y'a une variété d'applications industrielles et commerciales, basée sur les différents aspects des systèmes chaotiques, voir les tableaux 1.1, 1.2 et 1.3.

1890	Le Roi Oscar II de Suède octroie un prix au premier chercheur qui pourrait déterminer et résoudre le problème des n-corps des orbites des corps célestes et ainsi prouver la stabilité du système solaire. Jusqu'à ce jour, le problème n'a pas été résolu.
1890	Henri Poincaré gagne le premier prix du Roi Oscar II. Etant le plus proche à résoudre le problème de n-corps, il a découvert que l'orbite de trois corps célestes agissantes l'une sur l'autre peut engendrer un comportement instable et imprévisible. Ainsi, le chaos est naît (mais pas encore mentionné!).
1963	Edward Lorenz découvre le premier système chaotique dans la météo ou encore appelé attracteur étrange.
1975	Tien-Yien Li et James A. Yorke ont présenté pour la première fois le terme "chaos" dans un article intitulé "Period three implies chaos".
1978	Mitchell Feigenbaum introduit un nombre universel associé au chaos.
1990	Edward Ott, Celso Grebogi et James A. Yorke. Introduisent la notion de contrôle du chaos.
1990	Lou Pecora. Synchronisation des systèmes chaotiques.

TABLE 1.1 - Historique du chaos

Contrôle	Première application du chaos est le contrôle du comportement irrégulier dans les circuits et les systèmes. Liste des diverses applications est incluse dans le tableau 1.3.
Synchronisation	Communication sécurisée, cryptage, radio.
Traitement d'information	Codage, décodage et stockage d'information dans des systèmes chaotiques, tel que les éléments de mémoires et les circuits. Reconnaissance de forme.
Prédiction à court terme	Les maladies contagieuses, température, économie.

TABLE 1.2 - Application du chaos

Engineering	Contrôle de vibration, stabilisation des circuits, réactions chimiques, turbines, étages de puissance, lasers, combustion, et beaucoup plus.
Ordinateurs	Commutation des paquets dans des réseaux informatique. Cryptage. Contrôle du chaos dans les systèmes robotiques.
Communications	Compression et stockage d'image. Conception et management des réseaux d'ordinateurs.
Médecine et biologie	Cardiologie, analyse du rythme du cœur (EEG), prédiction et contrôle d'activité irrégulière du cœur. Contrôle du chaos dans les modèles écologiques.
Management et finance	Prévisions économiques, analyse financière, et prévision du marché.

TABLE 1.3 - Domaine d'application du chaos

S'intéressant aux problèmes d'écologies, voir [1, 9], il avait en effet montré que, malgré un caractère déterministe, le problème des trois chaînes (par exemple Proie-Prédateur-Top prédateur) ne pouvait donner lieu à prédiction. Si la résolution analytique des équations du problème des trois chaînes est impossible, il est possible de déterminer numériquement les trajectoires. On a ainsi pu tester la stabilité de ce système en comparant les trajectoires suivies par un des chaînes à partir de deux positions initiales très proches : ces trajectoires restent proches l'une de l'autre à court terme mais elles deviennent complètement différentes à long terme.

Une toute petite différence initiale a donc produit un effet considérable et on peut penser que le système écologique est chaotique, mais fort heureusement sur des échelles de temps très grandes. C'est dans cette extrême sensibilité aux conditions initiales que réside l'origine de l'imprédictibilité du chaos déterministe. Poincaré avait remarqué cet effet puisqu'il écrit : "Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas voir et alors nous disons que cet effet est dû au hasard".

Après une phase d'excitation où les scientifiques cherchaient et trouvaient du chaos presque partout, on s'est rendu compte que les outils de la théorie du chaos peuvent être appliqués pour la compréhension, la manipulation et le contrôle d'une variété de systèmes avec des applications pratiques intenses.

La motivation du contrôle du chaos vient du fait, que le chaos permet à un système d'explorer chacune de ses dynamiques : lorsqu'il est sous contrôle, il fournit une variété de propriétés passionnantes ce qui permet de donner des opportunités dans diverses applications technolo-

giques. Au début des années 90, les trois scientifiques Ott, Grebogi et York publient le premier article sur le contrôle du chaos [18]. Ils mettent en œuvre une technique très efficace qui permettait de contrôler parfaitement la trajectoire des systèmes chaotiques. Dès lors, plusieurs techniques de contrôle sont développées dans le but de contrôler toute forme de comportement chaotique pouvant surgir dans les systèmes non linéaires.

Notre objectif est d'étudier le comportement chaotique d'un modèle écologique pour cela le problème majeur que nous avons eu est de trouver un modèle proie-prédateur de dimension trois réaliste c'est à dire répond aux critères de dissipativité et de permanence. Nous avons commencer par le modèle étudié par **A. Allaoui** dans son article "Study of a Leslie-Gower-type tritrophic population model" [5] dont lequel, nous avons détecté que le modèle n'est pas dissipatif, contrairement au résultat donné par l'auteur, donc nous avons changé le modèle par celui présenté dans le dernier chapitre de ce mémoire.

### **Plan du travail**

Le travail réalisé dans le cadre de ce mémoire se présentera en trois chapitres. Après une introduction générale où un bref historique sur le chaos et le contrôle des systèmes chaotiques est fait.

Le **premier chapitre** est consacré aux définitions des différents outils mathématiques qui nous servent à mieux comprendre le comportement chaotique, tels que : les ensembles attracteurs [16, 22], les méthodes permettant la détermination du type de stabilité de leur état d'équilibre, la section de Poincaré et la théorie de bifurcation. De plus, nous donnerons une présentation des systèmes dynamiques en écologie.

Le **deuxième chapitre** présente une introduction au chaos et la méthode du calcul des exposants de Lyapunov étant une quantité qui mesure la sensibilité aux conditions initiales [3, 19]. Dans la partie contrôle, une description complète de la méthode de contrôle OGY est faite avec une application au système de Hénon.

Dans le **chapitre 3**, nous analyserons un modèle écologique de type Holling II de dimension trois [2, 14]. Nous montrerons que les solutions du système sont bornées et nous étudierons la stabilité locale des points d'équilibre triviaux ainsi que les bifurcations locales de ces derniers.

Nous chercherons, ensuite, l'existence des points d'équilibre intérieur et nous montrerons sous certaines conditions la stabilité globale de l'unique point d'équilibre intérieur en exhibant une fonction de Lyapunov. Et enfin, des tests numériques nous permettront d'établir le caractère chaotique du modèle.

---

---

# CHAPITRE 1

---

## SYSTÈMES DYNAMIQUES ET STABILITÉ

Notre étude se focalise sur l'application des systèmes dynamiques dans l'écologie. Dans cette perspective, ce premier chapitre présente une introduction générale des systèmes dynamiques en premier lieu, ensuite un rappel sur la stabilité au sens de Lyapunov et une introduction à la notion d'une bifurcation. En deuxième lieu, on donne la formulation générale d'un modèle proie prédateur et les critères pour lesquels un modèle soit réaliste.

Pour les preuves des théorèmes et des propositions énoncés dans ce chapitre, le lecteur peut consulter par exemple [10, 20, 21].

### 1.1 Notations et définitions

On note  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  un élément de  $\mathbb{R}^n$ , sa norme  $\|x\|_{\mathbb{R}^n}$  sera l'une quelconque des normes usuelles sur  $\mathbb{R}^n$ .

Soient  $D$ ,  $U$  et  $V$  des ouverts de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction **continu**.

Pour tout  $(t, x) \in D$ , on notera  $f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_n(t, x))$  où chaque fonction  $f_i$  est continue de  $D$  dans  $\mathbb{R}$ .

La notation  $(a, b)$  recouvre tous les intervalles de  $\mathbb{R}$  de la forme  $[a, b]$ ,  $]a, b]$ ,  $[a, b[$  ou  $]a, b[$ .

#### **Définition 1.1.1. (*Systèmes dynamiques*)**

*On appelle système dynamique un système physique représentable par une équation différentiable*

de la forme (**cas continue**) :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^p. \quad (1.1)$$

Avec  $f$  un champ de vecteurs,  $\mathbb{R}^n$  est l'espace des phases,  $\mathbb{R}^p$  est l'espace des paramètres et  $t$  la variable temporelle.

Ou par des applications (**cas discret**) :

$$x_{k+1} = f(x_k, \mu), \quad x_k \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^p, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

Avec  $f$  la fonction de récurrence,  $\mathbb{R}^n$  est l'espace des phases,  $\mathbb{R}^p$  est l'espace des paramètres.

**Remarque 1.1.1.** Lorsque le champ de vecteurs  $f$  ne dépend pas explicitement du temps, on dit que le système dynamique est autonome, et on a :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.3)$$

**Remarque 1.1.2.** Par un changement de variable approprié, on peut toujours transformer un système dynamique non autonome de dimension  $n$  en un système dynamique autonome équivalent de dimension  $n + 1$ .

### 1.1.1 Théorème d'existence et d'unicité

**Définition 1.1.2.** 1) Une solution de l'équation (1.1) est un couple  $(\varphi, J)$  où  $J$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  est une fonction dérivable sur  $J$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  telle que  $(t, \varphi(t)) \in D$  pour tout  $t \in J$  et  $\frac{d\varphi_i(t)}{dt} = f_i(t, \varphi(t))$ ,  $\forall t \in J, \forall i = 1, \dots, n$ .

2) Soient  $x : I_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\tilde{x} : \tilde{I}_x \rightarrow \mathbb{R}^n$  des solutions de (1.3). On dit que  $\tilde{x}$  est un prolongement de  $x$  si  $I_x \subset \tilde{I}_x$  et  $\tilde{x}|_{I_x} = x$ .

3) On dit qu'une solution  $x : I_x \rightarrow \mathbb{R}^n$  est maximale si  $x$  n'admet pas de prolongement  $\tilde{x} : \tilde{I}_x \rightarrow \mathbb{R}^n$  avec  $I_x \subsetneq \tilde{I}_x$ .

**Remarque 1.1.3.** On remarque que  $f$  et  $\varphi$  étant deux fonctions continues, par composition  $\varphi' = (\varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_n)$  est également continue sur  $J$  et  $\varphi$  est de classe  $C^1$  sur  $J$ .

**Définition 1.1.3.** Soit  $(t_0, x_0) \in D$ . Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (\text{PC})$$

consiste à déterminer un couple  $(\varphi, J)$  où  $J$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant  $t_0$  et  $\varphi$  est une fonction dérivable de  $J$  dans  $\mathbb{R}^n$ , telle que

- 1)  $(t, \varphi(t)) \in D$  pour tout  $t \in J$ .  
 2)  $\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(t, \varphi(t))$ , pour tout  $t \in J$  et  $\varphi(t_0) = x_0$ .

**Remarque 1.1.4.** Si on suppose que  $\varphi$  est une solution de (1.3) alors on peut l'obtenir à l'aide d'une équation intégrale

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds. \quad (1.4)$$

Réciproquement, toute fonction  $\varphi$  vérifiant (1.4) est bien une solution de classe  $C^1$  de (PC).  
 Donc l'équivalence entre les deux formulations (PC) et (1.4).

On donne maintenant le théorème d'existence et d'unicité suivant :

**Théorème 1.1.1. (Cauchy-Lipschitz)**

Soit  $(t_0, x_0) \in D$  et soit  $a > 0$  et  $b > 0$  tels que le cylindre  $C = \{|t - t_0| \leq a, \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} \leq b\}$  soit inclus dans  $D$ . on note

$$M = \sup_{(t,x) \in C} \|f(t, x)\|_{\mathbb{R}^n} \quad \text{et} \quad \alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right),$$

telle que  $f$  est continue et lipschitzienne en  $x$ .

Alors il **existe** une unique solution **maximale**  $\phi$  du problème de Cauchy (PC) sur l'intervalle  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ .

On donne aussi un lemme technique qui sera très utile dans la suite.

**Lemme 1.1.2. (Lemme de Gronwall)**

Soit  $\phi$  une fonction absolument continue vérifiant l'inégalité différentielle suivante :

$$\frac{d\phi}{dt} + \alpha_1 \phi(t) \leq \alpha_2, \quad t > 0, \quad ((\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha_1 \neq 0),$$

alors, pour tout  $t \geq \tilde{T} \geq 0$ , on a :

$$\phi(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \phi(\tilde{T})\right) e^{-\alpha_1(t-\tilde{T})}.$$

**Démonstration**

On a :

$$\frac{d\phi}{dt} + \alpha_1 \phi(t) \leq \alpha_2, \quad t > 0,$$

multiplions les deux côtés par  $e^{\alpha_1 t}$

$$\left(\frac{d\phi}{dt} + \alpha_1 \phi(t)\right)e^{\alpha_1 t} \leq \alpha_2 e^{\alpha_1 t},$$

ainsi,

$$\left(\frac{d\phi}{dt} + \alpha_1 \phi(t) - \alpha_2\right)e^{\alpha_1 t} \leq 0,$$

donc,

$$\frac{d\phi}{dt}e^{\alpha_1 t} + \alpha_1 \phi(t)e^{\alpha_1 t} - \alpha_2 e^{\alpha_1 t} \leq 0,$$

alors,

$$\frac{d}{dt}(\phi(t)e^{\alpha_1 t}) - \frac{d}{dt}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}e^{\alpha_1 t} \leq 0,$$

ou de manière équivalente

$$\frac{d}{dt}\left(\left(\phi(t) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)e^{\alpha_1 t}\right) \leq 0.$$

Donc, la fonction  $\left(\left(\phi(t) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)e^{\alpha_1 t}\right)$  a une dérivée négative et elle est donc décroissante pour  $t \geq 0$ . Par conséquent, pour tout  $t \geq \tilde{T} \geq 0$ .

$$\left(\phi(t) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)e^{\alpha_1 t} \leq \left(\phi(\tilde{T}) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)e^{\alpha_1 \tilde{T}},$$

d'où, il résulte

$$\phi(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \phi(\tilde{T})\right)e^{-\alpha_1(t-\tilde{T})},$$

pour  $\tilde{T} = 0$ , cette expression devient :

$$\phi(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(1 - e^{-\alpha_1 t}) + \phi(0)e^{-\alpha_1 t}. \quad \blacksquare$$

#### Définition 1.1.4. (*Systeme deterministe*)

Soit  $U$  l'ensemble des conditions initiales et  $x_0 \in U$ . Alors, si pour tout  $x_0$ ,  $x(t, x_0)$  existe et est unique, le système est dit déterministe.

### 1.1.2 Flot et trajectoires

Soit le système dynamique autonome :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n. \quad (1.5)$$

#### Définition 1.1.5. (*Flot*)

L'application  $(t, x) \rightarrow \phi(t, x)$  est appelée le flot du champ de vecteurs  $f$  (ou de l'équation (1.5)) telle que, l'application partielle à  $x$  fixé,  $t \rightarrow \phi(t, x)$  est une solution maximale de l'équation.

Pour une étude qualitative de l'équation différentielle, il est important d'étudier plutôt l'autre application partielle,  $\phi : x \longrightarrow \phi(t, x)$ , pour  $t$  fixé. De façon imagée,  $\phi_t(x)$  est la position à l'instant  $t$  d'un corps transporté par l'équation différentielle qui se trouvait à la position  $x$  en  $t = 0$ .

**Remarque 1.1.5.** Si  $f$  est linéaire, i.e,  $f(x) = Ax$ ,  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ , le flot est donné par l'exponentielle de  $A$  :

$$\phi_t(x) = e^{tA}x, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Ainsi, le flot est une généralisation de l'exponentielle d'une matrice. Il possède des propriétés similaires.

**Proposition 1.1.3.** La formule du flot peut aussi se lire de la façon suivante :

Si  $x(\cdot)$  est une solution de (1.5), alors

$$x(t) = \phi_{t-t_0}(x(t_0)),$$

pour tout  $t_0$  et  $t$  dans l'intervalle de définition de  $x(\cdot)$ .

**Proposition 1.1.4.** Pour tous  $t, s \in \mathbb{R}$  on a les propriétés suivantes :

- 1)  $\phi_{-t} \circ \phi_t = id$ , c'est -à-dire  $(\phi)^{-1} = \phi_{-t}$ ,
- 2)  $\phi_0 = id$ ,
- 3)  $\frac{\partial \phi_t}{\partial t} = f \circ \phi_t$ ,
- 4)  $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$ .

**Définition 1.1.6. (Trajectoire)**

On appelle trajectoire passant par  $x_0$  l'ensemble :

$$\vartheta_{x_0} = \{\phi_t(x_0) : t \in I_x\}.$$

Autrement dit, la trajectoire passant par  $x_0$  est la courbe tracée sur  $\mathbb{R}^n$  par la solution maximale de l'équation (1.5) passant par  $x_0$  en  $t = 0$ .

**Définition 1.1.7. (Orbites)**

Considérons le vecteur d'état initial  $x_0$ . Les itérations successives de  $f$  fournissent la suite des

états du système aux instants  $t_k$ .

$$\begin{cases} x_1 = f(x_0), \\ x_2 = f(x_1) = f^2(x_0), \\ \vdots \\ x_{k+1} = f(x_k) = f^{k+1}(x_0). \end{cases} \quad (1.6)$$

On appelle orbite de  $f$  au point  $x_0$  la suite des états  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  générés par  $f$  dans l'espace d'état.

**Remarque 1.1.6.** La notion d'orbite en temps discret est équivalente à celle de trajectoire en temps continu.

**Définition 1.1.8. (Ensemble invariant)**

Un ensemble  $A \subset \mathbb{R}^n$  est dit invariant par un champ de vecteur si toute solution  $x(t)$  du système différentiel associé au champ de vecteurs issu de  $A$  vérifie  $x(t) \in A$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  pour lequel cette solution est définie.

**Remarque 1.1.7.** la trajectoire d'un système autonome dans l'espace d'état est un ensemble invariant.

**Définition 1.1.9. (Ensemble limite)**

Soit un intervalle maximal  $[a, b]$  :

- 1) L'ensemble limite de  $p$  noté  $W^s(p)$  est défini par  
si  $b = +\infty$ ,  $W_{loc}^s(p) = \{q \in U \subset \mathbb{R}^n, \text{ il existe une suite } t_n \rightarrow +\infty, \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t_n) = q\}$ .
- 2) L'ensemble limite de  $p$  noté  $W^i(p)$  est défini par  
si  $a = -\infty$ ,  $W_{loc}^i(p) = \{q \in U \subset \mathbb{R}^n, \text{ il existe une suite } t_n \rightarrow +\infty, \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t_n) = q\}$ .

**Définition 1.1.10. (Attracteurs)**

Soit  $A$  un ensemble compact, fermé de l'espace des phases. On suppose que  $A$  est un ensemble invariant (*i.e*  $\phi_t(A) = A$  pour tout  $t$ ). On dit que  $A$  est stable si pour tout voisinage  $U$  de  $A$ , il existe un voisinage  $V$  de  $A$  tel que toute solution  $x(x_0, t) := \phi_t(x_0)$  restera dans  $U$  si  $x_0 \in V$ .  
Si de plus :

$$\bigcap_{t \geq 0} \phi_t(V) = A,$$

et s'il existe une orbite dense dans  $A$ , alors  $A$  est un **attracteur**.

Lorsque  $A$  est un attracteur, l'ensemble :

$$W = \bigcup_{t < 0} \phi_t(V),$$

est appelé le **bassin d'attraction** de  $A$ . C'est l'ensemble des points dont les trajectoires asymptotiques convergent vers  $A$ .

### 1.1.3 Classifications des solutions des systèmes dynamiques

#### Définition 1.1.11. (*Point d'équilibre*)

On appelle point d'équilibre (ou point fixe ou stationnaire ou point critique) de (1.5), le point  $\bar{x}$  de l'espace des phases obtenu en annulant le second membre de (1.5) :

$$f(\bar{x}) = 0. \quad (1.7)$$

Par le changement de variable  $\xi = x - \bar{x}$ , on peut ramener le point  $\bar{x}$  à l'origine.

**Remarque 1.1.8.** Une solution d'équilibre correspond à un point fixe dans l'espace d'état. Il n'est pas nécessairement stable, mais lorsqu'il l'est ce point représente un attracteur.

#### Définition 1.1.12. (*Solutions périodiques*)

Soit  $x(t, x_0)$  la solution d'un système dynamique autonome ou non autonome. Elle représente une solution périodique si et seulement si :

$$\exists \tau > 0, \forall t, \quad x(t + \tau, x_0) = x(t, x_0). \quad (1.8)$$

La plus petite valeur de  $\tau$  si elle existe, est appelée période. On la note généralement  $T$ .

**Remarque 1.1.9.** Une solution périodique d'un système dynamique quelconque est dite solution isolée s'il existe un voisinage ne comporte aucune autre solution périodique. Si de plus le système est autonome, alors la solution isolée est appelée un cycle limite.

#### Définition 1.1.13. (*Solutions quasi périodiques*)

Soit  $x(t, x_0)$  une solution du système dynamique (1.1) et soit  $T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un ensemble fini de réels linéairement indépendants.

On dit que  $x(t, x_0)$  est une solution quasi périodique de (1.1) si elle est périodique pour chacune des périodes  $T_i$  de  $T$ . La solution  $x(t, x_0)$  est également dite  $n$ -périodique.

**Remarque 1.1.10.** La trajectoire d'une solution  $n$ -périodique est une ligne infinie qui couvre densément un tore de dimension  $n$ .

### Comportements asymptotiques

Les paragraphes précédents ont introduit quelques définitions relatives aux systèmes dynamiques. Nous allons aborder maintenant, les caractéristiques essentielles de leurs solutions. Cependant il est important de rappeler qu'il n'existe aucune méthode générale d'intégration des systèmes différentiels non linéaires. Il n'est donc pas toujours possible d'en déterminer une solution analytique exacte. Fort heureusement, cela ne constitue plus aujourd'hui une difficulté majeure car une estimation, obtenue par simulation numérique, est souvent suffisante lorsque l'intégration n'est pas possible. Par contre, le comportement asymptotique c'est à dire la connaissance qualitative des solutions est très utile lorsqu'il s'agit par exemple d'en déterminer les évolutions possibles à long terme, la stabilité, les bifurcations ou encore de disposer d'une vue d'ensemble des comportements dynamiques possibles selon l'état, l'excitation ou les paramètres.

#### Définition 1.1.14. (*Solution Chaotique*)

*Une solution chaotique est un comportement asymptotique borné qui n'est ni un point d'équilibre, ni une solution périodique ou quasi périodique.*

### 1.1.4 Section de Poincaré

#### 1) Application de Poincaré

Étant donnée une orbite périodique  $\gamma$  de (1.3), de période  $T$ , un point  $x \in \gamma$  et un ensemble limite  $W$  de dimension  $n - 1$  transverse à  $\gamma$  au point  $x$ , on appelle application de Poincaré ou application premier retour associée à  $\omega$ -limite et  $x$ , l'application  $P$  qui à tout point  $z \in W$ -limite voisin de  $x$  fait correspondre le point  $P(z)$  obtenu en prenant la première intersection de l'orbite de  $z$  et de  $W$ , voir figure 1.1.

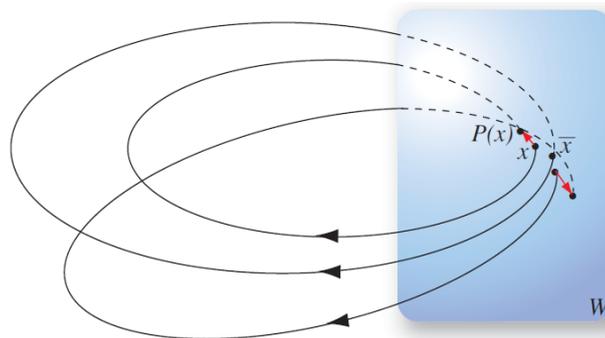


FIGURE 1.1 – L'application de Poincaré  $P$  autour d'un point fixe  $x_f$ . Ici le linéarisé tangent de  $P$  en  $x_f$  est instable.

On peut montrer que le terme de première intersection a bien un sens puisque le temps  $T(z)$  mis sur l'orbite de  $z$  pour revenir dans  $W$  est proche de la période  $T$  et est donc minoré par un nombre strictement positif.

Notons que l'application de Poincaré  $P$  envoie  $W$ , de dimension  $n - 1$ , dans elle-même et est un difféomorphisme local. On peut ainsi définir l'équation récurrente

$$z_{k+1} = P(z_k),$$

qui admet  $x$  pour point fixe. On voit alors que l'étude du comportement de (1.3) au voisinage de l'orbite périodique  $\gamma$  se réduit à l'étude de l'équation récurrente ci-dessus.

Notons que dans le cas d'équations récurrentes de la forme (i.e cas discret)

$$x_{k+1} = f(x_k),$$

où  $f$  est un difféomorphisme  $C^\infty$ , les points d'équilibre sont remplacés par les points fixes de  $f$ , i.e. les points  $x_f$  tels que  $f(x_f) = x_f$  et le système linéarisé tangent, ou équation aux variations, autour d'un point  $x_f$  s'obtient comme dans le cas continu. Les multiplicateurs caractéristiques sont également les valeurs propres de la matrice du linéarisé tangent.

## 2) Section de Poincaré

**Définition 1.1.15.** Soit  $S$  un segment ouvert dans  $\mathbb{R}^n$ .  $S$  est appelé une section locale transverse du champ  $f$  si et seulement si  $f$  n'a pas de points fixes sur  $S$  et ne devient jamais tangent à  $S$ . Une telle section est souvent appelée une section de Poincaré.

**Remarque 1.1.11.** L'ensemble  $S$  est l'ensemble des points d'intersection de l'orbite périodique  $\gamma$  avec l'ensemble  $W$ .

**Remarque 1.1.12.** Si  $x \in \mathbb{R}^n$  n'est pas un équilibre (i.e  $f(x) \neq 0$ ), alors il existe toujours une section locale transverse en  $x$ .

## 1.2 Stabilité des systèmes dynamiques

Dans cette section nous nous intéressons à la stabilité d'un système autonome :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.9)$$

**Définition 1.2.1.** (*Notion de la stabilité*)

1) Nous dirons qu'un équilibre  $\bar{x}$  de (1.9) est stable si pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\forall t_0$  il existe  $\sigma_{t_0}, \varepsilon$  tel que :

$$\|x_0 - \bar{x}\| \leq \sigma_{t_0} \Rightarrow \|\phi(t, x_0) - \bar{x}\| \leq \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

2) Nous dirons qu'un équilibre  $\bar{x}$  de (1.9) est uniformément asymptotiquement stable s'il est uniformément stable et s'il existe un voisinage de  $\bar{x}$  où  $\phi(t, x_0)$  a pour limite  $\bar{x}$ , c'est-à-dire qu'il existe  $\rho > 0 : \|x_0 - \bar{x}\| \leq \rho \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} (\phi(t, t_0, x_0)) = \bar{x}$ .

3) Un équilibre qui n'est pas uniformément stable est dit instable.

