République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahai - Jijel

Faculté des Sciences Exacte et Informatiques

Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....

№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : EDP et applications.

Thème

Application de la méthode de compacité sur quelques problèmes aux limites non linéaires

Présenté par :

- **Zarour Meryem**.
- **Zetili Sara**.

Devant le jury :

Président	:	**Ahmed Nasri**	**MCB. Univ. de Jijel**
Encadreur	:	**Razika Boufenouche**	**MCB. Univ. de Jijel**
Examinateur	:	**Hassina Zerroug**	**MAA. Univ. de Jijel**

Promotion **2018/2019**

Remerciement

Tout d'abord et avant tout, nous remercions ***ALLAH*** *le tout puissant pour la force, la volonté, la santé, la patience et le courage qu'il nous à donné pour accomplir ce notre travail de recherche.*

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude, mes sincères et chaleureux remerciements,

mon encadreur Mme ***Razika Boufenouche,*** *pour confiance qu'il nous a accordé en acceptant d'encadrer ce travail et pour sa patience, son encouragement et sa disponibilité ainsi pour ses multiples conseils tout au long de cette étude.*

je tiens à remercier touts les membres de jury:

Monsieur ***Nasri Ahmed,*** *d'avoir accepté la présidence des jury*

Mes vifs remerciements vont également à: Mme ***Zarroug Hassina,*** *pour accepter de juger ce travail et d'en être l'éxaminate*

Mes plus vifs remercient à mes enseignants du département de Mathématiques de l'université de jijel surtant de ma spécialité ***EDP*** *et application pour leur sincérité.*

Enfin, mes parents, et tout ma famille, connaissances et amis qui nous a supporté toutes les difficultés et soutient moral tout au long de notre travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail qui est le fruit récolté après tant d'années d'efforts :

A mon cher ***papa Abdelhafid:*** *pour ses précieux conseils et encouragements. Aucune dédicacene saura exprimée l'amour, l'estime et le respect que j'ai pour toi.*

A ma très chère ***Maman Farida*** *et meilleure amie, qui a œuvré pour ma réussite, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie.*

A mes chères sœurs, ***Romaissa et Chahinaz,*** *pour leurs encouragements et leur aide ma vie n'aurait pas eu de gout sans elles, mes oncles, tantes, cousins et cousines.*

A mes adorables beaux-frères ***Zin Eddinne,Karime*** *et* ***mohammed Amine.***

A la mémoire de mes grands-mères (***Zakia et Hajira****).*

*A mes chères amis (es):****Nahla, Bicho, Nadjah, Assma, Nadia, Coach Fadila,Romaissa,Flora*** *et* ***Radia*** *qui n'ont cessé dem'encourager.*

A Mon amie ***Mghelima:*** *pour l'encouragement.*

Et A toutes les personnes qui je porte dans mon couer.

A ***Sara*** *pour le travail que nous avons fourni.*

A mes camarades de promos de ***E.D.P.***

Meryem

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail qui est le fruit récolté après tant d'années d'efforts :

*A mon cher **papa:** pour ses précieux conseils et encouragements. Aucune dédicacene saura exprimée l'amour, l'estime et le respect que j'ai pour toi.*

*A ma très chère **Maman** et meilleure amie, qui a œuvré pour ma réussite, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie.*

*A mes chères sœurs, **Somia, Fayza et Chaima** pour leurs encouragements et leur aide ma vie n'aurait pas eu de gout sans elles, mes oncles, tantes, cousins et cousines*

*A la mémoire de mes grands-mères **Messouda***

*A mes chères amis (es):**Wiam, Hoda, Firoz, Naziha et Iman** qui n'ont cessé dem'encourager*

Et A toutes les personnes qui je porte dans mon couer.

*A **Meryem** pour le travail que nous avons fourni*

*A mes camarades de promos de **E.D.P***

Sara

Table des matières

Introduction

Les équations aux dérivées partielles (EDP) apparaissent naturellement dans la modélisation de nombreux problèmes en physique, biologie, économie ou ailleurs.
Dans ce travail, on va étudier deux problèmes aux limites d'évolution décrit par des opérateurs non linéaires, avec des conditions aux limites sur le bord, et une condition initial.
L'un des problèmes est un modèle mathématique gouverné par l'opérateur non linéaire de la diffusion qui s'écrit sous la forme :

$$(P_1)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f, & \text{pour } x \in \Omega, t > 0, \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega, \end{cases}$$

où : p est donné ($p < 2$), u, f représente le vecteur de déplacement et la densité des forces extérieures respectivement.
$u = 0$ sur Γ est la condition au limite de Dirichlet et $u(x,0) = u_0(x)$ est le déplacement initial.
Des problèmes du type précédent interviennent dans de nombreuses applications : comme la théorie de la chaleur, diffusion des gaz.
Le deuxième problème est un problème au limite d'évolution d'ordre 2 défini comme suit :

$$(P_2)\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au + |u|^{\rho}u = f & \text{dans } Q = \Omega\times]0,T[, \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma = \Gamma\times]0,T[, \\ u(x,0) = u_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & \forall x \in \Omega, \end{cases}$$

où u, f représente le vecteur du déplacement, la densité des forces extérieures respectivement et u_0, u_1 et $\rho > 0$ sont des données, $u = 0$ sur Γ est la condition au limite de

dirichlet, $u(x,0) = u_0(x)$, $u'(x,0) = u_1(x)$ sont des conditions initial.
A est un opérateur défini par :

$$\begin{cases} Au = -\sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right), \\ a_{ij} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}\times]0,T[), a_{ij} = a_{ji}\ \forall i,j, \\ \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\zeta_i\zeta_j \geq \alpha(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + ... + \zeta_n^2)\ \alpha > 0,\ \zeta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Le but essentiel est d'étudier l'existence, l'unicité de la solution de ces problèmes et pour étudier en utilisant les techniques de Faedo-Galerkin ; cette méthode est basée sur les étapes suivants :

1. On conclut des solutions approchées par réduction à la dimension finie par la méthode de Faedo-Galerkin.
2. On établi une estimation a priori pour la solution approchée qui nous donne l'existence globale.
3. En fin, on passe à la limite grâce au lemme de compacité.
   Ainsi qu'un résultat de compacité pour démontrer l'existence d'une solution faible du problème considéré, et en passant à la limite pour trouver la solution global.Un résultat nouveau est donné en démontrant l'unicité de la solution en basant sur les hypothèses assez faibles que celle proposé par J. L. Lions [9] pour un problème similaire.

Physiquement :

1) L'équation de la **diffusion** est une solution approchée de l'équation de transport de neutrons, dont les coefficients sont calculés a partir de ceux de l'équation de transport. Dans ce problème, on établit l'équation de la diffusion d'une substance dans un milieu immobile occupant un volume borné de frontière Γ, si l'on connaît la densité $f(x,t)$ de source et si la diffusion se fait avec absorption (par exemple, les particules de la substance entrent en réaction avec est la substance du milieu), la vitesse d'absorption $u(x,t)$ étant en chaque point $x \in \Omega$ proportionnelle à la densité de la substance en diffusion, après quelques considération on obtient l'équation correspondants :

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(D(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}) - qu + f(x,t), \tag{1}$$

où $\rho(x)$ est le degré de porosité du milieu, les qu sont les pêrtes dans le volume isolé dues à l'absorption par le milieu ambiant et $D(x)$ le coefficient de la diffusion.

Si on suppose que $\rho(x) = 1$ et en négligeant d'absorption dans le milieu ambiant (1) devienne :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(D(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}) + f(x,t).$$

Pour $t \in]0,T[$ de $\mathbb{R}_+$, $\Sigma =]0,T[\times\Gamma$ et $D(x) = |u|^{p-2}$ on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(|u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}) = f(x,t), \text{dans } Q.$$

Il est bien clair que le processus de la diffusion se prête à une description univoque à condition de connâtre la répartition de la densité avec $u(x,0) = u_0(x)$ dans Ω. En plus, on décrit le régime diffusionnelle au bord comme suit :

On suppose que la frontière est maintenue à une densité nulle sur la frontière.

Ce mémoire est divisé en trois chapitres :

On donne dans **le premier chapitre**, quelques notions et résultats généraux d'analyse fonctionnelle, en particulier :

— les différentes types de la topologies (la topologie faible et faible *).

— les espaces de Sobolev, nous rappelons la définition et quelques propriétés, et nous allons terminer ce chapitre par quelques résultats d'injection topologique ainsi que compacte entre ces espaces.

Dans **le deuxième chapitre**, nous proposons d'étudier en détail le problème de la diffusion dans sa forme général et nous montrons l'existence et l'unicité de la solution dans le cas d'évolution par la méthode de compacité.

Dans **le troisième chapitre**, de la même manière de second chapitre, nous proposons d'étudier l'existence, l'unicité et la régularité de la solution d'un problème d'ordre 2 non linéaire.

Notations

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$	un ouvert borné.
Γ	la frontière de Ω.
$Q =]0, T[\times \Omega$	un ouvert cylindrique, $T > 0$.
$\Sigma =]0, T[\times \Gamma$	la frontière latérale de Q.
f	la densité des forces volumiques données.
η	le vecteur unitaire normale sortant.
$\frac{\partial u}{\partial \eta}$	la dérivée normale.
∇u	le gradient de u.
Δu	le laplacien de u.
$\mathcal{D}(\Omega)$	l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω.
$\mathcal{D}'(\Omega)$	l'espace des distributions sur Ω.
$L^p(\Omega)$	l'espace des fonctions de puissance p-ième intégrable sur Ω pour la mesure de Lebesgue.
$L^\infty(\Omega)$	l'espace des fonctions (classes) essentiellement bornées.
$W^{1,p}(\Omega)$	l'espace des Sobolev d'ordre 1.
$W_0^{1,p}(\Omega)$	l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Si X un espace de Banach :

$L^p(0,T;X) = \{f :]0,T[\longrightarrow X \text{ mesurable}, \int_0^T \|f(t)\|_X^p dt < \infty\}$,

$L^\infty(0,T;X) = \{f :]0,T[\longrightarrow X\text{mesurable}, \sup_{t\in]0,T[} ess\|f(t)\|_X < \infty\}$.

Chapitre 1

Préliminaires

On rappellera ci-dessus les principaux résultats d'analyse fonctionnelle, dont nous aurons besoin dans toute la suite.

1.1 Généralités et quelques notions de base

1.1.1 Topologie faible

Définition 1.1. *Soit E un espace vectoriel normé, et E' son dual topologique. On appelle topologie faible sur E et que l'on note $\sigma(E, E')$, la topologie la moins fine rendant continues toutes les formes linéaires $f \in E'$.*
On peut recenser les ouverts qui doivent appartenir à la topologie faible de la manière suivante :
Si $f \in E'$ et $U \subset \mathbb{R}$ un ouvert de $\mathbb{R}$. $f^{-1}(U)$ est nécessairement un ouvert de $\sigma(E, E')$. Mais comme les intervalles ouverts forment une base de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$, on voit que ceci revient à dire pour tout intervalle I et tout $f \in E'$, $f^{-1}(I)$ est dans $\sigma(E, E')$.
On vient de montrer la proposition suivant :

Proposition 1.2. *La topologie $\sigma(E, E')$ est la moins fine contenant tous les ensembles $f^{-1}(I)$ pour tout $f \in E'$ et tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.*
Donnons une base de voisinages commode pour $\sigma(E, E')$.

Corollaire 1.3. *Les ouverts de la forme $\bigcap\limits_{i=1}^{k} f_i^{-1}(I_i)$, où $k \in \mathbb{N}$, $f_i \in E'$ et I_i sont des intervalles ouverts quelconques de $\mathbb{R}$, forment une base de voisinage de $\sigma(E, E')$.*

Les ouverts de la forme :

$$U = \{\bigcap_{i=1}^{k} f_i^{-1}(]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[), k \in \mathbb{N}, f_i \in E', \varepsilon > 0\},$$

forment une base de voisinage de $x_0 \in E$.

Définition 1.4. *Si $x_n \longrightarrow x$ dans $\sigma(E, E')$, on notera $x_n \rightharpoonup x$ et on dira que x_n converge faiblement vers x dans E.*

Proposition 1.5. *Soit E un espace de Banach et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E ; alors*

$$x_n \rightharpoonup x \text{ si et seulement si } f(x_n) \longrightarrow f(x), \forall f \in E'.$$

Preuve. La topologie $\sigma(E, E')$ ayant été construite pour que les éléments de E' soient continus, l'implication directe ($\Rightarrow$) est claire, puisque la continuité des f dans E' entraîne leur continuité séquentielle. La réciproque découle de la forme des voisinages dans la topologie faible. On doit montre que si $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ pour tout f, alors pour tout U voisinage de x, il existe $\sigma(E, E')$ tel que :
pour $n \geq n_0$ implique que $x_n \in E$. Or on a vu (corollaire 1.3) qu'on peut choisir des U voisinage de x de la forme :

$$U = \bigcap_{i=1}^{k} f_i^{-1}(]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[).$$

On choisit n_0 assez grand pour que $n \geq n_0 \Rightarrow |f_i(x_n) - f_i(x)| < \varepsilon, i = 1, ..., k$.
Alors $x_n \in U$. On a donc bien $x_n \longrightarrow x$ pour $\sigma(E, E')$. ∎

1.1.2 Topologie faible*

Soit E un espace de Banach, E' son dual (muni de la norme dual $\|f\|_{E'} = \sup\limits_{\substack{x\in E \\ \|x\|\leq 1}} |\langle f, x\rangle|$), E'' son bidual topologique muni de la norme :

$$\|\xi\|_{E''} = \sup_{\substack{f\in E' \\ \|f\|\leq 1}} |\xi(f)|.$$

On a une injection canonique $J : E \longrightarrow E''$. En effet tout élément $x \in E$ définit un élément $J_x \in E''$ par :

$$J_x(f) = f(x).$$

J_x est bien une forme linéaire continue sur E' puisque :

$$|J_x(f)| = |f(x)| \leq \|x\|_E \|f\|_{E'}.$$

En effet $\|J_x\|_{E''} = \|x\|_E$ car :

$$\|J_x\|_{E''} = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |J_x(f)| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)| = \|x\|_E.$$

On a donc $J(E) \subset E''$. Cela va nous permettre de définir une nouvelle topologie sur E'.

Définition 1.6. *La topologie faible* notée $\sigma(E', E)$ est la topologie la moins fine rendant continue les formes linéaires $f \longmapsto f(x)$, pour tout $x \in E$. On a la base de voisinages de $f_0 \in E'$ pour la topologie faible*.*

$$U = \{f \in E', |\langle f - f_0, x_i \rangle| < \varepsilon,\ i = 1, ..., n,\ x_i \in E,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Proposition 1.7. *Soit E un espace de Banach ; si $(f_n)_n$ est une suite de E', alors f_n converge vers f pour la topologie faible* si et seulement si $f(x_n) \to f(x)$, pour tout $x \in E$.*

Preuve. La même démarche que celle de la proposition (1.5). ■

1.1.3 Espaces réflexifs, espaces séparables

Soit E un espace de Banach et $J : E \to E''$ l'injection canonique de E dans E'', définie par $J_x(f) = f(x)$ pour tout $x \in E$, $f \in E'$.

Définition 1.8. *L'espace E est dit réflexif, ssi $J(E) = E''$.*

Théorème 1.9. *Soit E un espace de Banach réflexif; alors toute suite bornée dans E admet au moins une sous-suite faiblement convergente.*

Preuve. Voir H.Brezis [5]. ■

Définition 1.10. *Un espace métrique séparable est un espace métrique qui contient un sous ensemble **D** dense et dénombrable.*

Théorème 1.11. *Soit E un espace de Banach séparable ; alors toute suite bornée $(f_n)_n$ dans E' admet au moins une sous-suite faiblement* convergente.*

Preuve. Voir H.Brezis [5]. ■

1.2 Opérateurs compacts

Définition 1.12. *Soit H un espace de Hilbert, un opérateur linéaire continu T de H dans H est dit compact s'il transforme tout ensemble borné en un ensemble relativement compact .*

Proposition 1.13. *Un opérateur linéaire est compact si et seulement si il transforme toute suite faiblement convergente en une suite admettant au moins une sous-suite fortement convergente.*

1.3 Espaces de Sobolev

Soit $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach, $1 \leq p < \infty$ et $T > 0$. On définit l'espace $L^p(0,T;X)$ comme suit :

$$L^p(0,T;X) = \{\ f :]0,T[\to X,\ telle\ que\ f\ mesurable\ et \int_0^T \|f(t)\|_X^p dt < \infty\};$$

cet espace est munit de la norme :

$$\|f\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}};$$

et pour $p = \infty$,on pose :

$$\|f\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t\in]0.T[} ess\|f\|_X.$$

Propriétés

(i) Pour $1 \leq p \leq \infty$ $L^p(0,T;X)$ est un espace de Banach et en particulier, $L^2(0,T;X)$ est un espace de Hilbert, lorsque X est un espace de Hilbert.
(ii) Pour $1 < p < \infty$ et si X réflexif, alors $L^p(0,T;X)$ est un espace réflexif.
(iii) Pour $1 \leq p < \infty$ et si X est séparable, alors $L^p(0,T;X)$ et aussi séparable.

1.3.1 Espace de Sobolev d'ordre entier

Définition 1.14. *Soit p un réel, $1 \leq p \leq \infty$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et m un entier naturel. On appelle espace de Sobolev d'ordre m et on note $H^m(\Omega)$. L'ensemble :*

$$H^m(\Omega)=\{\ u\ mesurable,\ tel\ que\ D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ \forall\alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \leq m\ \},$$

où : $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n}$, *désigne la dérivée d'ordre* α *au sens des distributions avec* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$.

Quelques propriétés des espaces $H^m(\Omega)$

(i) On munit l'espace $H^m(\Omega)$ du produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \forall u, v \in H^m(\Omega).$$

la norme associé étant donné par

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = (\sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}, \forall u \in H^m(\Omega),$$

de plus, il est bien connu que cet espace est un espace de Hilbert.
(ii) Pour $m = 0$, on a $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ et pour tout $m_1 > m_2$, on a :

$$H^{m_1}(\Omega) \subset H^{m_2}(\Omega) \text{ avec injection continu.}$$

(iii) Pour tout $m \geq 0$, $H^m(\Omega)$ est un espace séparable.
(iv) pour tout $m \geq 0$, nous désignons par $H_0^m(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$:

$$H_0^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)} \text{ dans } H^m(\Omega),$$

et par $H^{-m}(\Omega)$ le dual topologique de $H_0^m(\Omega)$.
(v) Grâce aux applications traces, que nous allons voir après, les espaces $H_0^m(\Omega)$ peuvent être définit comme suit :

$$H_0^m(\Omega) = \{u \in H^m(\Omega) \text{ telle que : } \tfrac{\partial^j u}{\partial n^j} = 0, \forall j = 0, ..., m-1\},$$

où : $\frac{\partial}{\partial n}$ est la dérivée normale de u suivant la normale extérieur à $\Gamma = \partial\Omega$:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) n_i, \forall x \in \Gamma.$$

1.3.2 Espaces de Sobolev d'ordre non entier

Définition 1.15. *Soit* s *un réel,* $0 < s < 1$ *et* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*, on désigne par* $H^s(\Omega)$ *l'espace :*

$$H^s(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \textit{ tel que} \iint_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}} dxdy < \infty\},$$

munit de la norme :

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = (\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \iint_{\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}} dxdy)^{\frac{1}{2}}.$$

Si s désigne un réel positif de partie entière [s]=m, l'espace $H^m(\Omega)$ peut être définit de la manière suivante :

$$H^s(\Omega) = \{u \in H^m(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| = m,\ D^\alpha u \in H^{s-m}(\Omega)\},$$

lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$, nous pouvons définir l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ au moyen de la transformée de Fourier. En effet, si $v \in L^2(\Omega)$, sa transformée de Fourier est donnée par :

$$v(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\Omega} exp(-ix\xi) v(x) dx, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Et nous avons :

$$H^s(\Omega) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n),\ tel\ que\ (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} v(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

munit de la norme :

$$\|v\|_{H^s(\Omega)} = \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} v(\xi)\|_{L^2(\Omega)},$$

qui est équivalente à la norme de $H^s(\mathbb{R}^n)$,(voir P.A.Raviart et J.M.Thomas [11] page 28-33)

Théorème 1.16. ***(Inégalité de Poincaré-Friedrich)*** *On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, alors il existe une constante positive C ne dépendant que de la géométrie de Ω telle que toute fonction v de $H_0^1(\Omega)$ vérifie :*

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\int_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial v}{\partial x_j})^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Cette inégalité permet de démontrer facilement le résultat suivant :

Corollaire 1.17. *La semi norme*

$$|v|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial v}{\partial x_j})^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

est une norme sur l'espace $H_0^1(\Omega)$, équivalent à la norme $\|.\|_{H^1(\Omega)}$.

Preuve. La démonstration de ce théorème est détaillée dans P.A.Raviant et J.M.Thomas [11]. (théorème 1.2.5, page 18). ∎

1.3.3 Formule de Green

Rappelons qu'un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ et de frontière Γ est dit de classe C^k si Γ est une variété de dimension $n-1$ est de classe C^k, $k \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 1.18. *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$ (par exemple Ω de classe C^1 avec Γ bornée); alors pour tout $u,v \in H^1(\Omega)$, on a la formule de Green :*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma u.v.\eta_i d\Gamma,$$

où $\eta_i = (\eta_i)_{1\leq i\leq n}$ est la normale unité extérieure à Γ.