### 1.2.1 Stabilité des systèmes linéaires

Considérons le cas particulier d'une équation différentielle autonome linéaire

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . L'origine est toujours un équilibre de cette équation (mais il peut y en avoir d'autres tout élément de  $\text{Ker}(A)$  est un équilibre).

**Théorème 1.2.1.** Soit  $\frac{dx}{dt} = Ax$ , soient  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres distinctes de  $A$ .

- 1) L'origine est un équilibre uniformément stable si et seulement si  $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0, \forall i = \overline{1, n}$ .
- 2) L'origine est un équilibre uniformément asymptotiquement stable si et seulement si  $\text{Re}(\lambda_i) < 0, \forall i = \overline{1, n}$ . Dans ce cas on dit que l'origine est un équilibre hyperbolique.
- 3) S'il existe une valeur propre  $\lambda$  telle que  $\text{Re}(\lambda) > 0$ , l'origine est instable.

#### Le cas affine

Considérons maintenant l'équation

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B, \tag{1.10}$$

où  $A \in M_n(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathbb{R}^n$  un vecteur constant.

**Proposition 1.2.2.** La stabilité et la stabilité asymptotique d'un équilibre de l'équation (1.10) sont équivalentes respectivement à celles de l'origine pour l'équation  $\frac{dy}{dt} = Ay$ .

Dans la pratique pour un système de dimension deux on a la remarque suivante :

**Remarque 1.2.1.** Pour une équation différentielle  $\frac{dx}{dt} = Ax$  dans  $\mathbb{R}^2$ , le signe des parties réelles des valeurs propres se déduit directement des signes du déterminant et de la trace de  $A$ . En effet,  $\det A$  est le produit des valeurs propres de  $A$  et  $\text{tr} A$  est la somme de leurs parties réelles. Ainsi, en notant  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les valeurs propres de  $A$ , on a

1) Si  $\det A < 0$ , alors  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles de signe opposé (elles ne peuvent être complexes, car dans ce cas  $\det A = |\lambda|^2$ ).

2) Si  $\det A > 0$ , alors  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles de même signe, soit complexes conjuguées, dans les deux cas, les parties réelles de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de même signe, qui est celui de  $\text{tr} A$ .

Notons que, si  $\text{tr} A = 0$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont forcément complexes conjuguées de partie réelle nulle.

3) Si  $\det A = 0$ , l'une des valeurs propres est nulle, l'autre étant égale à  $\text{tr} A$ .

Le diagramme de stabilité dans le plan

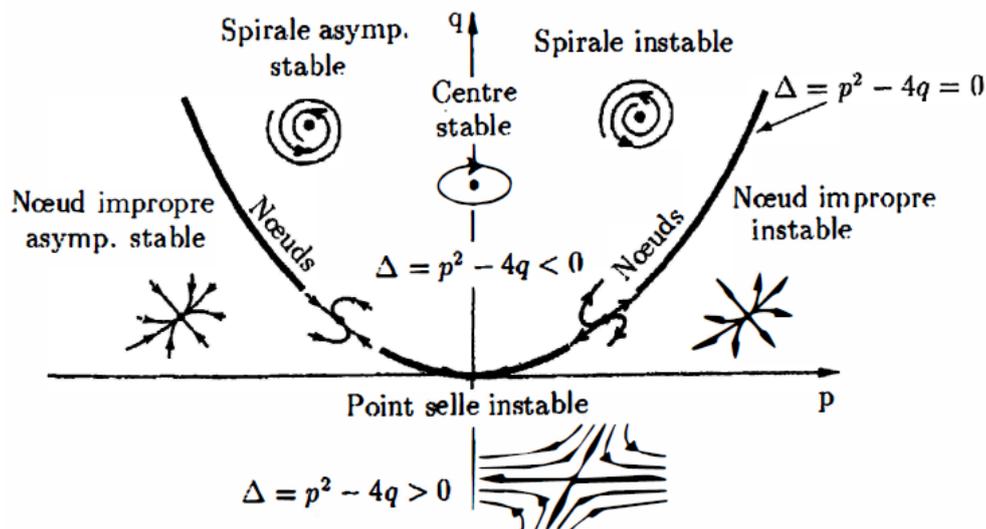


FIGURE 1.2 – Le diagramme de stabilité.

## 1.2.2 Stabilité des systèmes non linéaires-Linéarisation

Le développement de Taylor du champ de vecteurs  $f$  de (1.9) en  $\bar{x}$  s'écrit :

$$f(x) = df(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2!}d^2f(\bar{x})(x - \bar{x}, x - \bar{x}) + \frac{1}{3!}d^3f(\bar{x})(x - \bar{x}, x - \bar{x}, x - \bar{x}) + \dots \quad (1.11)$$

où l'on a posé  $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,

$$df(x)x = \sum_j \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right) x_j, \quad d^2f(x)(x, x) = \sum_{i,j} \left( \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right) x_i x_j,$$

$$d^3 f(x)(x, x, x) = \sum_{i,j,k} \left( \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right) x_i x_j x_k. \quad (1.12)$$

La matrice

$$df(x) = \left( \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_j} \right),$$

s'appelle matrice jacobienne de  $f$  (son déterminant est le jacobien). Pour  $x$  petit, (1.11) montre que le comportement du système au voisinage de  $\bar{x}$  est celui du système linéarisé :

$$\dot{x} = df(\bar{x})(x - \bar{x}). \quad (1.13)$$

Dans le cas où la matrice  $df(\bar{x})$  possède  $n$  valeurs propres  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  distinctes, la solution de (1.13) est :

$$x = \sum_{i=1}^n c_i a^{(i)} e^{\lambda_i t}, \quad (1.14)$$

où  $a^{(i)}$  est le vecteur propre correspondant à la valeur propre  $\lambda_i$  et les  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  sont des constantes (déterminées par les conditions initiales).

On peut énoncer le théorème suivant

**Théorème 1.2.3. (Hartman-Grobman)**

Soit  $D$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  contenant 0 et  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $D$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Pour tout  $x \in D$ , on note  $\phi(t, x)$  la solution de l'équation autonome

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

qui vérifie  $\phi(t, \bar{x}) = \bar{x}$ . On suppose que  $f(\bar{x}) = 0$  et que pour toute valeur propre  $\lambda$  de la matrice  $A = df(\bar{x})$ ,  $Re(\lambda) \neq 0$ . Alors il existe deux ouverts  $U$  et  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $\bar{x}$  et un homéomorphisme  $H$  de  $U$  dans  $V$  tel que, pour tout  $x \in U$

$$H(\phi(t, x)) = e^{tA} H(x), \quad \forall t \in I_x,$$

où  $I_x$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  contenant  $\bar{x}$ . En particulier  $H$  envoie les trajectoires du système

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

sur les trajectoires du système linéaire à coefficients constants

$$\frac{dx}{dt} = A(x - \bar{x}).$$

**Corollaire 1.2.4. (Stabilité en première approximation)**

Soit  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  un système d'équations différentielles,  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Soit  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  un équilibre de  $f$ . Si  $\bar{x}$  est un équilibre asymptotiquement stable du système linéarisé

$$\dot{x} = df(\bar{x})(x - \bar{x}),$$

alors c'est un équilibre asymptotiquement stable du système

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Si on suppose que  $df(\bar{x})$  a une valeur propre de partie réelle strictement positive. Alors,  $\bar{x}$  n'est pas un équilibre stable pour le système

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

**1.2.3 Fonction de Lyapunov**

Soit  $\bar{x}$  un point fixe de (1.9). Soit  $V : \omega \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction différentiable définie sur un voisinage  $\omega$  de  $\bar{x}$  telle que  $V(\bar{x}) = 0$  et  $V(x) > 0$  si  $x \neq \bar{x}$ . Posons :

$$\dot{V} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j(x), \quad (1.15)$$

alors on a le théorème suivant.

**Théorème 1.2.5. (Lyapunov)**

- 1) Si  $\dot{V}(x) \leq 0$  dans  $\omega$  alors  $\bar{x}$  est stable.
- 2) Si  $\dot{V}(x) < 0$  dans  $\omega$  alors  $\bar{x}$  est asymptotiquement stable.
- 3) Si  $\dot{V}(x) > 0$  dans  $\omega$  alors  $\bar{x}$  est instable.

On dit aussi que la fonction  $V$  est semi-définie négative dans le premier cas, définie négative dans le deuxième cas et définie positive dans le troisième cas.

Pour la démonstration de ce théorème voir par exemple [13].

**Remarque 1.2.2.** Il n'y a pas de règle générale pour trouver une fonction de Lyapunov, cependant, dans des problèmes de mécanique, l'énergie est souvent un bon candidat.

## 1.3 Bifurcations locales

On s'intéresse ici aux changements qualitatifs du portrait de phases d'un système dynamique dépendant de paramètres. De tels changements sont appelés bifurcations [11].

Pour les valeurs des paramètres auxquelles de tels changements qualitatifs apparaissent, valeurs dites de bifurcation, la construction du portrait de phases nécessite des outils adaptés. Nous nous intéressons ici aux bifurcations dites locales, c'est à dire relatives à un point d'équilibre. L'étude de ce type de bifurcation repose sur deux méthodes importantes, présentées dans cette partie et qui se ramènent à l'utilisation de bonnes coordonnées :

- 1) La méthode de la sous-variété centrale qui permet d'isoler la partie non hyperbolique, dite centrale.
- 2) La méthode des formes normales de Poincaré où ne subsistent que les vraies non linéarités, c'est à dire celles que l'on ne peut pas faire disparaître par changement régulier de coordonnées.

La théorie des bifurcation s'intéresse aux familles d'équations différentielles dépendant de paramètres  $\mu$  :

$$\frac{dx}{dt} = f_\mu(x), \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^k. \quad (1.16)$$

Le terme bifurcation a été introduit pour la première fois par H.Poincaré pour décrire l'apparition ou la disparition, pour certaines valeurs du paramètres  $\mu$ , de points d'équilibre du système (1.16).

### Définition 1.3.1. (*Valeur de bifurcation*)

*Une valeur  $\mu_0$  du paramètre pour laquelle le système (1.16) n'est pas structurellement stable est appelée valeur de bifurcation.*

### 1.3.1 Sous-variété centrale et formes normales

Cette sous section est consacrée aux méthodes qui permettent d'étudier le portrait de phases autour d'un point d'équilibre, ou d'un point fixe, non hyperbolique. Considérons le système continu  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  et supposons qu'il admet un point d'équilibre non hyperbolique  $\bar{x}$ . Voyons d'abord ce que l'on peut dire sur le linéarisé tangent en  $\bar{x}$  et plus généralement sur tout système linéaire non hyperbolique.

**Proposition 1.3.1.** *Tout système linéaire continu,  $\frac{dx}{dt} = Ax$  est décomposable de la façon suivante :*

$$\begin{cases} \frac{dx^c}{dt} = A^c x^c, \\ \frac{dx^h}{dt} = A^h x^h. \end{cases} \quad (1.17)$$

Avec  $x = (x^c, x^h)$ ,  $A = \begin{pmatrix} A^c & 0 \\ 0 & A^h \end{pmatrix}$  et où  $A^h$  correspond aux valeurs propres à partie réelle non nulle (la partie hyperbolique de  $A$ ) et  $A^c$  aux valeurs propres sur l'axe imaginaire (la partie centrale de  $A$ ). Les ensembles (espaces vectoriels) définis par  $x^c = 0$  (resp.  $x^h = 0$ ) sont invariants par le flot de (1.17). L'ensemble  $x^c = 0$  n'est autre que la somme directe des espaces vectoriels rentrant et sortant,  $E^s \oplus E^i$ , figure 1.3.

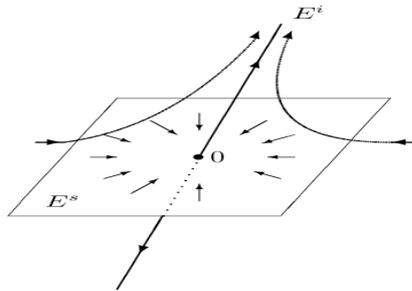


FIGURE 1.3 – Portrait de phase d'un système linéaire hyperbolique,  $\frac{dx}{dt} = Ax$ , de dimension 3 à partir des espaces vectoriels rentrant  $E^s$  et sortant  $E^i$ .

**Remarque 1.3.1.** 1) *Une telle séparation entre la partie hyperbolique et la partie centrale du linéarisé tangent se prolonge également au non linéaire, de la même façon que les espaces vectoriels stable et instable,  $E^s$  et  $E^i$ , s'étendent aux sous-variétés invariantes stable et instable,  $W_{loc}^s$  et  $W_{loc}^i$ . Comme pour le linéaire, si la partie hyperbolique est stable asymptotiquement, la stabilité autour de  $\bar{x}$  peut être directement analysée à partir de la dynamique sur une sous-variété (non nécessairement unique comme nous le verrons plus loin), appelée sous-variété centrale, dont l'espace tangent en  $\bar{x}$  est égal à  $E^c$ .*

2) *En linéaire, tous les calculs, changement de base et matrices  $A^c$  et  $A^h$ , sont explicites et reposent sur la décomposition d'une matrice en sa forme de Jordan. En non linéaire, les calculs sont nécessairement approchés et donnent, de manière itérative, les termes des développements limités autour de  $\bar{x}$  des équations de la sous-variété centrale et de*

la dynamique sur cette sous-variété. En pratique, on arrête les calculs à l'ordre à partir duquel le portrait de phases n'est plus modifié de manière qualitative par les termes d'ordre supérieur.

### 1.3.2 Sous-variété centrale

Nous énonçons d'abord les résultats généraux, dont les démonstration se trouvent, pour l'essentiel.

Le théorème de décomposition en sous-variétés stable et instable autour d'un point d'équilibre hyperbolique, ainsi que le théorème de Grobman-Hartman se généralise comme suit aux points d'équilibre non hyperboliques [11].

**Théorème 1.3.2. (*Sous-variété centrale pour les systèmes continus*)**

Soient un champ de vecteurs  $f$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $r$  fois continûment dérivable s'annulant en  $\bar{x} \in U$ ,  $V$  un petit voisinage de  $\bar{x}$  dans  $U$ , et  $\phi_t$  le flot. Considérons  $E^s$ ,  $E^c$  et  $E^i$ , les espaces propres généralisés correspondants aux valeurs propres de  $df(\bar{x})$  à partie réelle strictement négative, nulles et strictement positive, respectivement :  $E^s$ ,  $E^c$  et  $E^i$  sont des espaces vectoriels stable par  $df(\bar{x})$  et  $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^c \oplus E^i$ .

Alors, les sous-espaces rentrant,

$$W_{loc}^s = \{x \in V : \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = \bar{x} \text{ et } \forall t \geq 0 \ \phi_t(x) \in V\},$$

et sortant,

$$W_{loc}^i = \{x \in V : \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x) = \bar{x} \text{ et } \forall t \leq 0 \ \phi_t(x) \in V\},$$

possèdent des structures de sous-variétés différentiables de classe  $C^r$  autour de  $\bar{x}$  et admettent pour espaces vectoriels tangentes en  $\bar{x}$ ,  $E^s$  et  $E^i$ , respectivement. Il existe aussi une sous-variété différentiable de classe  $C^{r-1}$ ,  $W_{loc}^c$ , (non nécessairement unique contrairement à  $W_{loc}^s$  et  $W_{loc}^i$ ), invariante par le flot, et dont l'espace tangent en  $\bar{x}$  est égal à  $E^c$ .  $W_{loc}^c$  est appelée sous-variété centrale. Elle est définie localement autour de  $\bar{x}$ .

Soient  $x^c$  des coordonnées locales sur  $W_{loc}^c$  et  $f^c(x^c)$  le champ de vecteurs induit par  $f$  sur  $W_{loc}^c$  (cela a un sens car  $f$  est tangent à  $W_{loc}^c$ ). Alors  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  est, autour de  $\bar{x}$ , topologiquement équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx^c}{dt} = f^c(x^c), \\ \frac{dx^s}{dt} = -x^s, \\ \frac{dx^i}{dt} = x^i, \end{cases}$$

où les dimensions de  $x^s$  et  $x^i$  sont égales à celles de  $E^s$  et  $E^i$ .

**Remarque 1.3.2.** *En particulier, le théorème précédent implique que, si  $df(\bar{x})$  n'a pas de valeurs propres à partie réelle strictement positive, la stabilité de  $\bar{x}$  est alors conditionnée par celle la dynamique sur la sous-variété centrale, plus précisément :*

1) Si  $\frac{dx^c}{dt} = f^c(x^c)$ , est stable (resp. asymptotiquement stable) au sens de Lyapounov en  $\bar{x}$ , alors le système complet  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  est aussi stable (asymptotiquement stable) au sens de Lyapounov.

2) Si  $\frac{dx^c}{dt} = f^c(x^c)$  n'est pas stable au sens de Lyapounov en  $\bar{x}$ , alors le système complet  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  n'est pas stable au sens de Lyapounov.

**Approximation de la partie centrale** Il ne reste plus qu'à compléter les résultats précédents par le calcul de  $f^c$  sur la sous-variété centrale. Pour cela, il suffit de connaître les équations de  $W_{loc}^c$ , étant donné que le champ de vecteurs  $f$  restreint à  $W_{loc}^c$  n'est autre que  $f^c$ . Il est, en général, impossible d'obtenir les équations exactes définissant  $W_{loc}^c$ , d'autant plus que cette sous-variété n'est pas unique. Ainsi, on peut se contenter d'une connaissance approximative, au sens des développements limités, des équations de  $W_{loc}^c$  et donc de  $f^c$ .

Considérons donc le ( $C^\infty$  par exemple)  $\frac{dx}{dt} = f(x)$ , pour  $x \in U$ , ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et un point d'équilibre  $\bar{x}$ . On note  $A = df(\bar{x})$  la matrice jacobienne de  $f$  en  $\bar{x}$ . La décomposition en blocs de Jordan de  $A$  conduit à la factorisation suivante

$$A = P \begin{pmatrix} A^c & 0 & 0 \\ 0 & A^s & 0 \\ 0 & 0 & A^i \end{pmatrix} P^{-1},$$

où  $A^c$  a ses valeurs propres sur l'axe imaginaire,  $A^s$  a ses valeurs propres stables,  $A^i$  a ses valeurs propres instables et  $P$  est une matrice inversible. Le changement affine de coordonnées,

$$x \longrightarrow P^{-1}(x - \bar{x}),$$

permet de se ramener au voisinage de 0 et de découpler le linéarise tangent. Sans changer de notation, on peut donc supposer que  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  s'écrit, au voisinage du point d'équilibre  $\bar{x} = 0$ ,

de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx^c}{dt} = A^c x^c + g^c(x^c, (x^s, x^i)), \\ \frac{dx^s}{dt} = A^s x^s + g^s(x^c, (x^s, x^i)), \\ \frac{dx^i}{dt} = A^i x^i + g^i(x^c, (x^s, x^i)). \end{cases} \quad (1.18)$$

Avec  $x = (x^c, x^s, x^i)$  et où  $g^c, g^s, g^i$  sont des fonctions régulières de  $x$ , nulles ainsi que leurs dérivées en 0. On note  $x^h = (x^s, x^i)$  la partie hyperbolique de  $x$  et

$$A^h = \begin{pmatrix} A^s & 0 \\ 0 & A^i \end{pmatrix},$$

Le système (1.18) s'écrit alors

$$\begin{cases} \frac{dx^c}{dt} = A^c x^c + g^c(x^c, x^h), \\ \frac{dx^h}{dt} = A^h x^h + g^s(x^c, x^h). \end{cases} \quad (1.19)$$

Avec  $g^h = (g^s, g^i)$ .

$W_{loc}^c$  est, par définition, tangente en 0 à  $E^c$ , l'espace vectoriel d'équation  $x^h = 0$ . Il est donc normal de chercher une équation de  $W_{loc}^c$  sous la forme de  $x^h = h(x^c)$  avec  $h(0) = 0$  ( $0 \in W_{loc}^c$ ) et  $dh(0) = 0$  ( $E^c$  tangent en 0 à  $W_{loc}^c$ ). La dynamique sur la sous-variété centrale est alors, dans les coordonnées locales  $x^c$ , donnée par :

$$\frac{dx^c}{dt} = A^c x^c + g^c(x^c, h(x^c)) = f^c(x^c).$$

Comme  $h(x^c) = O(\|x^c\|^2)$  et  $g^c(x^c, x^h) = O(\|x^c\|^2 + \|x^h\|^2)$ , on a

$$f^c(x^c) = A^c x^c + g^c(x^c, 0) + O(\|x^c\|^3).$$

Ainsi, la projection de  $f$  sur le plan  $x^h = 0$  fournit une approximation jusqu'à l'ordre 2 inclus de dynamique sur la sous-variété centrale.

Le vecteur  $f$  est tangent à  $W_{loc}^c$  cette condition de tangence s'exprime par les égalités suivantes où intervient le Jacobien  $dh$  de  $h$  :

$$\begin{aligned} \frac{dx^h}{dt} &= \frac{d}{dt}(h(x^c)) = dh(x^c) \frac{dx^c}{dt} = dh(x^c)(A^c x^c + g^c(x^c, h(x^c))), \\ \frac{dx^h}{dt} &= A^h x^h + g^h(x^c, x^h) = A^h h(x^c) + g^h(x^c, h(x^c)). \end{aligned}$$

Ainsi,  $h$  vérifie l'équation aux dérivées partielles suivantes

$$\mathcal{N}(h(x^c)) = dh(x^c)(A^c x^c + g^c(x^c, h(x^c)) - A^h h(x^c) - g^h(x^c, h(x^c))) = 0. \quad (1.20)$$

Cette équation aux dérivées partielles ne peut pas, en général, être résolue de manière exacte. En revanche, elle permet de calculer de façon récurrence les termes successifs du développement limité de  $h$  en  $x^c = 0$  grâce au résultat d'approximation suivant.

**Théorème 1.3.3. (*Approximation de la sous-variété centrale*)**

Si une fonction  $\rho(x^c)$ , telle que  $\rho(0) = 0$  et  $d\rho(0) = 0$ , est autour de  $x^c$  de l'équation aux dérivées partielles (1.20)

$$\mathcal{N}(\rho(x^c)) = O(\|x^c\|^k),$$

alors  $\rho$  est également une approximation à l'ordre  $k$  de  $h$  :

$$h(x^c) = \rho(x^c) + O(\|x^c\|^k).$$

### 1.3.3 Types de bifurcations

Il existe quatre types de bifurcation de codimension 1, qui correspondent toutes à des comportements génériques, avec des formes normales [11] :

$$\dot{x} = G(x, \mu).$$

On note

$$G_\mu = \frac{\partial G}{\partial \mu}, \quad G_{xx} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \quad G_{\mu\mu} = \frac{\partial^2 G}{\partial \mu^2}, \quad G_{\mu x} = \frac{\partial^2 G}{\partial \mu \partial x}.$$

#### 1) Bifurcation fourche

La forme normale est :

$$\dot{x} = G(x, \mu) = x(G_{\mu x}\mu + \frac{1}{6}G_{xx}x^2) + O(2),$$

avec  $x \sim \mu^{\frac{1}{2}}$ , et

$$G_\mu(0, 0) = G_{xx}(0, 0) = 0.$$

#### Exemple

L'équation générique d'une bifurcation fourche est :

$$\dot{x} = f(x) = \mu x - x^3.$$

On donne le diagramme de cette bifurcation

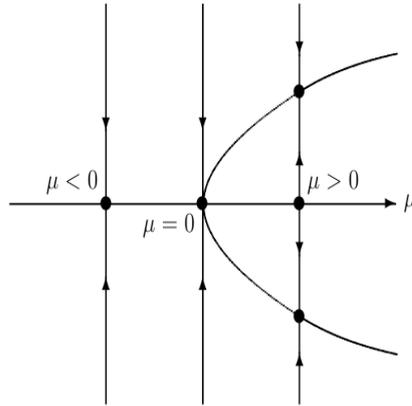


FIGURE 1.4 – Diagramme de la bifurcation fourche.

### 2) Bifurcation noeud-col

On a une Bifurcation noeud-col avec la forme normale :

$$\dot{x} = G(x, \mu) = G_{xx}x + G_{\mu x}\mu + O(2),$$

où

$$G_{\mu}(0, 0) \neq 0 \text{ et } G_{xx}(0, 0) \neq 0.$$

#### Exemple

L'équation générique d'une bifurcation noeud-col est :

$$\dot{x} = f(x) = \mu + \alpha x^2.$$

On donne le diagramme de cette bifurcation

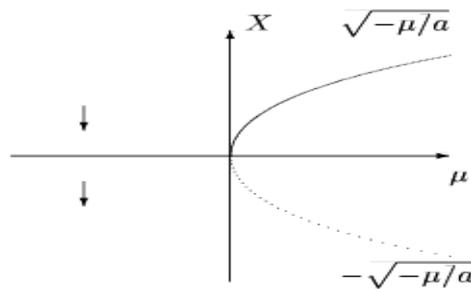


FIGURE 1.5 – Diagramme de la bifurcation noeud-col

### 3) Bifurcation transcritique

La forme normale est

$$\dot{x} = G(x, \mu) = \frac{1}{2}(G_{xx}x^2 + G_{\mu x}\mu x + G_{\mu\mu}\mu^2 + O(3)),$$

avec

$$G_\mu(0,0) = 0 \text{ et } G_{xx}(0,0) \neq 0.$$

### Exemple

L'équation générique d'une bifurcation transcritique est :

$$\dot{x} = f(x) = \mu x - x^2.$$

On donne le diagramme de cette bifurcation

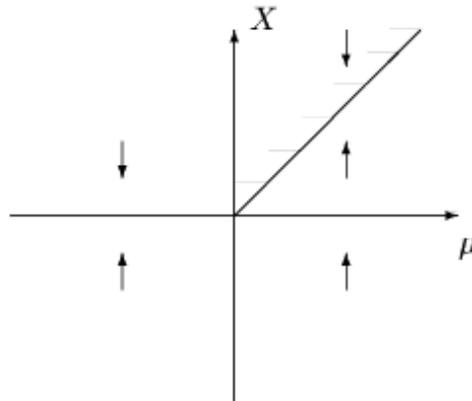


FIGURE 1.6 – Diagramme de la bifurcation transcritique

#### 4) Bifurcation de Hopf

Supposons que le système dynamique

$$\dot{z} = f(z, \mu), \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad n \geq 3, \quad \mu : \text{paramètre réel},$$

ait un point stationnaire  $x = x^*(\mu)$  et que

- la matrice jacobienne

$$A(\mu) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial z_j} \right)_{z=z^*},$$

possède une paire de valeurs propres complexes conjuguées  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ ,

$$\lambda_{1,2}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu),$$

telles que :

1) pour une certaine valeur  $\mu = \mu_c$ ,

$$\alpha(\mu_c) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{d\mu}\alpha(\mu) \Big|_{\mu=\mu_c} \neq 0,$$

2) Les  $(n - 2)$  autres valeurs propres de  $A(\mu_c)$  aient leur partie réelle strictement négative.

Alors, il existe une bifurcation de Hopf.

### Exemple

L'équation générique d'une bifurcation de Hopf est :

$$\dot{x} = f(x) = \mu x - |x|^2 x.$$

On donne le diagramme de cette bifurcation

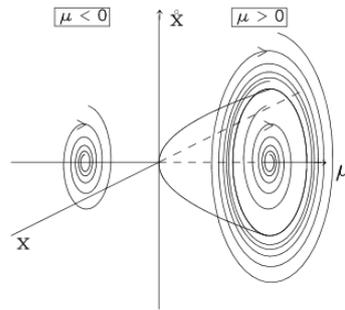


FIGURE 1.7 – Diagramme de la bifurcation de Hopf

### 5) Bifurcations flip ou doublement de période

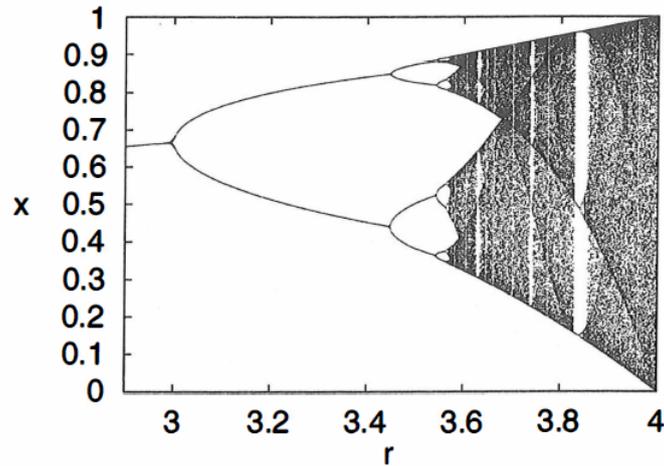
Cette bifurcation a lieu lorsqu'une des deux valeurs propres est égales à  $-1$ . Un cycle d'ordre  $k$  qui subit cette bifurcation va changer de nature et crée un cycle d'ordre  $2k$  de la même nature. C'est-à-dire, un point fixe stable d'ordre 1, par exemple, devient instable en même temps que l'apparition d'un cycle d'ordre 2 stable. Cette situation peut être représentée par :

**Cycle attractif d'ordre  $k$  + cycle répulsif d'ordre  $k$   $\Leftrightarrow$  cycle attractif d'ordre  $2k$**

### Exemple

Considérons l'application quadratique (ou logistique) :

$$f(x) = rx(1 - x), \quad r > 0. \quad (1.21)$$

FIGURE 1.8 – Cascade de bifurcations pour  $f(x) = rx(1 - x)$ .

### 1.3.4 Diagramme de bifurcations

Le diagramme de bifurcations unidimensionnel est un tracé repérant la nature des différentes solutions du système et leur stabilité lorsqu'un paramètre varie.

Il est composé d'intervalles sur lesquelles les solutions asymptotiques (ou les ensembles limites qui leur correspondent) évoluent continûment avec le paramètre et les intervalles sont séparés par les points de bifurcation.

Le diagramme de bifurcation est un outil efficace pour évaluer rapidement l'ensemble des solutions possibles d'un système en fonction des variations de l'un de ses paramètres. Il permet de repérer les valeurs particulières du paramètre qui induisent des bifurcations. C'est un diagramme qui porte les valeurs du paramètre en abscisse et des valeurs particulières d'une des variables d'état en ordonnée lorsque le régime asymptotique est atteint.

Dans le cas d'un système autonome, ces valeurs particulières peuvent être obtenues en travaillant avec une section de Poincaré. Pour un système excité par une fonction périodique du temps, elles peuvent l'être en échantillonnant la variable à la fréquence d'excitation. On obtient ainsi pour chaque valeur du paramètre la suite des états discrets de la variable lorsque le régime asymptotique est atteint.

Un seul point sur une verticale indique un fonctionnement périodique fondamental. En effet, si pour une valeur donnée du paramètre le régime est périodique, la variable échantillonnée à la fréquence fondamentale  $f$  prend une valeur unique. Les  $n$  points correspondants à la même abscisse se superposent donc exactement.

Lorsque les points se répartissent densément sur un segment de la verticale, on peut en déduire que la solution est apériodique mais il n'est pas possible de préciser si elle est quasi périodique ou chaotique.

**Exemple 1 :** diagramme de bifurcation du système de Rössler décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y - z), \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = b + z(x - c). \end{cases} \quad (1.22)$$

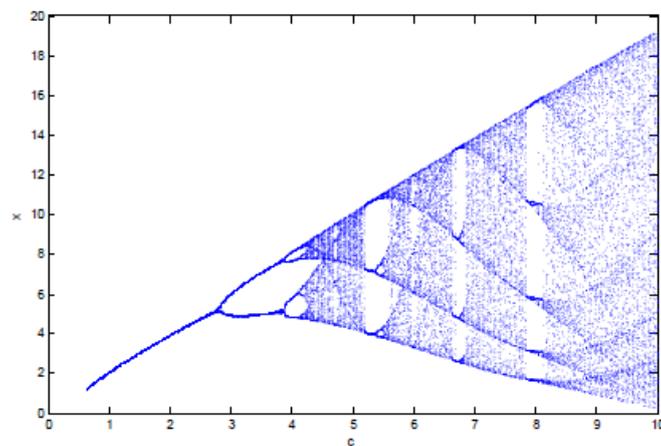


FIGURE 1.9 – Diagramme de bifurcation du système de Rössler pour  $a = 0.2$  et  $b = 0.2$ .

**Exemple 2 :** diagramme de bifurcation du système de Hénon.

$$\begin{cases} x_{k+1} = a - x_k^2 + by_k, & k = 1, \dots, n, \\ y_{k+1} = x_k. \end{cases} \quad (1.23)$$

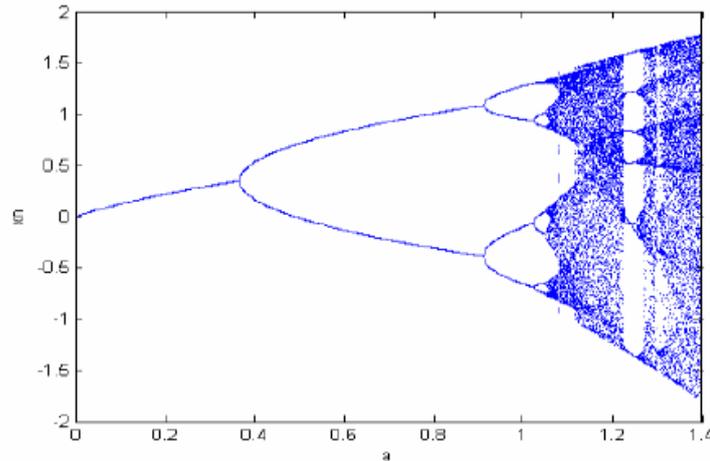


FIGURE 1.10 – Diagramme de bifurcation du système de Hénon pour  $b = 0.3$ .

## 1.4 Systèmes dynamiques en écologie

### 1.4.1 Systèmes proie-prédateur

Nous allons nous intéresser à certains systèmes d'équations différentielles ordinaires autonomes (EDA) modélisant des problèmes bio-écologiques de type Kolmogorov [9] :

$$\frac{dX_i}{dt} = X_i F_i(X, \alpha_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

où  $n$  désigne le nombre d'espèces considérées,  $X_i$  est la densité de la  $i$ ème espèce,  $X = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $F_i$  décrit le taux de croissance de la  $i$ ème espèce et un vecteur  $\alpha_i$  de paramètre de contrôle. Les modèles proie-prédateur qui vont être étudiés sont régis par deux principes. Le premier est que la dynamique de la population peut être décomposée en processus de naissance ou en processus de mortalité,

$$\frac{dX}{dt} = \text{croissance-mortalité.}$$

Le deuxième principe est la conservation de la masse (Linzburg 1998) qui dit que la croissance du prédateur est une fonction directe de ce qu'il a mangé. Par ailleurs nous supposons que l'espèce du niveau  $i$  est l'unique prédateur de l'espèce du niveau  $i - 1$ .

### Modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra

Une des premières descriptions de la dynamique d'une population se trouve vers la fin du 18<sup>ème</sup> siècle quand Maltus (1798) introduisit ce qui est connu aujourd'hui sous le nom de "croissance Maltusienne" : une population augmente exponentiellement tant que ses ressources ne sont pas limitantes. En désignant par  $X(t)$  l'abondance de la population au temps  $t$  cette croissance peut-être décrite par l'équation différentielle,

$$\frac{dX(t)}{dt} = rX(t),$$

où  $r$  est le taux de croissance.

L'idée qu'une ressource limitante peut arrêter la croissance d'une population a été introduite empiriquement par Verhulst (1838) dans ce qui est appelé aujourd'hui le modèle de croissance logistique,

$$\frac{dX}{dt} = rX\left(1 - \frac{X}{K}\right).$$

La capacité de soutien  $K$  désigne une abondance limite au dessus de laquelle la croissance de la population devient négative, tandis qu'au dessous, la croissance est positive.  $K$  représente donc une valeur d'équilibre vers laquelle l'abondance de la population converge.  $K$  peut aussi être interprété comme une mesure des ressources disponibles.

En faite, il existe autre mécanisme qui empêche la population de croître exponentiellement : le cas où elle est consommée par une autre population excédant son taux de croissance. Une telle interaction proie-prédateur a été décrite originellement par deux chercheurs travaillant indépendamment, Lotka (1924) et Volterra (1926). En désignant par  $Y(t)$  l'abondance de cette deuxième population, le prédateur, l'interaction est décrite par les équations différentielles,

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = rX - aXY, \\ \frac{dY}{dt} = eaXY - \mu Y, \end{cases}$$

où  $a$  représente le taux d'attaque,  $e$  l'efficacité de conversion (pourcentage de la biomasse consommée qui est convertie en biomasse de prédateur), et  $\mu$  le taux de mortalité du prédateur.

Ce système va faire des cycles éternels qui passent périodiquement par les valeurs initiales des abondances de la proie et du prédateur.

### 1.4.2 Formulation générale d'un système proie-prédateur

Depuis le modèle de Lotka-volterra, de nombreuses études ont contribué à exprimer de différentes manières les taux de croissance des populations et leurs interactions. Les systèmes proie-prédateur ainsi générés exhibent des dynamiques très variées.

Soit la formulation très générale d'un système proie-prédateur

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = f(X) - YF(X, Y), \\ \frac{dY}{dt} = YG(X, Y), \end{cases}$$

où  $X(t)$  et  $Y(t)$  désignent respectivement les densités de proies et de prédateurs à l'instant  $t$ .

Dans un système généralisé, trois fonctions sont à spécifier :

- 1)  $f(X)$  : le taux de croissance de la population de la proie en l'absence de prédateurs.
- 2)  $F(X, Y)$  : la réponse fonctionnelle du prédateur, c'est à dire le nombre de proies consommées par unité de temps par un prédateur.
- 3)  $G(X, Y)$  : la réponse numérique du prédateur décrivant la production de prédateur, c'est à dire le taux de conversion de la proie en prédateur.

On donne le tableau de classification de ces dernier par la réponse fonctionnelle :

Hypothèses	Taux d'attaque	Réponse fonctionnelle	Références
Pas d'interaction entre les prédateurs ("laisser-faire")	$a = bX$	$F = \frac{bX}{1 + bt_h X}$	type II, Holling 1959
	$a = bX^2$	$F = \frac{bX^2}{1 + bt_h X^2}$	type III, Holling 1959

Le but de l'analyse de ces modèles est l'étude de la survie des espèces (ce qu'on appelle **persistance** ou plus souvent **permanence**) du bornage du système ou du système **dissipatif** (pour que le modèle soit biologiquement réaliste), de la coexistence stable ou instable (cycle limite) et l'extinction d'une ou plusieurs espèces. Le concept de la persistance est un concept important des modèles proie-prédateur, il implique la survie à long terme des espèces pour des données initialises quelconques.

La permanence signifie persistance plus dissipativité, en plus de la survie à long terme, elle tient compte aussi des limites de la croissance des espèces. En 1986, Butler, Freedman et Waltman ont donné des définitions pour la persistance faible, forte et uniforme, pour les systèmes dynamiques, dans un espace métrique localement compact. On peut trouver chez [12].

Dans la suite, nous rappelons les définitions analytiques des trois principales :

**Définition 1.4.1.** *Une espèce de densité  $X_i$  est dite faiblement persistante si*

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} X_i(t) > 0.$$

**Définition 1.4.2.** *Une espèce de densité  $X_i$  est dite fortement persistante si*

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} X_i(t) > 0.$$

**Définition 1.4.3.** *Une espèce de densité  $X_i$  est dite uniformément persistante si*

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} X_i(t) \geq \varepsilon > 0.$$

Il est évident, à partir de ces définitions, que la persistance uniforme implique la persistance forte et que celle-ci implique la persistance faible. En règle générale, quand on parle de persistance il s'agit de la persistance forte. On dit qu'une population de densité  $X_i$  persiste si  $X_i(0) > 0$  et s'il y a persistance forte. Et on dit qu'un système persiste lorsque chaque composante du système persiste.

Un système est dit **dissipatif** lorsque toutes les espèces qui le composent sont uniformément bornées par leur environnement, c'est à dire :

**Définition 1.4.4.** *Un système est dit **dissipatif** lorsque pour toute population  $X_i$ , il existe  $M_i > 0$ , fini, tel que*

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} X_i(t) \leq M_i.$$

**Définition 1.4.5.** *Un système est dit **permanent** s'il est uniformément persistant et dissipatif.*

---

---

## CHAPITRE 2

---

# THÉORIE DU CHAOS : ÉTAT DE L'ART

### 2.1 Introduction

Edward Lorenz, professeur de mathématique au MIT (Massachusetts Institut of Technologie) est le père officiel de la théorie du chaos. Il observa le phénomène en 1961 et l'ironie du sort a voulu qu'il découvre ce qui s'appellera plus tard la théorie du chaos par hasard, à la suite de calculs visant à prévoir les phénomènes météorologiques.

Il venait de découvrir le comportement chaotique d'un système non linéaire, soit que d'infimes différences dans les conditions initiales d'un système déterministe entraînaient des résultats complètement différents. On appellera plus tard cette théorie, la théorie du chaos.

Lorenz entreprit alors de représenter graphiquement la solution de son système au moyen de son ordinateur. En effet, il traça la courbe d'évolution de son système météorologique avec deux jeux de valeurs initiales très proches, et comme il s'y attendait les trajectoires des deux courbes semblaient identiques au départ mais divergeaient de plus en plus.

Par contre ce à quoi Lorenz ne s'attendait pas, c'est que les deux courbes soient plus ou moins identiques, pas point par point mais dans leur ensemble. Les deux courbes ressemblaient aux ailes déployées d'un papillon [3, 4, 8, 11].

Le système de Lorenz :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = x(r - z) - y, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \quad (2.1)$$

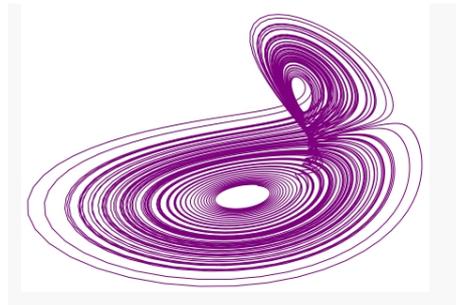


FIGURE 2.1 – Attracteur étrange de Lorenz.

La théorie du chaos traite des systèmes dynamiques déterministes qui présentent un phénomène fondamental d'instabilité appelé "sensibilité aux conditions initiales", ce qui les rend non prédictibles en pratique sur le "long" terme. Le Chaos est défini généralement comme un comportement semblant aléatoire (ou imprévisible) d'un système dynamique défini par des équations déterministes.

## 2.2 Définitions du chaos

Il n'y a aucune définition standard du chaos néanmoins, les dispositifs du chaos incluent :

- 1) **La non-linéarité** : Si le système est linéaire, il ne peut pas être chaotique.
- 2) **Le déterminisme** : Un système chaotique a des règles fondamentales déterministe.
- 3) **La sensibilité aux conditions** : De très changements sur l'état initial peuvent mener à un comportement radicalement différent dans son état final.
- 4) **L'imprévisible** : En raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.
- 5) **L'irrégularité** : Ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables.

**Définition 2.2.1.** (*Devaney, 1989*)

*L'application  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  possède une sensibilité aux conditions initiales s'il existe  $\delta > 0$  tel*

que, pour un certain  $x \in \mathbb{R}^n$  et un certain voisinage  $V \subset \mathbb{R}^n$  de  $x$ , il existe  $y \in V$  tel que :

$$\|f^n(x) - f^n(y)\| > \delta.$$

**Définition 2.2.2.** L'application  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dite topologiquement transitive si pour n'importe quelles paires d'ensembles ouverts  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  il existe un nombre entier  $k > 0$  tel que :  $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ .

**Définition 2.2.3.** Un sous-ensemble  $U$  de  $V$  est dense dans  $V$  si  $\bar{U} = V$ .

Rappelons le système autonome :

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.2)$$

**Définition 2.2.4.** Soit un ensemble  $V \subset \mathbb{R}^n$ . L'application  $f : V \rightarrow V$  est dite chaotique sur  $V$  si :

- 1)  $f$  possède une sensibilité aux conditions initiales.
- 2)  $f$  est topologiquement transitive.
- 3) Les points périodiques sont denses dans  $V$ .

## 2.3 Exposants de Lyapunov

Certains systèmes dynamiques sont très sensibles aux petites variations de leur condition initiale. Ces variations peuvent rapidement prendre d'énormes proportions. Le mathématicien russe Alexandre Lyapunov s'est penché sur ce phénomène et a développé une quantité permettant de mesurer la vitesse à laquelle ces petites variations peuvent s'amplifier. Cette quantité appelée exposant de Lyapunov mesure en fait le degré de la sensibilité d'un système dynamique [15, 16]. Considérons le système autonome à temps continu défini par :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) & \text{et } f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.3)$$

$\phi(x_0, t)$  est une trajectoire solution de ce système de condition initiale  $x_0$  et  $x$  un point de cette trajectoire à  $t$  dans l'espace des phases.

Le calcul des exposants de Lyapunov consiste dans un premier temps à linéariser le champ de vecteur  $f$  au voisinage d'un point de la trajectoire considérée [3].

Soient  $\phi(x_0, t)$  cette trajectoire et  $x$  un point de la trajectoire ( $x = \phi(x_0, t)$ ). En considérant

une petite perturbation  $\delta x(t)$  appliquée au voisinage de  $x$  et en développant en série de Taylor du premier ordre le champ de vecteur  $f$ , le système linéarisé autour de  $x$  s'écrit :

$$\frac{dx}{dt} = df(x)\delta x, \quad (2.4)$$

où  $df(x)$  est la matrice jacobienne de  $f$  au point  $x$ .

Dans la suite, nous suivent l'algorithme de calcul suivant :

- 1) il s'agit ensuite d'intégrer chacune des composantes  $x_k(t)$  avec  $k = 1, \dots, n$  de la trajectoire  $\phi(x_0, t)$  à partir de l'équation (2.3).
- 2) Chacune de ces composantes  $x_k(t)$  intégrées est introduite dans l'équation (2.4).
- 3) La dernière opération consiste à intégrer le système (2.4) lui-même.
- 4) Au final, nous obtenons une matrice  $n \times n$ ,  $\psi_t(x)$  appelée matrice de la solution fondamentale.

Toute perturbation  $\delta x(t)$  à  $t$  au voisinage d'un point  $x$ , de la trajectoire  $\phi(x_0, t)$  pourra s'écrire sous la forme :

$$\delta x(t) = \psi(\delta x(t)).$$

Soient  $\mu_k(t)$  les valeurs propres de cette matrice,  $k = 1, \dots, n$ .

L'exposant de Lyapunov  $\lambda_k$  du  $k^{\text{ième}}$  ordre est lié à la valeur propre  $\mu_k(t)$  et s'écrit :

$$\lambda_k = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln |\mu_k(t)|.$$

L'exposant de Lyapunov  $\lambda_k$  existe dans la mesure où la limite existe, dans le cas où le système possède une solution stationnaire, la matrice jacobienne est indépendante du temps.

Si nous considérons un système à temps discret, les exposants de Lyapunov deviennent [3] :

$$\lambda_k = \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{i} \ln |\mu_k(i)|.$$

Si une trajectoire, différente de  $x_0$ , n'est pas un point  $\bar{x}$ , alors la matrice des solutions fondamentales s'écrit :

$$\phi_t(\bar{x}) = e^{tdf(\bar{x})}.$$

Ce qui implique :

$$\mu_k(t) = e^{\nu_k t},$$

où  $\nu_k$  est la  $k^{\text{ième}}$  valeur propre de la matrice jacobienne  $df(\bar{x})$ .

D'où :

$$\lambda_k = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln |\mu_k(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln |e^{\nu_k t}| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Re}(\nu_k) = \text{Re}(\nu_k).$$

Cela signifie que l'exposant de Lyapunov  $\lambda_k$  d'un point  $x_e$  est égal à la partie réelle de la valeur propre  $\nu_k$  d'un point fixe.

### 2.3.1 Exposants de Lyapunov pour des attracteurs non chaotiques

Pour un attracteur non chaotique, les exposants de Lyapunov sont tous négatifs ou nuls ( $\lambda_k \leq 0 \quad \forall t, k$ ) [19] et leur somme est négative  $\sum_{k=1}^n \lambda_k < 0$ .

Les attracteurs non chaotiques sont classés en quatre catégories :

- 1) Point d'équilibre asymptotiquement stable :  $\lambda_k < 0$  pour  $k = 1, \dots, n$ .
- 2) Cycle limite stable :  $\lambda_1 = 0$  et  $\lambda_k < 0$  pour  $k = 2, \dots, n$ .
- 3) Tore d'ordre 2 asymptotiquement stable :  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$  et  $\lambda_k < 0$  pour  $k = 3, \dots, n$ .
- 4) Tore d'ordre  $k$  asymptotiquement stable :  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0, \lambda_{k+1} < 0$  et  $\lambda_k < 0$  pour  $k = k + 1, \dots, n$ .

### 2.3.2 Exposants de Lyapunov pour un attracteur étrange

Une des particularités du chaos est son extrême sensibilité aux conditions initiales. Un attracteur étrange possèdera toujours au moins un exposant de Lyapunov positif avec la propriété  $\sum_{k=1}^n \lambda_k < 0$  [19]. De plus, pour un attracteur étrange, un des exposants de Lyapunov est toujours nul. Cela signifie que pour respecter la condition  $\sum_{k=1}^n \lambda_k < 0$ , un attracteur étrange doit avoir au minimum trois exposants de Lyapunov. Donc, un système continu dans le temps doit être au moins de dimension trois pour produire du chaos.

**Exemple :**

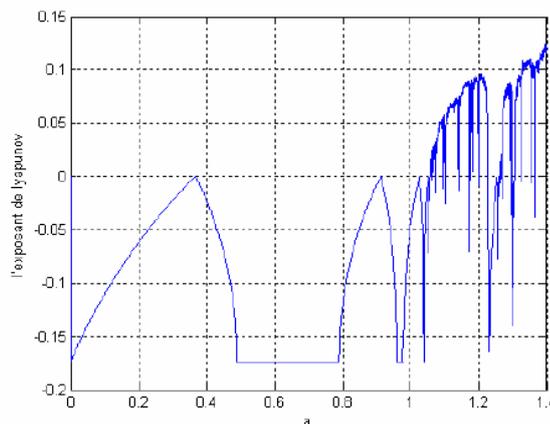


FIGURE 2.2 – Exposant de Lyapunov du système discret de Hénon (1.23).

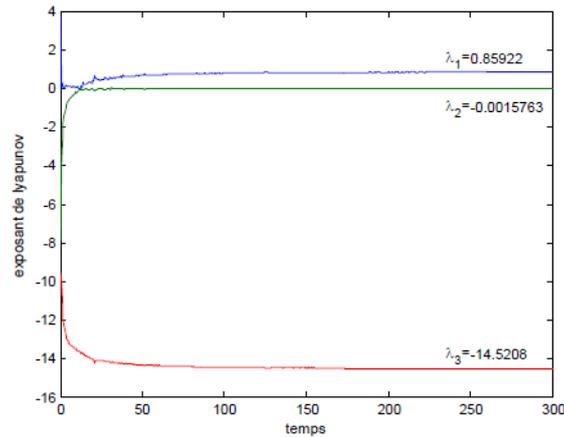


FIGURE 2.3 – Exposant de Lyapunov du système continu de Lorenz (2.1).

## 2.4 Contrôle des systèmes chaotiques

### 2.4.1 Introduction

En général, l'instabilité de l'état d'un système se traduit par la divergence des trajectoires voisines, quelle que soit la nature de l'état en question (stationnaire, périodique ou chaotique). Pour contrer cette instabilité, il suffit d'appliquer au système une petite perturbation à chaque fois qu'il s'écarte de la trajectoire désirée.

**L'algorithme de contrôle doit répondre à plusieurs objectifs :**

- 1) Il doit toujours être réalisable : le contrôle doit fonctionner sur un système chaotique indépendamment du moment où l'algorithme de contrôle lui est appliqué.
- 2) La transition entre l'état libre et l'état contrôlé doit être rapide : on doit pouvoir appliquer le contrôle instantanément qui doit également répondre à un critère d'efficacité.
- 3) Le contrôle doit être durable dans le temps : une fois le contrôle effectif est stabilisé, le système doit conserver son état contrôlé.
- 4) Le contrôle doit être non destructif : le système doit conserver ses propriétés dynamiques et ne doit pas être détruit ou modifié fondamentalement par le contrôle.

Pour répondre à ces critères plusieurs méthodes de contrôle ont été développées. Elles peuvent être classées en deux catégories [3, 8, 7] :

- 1) **Les méthodes de suppression du chaos** : ces méthodes permettent la stabilisation du système sur une valeur fixe mais qui ne représente pas une orbite périodique instable ou un

point fixe instable propre au système contrôlé. Parmi ces méthodes on peut citer : le contrôle prédictif généralisé (GPC), le contrôle par retour d'état retardé, le contrôle basé sur l'exposant de Lyapunov, le contrôle par perturbation d'un paramètre du système.

2) **Les méthodes de stabilisation du chaos** : dans cette catégorie le contrôle est réalisé en stabilisant les orbites périodiques instables d'un système chaotique. La méthode la plus intéressante est la méthode OGY proposée par Ott, Grebogy et York et qui sera détaillée par la suite.

### 2.4.2 Méthode du contrôle OGY

La méthode Ott-Grebogi-Yorke connue sous le nom de OGY est une méthode de contrôle à retour d'état, qui utilise le chaos dans un système dynamique pour stabiliser une orbite périodique instable. La méthode se base sur l'idée suivante [18] :

1) déterminer quelques orbites périodiques instables, les examiner, puis choisir une qui représente les performances du système.

2) ajuster les paramètres de perturbation, en un temps relativement court, dans le but de stabiliser l'orbite périodique instable.

On considère le système suivant :

$$\dot{x} = f(x, p), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.5)$$

où  $p$  représente le paramètre du contrôle.