Preuve. On pourra consulter Raviart et Thomas [11].
Cette formule est une " intégration par partie généralisée " son importance est extrême par la suite. ■

Corollaire 1.19. *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1. pour toute fonction u de $H^2(\Omega)$ et toute fonction v de $H^1(\Omega)$, on a la formule de Green :*

$$-\int_\Omega \Delta u(x).v(x)dx = \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta}.v(x)d\Gamma,$$

où

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u.\eta$$

.

Preuve. Voir H.Brezis [5]. ■

1.4 Application trace sur $H^m(\Omega)$

Désignons par $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ l'espace des restrictions des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ à $\overline{\Omega}$. Nous pouvons alors parler de la trace d'une fonction $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ et nous définissons l'application :

$$\gamma \ : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to L^2(\Gamma)$$
$$\varphi \longmapsto \gamma(\varphi) = \varphi_{|\Gamma}.$$

L'application γ est dite application trace. Il est bien connu qu'elle est linéaire est continue au sens de la norme de $H^1(\Omega)$, il est aussi connu que si Ω est régulier, alors $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.
Ceci nous permet d'énoncer le résultat suivant :

Théorème 1.20. *On suppose que Ω est un ouvert borné de frontière Γ assez régulière. Alors l'application γ de :*

$$\mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to L^2(\Gamma),$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue de :

$$\begin{aligned} H^s(\Omega) &\to \ L^2(\Gamma) \\ u &\longmapsto \gamma(u). \end{aligned}$$

Preuve. Voir Lions-Magenes [10]. ■

Lemme 1.21. *Soit Q un ouvert borné de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$, g_μ et g des fonctions de $L^q(Q)$, $1 < q < \infty$, telles que :*

$$\|g_\mu\|_{L^q(Q)} \leq C,\ g_\mu \to g \ p.p \ dans \ Q,$$

alors

$$g_\mu \to g \ dans \ L^q(Q) \ faible.$$

Preuve. Voir le livre de J. L. Lions [9] (page 13). ■

Théorème 1.22. *Soit F un espace de Banach réflexif strictement convexe ainsi que son dual, soit J l'application de dualité de $F \to F'$ relative à ϕ, pour f donné dans F', il existe u unique dans F tel que :*

$$J(u) = f.$$

Théorème 1.23. ***(théorème d'Egorove)*** *est un théorème de la théorie de la mesure qui dit que si une suite de fonctions converge simplement, alors elle converge uniformément sur un gros ensemble.*

Théorème 1.24. *Soit (X, B, m) un espace mesuré fini, soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables, $(f_n) : X \to \mathbb{C}$ converge simplement vers une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie $A \subset B$ telle que $mes(X/A) \leq \varepsilon$ et telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A.*

Théorème 1.25. ***(Théorème de Rellich*** *) Soit Ω un ouvert borné régulière de classe C^1. Alors l'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, est compacte, et on dit que $H^1(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $L^2(\Omega)$.*

Théorème 1.26. ***(Théorème de représentation de Riesz)*** *Soit* $1 < p < \infty$ *et soit* $\varphi \in (L^p)'$. *Alors il existe* $u \in L^{p'}$ *unique tel que :*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int ufdx \quad \forall f \in L^p.$$

De plus on a :

$$\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{(L^p)'}.$$

Lemme 1.27. *Si* $f \in L^p(0, T; X)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial t} \in L^p(0, T; X)(1 \leq p \leq \infty)$, *alors* f *est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de* $(0, T)$, *continue de* $[0, T] \longrightarrow X$.

Chapitre 2

Problème d'évolution du première ordre non linéaire

Dans ce chapitre on va étudier un problème aux limites non linéaire d'évolution dégénérés. On démontre un théorème d'existence et d'unicité de la solution, en utilisant la méthode de compacité de Faedo-Galerkin.

2.1 Notations et position du problème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière Γ, Q désignera le cylindre latérale $\Omega\times]0,T[$, $T>0$ de frontière $\Sigma=\Gamma\times]0,T[$.
Étant donnée f, on cherche une fonction $u(x,t)$ solution du problème suivant :

$$(P_1)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=f, & \text{pour } x\in\Omega, t>0, \quad (2.1)\\ u=0 & \text{sur } \Sigma, \quad (2.2)\\ u(x,0)=u_0(x) & x\in\Omega. \quad (2.3)\end{cases}$$

où u, f représente le vecteur du déplacement, la densité des forces extérieures respectivement et u_0 et p sont des données $(1<p<\infty)$.

2.2 Résultats de compacité

2.2.1 Lemme de compacité

Soient B_0, B et B_1 trois espaces de Banach, tels que $B_0 \subset B \subset B_1$, avec injection continus et avec $B_i, i = 0, 1$ réflexifs et en plus l'injection $B_0 \longrightarrow B$ est compacte. On définit l'espace :

$$W = \{v \in L^{p_0}(0, T; B_0),\ \textit{tel que } v' = \tfrac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0, T; B_1)\},$$

munit de la norme :

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)},$$

où T est fini et $1 < p_i < \infty$, $i = 0, 1$ est un espace de Banach réflexif.
On a le lemme suivant :

Lemme 2.1. *W est un espace de Banach inclus dans $L^{p_0}(0, T; B)$ et en plus l'injection $W \longrightarrow L^{p_0}(0, T; B)$ est compacte.*

2.2.2 Un résultat supplémentaire de compacité :

Le résultat est une généralisation du lemme précédent. En remplace alors l'espace B_0 par un ensemble S, munit d'une fonction $v \longmapsto M(v)$ de S dans $\mathbb{R}^+$, avec :
1) $S \subset B \subset B_1$;
2) $M(v) \geq 0$ sur S ;
3) $M(\lambda v) = |\lambda| M(v)$.
On suppose que l'ensemble $\{v \in S, M(v) \leq 1\}$ est relativement compacte dans B, puis on considère ensuite l'ensemble A définit comme suit :

$$A = \{v \text{ localement sommable sur }]0, T[\text{ à valeurs dans } B_1 \ \textit{telque} \ \int_0^T M(v(t))^{p_0} dt \leq c_1\},$$

et v' appartient à un borné de $L^{p_1}(0, T; B_1)$.

Théorème 2.2. *On suppose que les hypothèses ci-dessus ont lieu, alors l'ensemble A est relativement compacte dans $L^{p_0}(0, T; B)$ pour $1 < p_i < \infty$, $i = 0, 1$.*

Proposition 2.3. *Soit*

$$S = \{v \text{ tel que } |v|^{\frac{p-2}{2}} v \in H_0^1(\Omega)\}, \tag{2.4}$$

et $M(v)$ donnée par :

$$M(v) = \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |v|^{p-2} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.5}$$

Alors pour $B = L^p(\Omega)$, l'ensemble $\{v \text{ tel que } v \in S, M(v) \leq 1\}$ est relativement compacte dans B.

Preuve. Notons d'abord qu'on a :

$$\begin{aligned} M(v) &= \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |v|^{p-2} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(|v|^{\frac{p-2}{2}} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\frac{4}{p^2} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (|v|^{\frac{p-2}{2}} v) \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Posons $\beta(v) = |v|^{\frac{p-2}{2}} v$.

Soit $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de S est telle que : $M(v_m) \leq 1$, alors $\beta(v_m)$ demeure dans un borné de $H_0^1(\Omega)$, donc de $L^q(\Omega)$ pour $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$, si $n > 2$ (d'après le théorème de Rellich), où bien pour q fini quelconque si $n = 2$. Donc :

$$\int_{\Omega} | \, |v_m|^{\frac{p-2}{2}} v_m|^q dx < \infty,$$

d'où

$$\int_{\Omega} | \, |v_m|^{\frac{p-2+2}{2}} |^q dx < \infty,$$

il résulte que :

$$\int_{\Omega} |v_m|^{\frac{pq}{2}} dx < \infty,$$

et donc v_m demeure dans un borné de $L^{\frac{pq}{2}}(\Omega)$, donc on peut extraire une sous suite $(v_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ de $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$v_\mu \longrightarrow v \text{ dans } L^{\frac{pq}{2}}(\Omega) \text{ faiblement }. \tag{2.6}$$

et comme l'injection de $H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$, est compacte, on obtient :

$$\beta(v_\mu) \longrightarrow \chi \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort et p.p .} \tag{2.7}$$

L'application $\beta : v \longmapsto \beta(v)$ est monotone donc de (2.7) :

$$v_\mu \longrightarrow \beta^{-1}(\chi) \text{ p.p sur } \Omega.$$

Alors d'après le lemme (1.21)

$$v_\mu \longrightarrow \beta^{-1}(\chi) \text{ dans } L^{\frac{pq}{2}}(\Omega) \text{ faible ,}$$

et de (2.6) on en déduit que : $\beta^{-1}(\chi) = v$ et que :

$$v_\mu \longrightarrow v \text{ dans } L^{\frac{pq}{2}}(\Omega) \text{ faible et p.p ,}$$

ce que entraîne que :

$$v_\mu \longrightarrow v \text{ dans } L^s(\Omega) \text{ fort}, \forall s < \frac{pq}{2}.$$

En effet d'après le théorème d'Egorov pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie $A \subset \Omega$, avec $mes(\Omega/A) \leq \varepsilon$ tel que :

$$v_\mu \longrightarrow v \text{ dans } C_\Omega^A \text{ uniformément ,} \tag{2.8}$$

où C_Ω^A est le complémentaire de A dans Ω, on a alors :

$$\begin{aligned}\int_\Omega |v_\mu - v|^s dx &= \int_A |v_\mu - v|^s dx + \int_{C_\Omega^A} |v_\mu - v|^s dx \\ &\leq \int_{C_\Omega^A} |v_\mu - v|^s dx + \left(\int_A |v_\mu - v|^{\frac{pq}{2}} dx \right)^\theta \varepsilon^{1-\theta},\end{aligned}$$

où : $\theta = \frac{2s}{pq}$

on faisant tendre μ vers ∞ on obtient :

$$\lim_{\mu\to\infty} \int_\Omega |v_\mu - v|^s dx \leq \lim_{\mu\to\infty} \int_{C_\Omega^A} |v_\mu - v|^s dx + \lim_{\mu\to\infty} \left(\int_A |v_\mu - v|^{\frac{pq}{2}} dx \right)^\theta \varepsilon^{1-\theta},$$

telle que :

$$\lim_{\mu\to\infty} \int_{C_\Omega^A} |v_\mu - v|^s dx \longrightarrow 0,$$

ce qui donne d'après (2.8),

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_{\Omega}|v_\mu - v|^s dx \le \lim_{\mu\to\infty}\left(\int_{A}|v_\mu - v|^{\frac{pq}{2}}dx\right)^{\theta}\varepsilon^{1-\theta}$$
$$\le \lim_{\mu\to\infty}\left(\int_{A}|v_\mu - v|^{s}dx\right)^{\theta}\varepsilon^{1-\theta},$$

et enfin si l'on fait tendre ε vers 0, on obtient :

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_{\Omega}|v_\mu - v|^s dx = 0,$$

et par conséquent :

$$v_\mu \longrightarrow v \text{ dans } L^s(\Omega) \text{ fort pour } s < \tfrac{pq}{2},$$

donc en particulier pour $s = p$. ■

Théorème 2.4. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, p et q deux réels, tels que : $1 < p < \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors l'application définie sur $L^p(\Omega)$ par : $u \longmapsto |u|^{p-2}u$, est à valeurs dans $L^q(\Omega)$, de plus, elle est continue.*

2.3 Existence et unicité

Théorème 2.5. *Soit f donné dans $L^q(Q)$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et u_0 donné dons $L^2(\Omega)$, alors il existe une fonction u et une seule, telle que :*

$$u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.9}$$
$$|u|^{\frac{(p-2)}{2}}u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{2.10}$$
$$u' \in L^q(0,T;w^{-1,p}(\Omega)), \tag{2.11}$$

et u est solution du problème (P_1).