La section de Poincaré du système est représentée par :

$$x_{n+1} = f_{Pc}(x_n, p), \quad \forall x_n \in \mathbb{R}^{n-1}. \quad (2.6)$$

Chaque point périodique dans la section représente un UPO (unstable periodic orbit) du flot.

Soit  $x_f$  un point fixe dans la section de Poincaré tel que :

$$x_f = f(x_f, p_0), \quad (2.7)$$

où  $p_0$  représente la valeur nominale du paramètre.

La stratégie de contrôle va donc consister à trouver une loi de contrôle de stabilisation par retour d'état, définie au voisinage de l'orbite choisie.

Le système étudié présente un phénomène chaotique, le passage au voisinage du point fixe est donc garanti et une fois le système est dans le voisinage de  $x_f$ , la procédure du contrôle est déclenchée pour amener le système vers l'orbite désirée.

Dans ce cas on a :

$$\delta x_n = x_n - x_f, \quad (2.8)$$

et

$$\delta p_n = p_n - p_0, \quad (2.9)$$

on linéarise le système (2.5) au tour du point  $x_f$  on obtient :

$$\delta x_{n+1} = A\delta x_n + B\delta p_n, \quad (2.10)$$

avec

$$A = d_x f(x),$$

$$B = \partial f / \partial p.$$

La matrice  $A$  représente deux directions propres, une direction stable  $e_s$  (valeur propre  $< 1$ ) et une direction instable  $e_u$  (valeur propre  $> 1$ ).

Donc, les corrections sont appliquées sur la direction instable.

Si on utilise les notations suivantes :

$\lambda_s$  : valeur propre  $|\lambda_s| < 1$ .

$\lambda_u$  : valeur propre  $|\lambda_u| > 1$ .

$e_s$  : vecteur propre correspond à la valeur propre  $\lambda_s$ .

$e_u$  : vecteur propre correspond à la valeur propre  $\lambda_u$ .

Alors la matrice  $A$  peut s'écrire sous la forme :

$$A = \lambda_s e_s v_s + \lambda_u e_u v_u, \quad (2.11)$$

où  $v_s, v_u$  représentent les vecteurs covariance,

avec

$$v_s e_s = v_u e_u = 1,$$

et

$$v_s e_u = v_u e_s = 0,$$

alors, l'équation (2.10) devient :

$$\delta x_{n+1} = (\lambda_s e_s v_s + \lambda_u e_u v_u) \delta x_n + B \delta p_n, \quad (2.12)$$

et en multipliant (2.12) par  $v_u$ , on obtient :

$$v_u \delta x_{n+1} = v_u [(\lambda_s e_s v_s + \lambda_u e_u v_u) \delta x_n + B \delta p_n]. \quad (2.13)$$

La stratégie de la méthode OGY consiste à ajuster le paramètre du contrôle  $p$ , afin de stabiliser le système sur le point  $x_f$ . Il faut donc que :

$$\delta x_{n+1} = 0.$$

C'est-à-dire :

$$v_u[(\lambda_s e_s v_s + \lambda_u e_u v_u)\delta x_n + B\delta p_n] = 0, \quad (2.14)$$

sachant que :

$$v_s e_s = v_u e_u = 1,$$

$$v_s e_u = v_u e_s = 0.$$

Alors

$$v_u \lambda_u \delta x_n + v_u B \delta p_n = 0. \quad (2.15)$$

C'est à dire que l'ajustement sur le paramètre du contrôle va être égale à :

$$\delta p_n = \frac{-v_u \lambda_u}{v_u B} \delta x_n. \quad (2.16)$$

Si on pose

$$k = \frac{-v_u \lambda_u}{v_u B}.$$

Alors, on obtient

$$\delta p_n = k \delta x_n. \quad (2.17)$$

Le but du contrôle est de satisfaire la condition suivante :

$$|p_n - p_0| < \varepsilon, \quad (2.18)$$

$\varepsilon$  étant un paramètre prédéfini qui détermine le voisinage du  $x_f$ . On peut écrire aussi :

$$|k \delta x_n| < \varepsilon. \quad (2.19)$$

Donc, l'incrément du contrôle est donné par :

$$\delta p_n = \begin{cases} -k(x_n - x_f) & \text{si } |k(x_n - x_f)| < \varepsilon, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.20)$$

### 2.4.3 Application de la méthode OGY sur le système de Hénon

Le système de Hénon est décrit par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = a - x_n^2 + by_n, \\ y_{n+1} = x_n. \end{cases} \quad (2.21)$$

Avec  $a$  et  $b$  représente les paramètres du contrôle.

#### 1) Point fixe

Pour déterminer les points fixes on pose  $x_{n+1} = x_n$  et  $y_{n+1} = y_n$ , donc on obtient :

$$\begin{cases} x = a - x^2 + by, \\ y = x. \end{cases} \quad (2.22)$$

Alors

$$x_f, y_f = -\frac{(1-b)}{2} \pm \sqrt{\frac{(1-b)^2}{4} + a}. \quad (2.23)$$

On pose  $c = \frac{1-b}{2}$ .

Donc

$$x_f, y_f = -c \pm \sqrt{c^2 + a}. \quad (2.24)$$

#### 2) Stabilité et comportement dynamique

Dans l'étude de la stabilité du système de Hénon, on remarque que les valeurs propres sont en fonction des points fixes qui sont aussi en fonction des paramètres  $a$  et  $b$ . Donc, pour déterminer les différentes zones de stabilité, il suffit de calculer l'exposant de Lyapunov en fonction du paramètre  $a$  ou  $b$ . On fixe  $b = 0.3$ , et on laisse  $a$  varier entre 0 et 1.4

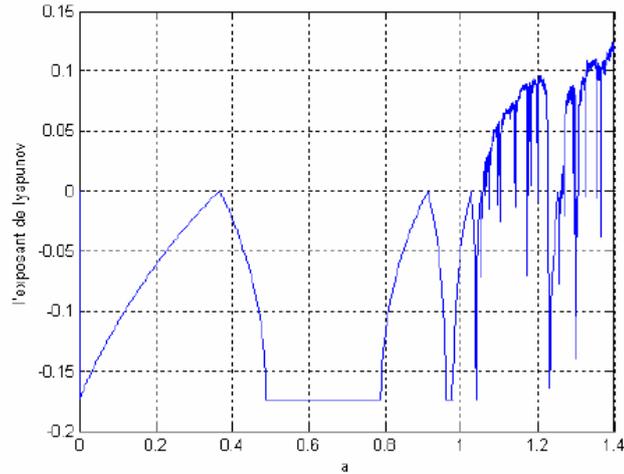


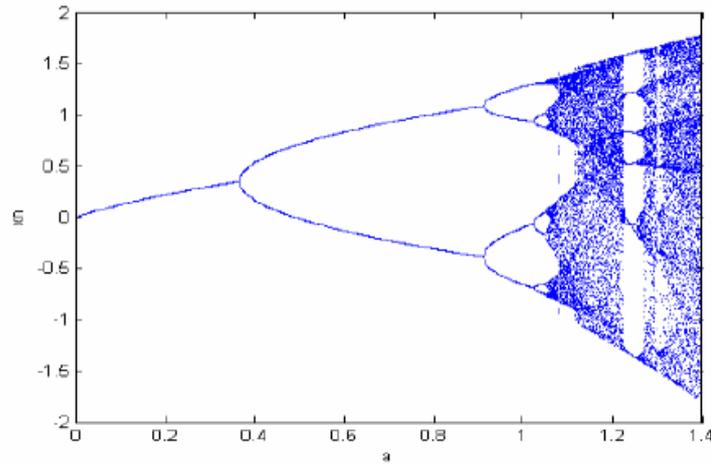
FIGURE 2.4 – Exposant de Lyapunov du système discret de Hénon en fonction du paramètre  $a$ .

A partir de la figure 2.4, on obtient deux zones :

- 1) une zone stable lorsque  $a$  varie dans l'intervalle  $[0, 1.052]$ .
- 2) une zone chaotique lorsque  $a$  varie dans l'intervalle  $]1.052, 1.4]$ .

Pour bien voir la dynamique du système, on trace le diagramme de bifurcation des populations  $x_n$  ou  $y_n$  en fonction du paramètre  $a$ . On observe que :

- pour  $a \in [0, 0.362]$   $\implies$  1 cycle stable,
- pour  $a \in ]0.362, 0.91]$   $\implies$  2 cycles stables,
- pour  $a \in [0.91, 1.024]$   $\implies$  4 cycles stables,
- pour  $a \in ]1.024, 1.052]$   $\implies$  8 cycles stables,
- pour  $a \in ]1.052, 1.4]$   $\implies$  phénomène chaotique.

FIGURE 2.5 – Diagramme de bifurcation en fonction du paramètre  $a$ .

### 3) Application de l'algorithme du contrôle

Avant d'appliquer l'algorithme du contrôle au système, on fixe  $a = 1.4$  et  $b = 0.3$  pour assurer la présence du phénomène chaotique. Le contrôle par la méthode OGY consiste à effectuer les opérations suivantes :

#### Identification de l'orbite périodique à stabiliser

Remplaçant  $a$  et  $b$  dans l'équation (2.23) on obtient :

$$x_{f_1}, y_{f_1} = 0.8839, \quad (2.25)$$

$$x_{f_2}, y_{f_2} = -1.5839. \quad (2.26)$$

Dans notre cas on choisit le point  $x_{f_1}$ .

#### Calcul des matrices $A$ et $B$

On a  $A = d_x f(x)$  et  $B = \frac{\partial f}{\partial p}$  alors :

$$A = \begin{pmatrix} -2x_{f_1} & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$A = \begin{pmatrix} -1.7678 & 0.3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Calcul des valeurs propres  $\lambda_u$  et  $\lambda_s$**

$\lambda_u$  et  $\lambda_s$  sont définis par :

$$\lambda_{s,u} = -x_{f_1} \pm \sqrt{x_{f_1}^2 + b}. \quad (2.27)$$

Donc

$$\lambda_s = 0.1559 \text{ et } \lambda_u = -1.9237. \quad (2.28)$$

**Calcul des vecteurs propres  $\{e_s, e_u\}$  et les vecteurs covariances  $\{v_s, v_u\}$**

Les vecteurs propres sont calculés de l'équation suivante :

$$[\lambda I_2 - A] e = 0. \quad (2.29)$$

Le vecteur propre est choisi de la forme :  $e = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ , avec  $e_s = \begin{pmatrix} \lambda_s \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $e_u = \begin{pmatrix} \lambda_u \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Alors

$$e_s = \begin{pmatrix} 0.1559 \\ 1 \end{pmatrix}, e_u = \begin{pmatrix} -1.9237 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On sait que

$$v_s e_s = v_u e_u = 1 \quad \text{et} \quad v_s e_u = v_u e_s = 0.$$

Ce qui donne

$$v_s = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_s - \lambda_u} & \frac{\lambda_u}{\lambda_u - \lambda_s} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_u = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_u - \lambda_s} & \frac{\lambda_s}{\lambda_s - \lambda_u} \end{pmatrix}.$$

$$v_s = (0.4808, 0.9250) \quad \text{et} \quad v_u = (-0.4787, 0.0746).$$

**Calcul du  $k$**

Le paramètre  $k$  est représenté par

$$k = \frac{\lambda_u v_u}{v_u B} = \frac{\lambda_u \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_u - \lambda_s} & \frac{\lambda_s}{\lambda_s - \lambda_u} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_u - \lambda_s} & \frac{\lambda_s}{\lambda_s - \lambda_u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \lambda_u & -\lambda_u \lambda_s \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

$$k = (-1.9237, 0.3011). \quad (2.31)$$

On choisit  $\varepsilon = 0.01$  :

Comme l'exemple précédent, on va appliquer l'algorithme suivant :

- 1) On pose  $a_0 = 1.4$ ,  $b = 0.3$ ,  $(x_0, y_0) = (0.1, 0.1)$  et  $\varepsilon = 0.01$ .

2) Boucle de test

Si  $|k\delta x_n| < \varepsilon$  alors  $\delta a_n = -k\delta x_n$ .

Puis calculer le nouveau  $a$  et  $x_{n+1}$  jusqu'à ce que  $x_n$  soit égale à  $x_{f_1}$

Sinon, refaire l'étape 2.

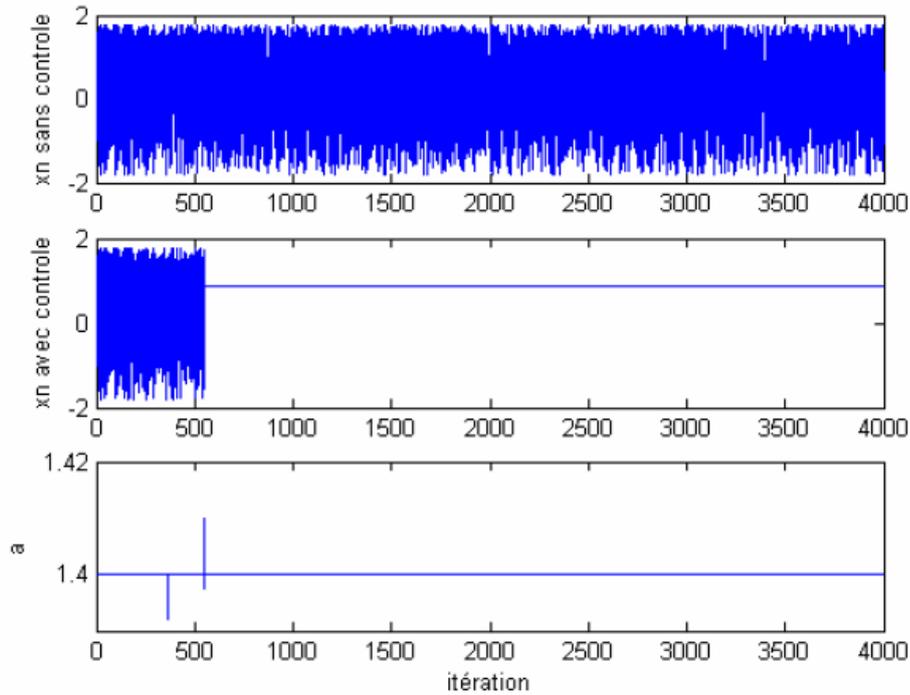


FIGURE 2.6 – Contrôle du système de Hénon par la méthode OGY.

On remarque qu'au environ de 554 itérations, le système se stabilise à la valeur  $x_n = 0.8839$  après deux déclenchements du contrôle.

Pour activer le contrôle plus tôt et pour éviter le double déclenchement du contrôle, on change la condition du test dans l'algorithme du contrôle par :

$$(x_n - x_{f_1})^2 + (y_n - y_{f_1})^2 < \varepsilon. \quad (2.32)$$

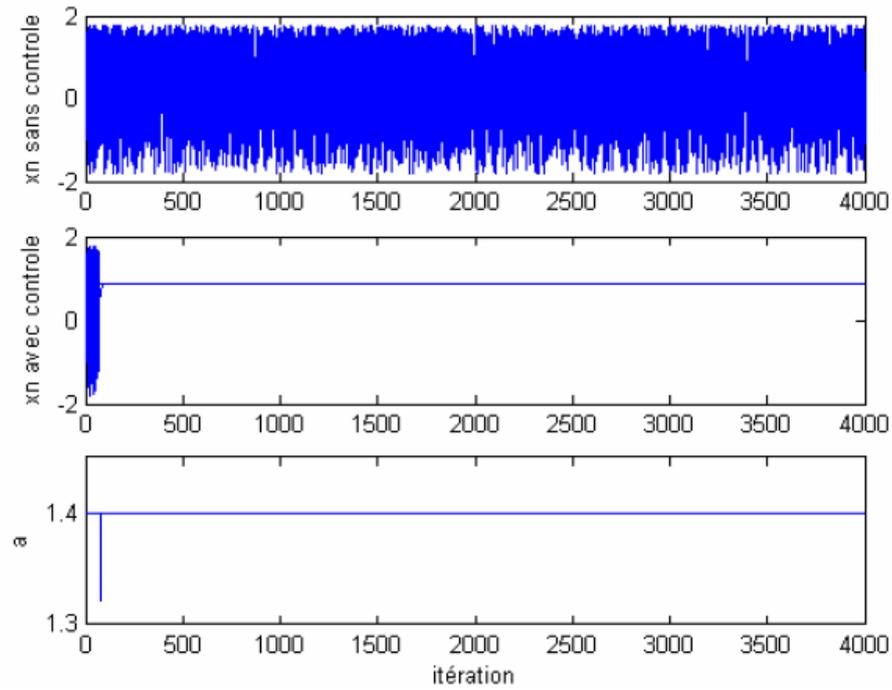


FIGURE 2.7 – Contrôle de l'attracteur de Hénon.

Dans cette figure on observe que le déclenchement du contrôle se produit une seule fois. Le système se stabilise à la valeur  $x_n = 0.8839$  après 79 itérations seulement, cela signifie l'efficacité de cette deuxième condition au voisinage du point fixe  $x_{f_1}$ .

---

---

## CHAPITRE 3

---

# ETUDE D'UN MODÈLE DE POPULATION TRITROPHIQUE DE TYPE HOLLING II

Dans ce chapitre nous nous intéressons à un système tridimensionnel d'équations différentielles autonomes, modélisant un réseau alimentaire tritrophique. Il existe beaucoup de littérature sur le problème général des chaînes alimentaires. Cela concerne souvent (deux ou trois) modèles de chaînes trophiques au niveau trophique composés de proies logistiques  $X$  et de prédateurs spécialisés Lotka-Volterra ou Holling type II  $Y$  et top-prédateur  $Z$ , alors que le modèle que nous étudions ici est surtout basée sur une version modifiée du schéma de Leslie-Gower [2, 5, 14].

Compte tenu de certaines restrictions raisonnables sur le modèle, nous déterminons les conditions et établissons des résultats pour la limite du système et la stabilité locale ou globale des équilibres qui représentent l'extinction du prédateur supérieur ou intermédiaire.

Une étude à proximité du plan  $XY$  est également réalisée. Par situations écologiques réalistes, nous entendons une où les régions des paramètres choisis pour les expériences numériques contiennent des valeurs paramétriques qui ne sont pas arbitraires mais quantitatives mesures des attributs du système.

En utilisant des régions réalistes de paramètres, comme dans [23], des l'analyse du comportement asymptotique du système est effectuée. Le comportement de transition lorsque certains paramètres du système varient est étudié. La dynamique chaotique est observée par l'intermédiaire de séquences de bifurcation de cycles limites (dans une gamme relativement large de paramètres).

Cependant, la décomposition et l'inversion donnent naissance à une séquence de périodes divisées par deux. En effet, des études récentes indiquent que cette dynamique chaotique peut jouer un rôle important dans les modèles à temps continu.

Ce chapitre est organisé comme suit : Dans la section 1, le modèle est décrit et la transformation de variable pour obtenir une forme analytique plus simple est donnée. Dans la section 2, la limite des solutions de ce système est l'existence d'un ensemble d'attraction positivement invariant sont établies. Les équilibres, qui représentent d'extinction du prédateur spécialiste ou prédateur supérieur, et leur stabilité font l'objet de la section 3. Dans la section 4, la stabilité globale des équilibres intérieurs est donnée par la construction d'une fonction de Lyapunov convenable, ainsi l'étude de la permanence du modèle est établie. En utilisant une étude proche du plan  $XY$ , la question de l'existence du chaos est numériquement étudiée dans la section 5 .

### 3.1 Présentation du modèle

Le modèle qui nous intéresse décrit une population proie  $X$  qui sert d'unique ressource à un prédateur  $Y$ . Ce prédateur spécialiste (ou intermédiaire)  $Y$  est, à son tour, l'unique proie d'un super-prédateur  $Z$ . Les interactions entre les espèces  $X$  et  $Y$  sont modélisées par un schéma de type Lotka-Volterra (la population prédatrice meurt exponentiellement en l'absence de sa proie ). Mais, les interactions entre l'espèce  $Z$  et sa proie  $Y$  sont modélisées par un schéma de type Holling type II (la perte de la population prédatrice  $Z$  est proportionnelle à la réciproque de sa proie favorite  $Y$ ). Les équations décrivant les densités de trois composantes de la chaîne alimentaire peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dT} = (a_0 - b_0X - \frac{v_0Y}{X + d_0})X, \\ \frac{dY}{dT} = (-a_1 + \frac{v_1X}{X + d_0} - \frac{v_2Z}{Y + d_2})Y, \\ \frac{dZ}{dT} = (c_3 - \frac{v_3Z}{Y + d_3})Z. \end{cases} \quad (3.1)$$

Avec  $X(0) \geq 0$ ,  $Y(0) \geq 0$  et  $Z_0 \geq 0$ , où  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  représentent l'abondance des populations au temps  $T$ ,  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $v_0$ ,  $d_0$ ,  $a_1$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $d_2$ ,  $c_3$ ,  $v_3$  et  $d_3$  sont les paramètres du modèle et sont supposés strictement positifs. Ces paramètres sont définis de la manière suivante :

$a_0$  est le taux de croissance de la proie  $X$ ,

$b_0$  mesure la mortalité due à la compétition entre les individus de l'espèce  $X$ ,

$v_0$  est la valeur maximale que le taux de réduction par individu  $X$  peut atteindre,

$d_0$  mesure la protection dont la proie  $X$  et le prédateur intermédiaire  $Y$  bénéficie grâce à l'environnement,

$a_1$  représente le taux de mortalité de  $Y$  en l'absence de  $X$ ,

$v_1$  est la valeur maximale que le taux de réduction par individu  $X$  peut atteindre.

$v_2$  est la valeur maximale que le taux de réduction par individu  $Y$  peut atteindre.

$v_3$  est la valeur maximale que le taux de réduction par individu  $Z$  peut atteindre.

$d_2$  est la valeur de  $Y$  pour laquelle le taux d'élimination par l'individu  $Y$  devient  $\frac{v_2}{2}$ ,

$c_3$  décrit le taux de croissance de  $Z$ , en supposant qu'il y ait le même nombre de mâles et de femelles,

et  $d_3$  représente la perte résiduelle, causée par une forte rareté de la proie  $Y$  des individus de l'espèce  $Z$ .

Pour simplifier le système (3.1) et réduire le nombre de paramètres, nous considérons les transformations de variables

$$T = \frac{t}{a_0}, \quad X = \frac{a_0}{b_0}x, \quad Y = \frac{a_0^2}{b_0v_0}y, \quad Z = \frac{a_0^3}{b_0v_0v_2}z,$$

$$a = \frac{b_0}{d_0}, \quad b = \frac{a_1}{a_0}, \quad c = \frac{v_1}{a_0}, \quad d = \frac{b_0v_0d_2}{a_0^2}, \quad p = \frac{c_3}{a_0}, \quad q = \frac{v_3}{v_2}, \quad r = \frac{b_0v_0d_3}{a_0^2}.$$

Et bien évidemment tous ces paramètres ne prennent que des valeurs strictement positives.

Ce qui donne, à partir du système (3.1)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{b_0}{a_0} X \right) = \frac{b_0}{a_0} \frac{dX}{dT} \frac{dT}{dt} \\ &= \frac{b_0}{a_0^2} \frac{dX}{dt}, \end{aligned}$$

alors

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{xy}{x+a},$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{b_0 v_0}{a_0^2} Y \right) \\
&= \frac{b_0 v_0}{a_0^2} \frac{dY}{dT} \frac{dT}{dt} \\
&= \frac{b_0 v_0}{a_0^3} \frac{dY}{dT} \\
&= -by + \frac{cxy}{x+a} - \frac{yz}{y+d}.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{b_0 v_0 v_2}{a_0^3} Z \right) \\
&= \frac{b_0 v_0 v_2}{a_0^3} \frac{dZ}{dT} \frac{dT}{dt} \\
&= \frac{b_0 v_0 v_2}{a_0^4} \frac{dZ}{dT} \\
&= pz - \frac{qz^2}{y+r}.
\end{aligned}$$

Après ces changements, Le système (3.1) devient :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{xy}{x+a}, \\ \frac{dy}{dt} = -by + \frac{cxy}{x+a} - \frac{yz}{y+d}, \\ \frac{dz}{dt} = pz - \frac{qz^2}{y+r}. \end{cases} \quad (3.2)$$

**Remarque 3.1.1.** *Nous utiliserons les notations suivantes :*

$$\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\},$$

$$Int(\mathbb{R}_+^3) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x > 0, y > 0, z > 0\},$$

$$\mathbb{R}_{xy}^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0\},$$

$$\mathbb{R}_{xz}^+ = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, z \geq 0\}.$$

## 3.2 Etude de la dissipativité du modèle

Dans ce paragraphe, nous allons construire un ensemble positivement invariant et attracteur. Ce qui nous garantira la dissipativité du système c'est à dire le modèle est réaliste.

**Lemme 3.2.1.** *Le cône strictement positif  $Int\mathbb{R}_+^3$  est invariant pour le système (3.2).*

### Démonstration

Remarquons, tout d'abord, que les frontières du Cône non-négatif  $\mathbb{R}_+^3$  sont invariantes, cela est immédiat à partir des équations du système (3.2). De plus, les densités  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  sont strictement positives, pour  $t \geq 0$ , si  $x(0) > 0$ ,  $y(0) > 0$  et  $z(0) > 0$  alors  $x(t) > 0$ ,  $y(t) > 0$  et  $z(t) > 0$  car le théorème d'existence et d'unicité des équations différentielles assure que les solutions strictement positives et les axes ne peuvent se couper. ■

Nous allons montrer que, sous certaines conditions, les solutions du système (3.2) issues de  $\mathbb{R}_+^3$  sont bornées, pour  $t$  suffisamment grand.

**Définition 3.2.1.** *Une solution  $\phi(t, t_0, x_0, y_0, z_0)$  du système (3.2) est dite bornée dans  $\mathbb{R}_+^3$ , pour  $t$  suffisamment grand s'il existe une région compacte  $A \in \mathbb{R}_+^3$  et un temps fini*

$T = T(t_0, x_0, y_0, z_0)$  tels que, pour tous  $(t_0, x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^3$ ,  $\phi(t, t_0, x_0, y_0, z_0) \in A$  pour tout  $t > T$ .

**Théorème 3.2.2.** *Soit  $A$  l'ensemble défini par :*

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq x + \frac{y}{c} \leq 1 + \frac{1}{4b}, 0 \leq x + \frac{y}{c} + \alpha z \leq 1 + \frac{1}{4b} + \frac{M}{b} \right\},$$

où

$$\alpha = \frac{1}{(b+p)^2(c + \frac{c}{4b} + r)} \quad \text{et} \quad M = \frac{1}{4q}. \quad (3.3)$$

Alors

- i)  $A$  est positivement invariant par le champ (3.2),
- ii) toutes les solutions de (3.2) issues de  $\mathbb{R}_+^3$  sont bornées dans  $\mathbb{R}_+^3$  et convergent vers l'ensemble attracteur  $A$ ,
- iii) le système (3.2) est dissipatif.