Notation : Pour simplifier l'écriture, on posera :

$$u(x,t) = u;\ \ f(x,t) = f;\ \ \frac{\partial u}{\partial t} = u'.$$

Preuve.

1) **L'existence :**

La démonstration est basée sur la méthode de Faedo-Galerkin qui consiste à réalise les trois étapes suivantes :

— Recherche de solutions approchées, (construction d'une suite de solutions du problème dans un sens fini).

— On établit, sur ces solutions approchées, des estimations a priori.

— On passe à la limite, grâce à des propriétés de compacité (dans les termes non linéaires), pour obtenir une solution globale du problème.

2.3.1 Solutions approchées

. - La formulation variationnelle :

On choisit r de façon que :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\Omega) \text{ si } \varphi \in H_0^r(\Omega).$$

On prendra

$$r = (\frac{p-2}{2})\frac{n}{p} + 2;$$

en effet, on a alors :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \in H_0^{(\frac{p-2}{2})\frac{n}{p}}(\Omega). \tag{2.12}$$

L'espace $V = H_0^r(\Omega)$ est séparable, alors il existe une suite $(w_1, ..., w_m)$ ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} w_j \in V, \ \forall j; \\ \forall m, (w_1, ..., w_m) \text{ sont linéairement indépéndants ;} \\ V_m = \langle \{w_1, w_2, ..., w_m\} \rangle \text{ est dense dans } V, \end{cases}$$

on prend pour w_j les fonctions propres :

$$(w_j, v(t))_{H_0^r(\Omega)} = \lambda_j (w_j, v(t))_{L^2(\Omega)}, \forall v \in H_0^r(\Omega). \tag{2.13}$$

Si l'on multiple l'équation (2.1) par (w_j) (produit scalaire) on obtient :

$$\int_\Omega u'(t) w_j dx - \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|u(t)|^{p-2} \frac{\partial u(t)}{\partial x_i} \right) w_j dx = \int_\Omega f(t) w_j dx.$$

Vu la formule de Green et les conditions aux limites (2.2), (2.3) on obtient :

$$(u'(t), w_j)_{0,\Omega} + (\sum_{i=1}^{n} |u(t)|^{p-2} \frac{\partial u(t)}{\partial x_i}, \frac{\partial w_j}{\partial x_i})_{0,\Omega} = (f(t), w_j)_{0,\Omega},\ \forall w_j \in H_0^1(\Omega), j = 1, ..., n. \tag{2.14}$$

En particulier :
$\forall u_0 \in V \longrightarrow \exists (u_{0_m})_{m\in\mathbb{N}},\ u_{0m} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jm} w_j \longrightarrow u_0$ lorsque $m \longrightarrow \infty$.
On définit maintenant les solutions approchées $u_m(t)$ des problèmes (P_m) par

$$(P_m) \begin{cases} u_m(t) \in V_m. \\ (u'_m(t), w_j)_{0,\Omega} + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} |u_m(t)|^{p-2} \frac{\partial u_m(t)}{\partial x_i} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dx = (f(t), w_j)_{0,\Omega}, & (2.15) \\ \qquad\qquad \forall j = 1, ..., m \\ u_m(0) = u_{0_m}. & (2.16) \end{cases}$$

On a $u_m(t) \in V_m$, alors $\exists (g_{jm})_{1\leq j\leq m}$ telles que :

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j.$$

Si l'on injecte l'expression de $u_m(t)$ dans les (P_m) on obtient pour tout m un système des problèmes en fonction des coefficients g_{im} qui admettent des solutions d'après les résultats généraux sur les équations différentielles ordinaires. Par conséquent on est assuré l'existence des solutions approchées $u_m(t) \in V_m$.

2.3.2 Estimations a priori

- Estimation sur u_m :

On multiple l'équation (2.15) par $g_{jm}(t)$ on trouve :

$$(u'_m(t), g_{jm}(t) w_j)_{0,\Omega} + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} |u_m(t)|^{p-2} \frac{\partial u_m(t)}{\partial x_i} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} g_{jm} dx = (f(t), g_{jm}(t) w_j)_{0,\Omega},$$

en sommant sur $j = 1, ..., m$, on trouve :

$$(u'_m(t), \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j)_{0,\Omega} + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |u_m(t)|^{p-2} \frac{\partial u_m(t)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j dx = (f(t), \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j)_{0,\Omega},$$

on a

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j,$$

donc

$$(u_m'(t), u_m(t))_{0,\Omega} + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |u_m(t)|^{p-2} \left(\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_i}\right)^2 dx = (f(t), u_m(t))_{0,\Omega}, \tag{2.17}$$

on a d'une part :

$$\begin{aligned}(u_m'(t), u_m(t))_{0,\Omega} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_m(t)|^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{2.18}$$

et d'autre part on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |u_m(t)|^{p-2} \left(\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_i}\right)^2 dx = \frac{4}{p^2}\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(|u_m(t)|^{\frac{p-2}{2}} u_m(t)\right)^2 dx. \tag{2.19}$$

On substituons (2.18) et (2.19) dans (2.17) et on intègre de 0 à t pour $t \in [0, t_m]$, on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}|u_m(x,\sigma)|^2_{L^2(\Omega)} d\sigma + \int_0^t \frac{4}{p^2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(|u_m|^{\frac{p-2}{2}} u_m)(x,\sigma)\right)^2 dx d\sigma \\ = \int_0^t (f(x,\sigma), u_m(x,\sigma))_{0,\Omega} d\sigma;\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Young $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|u_m(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{4}{p^2}\int_0^t \| \, |u_m(\sigma)|^{\frac{p-2}{2}} u_m(\sigma)\|^2_{H_0^1(\Omega)} d\sigma - \int_0^t \frac{1}{p}|u_m(\sigma)|^p d\sigma \\ \leq \int_0^t \frac{1}{q}|f(x,\sigma)|^q d\sigma + \frac{1}{2}|u_m(0)|_{L^2(\Omega)};\end{aligned}$$

on a supposé que $f \in L^q(\Omega)$, donc :

$$\int_0^t \frac{1}{q}|f(x,\sigma)|^q d\sigma < \infty;$$

alors

$$\int_0^t \frac{1}{q}|f(x,\sigma)|^q d\sigma + \frac{1}{2}|u_m(0)|_{L^2(\Omega)} < \infty;$$

ce qui montre que :

$$\frac{1}{2}|u_m(x,t)|^2_{L^2(\Omega)} = \|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} < \infty,$$

alors il résulte que :

$$u_m \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.20}$$

Et pour $t_m = T$ on trouve de même que :

$$\frac{4}{p^2}\| \, |u_m(x,\sigma)|^{\frac{p-2}{2}} u_m(x,\sigma)\|^2_{H_0^1(\Omega)} < \infty,$$

donc

$$|u_m|^{\frac{p-2}{2}}u_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{2.21}$$

-Estimation sur u'_m :

L'application

$$\begin{aligned} a(.,.) : L^p(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ v &\longmapsto a(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx; \end{aligned} \tag{2.22}$$

est une forme bilinéaire continue, alors d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un élément noté $g(u)$ de $L^q(\Omega)$ tel que :

$$a(u,v) = \langle g(u), v\rangle_{L^q(\Omega),L^p(\Omega)} \tag{2.23}$$

et de plus il vérifie :

$$\|g(u)\|_{H^{-r}(\Omega)} \leq c\|u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}. \tag{2.24}$$

Car : si on prend $u, v \in H_0^r(\Omega)$, la représentation de $a(u,v)$ reste vraie puisque l'espace $H_0^r(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, d'après la relation ($r = (\frac{p-2}{2})\frac{n}{p} + 2$) et le théorème de Sobolev fractionnaire, donc $g(u) \in H^{-r}(\Omega)$ puisque $L^q(\Omega) \subset H^{-r}(\Omega)$.

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(|u(t)|^{p-2}u(t)) &= (p-2)|u(t)|^{p-3}\frac{\partial u(t)}{\partial x_i}u(t) + |u(t)|^{p-2}\frac{\partial u(t)}{\partial x_i} \\ &= (p-2)|u(t)|^{p-2}\frac{\partial u(t)}{\partial x_i} + |u(t)|^{p-2}\frac{\partial u(t)}{\partial x_i} \\ &= (p-1)\left(|u(t)|^{p-2}\frac{\partial u(t)}{\partial x_i}\right); \end{aligned}$$

d'où

$$|u(t)|^{p-2}\frac{\partial u(t)}{\partial x_i} = \frac{1}{p-1}\frac{\partial}{\partial x_i}(|u(t)|^{p-2}u(t));$$

et par conséquent :

$$a(u(t),v(t)) = \frac{1}{p-1}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(|u(t)|^{p-2}u(t))\frac{\partial v(t)}{\partial x_i}dx;$$

pour $u, v \in H_0^r(\Omega)$ et l'intégration par partie on obtient :

$$\begin{aligned} a(u(t),v(t)) &= \frac{1}{p-1}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}(|u(t)|^{p-2}u(t))\frac{\partial^2 v(t)}{\partial x_i^2}dx \\ &= \frac{1}{p-1}\int_{\Omega}(|u(t)|^{p-2}u(t))\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 v(t)}{\partial x_i^2}dx \\ &= \frac{1}{p-1}\int_{\Omega}(|u(t)|^{p-2}u(t))\Delta v(t)dx. \end{aligned}$$

Donc pour $u, v \in H_0^r(\Omega)$ on a :

$$|a(u(t), v(t))| \leq \frac{1}{p-1} \int_\Omega |u(t)|^{p-2}|u(t)||\Delta v(t)|dx$$
$$\leq \frac{1}{p-1} \int_\Omega ||u(t)|^{p-1}\Delta v(t)|dx, \tag{2.25}$$

et d'après le théorème 2.4 l'application $u \longmapsto |u|^{p-2}u$ à valeurs dans $L^q(\Omega)$ est continue, on a pour $u \in H_0^r(\Omega)$:

$$|u|^{p-2}u \in L^q(\Omega),$$

et d'après la relation (2.12) $\Delta v \in L^q(\Omega)$, pour $v \in H_0^1(\Omega)$, alors par l'utilisation du l'inégalité de Hölder (2.25) équivalent à :

$$|a(u(t), v(t))| \leq \frac{1}{p-1} \|u(t)^{p-2}u(t)\|_{L^q(\Omega)} \|\Delta v\|_{L^p(\Omega)}$$
$$\leq \frac{1}{p-1} \left(\int_\Omega ||u(t)|^{p-2}u(t)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \|\Delta v\|_{L^p(\Omega)}$$
$$\leq \frac{1}{p-1} \left(\int_\Omega |u(t)|^p dx \right)^{\frac{1}{q}} \|\Delta v\|_{L^p(\Omega)},$$

d'où

$$|a(u, v)| \leq \frac{1}{p-1} \|u\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}} \|\Delta v\|_{L^p(\Omega)},$$

et puisque Δ est un opérateur continu de $H_0^r(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$, il existe $c > 0$ tel que :

$$\|\Delta v\|_{L^p(\Omega)} \leq c\|v\|_{H_0^r(\Omega)},$$

donc

$$|a(u(t), v(t))| \leq c\|u(t)\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|v(t)\|_{H_0^r(\Omega)},$$

ce qui donne :

$$|(g(u), v)| \leq c\|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|v\|_{H_0^r(\Omega)}. \tag{2.26}$$

Vu la définition de la norme dans un espace dual

$$\|g(u)\|_{H^{-r}(\Omega)} = \sup_{\substack{v \in H_0^r(\Omega) \\ \|v\| \leq 1}} |(g(u), v)|,$$

donc or de (2,26), il résulte que :

$$\sup_{\substack{v \in H_0^r(\Omega) \\ \|v\| \leq 1}} |(g(u), v)| \leq c\|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \sup_{\substack{v \in H_0^r(\Omega) \\ \|v\| \leq 1}} \|v\|_{H_0^r(\Omega)};$$

d'où (2,24).

De l'équation (2,15) on a :

$$(u'_m(t) - g(u_m(t)) - f(t), w_j) = 0,\ \forall j = 1, ..., m, \tag{2.27}$$

avec

$$\|g(u)\|_{H^{-r}(\Omega)} \leq c\|u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)},$$

d'où

$$\|g(u)\|^q_{H^{-r}(\Omega)} \leq c\|u\|^{q(p-1)}_{L^p(\Omega)},$$

on intègre de 0 à T on trouve :

$$\begin{aligned}\int_0^T \|g(u)\|^q_{H^{-r}(\Omega)}dt &\leq \int_0^T c\|u\|^{q(p-1)}_{L^p(\Omega)}dt\\ &\leq c\int_0^T \|u\|^p_{L^p(\Omega)}dt\\ &\leq c\int_0^T \|u\|^p_{H_0^r(\Omega)}dt,\end{aligned} \tag{2.28}$$

alors

$$\int_0^T \|g(u)\|^q_{H^{-r}(\Omega)}dt \leq c\int_0^T \|u\|^p_{H_0^r(\Omega)}dt$$

d'autre part on a de (2.21) :

$$\int_0^T \|\ |u_m|^{\frac{p-2}{2}}u_m\|^2_{H_0^r(\Omega)}dt < \infty,$$

ce qui implique que :

$$\int_0^T \|u_m\|^p_{H_0^r(\Omega)}dt < \infty,$$

donc d'après (2.28) on en déduit que :

$$\int_0^T \|g(u_m)\|^q_{H^{-r}(\Omega)}dt < \infty,$$

ce qui entraîne de dire que :

$$g(u_m) \text{ appartient dans un borné de } L^q(0,T;H^{-r}(\Omega)). \tag{2.29}$$

Soit P_m la projection Orthogonale (dans $L^2(\Omega)$ sur $[w_1, w_2, ..., w_m]$), P_m est borné dans $\mathcal{L}(H_0^r(\Omega), H_0^r(\Omega))$ et dans $\mathcal{L}(H^{-r}(\Omega), H^{-r}(\Omega))$; alors l'équation (2.27) s'écrit sous la forme :

$$u'_m = P_m(g(u_m) + f)$$

et puisque $g(u_m) \in L^q(0,T;H^{-r}(\Omega))$ et $f \in L^q(\Omega)$, on obtient : '

$$u'_m \text{ demeure dans un borné de } L^q(0,T;H^{-r}(\Omega)) \tag{2.30}$$

2.3.3 Passage à la limite

Maintenant, on va appliquer la proposition (2.3) avec : S donné par (2.4) et $M(v)$ donné par (2.5) ; de sorte que (2.21) équivalent à

$$\int_0^T \|u_m^{\frac{p-2}{2}} u_m\|^2_{H_0^1(\Omega)} dt \leq c,$$

par définition ca donne :

$$\int_0^T \left(\left(\sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (|u_m(t)|^{\frac{p-2}{2}} u_m(t)) \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 dt \leq c,$$

d'où

$$\int_0^T \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (|u_m(t)|^{\frac{p-2}{2}} u_m(t)) \right)^2 dxdt \leq c, \tag{2.31}$$

donc

$$\int_0^T \frac{4}{p^2} \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (|u_m(t)|^{\frac{p-2}{2}} u_m(t)) \right)^2 dxdt \leq c,$$

d'autre part, on a de (2.5) :

$$M(v) = \left(\frac{4}{p^2} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (|u_m(t)|^{\frac{p-2}{2}} u_m(t)) \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

alors de (2.31) il résulte que :

$$\int_0^T M(u_m(t))^p dt \leq c, \tag{2.32}$$

on prend aussi $B_1 = H^{-r}(\Omega)$ et $p_1 = q$ et $B = L^p(\Omega)$, alors d'après la proposition (2.3) et le théorème (2.4) l'ensemble

A=$\{v$ localement sommable sur $]0,1[$ à valeurs dans $H^{-r}(\Omega)$, $\int_0^T M(v(t))^p dt \leq c$ et v' appartient à un borné de $L^q(0,T;H^{-r}(\Omega))\}$

est relativement compacte dans $L^p(0,T;L^p(\Omega))$.

D'autre part on a : u_m est localement sommable sur $]0,T[$ à valeurs dans $L^2(\Omega)$ d'après (2.20) dans $H^{-r}(\Omega)$. On déduit alors avec (2.30) et (2.32) que $u_m \in A$, donc en peut extraire une sous suite $(u_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ convergente fortement et p.p dans $L^p(0,T;L^p(\Omega))$ on trouve enfin :

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ dans } L^p(0,T;L^p(\Omega)) \text{ fort et p.p }, \tag{2.33}$$

et d'après (2.20), (2.21) on a :

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faiblement },\tag{2.34}$$

et

$$\beta(u_\mu) = |u_\mu|^{p-2}u_\mu \longrightarrow \chi \text{ dans } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ faiblement }.\tag{2.35}$$

Finalement reste à montrer que dans un sens faible u résoud le problème (P_1).
Si on applique le lemme (1.21) avec :

$$g_\mu = |u_\mu(t)|^{\frac{p-2}{2}}u_\mu(t), g = |u(t)|^{\frac{p-2}{2}}u(t), q = 2;$$

et on a

$$\|g\|_{L^2(Q)} \leq c,$$

et de (2.33)

$$g_\mu \longrightarrow g \text{ dans } Q \text{ p.p },$$

donc on obtient :

$$g_\mu \longrightarrow g \text{ faiblement dans } L^2(Q)\,;$$

et avec (2.35) on en déduit que :

$$\chi = |u(t)|^{\frac{p-2}{2}}u(t),$$

d'autre part de (2.35) et (2.30)

$$u'_\mu \longrightarrow u' \text{ dans } L^q(0,T;H^{-r}(\Omega)) \text{ faiblement },\tag{2.36}$$

et aussi de (2.35) on a :

$$u \in L^p(0,T,L^p(\Omega)) \subset L^q(0,T;H^{-r}(\Omega)),$$

donc d'après le lemme (1.27), u est continue sur $[0,T]$ et $u(0)$ a un sens, alors on déduit de (2.34) que :

$$u_\mu(0) \longrightarrow u(0) \text{ dans } L^2(\Omega),$$

et de l'équation (2.16) on a :

$$u_\mu(0) \longrightarrow u_{\mu_0} \longrightarrow u_0 \text{ dans } L^2(\Omega),$$

donc il résulte que :

$$u(0) = u_0. \tag{2.37}$$

Si on remplace m par μ dans $(2,11)$ et fait tendre μ vers l'infini on obtient :

$$(u'(t), w_j)_{0,\Omega} - \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |u(t)|^{p-2} \frac{\partial u(t)}{\partial x_i} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dx = (f(t), w_j)_{0,\Omega}, j = 1, ..., \infty, \tag{2.38}$$

on obtient alors d'après la propriété de densité de la base $(w_j)_j$ que :

$$(u'_m(t), v(t))_{0,\Omega} - \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial}{\partial x_i}(|u_m(t)|^{p-2} \frac{\partial u_m(t)}{\partial x_i}), v(t))_{0,\Omega} = (f(t), v(t))_{0,\Omega}, \forall v \in L^2(\Omega). \tag{2.39}$$

alors u vérifie (2.1) et (2.2) et aussi (2.9), (2.10). Reste à vérifier (2.7)

on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(|u(t)|^{p-2} u) = (p-1)|u(t)|^{p-2} \frac{\partial u(t)}{\partial x_i} \tag{2.40}$$

où bien

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(|u(t)|^{p-2} u(t)) = (p-1)(|u(t)|^{\frac{p-2}{2}} \frac{\partial u(t)}{\partial x_i})|u(t)|^{\frac{p-2}{2}},$$

d'après $(2,10)$ on a :

$$|u(t)|^{\frac{p-2}{2}} u(t) \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)),$$

alors

$$\forall t \in]0,T[, |u(t)|^{\frac{p-2}{2}} u(t) \in L^2(\Omega),$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(|u(t)|^{\frac{p-2}{2}} u(t)) \in L^2(\Omega), \tag{2.41}$$

mais d'autre part :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(|u(t)|^{\frac{p-2}{2}} u(t)) = \frac{p}{2}(|u(t)|^{\frac{p-2}{2}} \frac{\partial u(t)}{\partial x_i}),$$

donc

$$\forall t \in]0,T[, \frac{p}{2}(|u(t)|^{\frac{p-2}{2}} \frac{\partial u(t)}{\partial x_i}) \in L^2(\Omega), \tag{2.42}$$

puisque

$$u(t) \in L^2(\Omega), \forall t \in]0,T[,$$

on a

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} |u(t)|^{\frac{p-2}{2}} dx \right)^2 &\leq \left(\int_{\Omega} |u(x,t)|^2 dx \right)^{\frac{p-2}{2}} \\ &\leq \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^{p-2} < \infty. \end{aligned}$$

alors

$$|u(t)|^{\frac{p-2}{2}} \in L^2(\Omega), \tag{2.43}$$

donc on en déduit de (2.40), (2.42) et (2.43) que :

$$\frac{1}{p-1}\frac{\partial}{\partial x_i}(|u(t)|^{p-2}u(t)) \in L^2(Q) \subset L^q(Q),$$

il résulte que :

$$u'(t) = f(t) - \frac{1}{p-1}\Delta(|u(t)|^{p-2}u(t)) \in L^q(0,T,W^{-1,q}(\Omega)),$$

d'où (2.11) est vérifie.