### Démonstration

i) Soient  $(x(0), y(0), z(0)) \in A$ , nous allons montrer que  $(x(t), y(t), z(t)) \in A$  pour tout  $t \geq 0$ .

A partir du lemme 3.2.1, il est clair que, comme  $(x(0), y(0), z(0)) \in A$ , alors  $(x(t), y(t), z(t))$  est strictement positive. Nous devons donc montrer que pour tout temps  $t \geq 0$ ,

$$x(t) \leq 1,$$

$$x(t) + \frac{y(t)}{c} \leq 1 + \frac{1}{4b},$$

et

$$x(t) + \frac{y(t)}{c} + \alpha z(t) \leq 1 + \frac{1}{4b} + \frac{M}{b}.$$

(i1) Montrons d'abord que  $x(t) \leq 1$ , pour tout  $t \geq 0$ . Puisque  $x > 0$ ,  $y > 0$ , et  $z > 0$  dans  $Int(\mathbb{R}_+^3)$ , toute solution  $\phi(t) = (x(t), y(t), z(t))$  de (3.2), issue de  $Int(\mathbb{R}_+^3)$ , vérifie l'inégalité différentielle

$$\frac{dx(t)}{dt} \leq x(t)(1 - x(t)),$$

ceci est immédiat en considérant la première équation de (3.2). Donc  $x(t)$  peut être comparée avec la solution de

$$\frac{du(t)}{dt} \leq u(t)(1 - u(t)), \quad u(0) = x(0) > 0,$$

qui est

$$u(t) = \frac{1}{1 + c_0 e^{-t}} \quad \text{avec} \quad c_0 = \frac{1}{u(0)} - 1.$$

$c_0 \geq 0$  car  $u(0) \leq 1$ . Il s'en suit que toute solution positive  $\phi(t)$  de (3.2) vérifie

$$x(t) \leq 1,$$

pour tout temps  $t \geq 0$ .

(i2) Nous allons montrer maintenant que  $x(t) + y(t) \leq 1 + \frac{1}{4b}$ , pour tout  $t \geq 0$ . Posons :

$$\sigma(t) = x(t) + \frac{1}{c}y(t),$$

sa dérivée par rapport au temps

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{dx}{dt} + \frac{1}{c} \frac{dy}{dt} \\ &= x \left( 1 - x - \frac{y}{x+a} \right) + \frac{1}{c} y \left( -b + \frac{cx}{x+a} - \frac{z}{y+d} \right) \\ &= x(1-x) - \frac{b}{c}y - \frac{1}{c} \frac{yz}{y+d}. \end{aligned}$$

Puisque tous les paramètres sont strictement positifs et que les solutions issues de  $\mathbb{R}_+^3$  restent dans le cône positif on a alors

$$\frac{d\sigma}{dt} \leq x(1-x) - \frac{b}{c}y,$$

pour toutes solutions  $x, y$  et  $z$  strictement positives. Donc

$$\frac{d\sigma}{dt} \leq x(1-x) + bx - bx - \frac{b}{c}y,$$

alors

$$\frac{d\sigma}{dt} \leq x(1-x) + bx - b\sigma(t),$$

et comme

$$\max_{\mathbb{R}_+} (1-x)x = \frac{1}{4}, \quad \text{et } x(t) \leq 1,$$

par conséquent

$$\frac{d\sigma}{dt} + b\sigma(t) \leq \frac{1}{4} + b,$$

car dans  $A$ , en utilisant le **lemme de Gronwall** (avec  $\alpha_1 = b$  et  $\alpha_2 = b + \frac{1}{4}$ ), on obtient, pour tout  $t \geq \tilde{T} \geq 0$

$$\sigma(t) \leq 1 + \frac{1}{4b} - \left(1 + \frac{1}{4b} - \sigma(\tilde{T})\right) e^{-b(t-\tilde{T})}. \quad (3.4)$$

Alors, si  $\tilde{T} = 0$

$$\sigma(t) \leq 1 + \frac{1}{4b} - \left(1 + \frac{1}{4b} - \left(x(0) + \frac{y(0)}{c}\right)\right) e^{-b(t)}.$$

Et par conséquent, puisque  $(x(0), y(0), z(0)) \in A$

$$\sigma(t) = x(t) + \frac{1}{c}y(t) \leq 1 + \frac{1}{4b}, \quad \text{pour tout } t \geq 0. \quad (3.5)$$

(i3) Enfin, nous allons montrer que  $x + \frac{1}{c}y + \alpha z \leq 1 + \frac{1}{4b} + \frac{M}{b}$ . La démonstration est analogue à celle utilisée précédemment. Prenons la fonction définie par :

$$\eta(t) = x(t) + \frac{1}{c}y(t) + \alpha z(t),$$

dérivons par rapport au temps

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= \frac{dx}{dt} + \frac{1}{c} \frac{dy}{dt} + \alpha \frac{dz}{dt} \\ &= x(1-x) - \frac{b}{c}y - \frac{1}{c} \frac{yz}{y+d} + \alpha \left( p - \frac{qz}{y+r} \right) z. \end{aligned}$$

De même que dans (i2), à partir du moment où toute solution issue de  $\mathbb{R}_+^3$  reste strictement positive, tous les paramètres sont positifs,  $0 \leq x \leq 1$  et

$$\max_{\mathbb{R}_+}(1-x)x = \frac{1}{4},$$

nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d\eta(t)}{dt} &\leq \frac{1}{4} - bx + bx - \frac{b}{c}y + \alpha \left( p - \frac{qz}{y+r} \right) z + \alpha bz - \alpha bz \\ &\leq \frac{1}{4} + bx - b\eta(t) + \alpha bz + \alpha \left( p - \frac{qz}{y+r} \right) z \\ &\leq \frac{1}{4} + b - b\eta(t) + \alpha bz + \alpha \left( p - \frac{qz}{y+r} \right) z. \end{aligned}$$

Par conséquent, comme dans  $A$  on a  $y < c + \frac{c}{4b}$  alors

$$\frac{d\eta(t)}{dt} \leq \frac{1}{4} + b - b\eta(t) + \alpha bz + \alpha \left( p - \frac{qz}{c + \frac{c}{4b} + r} \right) z.$$

Ainsi

$$\frac{d\eta(t)}{dt} + b\eta(t) \leq \frac{1}{4} + b + M, \quad (3.6)$$

où

$$\begin{aligned} M &= \max_{\mathbb{R}_+} \left( \alpha bz + \alpha \left( p - \frac{qz}{c + \frac{c}{4b} + r} \right) z \right) \\ &= \max_{\mathbb{R}_+} \left( -\frac{\alpha q}{c + \frac{c}{4b} + r} z^2 + \alpha(b+p)z \right). \end{aligned}$$

Ce maximum existe puisque  $-\frac{\alpha q}{c + \frac{c}{4b} + r} < 0$ .

On pose

$$f(z) = \alpha bz + \alpha \left( p - \frac{qz}{c + \frac{c}{4b} + r} \right) z,$$

donc

$$f'(z) = -\frac{2\alpha q}{c + \frac{c}{4b} + r} z + \alpha(b+p),$$

$$f'(z) = 0 \text{ pour } z = \alpha(b+p) \frac{c + \frac{c}{4b} + r}{2\alpha q} = z_1,$$

on remarque que  $f$  est croissante dans l'intervalle  $[0, z_1]$  et décroissante dans  $[z_1, \infty[$ . Alors,  $f$  admet une valeur maximale pour  $z = z_1$ , donc

$$f(z_1) = M = \frac{\alpha(b+p)^2(c + \frac{c}{4b} + r)}{4q}.$$

Si on prend

$$\alpha = \frac{1}{(b+p)^2(c + \frac{c}{4b} + r)},$$

on trouve

$$M = \frac{1}{4q}.$$

De l'équation (3.6), et en utilisant lemme de Gronwall (avec  $\alpha_1 = b$  et  $\alpha_2 = \frac{1}{4} + b + M$ ), nous obtenons pour tout  $t \geq \tilde{T} \geq 0$

$$\eta(t) \leq 1 + \frac{1}{4b} + \frac{M}{b} - \left(1 + \frac{1}{4b} + \frac{M}{b} - \eta(\tilde{T})\right) e^{-b(t-\tilde{T})}, \quad (3.7)$$

En posant  $\tilde{T} = 0$

$$\eta(t) \leq 1 + \frac{1}{4b} + \frac{M}{b} - \left(1 + \frac{1}{4b} + \frac{M}{b} - \eta(0)\right) e^{-bt}.$$

Et donc, puisque  $(x(0), y(0), z(0)) \in A$

$$x(t) + \frac{y(t)}{c} + \alpha z(t) \leq 1 + \frac{1}{4b} + \frac{M}{b} \text{ pour tout } t \geq 0.$$

**ii)** Il nous reste à montrer que, si  $(x(0), y(0), z(0)) \in \mathbb{R}_+^3$ ,  $(x(t), y(t), z(t)) \rightarrow A$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Nous allons donc montrer que

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} x(t) \leq 1,$$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \left(x(t) + \frac{1}{c}y(t)\right) \leq 1 + \frac{1}{4b},$$

et

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \left(x(t) + \frac{y(t)}{c} + \alpha z(t)\right) \leq 1 + \frac{1}{4b} + \frac{M}{b},$$

**(ii1)** on a d'après **(i1)**

$$\frac{dx(t)}{dt} \leq x(t)(1 - x(t)), \quad x(0) \geq 0,$$

d'où  $x$  la solution du problème aux conditions initiales

$$u(t) = \frac{1}{1 + c_0 e^{-t}} \text{ avec } c_0 = \frac{1}{u(0)} - 1,$$

d'où

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + c_0 e^{-t}} \leq 1,$$

donc

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} x(t) \leq 1.$$

(ii2) Ensuite, pour le second résultat, soit  $\varepsilon > 0$  donné, alors il existe un temps  $T_1 > 0$  tel que  $x(t) \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$  pour  $t \geq T_1$ . De l'équation (3.4) avec  $\tilde{T} = T_1$ , nous avons pour tout  $t \geq T_1 \geq 0$

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= x(t) + \frac{1}{c}y(t) \leq 1 + \frac{1}{4b} - \left(1 + \frac{1}{4b} - \left(x(T_1) + \frac{1}{c}y(T_1)\right)\right) e^{-b(t-T_1)} \\ &\leq 1 + \frac{1}{4b} - \left[\left(1 + \frac{1}{4b}\right) e^{bT_1} - \left(x(T_1) + \frac{1}{c}y(T_1)\right) e^{bT_1}\right] e^{-bt} \\ &\leq 1 + \frac{1}{4b} - \left[\left(1 + \frac{1}{4b}\right) - \left(x(T_1) + \frac{1}{c}y(T_1)\right) e^{bT_1}\right] e^{-bt}. \end{aligned}$$

Alors

$$x(t) + \frac{1}{c}y(t) \leq \left(1 + \frac{1}{4b} + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left[\left(1 + \frac{1}{4b} + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(x(T_1) + \frac{1}{c}y(T_1)\right) e^{bT_1}\right] e^{-bt}, \text{ pour tout } t \geq T_1 \geq 0.$$

Soit  $T_2 \geq T_1$  tel que

$$\left|\left(1 + \frac{1}{4b} + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(x(T_1) + \frac{1}{c}y(T_1)\right) e^{bT_1}\right| e^{-bt} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pour tout } t \geq T_2.$$

Alors

$$x(t) + \frac{1}{c}y(t) \leq 1 + \frac{1}{4b} + \varepsilon, \text{ pour tout } t \geq T_2.$$

Donc

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left(x(t) + \frac{1}{c}y(t)\right) \leq 1 + \frac{1}{4b}.$$

(ii3) On procède de la même manière que pour (ii2). Soit  $\varepsilon > 0$  un réel donné. Alors il existe  $T_3$  tel que :

$$\left(x(t) + \frac{1}{c}y(t)\right) \leq 1 + \frac{1}{4b} + \frac{\varepsilon}{2},$$

pour tout  $t \geq T_3$ . A partir de l'équation (3.7) avec  $\tilde{T} = T_3$  on a pour tout  $t \geq T_3 \geq 0$

$$\begin{aligned} \eta(t) &= x(t) + \frac{1}{c}y(t) + \alpha z(t) \\ &\leq 1 + \frac{1}{4b} + \frac{M}{b} - \left(1 + \frac{1}{4b} + \frac{M}{b} - \eta(T_3)\right) e^{-b(t-T_3)} \\ &\leq 1 + \frac{1}{4b} + \frac{M}{b} - \left[\left(1 + \frac{1}{4b} + \frac{M}{b}\right) e^{bT_3} - \eta(T_3) e^{bT_3}\right] e^{-bt} \\ &\leq 1 + \frac{1}{4b} + \frac{M}{b} - \left[\left(1 + \frac{1}{4b} + \frac{M}{b}\right) - \eta(T_3) e^{bT_3}\right] e^{-bt}. \end{aligned}$$

Alors

$$\eta(t) \leq 1 + \frac{1}{4b} + \frac{M}{b} + \frac{\varepsilon}{2} - \left[\left(1 + \frac{1}{4b} + \frac{M}{b}\right) + \frac{\varepsilon}{2} - \eta(T_3) e^{bT_3}\right] e^{-bt}.$$

Soit  $T_4 \geq T_3$  tel que

$$\left| \left( 1 + \frac{1}{4b} + \frac{M}{b} + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \eta(T_3)e^{bT_3}e^{-bt} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{Pour tout } t \geq T_4.$$

Par conséquent

$$\eta(t) \leq 1 + \frac{1}{4b} + \frac{M}{b} + \varepsilon, \quad \text{pour tout } t \geq T_4.$$

Donc

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left( x(t) + \frac{1}{c}y(t) + \alpha z(t) \right) \leq 1 + \frac{1}{4b} + \frac{M}{b}.$$

iii) Le système (3.2) est évidemment dissipatif dans  $\mathbb{R}_+^3$ , puisque toutes les solutions positives sont bornées. ■

### 3.3 Stabilité locale et bifurcations

Dans cette partie nous allons étudier l'existence et la stabilité des points d'équilibre, qu'ils soient triviaux (i.e. appartenant à la frontière de  $\mathbb{R}_+^3$ ) ou intérieure (i.e appartenant à  $Int(\mathbb{R}_+^3)$ ). Les différents points fixes sont donnés par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x \left( 1 - x - \frac{y}{x+a} \right) = 0, \\ y \left( \frac{cx}{x+a} - b - \frac{z}{y+d} \right) = 0, \\ z \left( p - \frac{qz}{y+r} \right) = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Nous obtenons six points fixes triviaux qui sont :

$$\begin{aligned} E_0 &= (0, 0, 0), \quad E_1 = (1, 0, 0), \\ E_2 &= (\theta, (1 - \theta)(a + \theta), 0) \quad \text{où } \theta = \frac{ab}{c - d}, \\ E_3 &= \left( 0, 0, \frac{pr}{q} \right), \quad E_4 = \left( 1, 0, \frac{pr}{q} \right), \\ E_5 &= \left( 0, -\frac{bdq + pr}{p + bq}, \frac{bp(-d + r)}{p + bq} \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Rappelons la définition de point d'équilibre intérieur :

**Définition 3.3.1.** *Un point d'équilibre  $E$  du système (3.2) est dit non trivial ou intérieur s'il appartient au cône strictement positif  $Int(\mathbb{R}_{xyz}^+)$ .*

Les coordonnées  $(x, y, z)$  des points d'équilibre intérieurs sont données par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{cx}{x+a} - b - \frac{z}{y+d} &= 0, \\ y &= (1-x)(x+a) \\ \text{et } z &= \frac{p(y+r)}{q}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

La matrice jacobienne au voisinage d'un point d'équilibre est la suivante :

$$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 - 2x - \frac{ay}{(x+a)^2} & -\frac{x}{x+a} & 0 \\ \frac{acy}{(x+a)^2} & \frac{cx}{x+a} - b - \frac{dz}{(y+d)^2} & -\frac{y}{y+d} \\ 0 & \frac{qz^2}{(y+r)^2} & p - \frac{2qz}{y+r} \end{pmatrix}.$$

Avant de définir les point fixes intérieurs, nous allons d'abord étudier les points fixes triviaux. Nous allons établir les conditions pour leur existence, leur stabilité locale, globale, et les bifurcations qui apparaissent au niveau des points d'équilibre dont la Jacobienne présent au moins une valeur propre nulle.

### 3.3.1 Etude des points d'équilibre triviaux

Le système (3.2) possède six points d'équilibre triviaux qui sont donnés par (3.9).  $E_0, E_1$  et  $E_2$  appartiennent au plan  $XY$ . Les points  $E_3, E_4$  sont dans le plan  $XZ$ .  $E_5$  appartient au plan  $YZ$  mais ne peut être pris en considération car sa deuxième coordonnée est négative et il n'a donc pas de signification biologique. Par conséquent, nous allons étudier  $E_0, E_1$  et  $E_2$  dans le plan  $XY$  et les points  $E_3$  et  $E_4$  dans le plan  $XZ$ .

#### 3.3.1.1 Etude sur le plan $XY$

Dans ce paragraphe, nous allons étudier le système (3.2) dans le cas où il y a absence ou extinction du prédateur généraliste  $Z$  puisqu'il y a interaction entre les espèces  $X$  et  $Y$ . Nous allons voir sous quelles conditions la coexistence entre  $X$  et  $Y$  est possible. Cela nous conduit à une étude sur le plan  $XY$ , au système de dimension deux suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \left( 1 - x - \frac{y}{x+a} \right), \\ \frac{dy}{dt} = y \left( \frac{cx}{x+a} - b \right). \end{cases} \tag{3.11}$$

Les points d'équilibre de ce système sont :

$$\tilde{E}_0 = (0, 0), \tilde{E}_1 = (1, 0) \text{ et } \tilde{E}_2 = (\theta, (1 - \theta)(a + \theta)), \quad (3.12)$$

où

$$\theta = \frac{ab}{c - b}, \quad (3.13)$$

qui sont les restrictions de  $E_0$ ,  $E_1$  et  $E_2$  au plan  $XY$ .

La stabilité locale de ces points fixes est déterminée grâce à l'étude du signe des valeurs propres de la matrice Jacobienne associée à chaque point. La Jacobienne au point fixe  $(x^*, y^*)$  est la suivante :

$$J_{XY}(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 1 - 2x^* - \frac{ay^*}{(x^* + a)^2} & -\frac{x^*}{x^* + a} \\ \frac{acy^*}{(x^* + a)^2} & \frac{cx^*}{x^* + a} - b \end{pmatrix}.$$

Pour les points  $\tilde{E}_0$  et  $\tilde{E}_1$ , nous avons :

$$J_{XY}(\tilde{E}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix},$$

et

$$J_{XY}(\tilde{E}_1) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{c(1+a)} \\ 0 & \frac{c}{1+a} - b \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres associées à  $\tilde{E}_0$  sont 1 et  $-b$ . Ce point est bien évidemment hyperbolique instable, c'est un col dans le plan  $XY$ .

En ce qui concerne le point  $\tilde{E}_1$ , nous avons :

$$\lambda_1 = -1 \text{ et } \lambda_2 = \frac{c}{1+a} - b = \frac{c - b - ab}{1+a}.$$

Ce qui nous conduit aux trois possibilités suivantes :

**a) Cas 1 :** si  $c - b > ab$ .

C'est à dire  $0 < \theta < 1$ , qui par ailleurs est une condition nécessaire pour l'existence de  $\tilde{E}_2$ , alors  $\tilde{E}_1$  est un col.

**b) Cas 2 :** si  $c - b < ab$ .

Dans ce cas le point  $\tilde{E}_2$  n'aura plus d'intérêt puisque forcément une de ses composantes sera négative : si  $c < b$  la première composante  $\theta < 0$  et si  $c > b$  la deuxième composante qui est négative  $(1 - \theta)(a + \theta) < 0$ , alors  $\tilde{E}_1$  est localement asymptotiquement stable. Et on a aussi sa stabilité globale, établie par le théorème suivant :

**Théorème 3.3.1.** *Si  $c < b$ , alors  $\tilde{E}_1$  est globalement asymptotiquement stable.*

**Démonstration.** Notons, tout d'abord, que si la condition  $c < b$  est satisfaite, alors le système (3.11) possède uniquement deux points fixes positifs qui sont  $\tilde{E}_0$  et  $\tilde{E}_1$ , puisque, sous cette condition le point  $\tilde{E}_2$  n'appartient pas à  $\mathbb{R}_{xy}^+$ . Puisque tous les paramètres utilisés sont strictement positifs  $c < b$  et  $(x, y) \in \mathbb{R}_{xy}^+$ , de la seconde équation du système (3.11), on tire :

$$\frac{dy}{dt} \leq \frac{cxy}{x+a} - cy,$$

d'où

$$\frac{dy}{dt} \leq -\frac{cay}{x+a},$$

et donc il existe  $K_1 > 0$  avec

$$K_1 = \max_{0 \leq x \leq 1} \frac{ca}{x+a} = c,$$

tel que  $\frac{dy}{dt} \leq -K_1 y$ , puisque  $x(t)$  est bornée dans  $\mathbb{R}_+$ .

On en déduit que  $y(t) \leq y(0)e^{-K_1 t}$ . Ainsi toute solution  $y(t)$  de condition initiale dans  $\mathbb{R}_{xy}^+$  tend vers zéro lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ . Donc l'ensemble  $\omega$ -limite  $\Omega$  de toute solution avec condition initiale positive, est contenu dans l'ensemble  $\{(x, 0), x \geq 0\}$ . Par ailleurs la première équation de (3.11) vérifie,

$$\frac{dx}{dt} \leq x(1-x) - \frac{xy}{x+a} \leq x(1-x).$$

Pour  $x > 1$  nous avons  $\frac{dx}{dt} \leq 0$ , donc  $\Omega \subset \{(x, 0), 0 \leq x \leq 1\}$ .

Sachant que  $\tilde{E}_0 \notin \Omega$  ( $\tilde{E}_0$  est un col dont la variété instable est l'axe  $(ox)$ ) et que  $\Omega$  est un ensemble non-vide fermé et invariant, on a  $\Omega = \{\tilde{E}_1\}$ . ■

**c) Cas 3 :** si  $c - b = ab$ .

Notons que sous cette condition les points  $\tilde{E}_1$  et  $\tilde{E}_2$  sont confondus. Dans ce cas, le point  $\tilde{E}_1$  possède une première valeur propre négative  $\lambda_1 = -1$  et la seconde est nulle. Et nous ne

pourrons conclure qu'après l'étude de la **variété centrale**. Pour cela, ramenons le système à l'origine par le changement de coordonnées suivant :

$$x \longrightarrow x + 1, \quad y \longrightarrow y,$$

et posons

$$\mu = \frac{c}{1+a} - b.$$

En ajoutant l'équation triviale  $\frac{d\mu}{dt} = 0$  et en notant que  $b = \frac{c}{1+a} - \mu$ , on obtient le système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x(1+x) - \frac{(x+1)y}{x+1+a}, \\ \frac{dy}{dt} = \left( \frac{c(x+1)y}{x+1+a} \right) - \left( \frac{c}{1+a} - \mu \right) y, \\ \frac{d\mu}{dt} = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Nous allons étudier la dynamique de (3.14) au voisinage de  $\mu = 0$ , puisque les  $\mu > 0$  et  $\mu < 0$  ont été analysés plus haut aux points (a) et (b). Nous allons commencer par mettre la matrice Jacobienne du champ de vecteur sous la forme de Jordan. On a :

$$J(x, y, \mu) = \begin{pmatrix} -1 - 2x - \frac{ay}{(x+1+a)^2} & -\frac{x+1}{x+1+a} & 0 \\ \frac{acy}{(x+1+a)^2} & \frac{c(x+1)}{x+1+a} - \frac{c}{1+a} + \mu & -y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$J(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{1+a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont :  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = 0$ . Les vecteurs propres associés à ces valeurs propres sont les suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1+a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{1+a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  à la base  $\{v_1, v_2, v_3\}$ . Prenons le changement de variable suivant :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \mu \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varepsilon \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varepsilon \end{pmatrix} = p^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \mu \end{pmatrix},$$

où

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1+a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{cases} u = x + \frac{1}{1+a}y, \\ v = y, \\ \varepsilon = \mu, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x = u - \frac{1}{1+a}v, \\ y = v, \\ \mu = \varepsilon, \end{cases}$$

ce qui nous permet d'écrire le système, en gardant la notation en  $\mu$  :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = - \left( u - \frac{1}{1+a}v \right) \left( u - \frac{1}{1+a}v + 1 \right) - \frac{(u - \frac{1}{1+a}v + 1)v}{u - \frac{1}{1+a}v + 1 + a} \\ \quad + \frac{1}{1+a} \left[ \frac{c(u - \frac{1}{1+a}v + 1)v}{u - \frac{1}{1+a}v + 1 + a} - \left( \frac{c}{1+a} - \mu \right) v \right] = f(u, v, \mu), \\ \frac{dv}{dt} = \frac{c(u - \frac{1}{1+a}v + 1)v}{u - \frac{1}{1+a}v + 1 + a} - \left( \frac{c}{1+a} - \mu \right) v = g(u, v, \mu), \\ \frac{d\mu}{dt} = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Avant de chercher la variété centre associée à  $\tilde{E}_1$ , nous allons écrire chaque équation du système (3.15) sous la forme d'un développement de Taylor et calculer ensuite la forme normale.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = & \alpha_{000} + \alpha_{100}u + \alpha_{200}u^2 + \alpha_{110}uv + \alpha_{101}u\mu + \alpha_{010}v + \alpha_{020}v^2 \\ & + \alpha_{011}v\mu + \alpha_{001}\mu + \alpha_{001}\mu^2 + O(3), \end{aligned}$$

après calculs, on obtient

$$\begin{aligned} \alpha_{000} = f(0, 0, 0) = 0, \quad \alpha_{100} = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0, 0) = -1, \\ \alpha_{200} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0, 0, 0) = -1, \quad \alpha_{110} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(0, 0, 0) = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{ac}{(1+a)^3}, \\ \alpha_{101} = \frac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial u}(0, 0, 0) = 0, \quad \alpha_{010} = \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0, 0) = 0, \\ \alpha_{020} = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(0, 0, 0) = +\frac{1}{(1+a)^3} + \frac{ac}{(1+a)^4}, \quad \alpha_{011} = \frac{\partial f^2}{\partial \mu \partial v}(0, 0, 0) = \frac{1}{(1+a)}, \\ \alpha_{001} = \frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0, 0) = 0, \quad \alpha_{011} = \frac{\partial f^2}{\partial \mu^2}(0, 0, 0) = 0, \end{aligned}$$

pour la seconde équation, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} = & \beta_{000} + \beta_{100}u + \beta_{200}u^2 + \beta_{110}uv + \beta_{101}u\mu + \beta_{010}v + \beta_{020}v^2 \\ & + \beta_{011}v\mu + \beta_{001}\mu + \beta_{002}\mu^2 + O(3), \end{aligned}$$

où les coefficients sont donnés par :

$$\begin{aligned} \beta_{000} = g(0, 0, 0) = 0, \quad \beta_{100} = \frac{\partial g^2}{\partial \mu^2}(0, 0, 0) = 0, \\ \beta_{200} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(0, 0, 0) = 0, \quad \beta_{110} = \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(0, 0, 0) = \frac{ac}{(1+a)^2}, \\ \beta_{101} = \frac{\partial^2 g}{\partial \mu \partial u}(0, 0, 0) = 0, \quad \beta_{010} = \frac{\partial g}{\partial v}(0, 0, 0) = 0, \\ \beta_{020} = \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(0, 0, 0) = -\frac{ac}{(1+a)^3}, \quad \beta_{011} = \frac{\partial g^2}{\partial \mu \partial v}(0, 0, 0) = 1, \\ \beta_{001} = \frac{\partial g}{\partial \mu}(0, 0, 0) = 0, \quad \beta_{011} = \frac{\partial g^2}{\partial \mu^2}(0, 0, 0) = 0. \end{aligned}$$