2) **Unicité :**

Soient u_1, u_2 deux solutions du problème (P_1)

on pose :

$$w = u_1 - u_2,$$

donc

$$w' - (u_1 - u_2)' = 0,$$

et d'après l'équation (2.1) :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(|u_1|^{p-2}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}) = f, \tag{2.44}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(|u_2|^{p-2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i}) = f, \tag{2.45}$$

d'où

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t} - \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(|u_1|^{p-2}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} - |u_2|^{p-2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i})\right) = 0,$$

donc

$$w' - \frac{1}{p-1}\Delta(|u_1|^{p-2}u_1 - |u_2|^{p-2}u_2) = 0,$$

alors

$$w' - \Delta\left(\frac{1}{p-1}(|u_1|^{p-2}u_1 - |u_2|^{p-2}u_2)\right) = 0, \tag{2.46}$$

en prenant le produit scalaire sur $H^{-r}(\Omega)$ de l'équation précédent par : $(-\Delta)^{-1}w$

$$(w', (-\Delta)^{-1}w)_{H^{-1}(\Omega)} + \frac{1}{p-1}(\Delta(|u_1|^{p-2}u_1 - |u_2|^{p-2}u_2), (\Delta)^{-1}w)_{L^2(\Omega)} = 0,$$

d'où

$$(w', (-\Delta)^{-1}w)_{H^{-1}(\Omega)} + \frac{1}{p-1}(|u_1|^{p-2}u_1 - |u_2|^{p-2}u_2), u_1 - u_2)_{L^2(\Omega)} = 0,$$

où

$$(f,g)_{H^{-1}(\Omega)} = (f,(-\Delta)^{-1}g)_{L^2(\Omega)},$$

d'où

$$(w',w)_{H^{-1}(\Omega)} + \frac{1}{p-1}(|u_1|^{p-2}u_1 - |u_2|^{p-2}u_2, u_1-u_2)_{L^2(\Omega)} = 0, \tag{2.47}$$

et comme l'application $u \longmapsto |u|^{p-2}u$ est monotone on trouve que :

$$(|u_1|^{p-2}u_1 - |u_2|^{p-2}u_2, u_1-u_2)_{L^2(\Omega)} \geq 0,$$

donc l'équation (2.47) équivaut :

$$(w',w)_{H^{-1}(\Omega)} \leq 0;$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} |w(x,t)|^2 dt \leq 0,$$

donc

$$|w|^2_{L^2(\Omega)} = 0,$$

ce qui implique que :

$$w = 0 \Leftrightarrow u_1 - u_2 = 0,$$

alors

$$u_1 = u_2.$$

ce qui prouve que la solution est unique.

Chapitre 3

Problème d'évolution du deuxième ordre non linéaire

3.1 Notations et position du problème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et Γ sa frontière, on supposera qu'elle est assez régulière, Q désignera le cylindre latérale $\Omega \times]0, T[$, $T > 0$ de frontière $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$.
On considère le problème (P_2) suivant :

$$(P_2) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au + |u|^\rho u = f & \text{dans } \ Q = \Omega \times]0, T[, \quad (3.1) \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times]0, T[, \quad (3.2) \\ u(x, 0) = u_0(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) & \forall x \in \Omega, \quad (3.3) \end{cases}$$

où u, f représente le vecteur du déplacement, la densité des forces extérieures respectivement et u_0, u_1 et $\rho > 0$ sont des données. A est un opérateur défini par :

$$\begin{cases} Au = -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right), & (3.4) \\ a_{ij} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times]0, T[), \ a_{ij} = a_{ji} \ \forall i, j, & (3.5) \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t) \zeta_i \zeta_j \geq \alpha(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + ... + \zeta_n^2) \qquad \alpha > 0, \ \zeta \in \mathbb{R}. & (3.6) \end{cases}$$

Le but de ce chapitre est de chercher une fonction $u = u(x, t)$; $x \in \Omega$, $t \in]0, T[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ solution du problème (P_2) sous certains hypothèses (H). Pour résoudre ce problème, on a besoin d'introduire quelques notions et quelques espaces fonctionnels.

On définit l'espace V par :

$$V = H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega), \tag{3.7}$$

où $p = \rho + 2$. L'espace V muni de la norme $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} + |v|_{L^p(\Omega)}$ est une espace de Hilbert. Rappelons que

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)},$$

où $H^1(\Omega)$ est un espace de Sobolev d'ordre 1 muni de la norme induite.
D'après le théorème de plongement de Sobolev, on a

$$\begin{cases} H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega); \\ \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \quad si \quad n \geq 3, \end{cases} \tag{3.8}$$

de sorte que $V = H_0^1(\Omega)$ si $\rho \leq \frac{4}{n-2}$.

Lemme 3.1 (lemme de Gronwall). *Soient $f \in L^\infty(0,T)$, $g \in L^1(0,T)$ et $f(t) \geq 0$, $g(t) \geq 0$. Si $f(t) \leq c + \int_0^T f(s)g(s)ds$; alors*

$$f(t) \leq c \exp\left(\int_0^T g(s)ds\right).$$

Notation : pour simplifier l'écriture, on posera

$$u(x,t) = u; \ \frac{\partial u}{\partial t} = u'; \ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u''.$$

Pour étudier, le problème (P_2), on aura besoin des hypothèses suivantes :

$$(H)\begin{cases} f \in L^2(Q), & (3.9) \\ u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega), \qquad p = \rho + 2, & (3.10) \\ u_1 \in L^2(\Omega). & (3.11) \end{cases}$$

3.2 Existence

Théorème 3.2. *Sous les hypothèse (H), le problème (P_2) admet une solution u vérifiant :*

$$u \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)), \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)). \tag{3.13}$$

Preuve. En Utilisant les techniques de Faedo-Galerkin ainsi qu'un résultat de compacité.

3.2.1 Solutions approchées

- La formulation variationnelle :

En multipliant l'équation (3.1) par un élément $v \in V$ et intégrant sur Ω :

$$\int_\Omega u''(t)v(t)dx - \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u(t)}{\partial x_j}\right)v(t)dx + \int_\Omega |u(t)|^\rho u(t)v(t)dx = \int_\Omega f(t)v(t)dx.$$

On utilise la formule de Green et les condition aux limites on trouve :

$$\int_\Omega u''(t)v(t)dx + \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial u(t)}{\partial x_j}\frac{\partial v(t)}{\partial x_i}dx - \int_\Gamma a_{ij}(x,t)\frac{\partial u(t)}{\partial \eta}v(t)d\sigma + \int_\Omega |u(t)|^\rho u(t)v(t)dx$$
$$= \int_\Omega f(t)v(t)dx, \ \forall v \in V;$$

donc

$$(u''(t), v(t))_{0,\Omega} + \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial u(t)}{\partial x_j}, \frac{\partial v(t)}{\partial x_i}\right)_{0,\Omega} + (|u(t)|^\rho u(t), v(t))_{0,\Omega}$$
$$= (f(t), v(t))_{0,\Omega}, \ \forall v \in V. \qquad (3.14)$$

On pose :

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx,$$

l'application $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire continue et coercive.

En effet :

- La continuité :

Soient $u, v \in V$:

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left|\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx\right| \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega |a_{ij}(x,t)| \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| dx \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|_{L^2(\Omega)} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \max_{1\leq ij \leq n} \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|_{L^2(\Omega)} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq n \max_{1\leq ij \leq n} \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq c\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

grâce à l'inégalité de Cauchy Schwartz et l'inégalité de Hölder.

- La coercivité :

Soit $u \in V$:

$$a(u,u) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx,$$

On applique (3.6) avec $\zeta = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_i}) \in \mathbb{R}^n$, on trouve :

$$a(u,u) \geq \alpha_1 \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx = \alpha_1 |\nabla u|^2_{L^2(\Omega)},$$

mais d'après l'inégalité de Poincaré

$$a(u,u) \geq \alpha_1 |\nabla u|^2_{L^2(\Omega)} \geq \alpha \|u\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.15}$$

donc $a(.,.)$ est coercive.

-Les solutions approchées

L'espace V est séparable, donc il existe $(w_1, ..., w_n)$ ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} w_i \in V \ \forall i, \\ \forall m, (w_1, ..., w_n) \text{ sont linéairement intépendants }, \\ V_m = \langle \{w_1, ..., w_n\} \rangle \text{ est dense dans V }. \end{cases} \tag{3.16}$$

En particulier :

$$\forall u_0 \in V \Leftrightarrow \exists (u_{0m})_{m \in \mathbb{N}^*}, u_{0m} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{km} w_k \longrightarrow u_0 \text{ lorsque } m \longrightarrow \infty, \tag{3.17}$$

$$\forall u_1 \in L^2(\Omega) \Leftrightarrow \exists (u_{1m})_{m \in \mathbb{N}^*}, u_{1m} = \sum_{k=1}^{m} \beta_{km} w_k \longrightarrow u_1 \text{ lorsque } m \longrightarrow \infty. \tag{3.18}$$

On cherche alors $u_m(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i$ solution approchées du problème (P_2) suivant :

$$(P_m) \begin{cases} (u''_m(t), w_k)_{0,\Omega} + a(u_m(t), w_k) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), w_k)_{0,\Omega} = (f(t), w_k)_{0,\Omega} & (3.19) \\ \hfill \forall k = 1..., m, & \\ u_m(0) = u_{0m}, u'_m(0) = u_{1m}. & (3.20) \end{cases}$$

Alors on obtient un système d'équations différentielles non linéaires du deuxième ordre. On considère les fonctions : $g_m = (g_{1m}(t), ..., g_{mm}(t)),\ f_m = ((f, w_1), ..., (f, w_m))$, $C_m = ((|u_m(t)|^\rho u_m(t), w_j))_{1 \leq j \leq m}$ et les matrices

$$B_m = ((w_i, w_j))_{1 \leq i,j \leq m}, A_m = (a(w_i, w_j))_{1 \leq i,j \leq m}.$$

On a $u_m(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} g_{im}(t)w_i$, on remplace l'expression de $u_m(t)$ dans (3.19) on trouve :

$$\frac{d^2}{dt^2}(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)w_i, w_j)_{0,\Omega} + a\left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)w_i, w_j\right) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), w_j)_{0,\Omega}$$
$$= (f(t), w_j)_{0,\Omega},\ \forall j = 1, ..., m,$$

d'où

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)(w_i, w_j)_{0,\Omega} + \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)a(w_i, w_j) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), w_j)_{0,\Omega}$$
$$= (f(t), w_j)_{0,\Omega},\ \forall j = 1, ..., m,$$

donc

$$B_m\frac{d^2}{dt^2}[g_m(t)] + A_m(g_m(t)) + C_m = f_m,$$

Les vecteurs $\{w_1, ..., w_n\}$ sont linéairement indépendants ($i.e\ det(w_i, w_j) \neq 0$), donc la matrice B_m est inversible, alors g_m est solution de

$$(P'_m)\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}[g_m(t)] + B_m^{-1}A_m(g_m(t)) + B_m^{-1}C_m = B_m^{-1}(f_m), \\ g_m(0) = (\alpha_{im})_{1\leq i\leq m} = g_{0m},\ g'_m(0) = (\beta_{im})_{1\leq i\leq m} = g_{1m}. \end{cases}$$

Le problème (P'_m) admet une solution locale dans l'intervalle $[0, t_m]$, t_m dépend de m.

3.2.2 Estimation a priori

Dans cette étape on montre que $t_m = T$ pour $m \in \mathbb{N}^*$.
On multiple l'équation (3.19) par $g'_{km}(t)$ on obtient :

$$(u''_m(t), g'_{km}(t)w_k)_{0,\Omega} + a(u_m(t), g'_{km}(t)w_k) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), g'_{km}(t)w_k) = (f(t), g'_{km}(t)w_k)_{0,\Omega},$$

et on somme sur k on trouve :

$$(u''_m(t), \sum_{k=0}^{m} g'_{km}(t)w_k)_{0,\Omega} + a(u_m(t), \sum_{k=0}^{m} g'_{km}(t)w_k) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), \sum_{k=0}^{m} g'_{km}(t)w_k)_{0,\Omega}$$
$$= (f(t), \sum_{k=0}^{m} g'_{km}(t)w_k)_{0,\Omega}, \forall k = 1, ..., m.$$

D'où

$$(u''_m(t), u'_m(t))_{0,\Omega} + a(u_m(t), u'_m(t)) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), u'_m(t))_{0,\Omega} = (f(t), u'_m(t))_{0,\Omega}, \quad (3.21)$$

on a

$$\begin{aligned}(u''_m(t), u_m(t)) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u'_m(t)|^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned} \tag{3.22}$$

d'autre part on a :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(a(u_m(t), u_m(t)) &= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{d}{dt}\left(a_{i,j}(x,t)\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_j}\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_i}\right)dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a'_{i,j}(x,t)\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_j}\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_i}dx + \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{i,j}(x,t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_j}\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_i}\right)dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a'_{i,j}(x,t)\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_j}\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_i}dx + \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{i,j}(x,t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_i}dx \\ &+ \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{i,j}(x,t)\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_i}\right)dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a'_{i,j}(x,t)\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_j}\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_i}dx + 2\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{i,j}(x,t)\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{du_m(t)}{dt}\right)dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a'_{i,j}(x,t)\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_j}\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_i}dx + +2\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{i,j}(x,t)\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_j}\frac{\partial u'_m(t)}{\partial x_i}dx,\end{aligned}$$

donc

$$\frac{d}{dt}(a(u_m(t), u_m(t)) = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a'_{i,j}(x,t)\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}dx + 2a(u_m(t), u'_m(t)),$$

d'où

$$a(u_m(t), u'_m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(u_m(t), u'_m(t)) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a'_{i,j}(x,t)\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}dx, \tag{3.23}$$

et

$$(|u_m(t)|^\rho u_m(t), u'_m(t)) = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^p_{L^p(\Omega)}, \tag{3.24}$$

en effet

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^p_{L^p(\Omega)}dx &= \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_m(t)|^p dx \\ &= \int_\Omega |u_m(t)|^{p-1}u'_m(t)dx \\ &= \int_\Omega |u_m(t)|^{\rho+1}u'_m(t)dx \\ &= \int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t)u'_m(t)dx,\end{aligned}$$

donc on injecte (3.22), (3.23) et (3.24) dans (3.21) on trouve :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(u_m(t), u'_m(t)) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a'_{i,j}(x,t)\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_j}\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_i}dx + \frac{1}{p}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^p_{L^p(\Omega)}$$
$$= (f(t), u'_m(t))_{0,\Omega},$$

d'où

$$\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{d}{dt}a(u_m(t), u'_m(t)) + \frac{2}{p}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^p_{L^p(\Omega)} = 2(f(t), u'_m(t))_{0,\Omega}$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a'_{i,j}(x,t)\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_j}\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_i}dx,$$

par intégration de 0 à t :

$$\int_0^t \frac{d}{dt}|u'_m(\sigma)|^2_{L^2(\Omega)}d\sigma + \int_0^t \frac{d}{dt}a(u_m(\sigma), u'_m(\sigma))d\sigma + \frac{2}{p}\int_0^t \frac{d}{dt}|u_m(\sigma)|^p_{L^p(\Omega)}d\sigma$$
$$= 2\int_0^t\int_\Omega f(\sigma)u'_m(\sigma)dxd\sigma + \int_0^t\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a'_{i,j}(x,\sigma)\frac{\partial u_m(\sigma)}{\partial x_j}\frac{\partial u_m(\sigma)}{\partial x_i}dxd\sigma,$$

et on utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz on obtient :

$$|u'_m(t)|^2_{L^2(\Omega)} + a(u_m(t), u_m(t)) + \frac{2}{p}|u_m(t)|^p_{L^p(\Omega)} \leq \int_0^t\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a'_{i,j}(x,\sigma)\frac{\partial u_m(\sigma)}{\partial x_j}\frac{\partial u_m(\sigma)}{\partial x_i}dxd\sigma$$
$$+ 2\int_0^t |f(\sigma)|_{L^2(\Omega)}|u'_m(\sigma)|_{L^2(\Omega)}d\sigma + |u'_m(0)|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+ a(u_m(0), u_m(0)) + \frac{2}{p}|u_m(0)|^p_{L^p(\Omega)},$$

et d'après l'utilisation de l'inégalité :

$$|ab| \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

on obtient :

$$|u'_m(t)|^2_{L^2(\Omega)} + a(u_m(t), u_m(t)) + \frac{2}{p}|u_m(t)|^p_{L^p(\Omega)} \leq \int_0^t\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a'_{i,j}(x,\sigma)\frac{\partial u_m(\sigma)}{\partial x_j}\frac{\partial u_m(\sigma)}{\partial x_i}dxd\sigma$$
$$+ \int_0^t |f(\sigma)|^2_{L^2(\Omega)}d\sigma + \int_0^t |u'_m(\sigma)|^2_{L^2(\Omega)}d\sigma$$
$$+ |u'_m(0)|^2_{L^2(\Omega)} + a(u_m(0), u_m(0)) + \frac{2}{p}|u_m(0)|^p_{L^p(\Omega)},$$

et d'après la coercivité de $a(.,.)$ on a :

$$a(u_m(\sigma), u_m(\sigma)) \geq \alpha\|u_m\|^2_{H^1_0(\Omega)};$$

donc il résulte :

$$\begin{aligned}|u_m'(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\|u_m\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \frac{2}{p}|u_m(t)|^p_{L^p(\Omega)} &\leq \int_0^t \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{i,j}'(x,\sigma)\frac{\partial u_m(\sigma)}{\partial x_j}\frac{\partial u_m(\sigma)}{\partial x_i}dxd\sigma \\ &+ \int_0^t |f(\sigma)|^2_{L^2(\Omega)}d\sigma + \int_0^t |u_m'(\sigma)|^2_{L^2(\Omega)}d\sigma \\ &+ |u_m'(0)|^2_{L^2(\Omega)} + a(u_m(0), u_m(0)) + \frac{2}{p}|u_m(0)|^p_{L^p(\Omega)},\end{aligned}$$

on utilisons l'hypothèse (3.5) sur $a_{i,j}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^t \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \left|a_{i,j}'(x,\sigma)\frac{\partial u_m(\sigma)}{\partial x_j}\frac{\partial u_m(\sigma)}{\partial x_i}\right| dxd\sigma &\leq \sup_{(x,t)}|a_{i,j}'(x,t)| \int_0^t \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \left|\frac{\partial u_m(\sigma)}{\partial x_j}\right| \left|\frac{\partial u_m(\sigma)}{\partial x_i}\right| dxd\sigma \\ &\leq c_1 \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^2_{H^1_0(\Omega)}d\sigma; \end{aligned} \tag{3.25}$$

ce qui joint à (3.9), (3.10) et (3.11), on déduit l'existence d'une constante c_2 indépendant de m telle que :

$$|u_m'(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\|u_m(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \frac{2}{p}|u_m(t)|^p_{L^p(\Omega)} \leq c_2 + \int_0^t |u_m'(\sigma)|^2_{L^2(\Omega)}d\sigma + 2c_1 \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^2_{H^1_0(\Omega)}d\sigma. \tag{3.26}$$

On déduit donc de (3.26) que :

$$\min(1,\alpha)\left(|u_m'(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_m(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)}\right) \leq c_2 + \max(1, 2c_1)\int_0^t \left(|u_m'(\sigma)|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_m(\sigma)\|^2_{H^1_0(\Omega)}\right) d\sigma,$$

on pose : $\beta = \min(1,\alpha)$ et $\lambda = \max(1, 2c_1)$ donc :

$$|u_m'(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_m(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq c + \frac{\lambda}{\beta}\int_0^t \left(|u_m'(\sigma)|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_m(\sigma)\|^2_{H^1_0(\Omega)}\right) d\sigma$$

où : $c = \frac{c_2}{\beta}$.
En appliquant le lemme de Gronwall aux fonctions :

$$f(t) = |u_m'(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_m(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)},$$

et

$$g(t) = \frac{\lambda}{\beta},$$

on obtient :

$$\begin{aligned}|u_m'(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_m(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} &\leq c\exp\left(\int_0^t \frac{\lambda}{\beta}d\sigma\right) \\ &\leq c\exp(\frac{\lambda}{\beta}T) = cte.\end{aligned} \tag{3.27}$$

on en déduit que $t_m = T$.