Ce développement nous conduit au système :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -u - u^2 + \left( \frac{1}{1+a} + \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{ac}{(1+a)^3} \right) uv + \\ \left( \frac{1}{(1+a)^3} + \frac{ac}{(1+a)^4} \right) v^2 + \frac{1}{1+a} v\mu + O(3), \\ \frac{dv}{dt} = \frac{ac}{(1+a)^2} uv - \frac{ac}{(1+a)^3} v^2 + v\mu + O(3), \\ \frac{d\mu}{dt} = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Nous savons que la variété centrale est l'ensemble

$$W^c = \{(u, v, \mu) \in \mathbb{R}^3 / u = h(v, \mu), |v| < \delta_1, |\mu| < \delta_2, h(0, 0) = \partial_v h(0, 0) = 0\},$$

où

$$u = h(v, \mu) = \alpha v^2 + \beta v\mu + \gamma \mu^2 + O(3).$$

Puisque  $\frac{d\mu}{dt} = 0$ , on a

$$\frac{du}{dt} = \frac{dh(v, \mu)}{dv} \frac{dv}{dt}.$$

Cette équation nous permet de calculer les coefficients  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  on a :

$$\frac{dh(v, \mu)}{dv} \frac{dv}{dt} - \frac{du}{dt} = 0,$$

où

$$\frac{dh(v, \mu)}{dv} = 2\alpha v + \beta \mu + O(2).$$

Après simplification et identification on obtient les valeurs des coefficients  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{(1+a)^3} - \frac{ac}{(1+a)^4}, \\ \beta = -\frac{1}{1+a}, \\ \gamma = 0. \end{cases}$$

Ce qui nous donne :

$$u = h(v, \mu) = \left( \frac{1}{(1+a)^3} - \frac{ac}{(1+a)^4} \right) v^2 - \frac{1}{1+a} v\mu + O(3).$$

En reportant la valeur obtenue de  $u$  dans la deuxième équation de (3.16), on obtient la dérivée de  $v$  le long de la variété centrale et donc le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -\frac{ac}{(1+a)^3} v^2 + v\mu + O(3) = G(v, \mu), \\ \frac{d\mu}{dt} = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

On a les conditions suivantes :

$$G(0, 0) = G_u(0, 0) = 0,$$

la variété centrale est tangente à l'axe  $(ov)$  à l'origine, de plus :

$$G_\mu(0, 0) = 0 \text{ et } G_{vv}(0, 0) = -\frac{2ac}{(1+a)^3} \neq 0.$$

Ainsi nous avons démontré le théorème suivant :

**Théorème 3.3.2.** *Si  $c - b = ab$  (ou  $\theta = 1$ ) alors le système (3.11) présente une bifurcation transcritique au point  $\tilde{E}_1$ , de ce point et sous cette bifurcation émerge le point  $\tilde{E}_2$ .*

Passons, maintenant, à la stabilité du point  $\tilde{E}_2$ . Nous avons :

$$J_{XY}(\tilde{E}_2) = \begin{pmatrix} -\frac{2\theta^2 + (a-1)\theta}{a+\theta} & -\frac{\theta}{a+\theta} \\ \frac{ac(1-\theta)}{a+\theta} & 0 \end{pmatrix},$$

rappelons que  $\theta = \frac{ab}{c-b}$ .

Les valeurs propres de cette matrice annulent le polynôme suivant :

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \frac{2\theta^2 + (a-1)\theta}{a+\theta}\lambda + \frac{ac(1-\theta)\theta}{(a+\theta)^2},$$

d'où

$$\lambda_{1,2} = \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left( -\frac{2\theta^2 + \theta(a-1)}{a+\theta} \pm \sqrt{\Delta(\theta)} \right), \quad (3.18)$$

avec

$$\Delta(\theta) = \frac{1}{(a+\theta)^2} [(2\theta^2 + (a-1)\theta)^2 - 4ac\theta(1-\theta)].$$

On vérifie facilement que les valeurs propres  $\lambda_{1,2}$  ont des parties réelles négatives si et seulement si :

$$\frac{1-a}{2} < \theta < 1. \quad (3.19)$$

Et bien évidemment si cette condition est acquise,  $\tilde{E}_2$  est localement asymptotiquement stable.

**Théorème 3.3.3.** *Supposons la condition  $0 < \theta < 1$  et  $a < 1$ . Alors le point d'équilibre  $\tilde{E}_2$  présente une bifurcation de Hopf pour  $\theta = \theta_0 = \frac{1-a}{2}$ .*

### Démonstration

Les valeurs propres associées à  $\tilde{E}_2$  sont données par (3.18). Il est clair que  $Re(\lambda_{1,2}(\theta)) > 0$  (resp.  $< 0$ ) si  $\theta < \theta_0$  (resp.  $\theta > \theta_0$ ). Si  $\theta = \theta_0$ , puisque  $0 < a < 1$ , les valeurs propres deviennent :

$$\lambda_{1,2}(\theta_0) = \lambda_{\pm}(\theta_0) = \pm \frac{i}{2(a+1)}(ac(1-a^2))^{\frac{1}{2}},$$

qui sont imaginaires pures et conjuguées. De plus, les valeurs propres traversent l'axe imaginaire de façon transverse, c'est-à-dire

$$\left( \frac{d}{d\theta} [Re(\lambda_{1,2}(\theta))] \right)_{\theta=\theta_0} \neq 0.$$

En effet

$$\frac{d}{d\theta} Re(\lambda_{\pm}(\theta)) = -1 + \frac{a^2 + a}{2(a + \theta)^2},$$

d'où

$$\left( \frac{d}{d\theta} [Re(\lambda_{\pm}(\theta))] \right)_{\theta=\theta_0} = -1 + \frac{2a}{1+a} = \frac{a-1}{a+1},$$

qui est non nulle puisque  $a < 1$ . Et donc, pour  $\theta = \theta_0$ , le point fixe  $\tilde{E}_2$  donne naissance à une bifurcation de Hopf. ■

#### 3.3.1.2 Etude sur le plan XZ

Notons que du point de vue écologique, il n'y a aucun intérêt à restreindre le modèle sur le plan XZ. Il n'y a aucune interaction entre les espèces X et Z. Mais l'étude sur ce plan nous servira dans le paragraphe suivant lorsque nous analyserons globale du point  $E_4$ . Sur le plan XZ, le système (3.2) s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x), \\ \frac{dz}{dt} = z \left( p - \frac{qz}{r} \right). \end{cases} \quad (3.20)$$

Ce système possède quatre fixes :  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, \frac{pr}{q})$  et  $(1, \frac{pr}{q})$ . Ces points sont les restrictions à  $\mathbb{R}_{xz}^+$  de  $E_0$ ,  $E_1$ ,  $E_3$  et  $E_4$  donnés par (3.9). Les deux premiers ont été étudiés sur le plan XY. Nous allons étudier les deux autres, que nous noterons :

$$\tilde{E}_3 = \left( 0, \frac{pr}{q} \right) \quad \text{et} \quad \tilde{E}_4 = \left( 1, \frac{pr}{q} \right).$$

Voici la matrice Jacobienne associée à ce système, évaluée au point d'équilibre  $(x^*, z^*)$  :

$$J(x^*, z^*) = \begin{pmatrix} 1 - 2x^* & 0 \\ 0 & p - \frac{2qz^*}{r} \end{pmatrix}.$$

Aux points  $\tilde{E}_3$  et  $\tilde{E}_4$ , on a :

$$J_{XZ}(\tilde{E}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -p \end{pmatrix},$$

et

$$J_{XZ}(\tilde{E}_4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -p \end{pmatrix}.$$

Par conséquent le point  $\tilde{E}_3$  est un col, donc instable et le point  $\tilde{E}_4$  est localement asymptotiquement stable.

**Remarque 3.3.1.**  $\tilde{E}_4$  est toujours globalement asymptotiquement stable. En effet, les solutions du système (3.20) sont :

$$x(t) = \frac{1}{1 + C_1 e^{-t}},$$

$$z(t) = \frac{\left(\frac{pr}{q}\right)}{1 + C_2 e^{-pt}},$$

où

$$C_1 = \frac{1 - x(0)}{x(0)},$$

$$C_2 = \frac{\left(\frac{pr}{q}\right) - z(0)}{z(0)}.$$

Il résulte que ces solutions tendent vers  $\tilde{E}_4 = \left(1, \frac{pr}{q}\right)$  lorsque  $t$  tend vers l'infini. D'où  $\tilde{E}_4$  est toujours globalement asymptotiquement stable.

## 3.4 Permanence et stabilité globale

Dans cette partie nous allons montrer la permanence, c'est à dire persistance uniforme plus dissipativité du système (3.2) et la stabilité de l'unique point d'équilibre strictement positif en construisant une fonction de Lyapunov convenable.

### 3.4.1 Étude de $E_0, E_1, E_2, E_3$ et $E_4$ points d'équilibre triviaux en $3D$

Rappelons la valeur de ces points :

$$E_0 = (0, 0, 0), \quad E_1 = (1, 0, 0), \quad E_2 = (\theta, (1 - \theta)(a + \theta), 0) \quad \text{où} \quad \theta = \frac{ab}{c - b},$$

$$E_3 = \left(0, 0, \frac{pr}{q}\right) \quad \text{et} \quad E_4 = \left(1, 0, \frac{pr}{q}\right).$$

Pour étudier la stabilité locale de ces points dans  $\mathbb{R}^3$ , nous allons chercher les valeurs propres de la matrice Jacobienne associée à chacun de ces points.

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

$E_0$  est donc un point hyperbolique instable. D'autre part :

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{1+a} & 0 \\ 0 & \frac{c}{1+a} - b & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = \frac{c}{1+a} - b, \quad \lambda_3 = p.$$

Le point  $E_1$  est toujours instable puisque  $\lambda_3 = p > 0$ . Si  $c - b \neq ab$ , alors  $E_1$  est un point hyperbolique instable, et si  $c - b = ab$ , alors une valeur propre est nulle,  $E_1$  est alors un point non-hyperbolique instable. Pour  $E_2$ , nous avons :

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} 1 - 2\theta - \frac{a(1-\theta)}{a+\theta} & -\frac{\theta}{a+\theta} & 0 \\ \frac{ac(1-\theta)}{a+\theta} & 0 & -\frac{(1-\theta)(a+\theta)}{d+(1-\theta)(a+\theta)} \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix},$$

après simplification

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} -\frac{2\theta^2 + (a-1)\theta}{a+\theta} & -\frac{\theta}{a+\theta} & 0 \\ \frac{ac(1-\theta)}{a+\theta} & 0 & -\frac{(1-\theta)(a+\theta)}{d+(1-\theta)(a+\theta)} \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont celles données par (3.18) et  $\lambda_3 = p$ . Le point  $E_2$  est donc instable. Ensuite, pour  $E_3$  :

$$J(E_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b - \frac{pr}{dq} & 0 \\ 0 & \frac{p^2}{q} & -p \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\left(b + \frac{pr}{dq}\right), \lambda_3 = -p.$$

$E_3$  est un point hyperbolique instable. Enfin, pour  $E_4$  :

$$J(E_4) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{1+a} & 0 \\ 0 & \frac{c}{1+a} - b - \frac{pr}{dq} & 0 \\ 0 & \frac{p^2}{q} & -p \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \frac{c}{1+a} - \left(b + \frac{pr}{dq}\right), \lambda_3 = -p.$$

Nous avons deux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_3$  toujours négatives. Et il faut étudier le signe de  $\lambda_2$ . Plusieurs cas se présentent :

**a) Cas 1 :** Si  $\frac{c}{1+a} < b + \frac{pr}{dq}$ .

Dans ce cas le point  $E_4$  est localement asymptotiquement stable, puisque dans ce cas les trois valeurs propres sont négatives et non nulles. Pour la stabilité globale, on a le théorème suivant :

**Théorème 3.4.1.** *Si  $c - b < ab$ , alors  $E_4$  est globalement asymptotiquement stable.*

### Démonstration

Prenons la seconde équation de (3.2) :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= y \left( \frac{cx}{x+a} - b - \frac{z}{y+d} \right) \\ &\leq y \left( \frac{c}{1+a} - b \right) \\ &\leq -Ky, \end{aligned}$$

où  $K > 0$  puisque  $c - b < ab$ . D'où

$$y(t) \leq y(0)e^{-Kt}.$$

En conséquence, toute solution  $y(t)$  issue de  $\mathbb{R}_+^3$  tend vers zéro lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ . Donc, l'ensemble  $\omega$ -limite de toute solution  $(x(t), y(t), z(t))$  aux conditions initiales strictement positives, est contenu dans  $\mathbb{R}_{xz}^+$ . Puisque  $\tilde{E}_4$  est globalement asymptotiquement stable dans  $\mathbb{R}_{xz}^+$  et que  $E_4$  restreint à  $\mathbb{R}_{xz}^+$  est  $\tilde{E}_4$ , alors  $E_4$  est globalement asymptotiquement stable (le prédateur intermédiaire  $Y$  va vers l'extinction). ■

b) **Cas 2** : Si  $\frac{c}{1+a} > b + \frac{pr}{dq}$ .

Alors  $\lambda_2 > 0$  et donc  $E_4$  est instable.

c) **Cas 3** : Si  $\frac{c}{1+a} = b + \frac{pr}{dq}$ .

Alors nous allons étudier la **variété centre** correspondant à la valeur propre nulle, pour pouvoir nous prononcer sur la stabilité de  $E_4$ . Procédons au changement de coordonnées suivant :

$$x \longrightarrow x + 1, \quad y \longrightarrow y, \quad z \longrightarrow z + \frac{pr}{q},$$

et posons

$$\mu = \frac{c}{1+a} - \left( b + \frac{pr}{dq} \right).$$

En ajoutant l'équation triviale  $\frac{d\mu}{dt} = 0$  et en notant que  $b = \frac{c}{1+a} - \frac{pr}{qd} - \mu$ , on obtient :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x(1+x) - \frac{(x+1)y}{x+1+a}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{c(x+1)y}{x+1+a} - \left( \frac{c}{1+a} - \frac{pr}{dq} - \mu \right) y - \frac{(z + \frac{pr}{q})y}{y+d}, \\ \frac{dz}{dt} = p \left( z + \frac{pr}{q} \right) - \frac{q(z + \frac{pr}{q})^2}{y+r}, \\ \frac{d\mu}{dt} = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Étudions ce système au voisinage de  $\mu = 0$ , pour cela écrivons la matrice Jacobienne au point  $(0, 0, 0, 0)$  et cherchons les valeurs propres et les vecteurs propres qui leur sont associés.

$$J(x, y, z, \mu) = \begin{pmatrix} -1 - 2x - \frac{ay}{(x+1+a)^2} & -\frac{x+1}{x+1+a} & 0 & 0 \\ \frac{acy}{(x+a+1)^2} & \frac{c(x+1)}{x+a+1} - \left( \frac{c}{1+a} - \frac{pr}{qd} - \mu \right) - \frac{d(z + \frac{pr}{q})}{(y+d)^2} & -\frac{y}{y+d} & y \\ 0 & \frac{q(z + \frac{pr}{q})^2}{(y+r)^2} & p - \frac{2q(z + \frac{pr}{q})}{y+r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$J(0, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{1+a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p^2}{q} & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -p \quad \text{et} \quad \lambda_4 = 0.$$

Comme vecteurs propres, nous prendrons les vecteurs suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1+a} \\ 1 \\ \frac{p}{q} \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{1+a} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p}{q} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice de passage à la base  $v_1, v_2, v_3, v_4$  Prenons le changement de variables suivant :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \mu \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \\ \omega \\ \varepsilon \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ \omega \\ \varepsilon \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \mu \end{pmatrix},$$

avec

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1+a} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p}{q} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{cases} u = x + \frac{1}{1+a}y, \\ v = y, \\ \omega = -\frac{p}{q}y + z, \\ \varepsilon = \mu, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x = u - \frac{1}{1+a}v, \\ y = v, \\ z = \frac{p}{q}v + \omega, \\ \mu = \varepsilon. \end{cases}$$

Ce qui nous permet d'écrire le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = - \left( u - \frac{1}{1+a}v \right) \left( u - \frac{1}{1+a}v + 1 \right) - \frac{(u - \frac{1}{1+a}v + 1)v}{u - \frac{1}{1+a}v + 1 + a} \\ \quad + \frac{1}{1+a} \left[ \frac{c(u - \frac{1}{1+a}v + 1)v}{u - \frac{1}{1+a}v + 1 + a} - \left( \frac{c}{1+a} - \frac{pr}{dq} - \varepsilon \right) v - \frac{v(\frac{p}{q}v + \omega + \frac{pr}{q})}{v + d} \right] \\ \quad = f(u, v, \omega, \varepsilon), \\ \frac{dv}{dt} = \frac{c(u - \frac{1}{1+a}v + 1)v}{u - \frac{1}{1+a}v + 1 + a} - \left( \frac{c}{1+a} - \frac{pr}{dq} - \varepsilon \right) v - \frac{v(\frac{p}{q}v + \omega + \frac{pr}{q})}{v + d} = g(u, v, \omega, \varepsilon), \\ \frac{d\omega}{dt} = -\frac{p}{q} \left[ \frac{c(u - \frac{1}{1+a}v + 1)v}{u - \frac{1}{1+a}v + 1 + a} - \left( \frac{c}{1+a} - \frac{pr}{dq} - \varepsilon \right) v - \frac{v(\frac{p}{q}v + \omega + \frac{pr}{q})}{v + d} \right] \\ \quad + p \left( \frac{p}{q}v + \omega + \frac{pr}{q} \right) - \frac{q(\frac{p}{q}v + \omega + \frac{pr}{q})^2}{v + r} = h(u, v, \omega, \varepsilon), \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Avant de chercher la variété centrale associée à  $E_4$ , nous allons écrire chaque équation du système (3.22) sous la forme d'un développement de Taylor.

Pour trouver la forme normale. On a pour la première équation :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \alpha_{0000} + \alpha_{1000}u + \alpha_{2000}u^2 + \alpha_{1100}uv + \alpha_{1010}u\omega + \alpha_{1001}u\varepsilon + \alpha_{0100}v + \alpha_{0200}v^2 \\ &\quad + \alpha_{0110}v\omega + \alpha_{0101}v\varepsilon + \alpha_{0010}\omega + \alpha_{0020}\omega^2 + \alpha_{0011}\omega\varepsilon + \alpha_{0001}\varepsilon + \alpha_{0002}\varepsilon^2 + O(3), \end{aligned}$$

où après calculs, on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha_{0000} &= f(0, 0, 0, 0) = 0, \quad \alpha_{1000} = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0, 0, 0) = -1, \\ \alpha_{2000} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0, 0, 0, 0) = -1, \quad \alpha_{1100} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(0, 0, 0, 0) = \frac{2}{1+a} - \frac{a}{(1+a)^2} + \frac{ac}{(1+a)^3}, \\ \alpha_{1010} &= \frac{\partial^2 f}{\partial \omega \partial u}(0, 0, 0, 0) = 0, \quad \alpha_{1001} = \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon \partial u}(0, 0, 0, 0) = 0, \\ \alpha_{0100} &= \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0, 0, 0) = 0, \quad \alpha_{0200} = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(0, 0, 0, 0) = -\frac{1}{(1+a)^3} - \frac{p(r-d)}{d^2q(1+a)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{0110} &= \frac{\partial^2 f}{\partial \omega \partial v}(0, 0, 0, 0) = -\frac{1}{d(1+a)}, & \alpha_{0101} &= \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon \partial v}(0, 0, 0, 0) = \frac{1}{(1+a)}, \\ \alpha_{0110} &= \frac{\partial f}{\partial \omega}(0, 0, 0, 0) = 0, & \alpha_{0020} &= \frac{\partial f^2}{\partial \omega^2}(0, 0, 0, 0) = 0, \\ \alpha_{0011} &= \frac{\partial f^2}{\partial \omega \partial \varepsilon}(0, 0, 0, 0) = 0, & \alpha_{0001} &= \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(0, 0, 0, 0) = 0, \\ \alpha_{0020} &= \frac{\partial f^2}{\partial \varepsilon^2}(0, 0, 0, 0) = 0.\end{aligned}$$

Passons maintenant à la seconde équation de (3.22) :

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \beta_{0000} + \beta_{1000}u + \beta_{2000}u^2 + \beta_{1100}uv + \beta_{1010}u\omega + \beta_{1001}u\varepsilon + \beta_{0100}v + \beta_{0200}v^2 \\ &+ \beta_{0110}v\omega + \beta_{0101}v\varepsilon + \beta_{0010}\omega + \beta_{0020}\omega^2 + \beta_{0011}\omega\varepsilon + \beta_{0001}\varepsilon + \beta_{0002}\varepsilon^2 + O(3),\end{aligned}$$

où les coefficients sont donnés par :

$$\begin{aligned}\beta_{0000} &= g(0, 0, 0, 0) = 0, & \beta_{1000} &= \frac{\partial g}{\partial u}(0, 0, 0, 0) = 0, \\ \beta_{2000} &= \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(0, 0, 0, 0) = 0, & \beta_{1100} &= \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(0, 0, 0, 0) = \frac{ac}{(1+a)^2}, \\ \beta_{1010} &= \frac{\partial^2 g}{\partial \omega \partial u}(0, 0, 0, 0) = 0, & \beta_{1001} &= \frac{\partial^2 g}{\partial \varepsilon \partial u}(0, 0, 0, 0) = 0, \\ \beta_{0100} &= \frac{\partial g}{\partial v}(0, 0, 0, 0) = 0, \\ \beta_{0200} &= \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(0, 0, 0, 0) = -\frac{p(r-d)}{d^2 q}, & \beta_{0110} &= \frac{\partial g^2}{\partial \omega \partial v}(0, 0, 0, 0) = -\frac{1}{d}, \\ \beta_{0101} &= \frac{\partial g^2}{\partial \varepsilon \partial v}(0, 0, 0, 0) = 1, & \beta_{0010} &= \frac{\partial g}{\partial \omega}(0, 0, 0, 0) = 0, & \beta_{0020} &= \frac{\partial g^2}{\partial \omega^2}(0, 0, 0, 0) = 0, \\ \beta_{0011} &= \frac{\partial g^2}{\partial \omega \partial \varepsilon}(0, 0, 0, 0) = 0, & \beta_{0001} &= \frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(0, 0, 0, 0) = 0, \\ \beta_{0002} &= \frac{\partial g^2}{\partial \varepsilon^2}(0, 0, 0, 0) = 0,\end{aligned}$$

Pour la troisième équation, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{dt} &= \gamma_{0000} + \gamma_{1000}u + \gamma_{2000}u^2 + \gamma_{1100}uv + \gamma_{1010}u\omega + \gamma_{1001}u\varepsilon + \gamma_{0100}v + \gamma_{0200}v^2 \\ &+ \gamma_{0110}v\omega + \gamma_{0101}v\varepsilon + \gamma_{0010}\omega + \gamma_{0020}\omega^2 + \gamma_{0011}\omega\varepsilon + \gamma_{0001}\varepsilon + \gamma_{0002}\varepsilon^2 + O(3),\end{aligned}$$

où les coefficients sont donnés par :

$$\gamma_{0000} = g(0, 0, 0, 0) = 0, \quad \gamma_{1000} = \frac{\partial h}{\partial u}(0, 0, 0, 0) = 0,$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{2000} &= \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(0, 0, 0, 0) = 0, \quad \gamma_{1100} = \frac{\partial^2 h}{\partial v \partial u}(0, 0, 0, 0) = -\frac{acp}{q(1+a)^2}, \\
 \gamma_{1010} &= \frac{\partial^2 h}{\partial \omega \partial u}(0, 0, 0, 0) = 0, \quad \gamma_{1001} = \frac{\partial^2 h}{\partial \varepsilon \partial u}(0, 0, 0, 0) = 0, \\
 \gamma_{0100} &= \frac{\partial h}{\partial v}(0, 0, 0, 0) = 0, \\
 \gamma_{0200} &= \frac{\partial^2 h}{\partial v^2}(0, 0, 0, 0) = -\frac{p^2(r-d)}{d^2 q^2}, \quad \gamma_{0110} = \frac{\partial^2 h}{\partial \omega \partial v}(0, 0, 0, 0) = \frac{p}{dq}, \\
 \gamma_{0101} &= \frac{\partial h^2}{\partial \varepsilon \partial v}(0, 0, 0, 0) = -\frac{p}{q}, \quad \gamma_{0010} = \frac{\partial h}{\partial \omega}(0, 0, 0, 0) = -p, \quad \gamma_{0020} = \frac{\partial h^2}{\partial \omega^2}(0, 0, 0, 0) = -\frac{q}{r}, \\
 \gamma_{0011} &= \frac{\partial h^2}{\partial \omega \partial \varepsilon}(0, 0, 0, 0) = 0, \quad \gamma_{0001} = \frac{\partial h}{\partial \varepsilon}(0, 0, 0, 0) = 0, \\
 \gamma_{0002} &= \frac{\partial h^2}{\partial \varepsilon^2}(0, 0, 0, 0) = 0,
 \end{aligned}$$

Le système qui résulte de ces différents calculs est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{du}{dt} = -u - u^2 + \left( \frac{2}{1+a} - \frac{a}{(1+a)^2} + \frac{ac}{(1+a)^3} \right) uv \\
 - \left( \frac{1}{(1+a)^3} + \frac{p(r-d)}{d^2 q(1+a)} \right) v^2 - \frac{1}{d(1+a)} v\omega + \frac{1}{(1+a)} v\varepsilon + O(3), \\
 \frac{dv}{dt} = \frac{ac}{(1+a)^2} uv - \frac{p(r-d)}{d^2 q} v^2 - \frac{1}{d} v\omega + v\varepsilon + O(3), \\
 \frac{d\omega}{dt} = -\frac{acp}{q(1+a)^2} uv - \frac{p^2(r-d)}{d^2 q^2} v^2 + \frac{p}{dq} v\omega - \frac{p}{q} v\varepsilon - p\omega - \frac{q}{r} \omega^2 + O(3), \\
 \frac{d\varepsilon}{dt} = 0.
 \end{array} \right. \quad (3.23)$$

La variété centrale associée à  $E_4$  est donnée par :

$$W^c = \{(u, v, \omega, \varepsilon) \in \mathbb{R}^4 / u = l_1(v, \varepsilon), w = l_2(v, \varepsilon), |v| < \delta_1, |\varepsilon| < \delta_2,$$

$$l_1(0, 0) = \partial_v l_1(0, 0) = 0, l_2(0, 0) = \partial_v l_2(0, 0) = 0\},$$

où

$$u = l_1(v, \varepsilon) = \alpha_1 v^2 + \beta_1 v\varepsilon + \gamma_1 \varepsilon^2 + O(3),$$

et

$$\omega = l_2(v, \varepsilon) = \alpha_2 v^2 + \beta_2 v\varepsilon + \gamma_2 \varepsilon^2 + O(3).$$

Comme

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 0,$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{dl_1(v, \varepsilon)}{dv} \frac{dv}{dt}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{dl_2(v, \varepsilon)}{dv} \frac{dv}{dt}.\end{aligned}$$

Les équations suivantes nous permettent de calculer les coefficients  $\alpha_i, \beta_i$  et  $\gamma_i$  pour  $i = 1, 2$  :

$$\frac{dl_1(v, \varepsilon)}{dv} \frac{dv}{dt} - \frac{du}{dt} = 0,$$

et

$$\frac{dl_2(v, \varepsilon)}{dv} \frac{dv}{dt} - \frac{d\omega}{dt} = 0,$$

où

$$\frac{dl_1(v, \varepsilon)}{dv} = 2\alpha_1 v + \beta_1 \varepsilon + O(2),$$

et

$$\frac{dl_2(v, \varepsilon)}{dv} = 2\alpha_2 v + \beta_2 \varepsilon + O(2).$$

Après simplification et identification, on obtient les valeurs ci-après pour les coefficients  $\alpha_i, \beta_i$  et  $\gamma_i, i = 1, 2$  :

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\frac{2}{(1+a)^3} - \frac{2q(r-d)}{d^2 q(1+a)}, \\ \beta_1 = \frac{1}{1+a}, \\ \gamma_1 = 0. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \alpha_2 = -\frac{2q(r-d)}{d^2 q^2}, \\ \beta_2 = \frac{1}{q}, \\ \gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Nous en déduisons donc que :

$$u = l_1(v, \varepsilon) = -\left(\frac{2}{(1+a)^3} - \frac{2q(r-d)}{d^2 q(1+a)}\right) v^2 + \frac{1}{1+a} v \varepsilon + O(3),$$

et

$$\omega = l_2(v, \varepsilon) = -\frac{2q(r-d)}{d^2 q^2} v^2 + \frac{1}{q} v \varepsilon + O(3).$$

En portant les valeurs obtenues de  $u$  et  $\omega$  dans la deuxième équation de (3.23), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{2p(r-d)}{d^2q}v^2 + v\varepsilon + O(3) = G(v, \varepsilon), \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

On a les conditions suivantes :

$$G(0, 0) = G_v(0, 0) = 0, \quad (3.25)$$

qui expriment que la variété centrale est tangente à l'axe des  $v$  à l'origine. En plus de ces conditions, nous avons :

$$\begin{aligned} G_\varepsilon(0, 0) &= 0, \\ G_{vv}(0, 0) &= \frac{4p(r-d)}{d^2q} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} G_{vv}(0, 0) \neq 0 & \text{si } r \neq d, \\ \text{et } G_{vv}(0, 0) = 0 & \text{si } r = d. \end{cases}$$

D'où le théorème suivant :

**Théorème 3.4.2.** *Si  $r \neq d$ , alors le système (3.2) présente une bifurcation transcritique au point  $E_4$ . Et Si  $r = d$ , il présente une bifurcation fourche.*

### 3.4.2 Permanence

Avant d'étudier la permanence du système (3.2), nous introduisons quelques définitions nécessaires. Supposons que  $F$  soit un espace métrique complet avec  $F = F_0 \cup \partial F_0$  pour un ensemble ouvert  $F_0$ . Nous prendrons comme  $F_0$  le quadrant strictement positif dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Définition 3.4.1.** *Un flot ou un semi flot sur  $F$  sous lequel  $F_0$  et  $\partial F_0$  sont invariants est dit permanent s'il est dissipatif et s'il existe un nombre  $\varepsilon > 0$  tel que toute trajectoire issue de  $F_0$  soit au moins à une distance  $\varepsilon$  de  $\partial F_0$  pour  $t$  suffisamment grand.*

**Définition 3.4.2.** *L'ensemble  $\omega$ -limite  $\omega(\partial F_0)$  est dit isolé s'il possède un recouvrement  $M = \cup_{k=1}^N M_k$  d'ensembles disjoints  $M_k$  qui sont isolés et invariants.*

*L'ensemble  $\omega(\partial F_0)$  est dit acyclique s'il existe un recouvrement isolé  $\cup_{k=1}^N M_k$  pour lequel aucun ensemble de  $M_k$  n'est un cycle.*

**Théorème 3.4.3.** [Hale § Waltman 1989] Supposons qu'un semi flot sur  $F$  rende  $F_0$  et  $\partial F_0$  invariant, soit borné dans  $F$  pour  $t > 0$  et qu'il soit dissipatif. Si de plus :

1)  $\omega(\partial F_0)$  est isolé et acyclique,

2)  $W^s(M_k) \cap F_0 = \emptyset$  pour tout  $k$ , où  $\cup_{k=1}^N M_k$  est le recouvrement isolé utilisé dans la définition d'acyclicité de  $\partial F_0$  et  $W^s$  la variété stable.

Alors le semi flot est permanent.

**Théorème 3.4.4.** Supposons les conditions suivante sont vérifiées :

$$\begin{aligned} b &< c, \\ c - b &> ab, \\ \frac{1-a}{2} &< \theta < 1, \\ \frac{c}{1+a} - \left(b + \frac{pr}{dq}\right) &> 0. \end{aligned} \tag{3.26}$$

alors, le système (3.2) est permanent.

### Démonstration

Si nous prenons pour  $F_0$  le cône strictement positif, alors  $\omega(\partial F_0)$  consiste en les points d'équilibre triviaux

$$\begin{aligned} E_0 &= (0, 0, 0), \quad E_1 = (1, 0, 0), \\ E_2 &= (\theta, (1 - \theta)(a + \theta), 0) \quad \text{où } \theta = \frac{ab}{c - d}, \\ E_3 &= \left(0, 0, \frac{pr}{q}\right), \quad E_4 = \left(1, 0, \frac{pr}{q}\right). \end{aligned}$$

D'après l'étude de la stabilité des points d'équilibre triviaux, appartenant à la frontière de  $\mathbb{R}_+^3$ , voir section 3.4.1, le point  $E_0$  est un col instable dont la variété stable est l'axe  $(oy)$ . Si  $c - b > ab$ , le point  $E_1$  est un col dont la variété stable est l'axe  $(ox)$ . Le point  $E_3$  est un col avec la variété stable est  $W^s = (oz) \cap \langle (0, \beta, 1) \rangle$  tel que  $\beta = \frac{(p+\lambda_2)q}{p^2}$ .

Ainsi, toutes les trajectoires sur l'axe  $(ox)$  autre que  $E_0$  approchent le point  $E_1$ , toutes les trajectoires sur l'axe  $(oy)$  approchent le point  $E_0$  et toutes les trajectoires sur l'axe  $(oz)$  autre que  $E_0$  approchent le point  $E_3$ . Dans le plan  $XY$ , si  $\frac{1-a}{2} < \theta < 1$ , toutes les trajectoires approchent  $E_2$  qui est un col, sur sa variété stable. De plus si  $\frac{c}{1+a} - (b + \frac{pr}{dq}) > 0$ , le point  $E_4$  est un col et toutes les trajectoires dans le plan  $XZ$  approchent  $E_4$  sur sa variété stable. Il s'en suit, de cette configuration, que le flot sur  $\partial F_0$  est acyclique. Donc  $\omega(\partial F_0)$  est isolé et acyclique. Nous savons, depuis le lemme (3.2.1), que ces variétés stables ne peuvent couper l'intérieur de  $F_0$ . Par conséquent, le théorème (3.4.3) implique la permanence du flot donné par (3.2). ■

### 3.4.3 Etude des points d'équilibre intérieurs

Réécrivons le système (3.2) :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{xy}{x+a}, \\ \frac{dy}{dt} = -by + \frac{cxy}{x+a} - \frac{yz}{y+d}, \\ \frac{dz}{dt} = pz - \frac{qz^2}{y+r}. \end{cases}$$

Pour trouver les points d'équilibre intérieurs, nous devons résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 1 - x - \frac{y}{x+a} = 0, \\ \frac{cx}{x+a} - b - \frac{z}{y+d} = 0, \\ p - \frac{qz}{y+r} = 0. \end{cases}$$

Ce qui revient à la résolution de l'équation en  $x$  suivante :

$$\begin{cases} \frac{cx}{x+a} - b - \frac{z}{y+d} = 0, \\ y = (1-x)(x+a), \\ z = \frac{p(y+r)}{q}. \end{cases} \quad (3.27)$$

**Remarque 3.4.1.** Nous allons résoudre cette équation suivant que  $d = r$  ou  $d \neq r$  dans le système (3.2). C'est à dire  $d_3 = d_2$  ou  $d_3 \neq d_2$  dans le système de départ (3.1),  $d_3 = d_2$  signifie que la perte résiduelle des individus de l'espèce  $Z$ , causée par une forte rareté de la proie  $Y$ , est égale à valeur de  $Y$  pour laquelle le taux d'élimination par individu  $Y$  devient  $\frac{v_2}{2}$ .

**Cas où  $d = r$**

Dans ce cas, la première équation de (3.27) entraîne :

$$\frac{cx}{x+a} - b - \frac{p}{q} = 0,$$

d'où

$$x = \frac{a(bq+p)}{qc - (bq+p)},$$

avec

$$qc - (bq+p) \neq 0.$$

- 1) Si  $qc - (bq + p) = 0$ , alors il n'y a aucun point fixe intérieur, puisque ce cas entraînerait que  $a(bq + p) = 0$  ce qui est impossible.
- 2) Si  $qc - (bq + p) < 0$ , alors  $x < 0$  et il n'y a aucun point fixe intérieur strictement positif.
- 3) Si  $qc - (bq + p) > 0$ , alors il existe un unique point d'équilibre intérieur dans  $\mathbb{R}_+^3$  que nous noterons  $E_1^*(x_1^*, y_1^*, z_1^*)$  avec

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{a(bq + p)}{qc - (bq + p)}, \\ y_1^* &= (1 - x_1^*)(x_1^* + a), \\ z_1^* &= \frac{p(y_1^* + r)}{q}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

**Cas où  $d \neq r$**

Alors la première équation de (3.2) s'écrit :

$$(1 - x)(x + a) - \frac{x(bdq + pr - cdq) + abdq + apr}{x(qc - bq - p)} = 0.$$

D'où

$$\begin{aligned} &(bq + p - qc)x^3 + [(2a - 1)(bq + p - qc) + aqc]x^2 \\ &+ [(a^2 - 2a - d)(bq + p - qc) + dp + a^2qc - aqc - pr]x \\ &- a[a(bq + p - qc) + aqc + bdq + pr] = 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

- 1) Si de plus  $bq + p - qc = 0$ , alors l'équation (3.29) devient :

$$aqcx^2 + [dp + a^2qc - aqc - pr]x - a[aqc + bdq + pr] = 0,$$

avec

$$\Delta = (dp + a^2qc - aqc - pr)^2 + 4a^2qc(aqc + bdq + pr) > 0.$$

Donc, on a deux valeurs de  $x$  réelles et de signe contraire puisque leur produit est négatif. D'où un unique point fixe intérieur positif, que nous noterons  $E_2^* = (x_2^*, y_2^*, z_2^*)$  avec

$$\begin{aligned} x_2^* &= \frac{-(dp + a^2qc - aqc - pr) + \sqrt{\Delta}}{2aqc}, \\ y_2^* &= (1 - x_2^*)(x_2^* + a), \\ z_2^* &= \frac{p(y_2^* + r)}{q}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

- 2) Si  $pq + p - qc \neq 0$ .

Dans ce cas, nous arrivons à l'équation suivante :

$$x^3 + \rho x^2 + \sigma x + \zeta = 0,$$

où

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{(2a-1)(bq+p-qc) + aqc}{bq+p-qc}, \\ \sigma &= \frac{(a^2-2a-d)(bq+p-qc) + dp + a^2qc - aqc - pr}{bq+p-qc}, \\ \zeta &= \frac{-a[a(bq+p-qc) + aqc + bdq + pr]}{bq+p-qc}.\end{aligned}$$

En posant  $x = \zeta + h$ , cela nous conduit à :

$$\zeta^3 + P\zeta + Q = 0.$$

Où

$$\begin{aligned}P &= \sigma - \frac{\rho^2}{3}, \\ Q &= \frac{2\rho^3}{27} - \frac{\rho\sigma}{3} + \zeta.\end{aligned}$$

On a d'après les formules de Cardan, trois possibilités :

a) Si  $4P^3 + 27Q^2 > 0$ , alors on a une racine réelle

$$x_3^* = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} - \frac{\rho}{3}.$$

b) Si  $4P^3 + 27Q^2 < 0$ , alors on a trois racines réelles

$$\begin{aligned}x_4^* &= 2\sqrt{-\frac{P}{3}} \sin \left[ \frac{1}{3} \arcsin \left( -\sqrt{-\frac{27Q^2}{4P^3}} \right) \right] - \frac{\rho}{3}, \\ x_5^* &= 2\sqrt{-\frac{P}{3}} \sin \left[ \frac{1}{3} \arcsin \left( -\sqrt{-\frac{27Q^2}{4P^3}} + \frac{2\pi}{3} \right) \right] - \frac{\rho}{3}, \\ x_6^* &= 2\sqrt{-\frac{P}{3}} \sin \left[ \frac{1}{3} \arcsin \left( -\sqrt{-\frac{27Q^2}{4P^3}} + \frac{4\pi}{3} \right) \right] - \frac{\rho}{3}.\end{aligned}$$

c) Si  $4P^3 + 27Q^2 = 0$ , alors on a deux racines réelles, une double et une simple

$$\begin{aligned}x_7^* &= 2\sqrt[3]{-\frac{Q}{2}} - \frac{\rho}{3}, \quad \text{racine simple}, \\ x_8^* &= -\sqrt[3]{-\frac{Q}{2}} - \frac{\rho}{3}, \quad \text{racine double}.\end{aligned}$$

Les coordonnées  $y$  et  $z$ , correspondant à chaque valeur de  $x$  sont données par (3.27). Il est clair que si  $0 < x < 1$ , alors  $y$  et  $z$  sont positives. Nous venons de voir qu'il y a plusieurs valeurs

possibles pour la première coordonnée  $x$ , et les deux autres coordonnées sont par les équations (3.27). Nous avons noté ces points  $E_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$  avec

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{a(bq + p)}{qc - (bq + p)}, \\ x_2^* &= \frac{-(dp + a^2qc - aqc - pr) + \sqrt{\Delta}}{2aqc}, \\ x_3^* &= \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} - \frac{\rho}{3}, \\ x_4^* &= 2\sqrt{-\frac{P}{3}} \sin \left[ \frac{1}{3} \arcsin \left( -\sqrt{-\frac{27Q^2}{4p^3}} \right) \right] - \frac{\rho}{3}, \\ x_5^* &= 2\sqrt{-\frac{P}{3}} \sin \left[ \frac{1}{3} \arcsin \left( -\sqrt{-\frac{27Q^2}{4p^3}} + \frac{2\pi}{3} \right) \right] - \frac{\rho}{3}, \\ x_6^* &= 2\sqrt{-\frac{P}{3}} \sin \left[ \frac{1}{3} \arcsin \left( -\sqrt{-\frac{27Q^2}{4p^3}} + \frac{4\pi}{3} \right) \right] - \frac{\rho}{3}, \\ x_7^* &= 2\sqrt[3]{-\frac{Q}{2}} - \frac{\rho}{3}, \\ x_8^* &= -\sqrt[3]{-\frac{Q}{2}} - \frac{\rho}{3}, \end{aligned}$$

et pour tout  $i = 1, \dots, 8$ , on a :

$$y_i^* = (1 - x_i^*)(x_i^* + a),$$

et

$$z_i^* = \frac{p(y_i^* + r)}{q}.$$

### 3.4.4 Stabilité globale du point fixe intérieur

Le théorème ci-après établit, sous certaines conditions, la stabilité globale du point d'équilibre intérieur  $E_i^*$ , lorsqu'on a l'existence et l'unicité de ce point. Pour les points  $E_1^*$  et  $E_2^*$ , les conditions qui assurent leur existence, garantissent aussi leur unicité.

**Théorème 3.4.5.** *Si le point  $E_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$  existe et est unique et si les conditions suivantes sont vérifiées*

$$b < c, \tag{3.31}$$

$$1 - a < x_i^* < \frac{ab}{c - d}, \quad (3.32)$$

$$z_i^* < d(c - b). \quad (3.33)$$

Alors  $E_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$  est globalement asymptotiquement stable.

### Démonstration

Pour montrer ce théorème, nous allons construire une fonction de Lyapunov convenable. Prenons

$$V(x, y, z) = \int_{x_i^*}^x \frac{\eta - x_i^*}{\eta} d\eta + \int_{y_i^*}^y \frac{(\eta - y_i^*)(\eta + d)}{\eta} d\eta + \int_{z_i^*}^z \frac{\eta - z_i^*}{\eta} d\eta. \quad (3.34)$$

On voit aisément que cette fonction est nulle au point  $(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$  et qu'elle est strictement positive pour toutes autres valeurs de  $x$ ,  $y$  et  $z$ . La dérivée orbitale de  $V(x, y, z)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dV}{dy} \frac{dy}{dt} + \frac{dV}{dz} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{x - x_i^*}{x} x \left( 1 - x - \frac{y}{x + a} \right) + \frac{(y - y_i^*)(y + d)}{y} y \left( \frac{cx}{x + a} - b - \frac{z}{y + d} \right) \\ &\quad + \frac{z - z_i^*}{z} z \left( p - \frac{qz}{y + r} \right) \\ &= \frac{x - x_i^*}{x + a} ((1 - x)(x + a) - y) + \frac{y - y_i^*}{x + a} (cx(y + d) - b(x + a)(y + d) - z(x + a)) \\ &\quad + (z - z_i^*) \left( p - \frac{qz}{y + r} \right). \end{aligned}$$

En sachant que

$$y_i^* = (1 - x_i^*)(x_i^* + a),$$

et

$$z_i^* = \frac{p(y_i^* + r)}{q},$$

et en ajoutant des termes nuls on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{x - x_i^*}{x + a} ((1 - x)(x + a) - y + y_i^* - (1 - x_i^*)(x_i^* + a)) \\ &\quad + \frac{y - y_i^*}{x + a} [cx(y + d) - b(x + a)(y + d) - z(x + a) - cx_i^*(y_i^* + d) \\ &\quad - b(x_i^* + a)(y_i^* + d) - z_i^*(x_i^* + a)] + (z - z_i^*) \left( \frac{qz_i^*}{y_i^* + r} - \frac{qz}{y + r} \right). \end{aligned}$$

Après simplification, on a :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & \frac{x - x_i^*}{x + a}(-(y + y_i^*) - (1 - x_i^*)(x + x_i^* + a - 1)) + \frac{y - y_i^*}{x + a} [((c - d)(y + d) - z_i^*)(x - x_i^*) \\ & - (ab - (c - d)x_i^*)(y - y_i^*) - (x + a)(z - z_i^*)] + (z - z_i^*) \left( \frac{p}{y + r}(y - y_i^*) - \frac{q}{y + r}(z - z_i^*) \right), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & -\frac{x - x_i^* + a - 1}{x + a}(x - x_i^*)^2 - \frac{1}{x + a}(x - x_i^*)(y - y_i^*) \\ & - \frac{z_i^* - (c - d)(y + d)}{x + a}(x - x_i^*)(y - y_i^*) - \frac{ab - (c - d)x_i^*}{x + a}(y - y_i^*)^2 \\ & - (y - y_i^*)(z - z_i^*) + \frac{p}{y + r}(y - y_i^*)(z - z_i^*) - \frac{q}{y + r}(z - z_i^*)^2. \end{aligned}$$

On déduit que :

$$\frac{dV}{dt} = -(x - x_i^*, y - y_i^*, z - z_i^*)B(x - x_i^*, y - y_i^*, z - z_i^*)^T,$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} \frac{x - x_i^* + a - 1}{x + a} & \frac{z_i^* - (c - d)(y + d)}{x + a} & 0 \\ \frac{1}{x + a} & \frac{ab - (c - d)x_i^*}{x + a} & -\frac{p}{y + r} \\ 0 & 1 & \frac{q}{y + r} \end{pmatrix},$$

La dérivée orbitale de  $V$  est strictement négative si la matrice  $B$  est définie positive. Cette matrice est définie positive si et seulement si pour toute suite de sous-matrices principales donnée, le déterminant de chaque sous-matrice est positif.

Si les conditions(3.31),(3.32) et (3.33) sont acquises, chaque déterminant est positif, donc la matrice  $B$  est définie positive, et par conséquent  $\frac{dV}{dt} < 0$ .

Et donc  $E_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$  est globalement asymptotiquement stable.■

## 3.5 Comportement qualitatif des systèmes dynamiques non linéaires. Observations Numériques

La dynamique non-linéaire et déterministe des systèmes dynamiques est classifiée selon le comportement qualitatif des attracteurs de ces systèmes. Un attracteur est un objet géométrique de l'espace des phases qui attire toutes les trajectoires issues de son bassin d'attraction.

L'exemple le plus simple de ce genre de dynamique et la stabilité autour d'un point d'équilibre, voir figure 3.1. Un point d'équilibre stable est un point de l'espace des phases sur lequel reviennent les solutions après de petites perturbations.

Un comportement plus complexe est donné pour le cas du cycle limite stable qui est un attracteur périodique, voir les figures 3.9 et 3.10 par exemple, qui exhibent toutes des limites cycles de période 1.

La quasi-périodicité est un phénomène assez voisin du cycle limite. Il peut survenir, pour les systèmes dynamiques continus, en dimension strictement supérieure à 2 (et en dimension 2 ou plus pour les systèmes dynamiques discrets). Les périodes des oscillations varient dans ce cas, le système ne présente jamais exactement le même comportement. Les points initialement voisins engendrent des solutions voisines.

Un phénomène encore plus complexe est celui où le système présente du chaos. Un attracteur chaotique, voir figure 3.2 est l'image dans l'espace des phases d'un phénomène chaotique, dans ce cas aucune périodicité n'est visible. L'irrégularité et l'évolution temporelle non prévisible de beaucoup de systèmes non linéaires ont été qualifiés de situations chaotiques. Cependant la clé essentielle d'un tel comportement est la sensibilité aux conditions initiales (ou dépendance sensitive aux conditions initiales DSCI), un système dynamique présente ce caractère lorsque toute variation, aussi petite dans les conditions initiales conduit à des solutions complètement distinctes et exponentiellement divergentes l'une de l'autre dans le temps.

Beaucoup d'études de systèmes écologiques ou biologiques ont montré la possibilité d'existence de chaos. Pour les systèmes dynamiques discrets modélisant des problèmes en écologie, même en dimension un, il est en effet possible de trouver du chaos, voir [17].

Dans le cas continu, les modèles classiques d'interaction entre populations, ont longtemps considéré l'étude de deux espèces. D'un point de vue mathématique ces modèles ne peuvent exhiber que deux situations possibles : les points d'équilibre ou les cycles limites de période un, voir le chapitre 1 de mémoire. Cependant la nature est très riche de phénomènes très complexes. Les modèles à trois espèces de plus en plus étudiés, montrent souvent de tels comportements. Les recherches de ces dernières années tendent à prouver que des comportements très complexes peuvent survenir dans des modèles continus de chaînes alimentaires, à trois espèces ou plus. Des comportements chaotiques ont été observés dans plusieurs écosystèmes tritrophique, et beaucoup de travaux continuent à être menés dans ce sens.

Les systèmes multi-espèces contiennent tous les ingrédients nécessaires pour que de tels phénomènes chaotiques apparaissent :

- 1) Le système a au moins trois variables.
- 2) Les équations du mouvement contiennent des termes non-linéaires couplant plusieurs des variables.

pour un certain choix des paramètres, l'effet de la non-linéarité peut rendre instable une solution périodique. même si ces conditions ne garantissent pas l'existence du chaos, elles peuvent rendre son existence possible.

Le but de ce paragraphe est d'essayer de mieux comprendre (par l'utilisation des outils numériques classiques de la dynamique non linéaire) le comportement asymptotique du modèle, tridimensionnel autonome et continu, théoriquement étudié dans ce chapitre.

Rappelons le modèle étudié dans cette partie :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dT} = \left( a_0 - b_0 X - \frac{v_0 Y}{X + d_0} \right) X, \\ \frac{dY}{dT} = \left( -a_1 + \frac{v_1 X}{X + d_0} - \frac{v_2 Z}{Y + d_2} \right) Y, \\ \frac{dZ}{dT} = c_3 Z - \frac{v_3 Z^2}{Y + d_3}. \end{cases} \quad (3.35)$$

Pour le système tri-dimensionnel étudié dans ce chapitre, nous avons privilégié les calculs de diagramme de bifurcation et des exposant de Lyapunov. Plusieurs cascades de dédoublement de période, figure 3.6 conduisant au chaos, figure 3.2 ont été observées, même si les plages de paramètre sont souvent relativement petites. Les figures 3.3, 3.4 et 3.5 donnent une évidence numérique sur le caractère chaotique de ce système.

Afin de rendre ce travail numérique le plus performant possible, le pas de discrétisation utilisé pour la méthode Runge-Kutta-4 est souvent pris égal à  $10^{-4}$ , et les  $10^7$  premiers pas sont rejetés afin d'éviter les régimes transitoires.

Le paramètre de contrôle (de bifurcation) est  $a_0$ , taux de croissance de l'espèce  $X$  en bas de la chaîne alimentaire.

Les paramètres suivants sont fixés tout le long de ces tests numériques (sauf précision du contraire) :

$$\begin{cases} b_0 = 0.06, & v_0 = 1.0, & d_0 = d_1 = d_2 = 10.0 \\ a_1 = 1.0, & v_1 = 2.0, & v_2 = 0.9, & c_3 = 0.02, & v_3 = 0.01, & d_3 = 0.3. \end{cases} \quad (3.36)$$

De même, la condition initiale choisie est la suivante :

$$X_0(1.8, 1.8, 1.8).$$

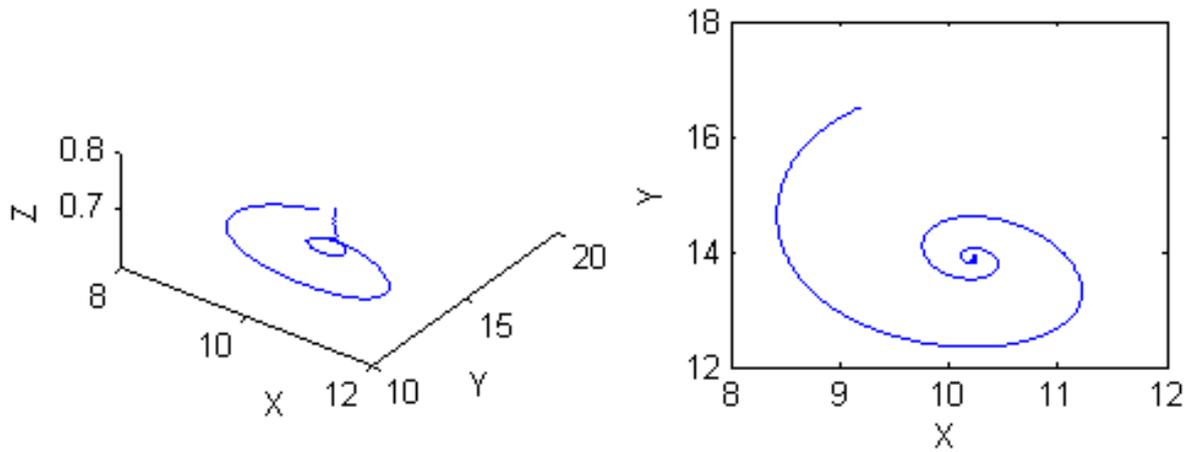


FIGURE 3.1 – Point intérieur stable pour le système (3.35), pour l'ensemble des paramètres donné par (3.36) mais pour  $a_0 = 1.3$ ,  $v_2 = 0.4$ ,  $c_3 = 0.03$ ,  $v_3 = 1.0$  et  $d_3 = 10.0$ .

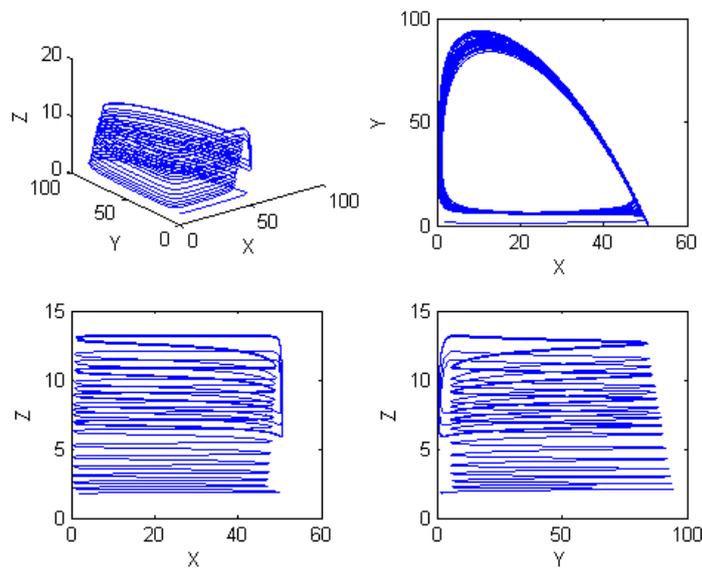


FIGURE 3.2 – Portraits de phases du système (3.35), pour l'ensemble des paramètres donné par (3.36) et pour  $a_0 = 3.05$ . Vue tridimensionnelle, projection en  $XY$ , en  $XZ$  et en  $YZ$ .

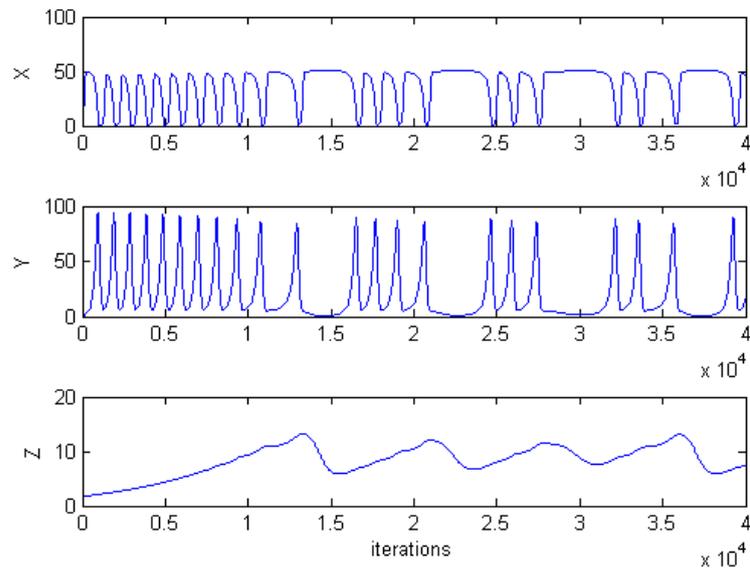


FIGURE 3.3 – Séries temporelles du système (3.35), pour l’ensemble des paramètres donné par (3.36) et pour  $a_0 = 3.05$ . (a) en  $(t, x)$ , (b) en  $(t, y)$  et (c) en  $(t, z)$ .

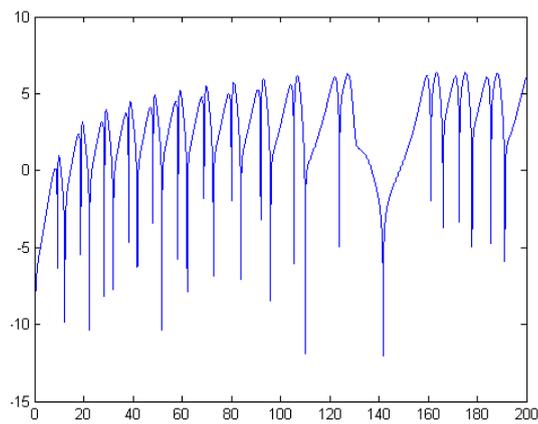


FIGURE 3.4 – Spectre de puissance de la coordonnée  $X$ , pour les mêmes paramètres que la figure précédente.

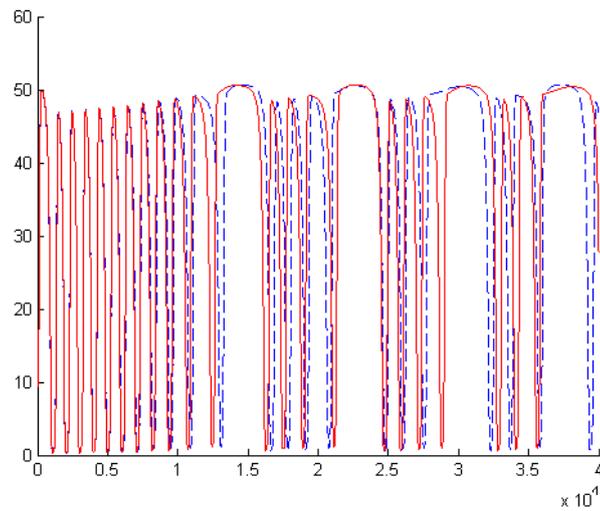


FIGURE 3.5 – Sensibilité aux conditions initiales (SCI) du système (3.35), pour l’ensemble des paramètres donné par (3.36) et pour  $a_0 = 3.05$ .

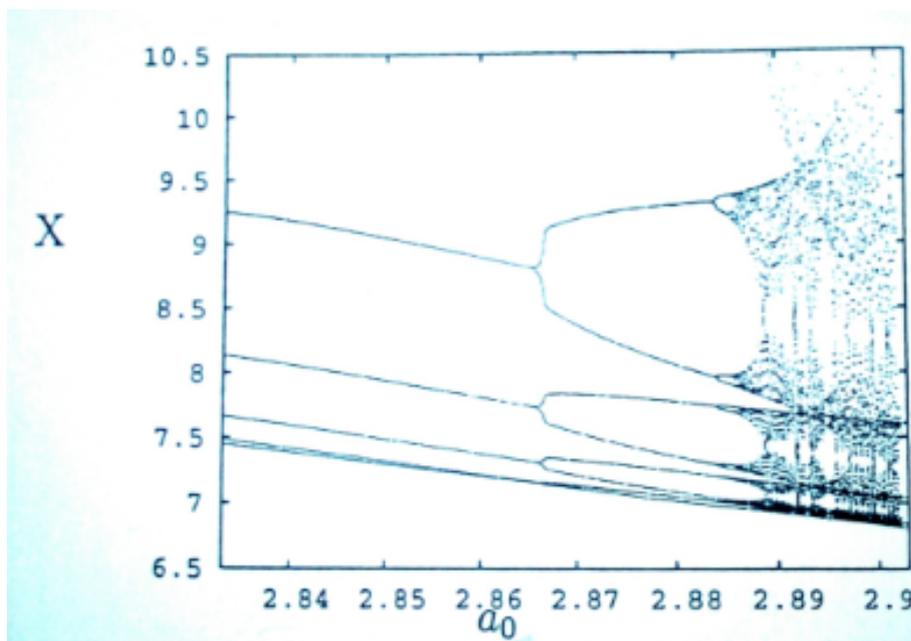


FIGURE 3.6 – Diagramme de bifurcation montrant clairement une fenêtre de dédoublement de période, d’un cycle limite de période 5 à un comportement chaotique. La figure est donnée en  $(a_0, X)$ , toujours pour le système (3.35), pour l’ensemble des paramètres donnée par (3.36),  $a_0 \notin [2.833, 2.903]$ . Ceci permet de présenter la figure suivante qui montre un  $-5, -10, \dots$ -cycle limite.

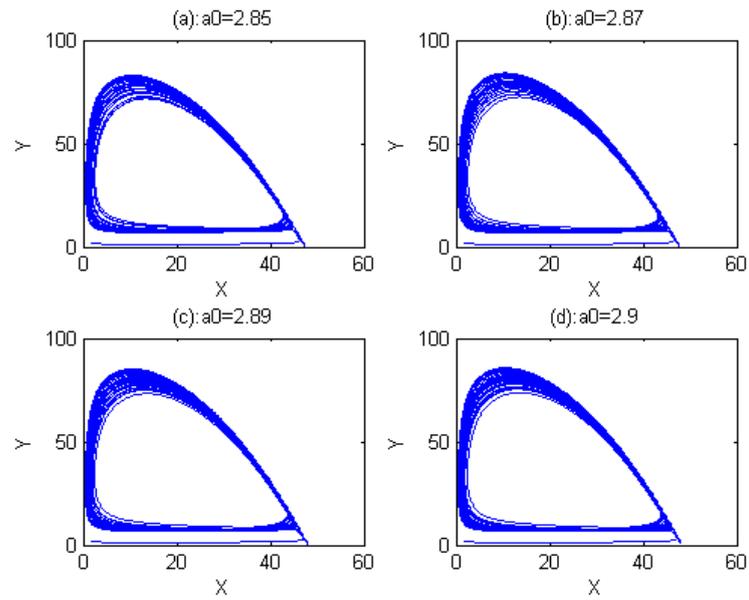


FIGURE 3.7 – Portraits de phases en  $XY$  du système (3.35),  $a_0$  est donné dans chaque figure.

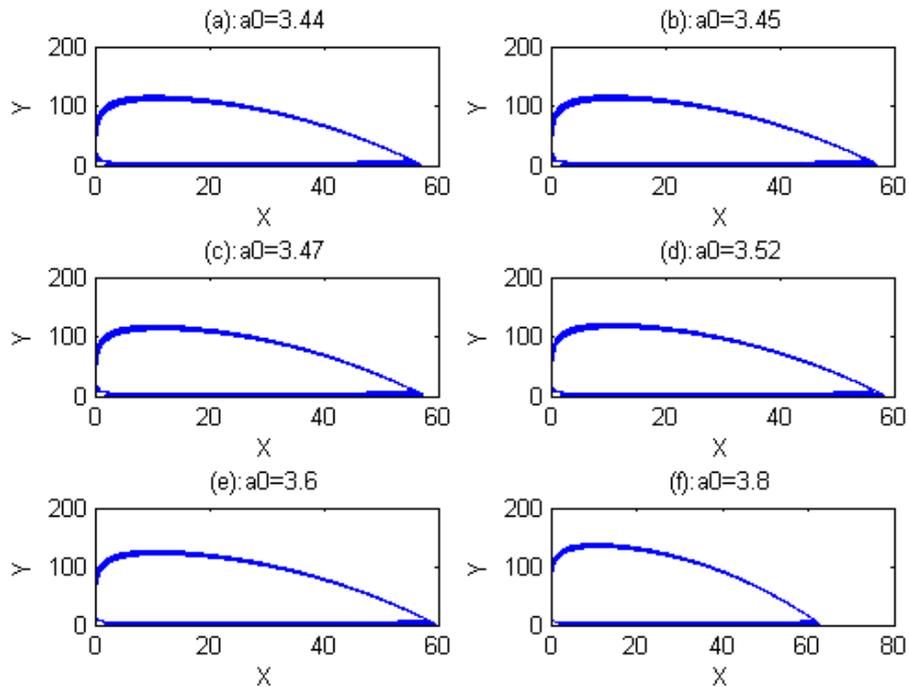


FIGURE 3.8 – Portraits de phases en  $XY$  du système (3.35),  $a_0$  est donné dans chaque figure.

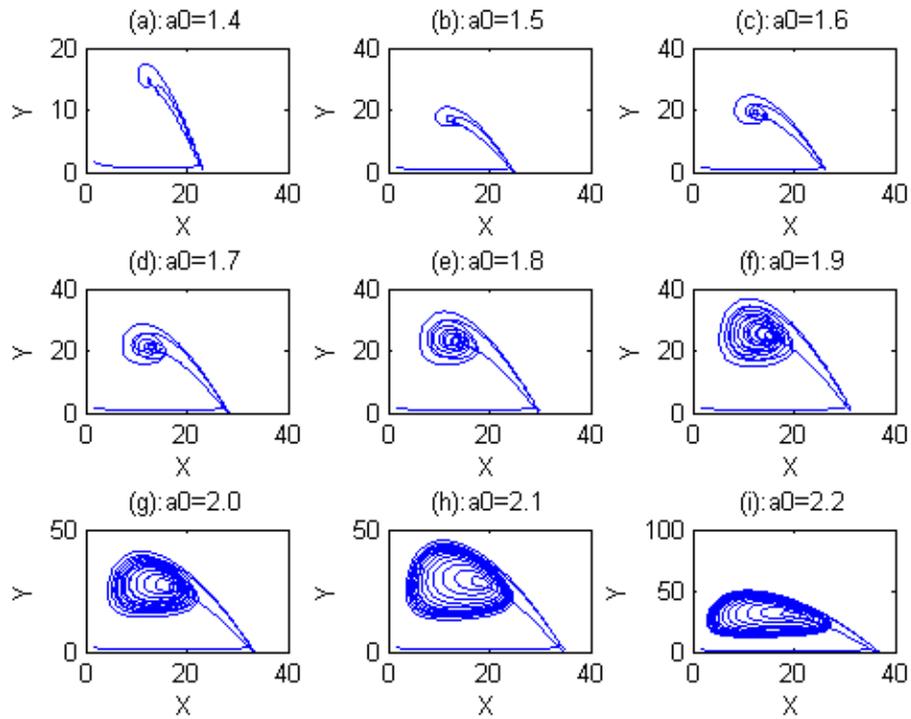


FIGURE 3.9 – Portraits de phases en  $XY$  du système (3.35) pour l'ensemble des paramètres donné par (3.36) et pour  $a_0 \in [1.4, 2.2]$ ,  $a_0$  est donné dans chaque figure.

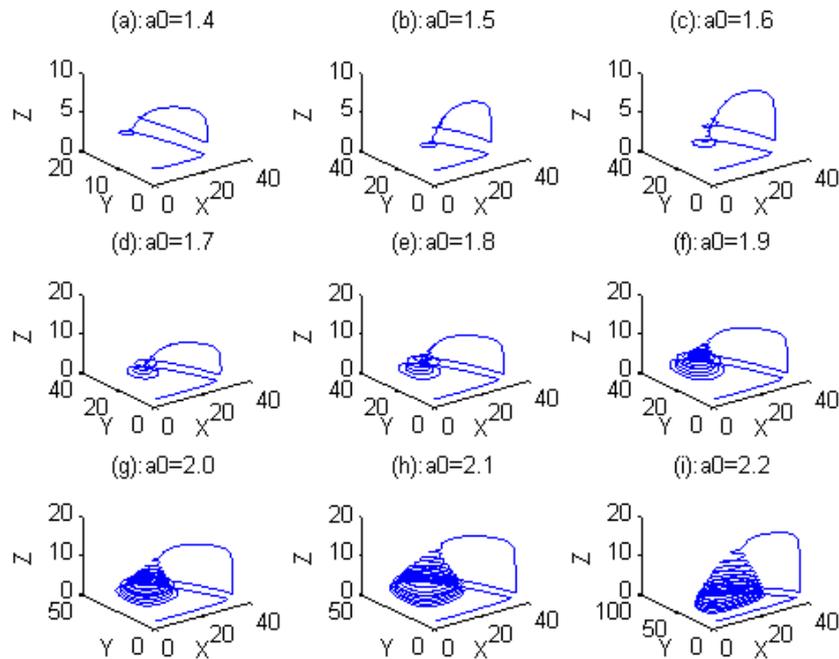


FIGURE 3.10 – Suite de la figure précédente. Vues tridimensionnelles, des cycles limites de la figure précédente.

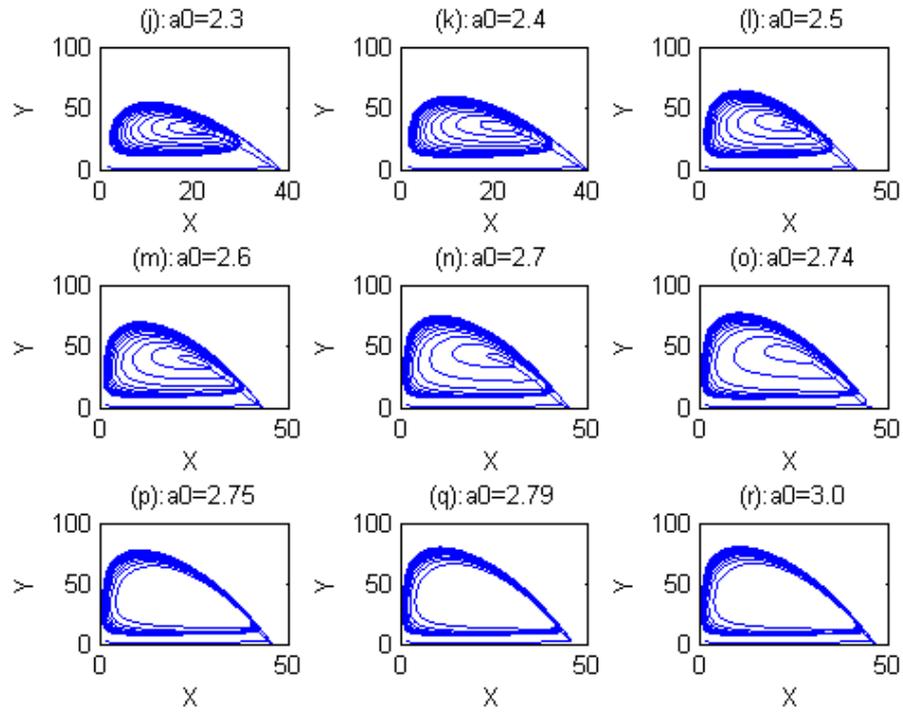


FIGURE 3.11 – Portraits de phases en  $XY$  du système (3.35) pour l'ensemble des paramètres donné par (3.36) et pour  $a_0 \in [2.3, 3.0]$ .

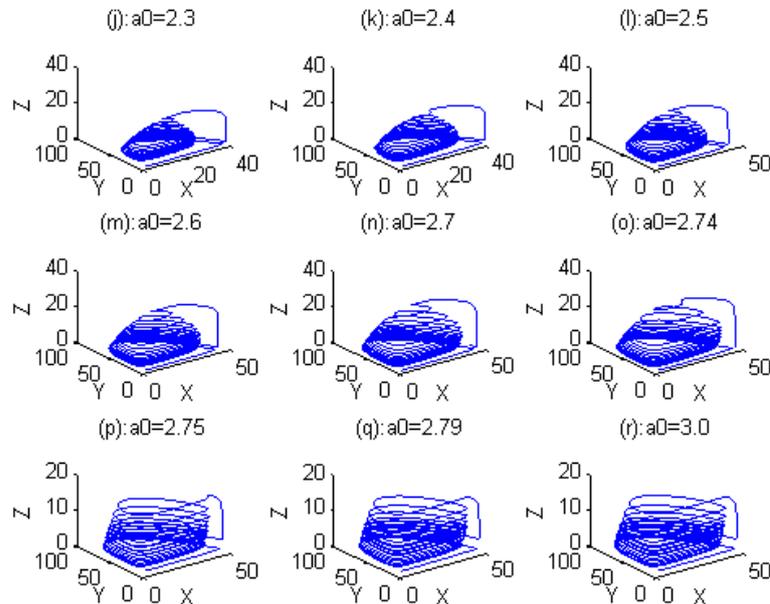


FIGURE 3.12 – Suite de la figure précédente. Vues tridimensionnelles, des cycles limites de la figure précédente .

---

# ANNEXE

## Méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4

On peut construire des schémas d'intégration d'équations différentielles de diverses manières. Les schémas d'intégration à un pas peuvent être obtenus en utilisant des formules d'intégration numérique approchée. En introduisant des sous-pas, on obtient les schémas de Runge-Kutta qui sont les plus pratiques et les plus utilisés. C'est un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 que l'on utilise ici.

Dans les méthodes de résolution des problèmes à valeurs initiales, le processus de calcul est un processus fini. On avance de  $N$  pas, à partir du temps initial jusqu'au temps final et on s'arrête. Chaque valeur est donc calculée une fois pour toutes. Il faut donc utiliser des méthodes suffisamment précises. Ceci explique le recours à des méthodes d'ordre élevé.

Les méthodes de Runge-Kutta sont les généralisation de la méthode d'Euler à des ordres supérieurs à un. Elles s'obtiennent à partir de formules plus précises que la formule des rectangles.

Considérons tout d'abord l'utilisation de la formule des trapèzes. Elle conduit à la méthode :

$$\begin{cases} y_0 & \text{donné,} \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})], & n = \overline{1, N}. \end{cases}$$

Où  $f$  est la fonction de récurrence.

Cette méthode est une méthode implicite. Le calcul de la nouvelle valeur  $y_{n+1}$  nécessite la résolution d'une équation. Si l'on veut obtenir une méthode explicite du même ordre, on peut

procéder de la manière suivante :

$$\begin{cases} y_0 & \text{donné ,} \\ y_{n+1}^* & = y_n + hf(x_n, y_n), \\ y_{n+1} & = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)], \quad n = \overline{1, N}. \end{cases}$$

On obtient ainsi a partir de la méthode implicite des trapèzes la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 : (RK2).

De la même façon, l'utilisation de la formule d'intégration de Simpson est à la base de la formule de Runge-Kutta 4 : (RK4), c'est l'une des formules les plus utilisées, elles s'écrit :

$$\begin{cases} y_0 & \text{donné , puis pour } n \geq 0, \\ k_1 & = hf(x_n, y_n), \\ k_2 & = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}), \\ k_3 & = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}), \\ k_4 & = hf(x_n + h, y_n + k_3), \\ y_{n+1} & = y_n + \frac{h}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]. \end{cases}$$

---

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Abdallaoui., Modélisation et étude mathématique de quelques problèmes de dynamique des populations., *Thèse de doctorat Rebat*, (2007).
- [2] M.A. Alaoui, M.Daher Okiye., Boundedness and global stability for a predator-prey model with modified Leslie-Grower and Holling-type II Schemes., *Applied Mathematics Letters* 16, (2003).
- [3] K. T. Alligood, T. D. Sauer and J. A. Yorke., Chaos : An introduction to dynamical systems., *Springer-Verlag*, (1996).
- [4] V.I. Arnold., Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires., *MIR*, Moscou, (1980).
- [5] M.A. Alaoui., Study of a Leslie-Gower-type tritrophic population model., *Chaos, Solitons and Fractals*, 14 (2002) 1275-1293.
- [6] H. F. V. Bremen, F. E. Udawadia and W. Proskurowski., An efficient QR based method for the computation of Lyapunov exponents., *Phys. D.* 101, pp. 1-16, (1997).
- [7] A. Boukabou., Méthode de contrôle des systèmes chaotiques d'ordre élevé et leur application pour la synchronisation : Contribution à l'élaboration de nouvelles approches., *Thèse de doctorat en science.*, Université de Constantine, (2006).
- [8] A. Boukabou and N. Mansouri., Controlling chaos in higher-order dynamical systems., *Int. J. Bifurcation and Chaos*, Vol. 14, pp. 4019-4025, (2004).
- [9] Colin.w.Clark., *Mathematical Bioeconomics*, A Wiley-interscience publication., New York, (1990).

- 
- [10] E.A. Conddington and N. Levinson., Theory of ordinary differtial equations, Mc Graw-Hill book Company, New York (1995).
- [11] H. Dang-Vu et C. Delcarte., Bifurcation et Chaos., *Ellipses*, Paris, (2000).
- [12] H.I. Freedman, P. Waltman., Persistence in models of three interacting predator-prey population., *Math. Biosc* **68**, (1984).
- [13] M. W. Hirsch et S. Smale., Differential equations, dynamical systems and linear algebra., *Academic Press*, New York, (1974).
- [14] W. Khellaf., Systèmes dynamiques et modèles d'évaluation des actifs naturels et environnementaux : Application aux problèmes de dynamique des populations., *Thèse de doctorat en science*, Université de Constantine, (2013).
- [15] J.L. Kuang, P. A. Meehan and A. Y. T. Leung., Suppression chaos via Lyapunov- Kravsovskii's method., *Chaos, Solution and Fractals*, V. 27, pp. 1408-1414, (2006).
- [16] J . E. Marsden et M. McCracken., The Hopf bifurcation and its applications., *Springer*, Berlin, (1976).
- [17] R.M. May., Stability and Complexity in model ecosystems, Princeton University Press Princeton., NJ, USA, (1973).
- [18] E.Ott, C. Grebogi and J. A. York., Controlling chaos., *Phys. Rev. Lett*, Vol. 64, No. 11, pp. 1196-1199, (1990).
- [19] T. S. Parker and L. O. Chua., Practical numerical algorithms for chaotic systems., *Springer-Verlag*, (1989).
- [20] L. Perko., Differential equations and dynamical systems., *Springer*, New York, (2000).
- [21] H. Reinhard., Equations différentielles fondements et applications., *Bords*, Paris, (1989).
- [22] D. Ruelle., *Commun. Math. Phys.* 82 , 137 (1981).
- [23] Upadhyay RK, Iyengar SRK, Rai V. Chaos : an Ecological reality. *Int J Bifurcation Chaos* 1998 ;8(6) :1325-33.
- [24] S. Yu, J. Lü and G. Chen., Generation of hyperchaos from the Chen-Lee system via sinusoidal perturbation., *Chaos, Solution and Fractals*, in press, (2007).