Lorsque m tendre vers ∞ de (3.27) on déduit :

$$\begin{cases} u_m \text{ demeure dans un ensemble borné de } L^\infty(0,T;V) \text{ et} \\ u'_m \text{ demeure dans un ensemble borné de } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{cases} \tag{3.28}$$

3.2.3 Passage à la limite

On a

$$u_m \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0,T,V)\,;$$

donc, on peut extraire une sous-suite convergente $(u_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega)) \text{ faible * },\tag{3.29}$$

$$u'_m \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0,T,L^2(\Omega))\,;$$

donc, on peut extraire une sous-suite convergente $(u'_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ de $(u'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$u'_\mu \longrightarrow u' \text{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible * }.\tag{3.30}$$

Par ailleurs, il résulte, on particulier de (3.28) que :

$$\begin{cases} u_m \text{ est bornée dans } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ et} \\ u'_m \text{ est bornée dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q). \end{cases}$$

Et d'après le théorème de Rellich-Kondrachoff on a :

$$\text{l'injection de } H_0^1(Q) \longrightarrow L^2(Q) \text{ est compacte },$$

donc il existe une sous-suite $(u_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ de $H_0^1(\Omega)$ qui converge dans $L^2(Q)$ c'est-à-dire :

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort et p.p dans } Q,\tag{3.31}$$

comme

$$|u_\mu|^\rho u_\mu \text{ demeure dans un ensemble borné de } L^\infty(0,T;L^q(\Omega)),$$

alors

$$|u_\mu|^\rho u_\mu \longrightarrow w \text{ dans } L^\infty(0,T;L^q(\Omega)) \text{ faible *},\tag{3.32}$$

le point essentiel est de démontrer que :

$$w = |u|^\rho u. \tag{3.33}$$

Pour cela on utilise le lemme (1.21).
Dans ce cas on prend :

$$g_\mu = |u_\mu|^\rho u_\mu,\ \ q = \frac{\rho+1}{\rho+2},$$

d'après (3.31)

$$g_\mu = |u_\mu|^\rho u_\mu \longrightarrow |u|^\rho u = g \text{ dans } L^2(Q) fort,$$

et d'après (3.32) on a :

$$g_\mu \longrightarrow w \text{ dans } L^\infty(0,T;L^q(\Omega)) \text{ faible },$$

d'où :

$$w = g = |u|^\rho u$$

grâce au le lemme (1.21). Ainsi on peut passer à la limite dans l'équation (3.19) pour $m = \mu$.
Pour $j \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque ($\mu > j$) on a :

$$(u''_\mu(t), w_j)_{0,\Omega} + a(u_\mu(t), w_j) + (|u_\mu(t)|^\rho u_\mu(t), w_j)_{0,\Omega} = (f(t), w_j)_{0,\Omega},$$

de (3.32) et de la convergence faible on conclut que :

$$\frac{d^2}{dt^2}(u(t), w_j)_{0,\Omega} + a(u(t), w_j) + (|u(t)|^\rho u(t), w_j)_{0,\Omega} = (f(t), w_j)_{0,\Omega},$$

comme V_m est dense dans V, on obtient pour tout $v \in V$:

$$\frac{d^2}{dt^2}(u(t), v(t))_{0,\Omega} + a(u(t), v(t)) + (|u(t)|^\rho u(t), v(t))_{0,\Omega} = (f(t), v(t))_{0,\Omega},$$

alors u satisfait (3.1) (et aussi (3.12), (3.13)).
Reste à montrer que (3.3) a lieu c'est-à-dire : les deux expressions $u(x,0) = u_0(x)$ et $u'(x,0) = u_1(x)$ ont un sens.
En effet :
De (3.12), (3.13) et du lemme (1.27), il résulte en particulier que u est continue de $[0,T] \longrightarrow L^2(\Omega)$ de sorte que $u(x,0) = u_0(x)$ a un sens, et pour vérifier que $u'(x,0) = u_1(x)$ a un sens, on doit utiliser l'équation (3.1) qui s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2} = f(t) + Au(t) - |u(t)|^\rho u(t), \tag{3.34}$$

comme $A \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ on a :

$$Au \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$

et

$$|u(t)|^\rho u(t) \in L^\infty(0,T;L^q(\Omega)) \text{ avec } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

de sorte que (3.34) entraîne :

$$\frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) + L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)+L^q(\Omega)).$$

d'où, en particulier :

$$\frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2} \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)+L^q(\Omega)),$$

ce que joint à (3.13) montre grâce au lemme (3.2) que :

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} \text{ est continue de } [0,T] \longrightarrow H^{-1}(\Omega)+L^q(\Omega),$$

alors on conclut que $u'(x,0)=u_1(x)$ a un sens
de (3.29) et (3.31) on a :

$$u_\mu(0) \longrightarrow u(0) \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible },$$

or

$$u_\mu(0) = u_{0\mu} \longrightarrow u_0 \text{ dans } H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega),$$

donc : $u(0)=u_0$ par la même technique on vérifie que $u'(0)=u_1$. ■

3.3 Unicité

Dans ce paragraphe, on démontrer l'unicité de la solution.

Théorème 3.3. *Sous les hypothèses du théorème* (3.2) *avec :*

$$\rho \leq \frac{2k}{n-2}, (\rho \text{ fini quelque si } n=2), k \in \mathbb{N}^*. \tag{3.35}$$

Alors la solution u obtenue au théorème (3.2) *est unique.*

Preuve. Soient u, v deux solutions au sens du théorème (3.2)
on pose :

$$w = u - v,$$

u solution de (P_2) implique que :

$$u''(t) + Au(t) + |u(t)|^\rho u(t) = 0, \tag{3.36}$$

v solution de (P_2) implique que :

$$v''(t) + Av(t) + |v(t)|^\rho v(t) = 0, \tag{3.37}$$

par la soustraction de (3.36) et (3.37), on obtient :

$$w''(t) + Aw(t) + |u(t)|^\rho u(t) - |v(t)|^\rho v(t) = 0,$$

d'où w vérifie :

$$\begin{cases} w''(t) + Aw(t) + |u(t)|^\rho u(t) - |v(t)|^\rho v(t) = 0 & (3.38) \\ w(0) = 0, w'(0) = 0, & (3.39) \\ w \in L^\infty(0, T; H_0^1 \cap L^p(\Omega)) & (3.40) \\ w' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) & (3.41) \end{cases}$$

comme $w'(t)$ n'appartient pas à $H_0^1(\Omega)$, on ne peut pas remplacer v par $w'(t)$ dans (3.14), pour ce la il faut introduire une fonction auxiliaire ψ tel que :

$$\forall s \in]0, T[, \text{ soit } \psi :]0, T[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longrightarrow \psi(t) = \begin{cases} -\int_0^t w(\sigma) d\sigma & t \leq s, \\ 0 & t > s. \end{cases}$$

On a

$$\psi'(t) = \frac{d}{dt}\left(-\int_0^t w(\sigma) d\sigma\right) = w(t), \forall t \leq s,$$

et

$$\psi(t) = w_1(t) - w_1(s);$$

avec

$$w_1(t) = \int_0^t w(\sigma) d\sigma.$$

En multipliant (3.38) par un élément $\psi(t)$ on obtient :

$$w''(t)\psi(t) + Aw(t)\psi(t) + (|u(t)|^\rho u(t) - |v(t)|^\rho v(t))\psi(t) = 0, \tag{3.42}$$

et par l'intégration de l'équation (3.42) par partie sur $[0, s]$ on obtient :

$$-\int_0^s w'(t)\psi'(t)dt + \int_0^s \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x,t) \frac{\partial w(t)}{\partial x_j} \frac{\partial \psi(t)}{\partial x_i} dt + \int_0^s (|u(t)|^\rho u(t) - |v(t)|^\rho v(t))\psi(t) dt = 0,$$

en intégrant sur Ω on trouve :

$$-\int_0^s\int_\Omega w'(t)\psi'(t)dxdt+\int_0^s\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega a_{i,j}(x,t)\frac{\partial w(t)}{\partial x_j}\frac{\partial\psi(t)}{\partial x_i}dxdt$$
$$+\int_0^s\int_\Omega(|u(t)|^\rho u(t)-|v(t)|^\rho v(t))\psi(t)dxdt=0,$$

d'où :

$$-\int_0^s(w'(t),\psi'(t))_{0,\Omega}dt+\int_0^s a(w(t),\psi(t))dt=\int_0^s(|v(t)|^\rho v(t)-|u(t)|^\rho u(t),\psi(t))_{0,\Omega}dt \tag{3.43}$$

d'après (3.23) on a :

$$\begin{aligned}\int_0^s a(\psi'(t),\psi(t))dt&=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^s a(\psi(t),\psi(t))dt-\frac{1}{2}\int_0^s\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega a'_{i,j}(x,t)\frac{\partial\psi(t)}{\partial x_j}\frac{\partial\psi(t)}{\partial x_i}dxdt\\&=\frac{1}{2}a(\psi(s),\psi(s))-\frac{1}{2}a(\psi(0),\psi(0))-\frac{1}{2}\int_0^s\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega a'_{i,j}(x,t)\frac{\partial\psi(t)}{\partial x_j}\frac{\partial\psi(t)}{\partial x_i}dxdt\\&=-\frac{1}{2}a(w_1(s),w_1(s))-\frac{1}{2}\int_0^s\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega a'_{i,j}(x,t)\frac{\partial\psi(t)}{\partial x_j}\frac{\partial\psi(t)}{\partial x_i}dxdt \quad (3.44)\end{aligned}$$

puisque : $\psi(0)=-w_1(s)$ et $\psi(s)=0$.

De plus on a :

$$\begin{aligned}\int_0^s(w'(t),\psi'(t))_{0,\Omega}dt&=\int_0^s(w'(t),w(t))_{0,\Omega}dt\\&=\frac{1}{2}\int_0^s\frac{d}{dt}|w(t)|^2_{L^2(\Omega)}dt\\&=\frac{1}{2}|w(s)|^2_{L^2(\Omega)}-\frac{1}{2}|w(0)|^2_{L^2(\Omega)}\\&=\frac{1}{2}|w(s)|^2_{L^2(\Omega)} \quad (3.45)\end{aligned}$$

donc on remplace (3.45) et (3.44) dans (3.43) on trouve :

$$-\frac{1}{2}|w(s)|^2_{L^2(\Omega)}-\frac{1}{2}a(w_1(s),w_1(s))-\frac{1}{2}\int_0^s\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega a'_{i,j}(x,t)\frac{\partial\psi(t)}{\partial x_j}\frac{\partial\psi(t)}{\partial x_i}dxdt$$
$$=\int_0^s(|v(t)|^\rho v(t)-|u(t)|^\rho u(t),\psi(t))_{0,\Omega}dt,$$

$$\Leftrightarrow |w(s)|^2_{L^2(\Omega)}+a(w_1(s),w_1(s))=-\int_0^s\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega a'_{i,j}(x,t)\frac{\partial\psi(t)}{\partial x_j}\frac{\partial\psi(t)}{\partial x_i}dxdt$$
$$+2\int_0^s(|u(t)|^\rho u(t)-|v(t)|^\rho v(t),\psi(t))_{0,\Omega}dt,$$

d'après la coercivité de $a(.,.)$ on obtient :

$$\begin{aligned}|w(s)|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha|w_1(s)|^2 \leq 2\int_0^s (|u(t)|^\rho u(t) - |v(t)|^\rho v(t), \psi(t))_{0,\Omega} dt \\ - \int_0^s \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a'_{i,j}(x,t)\frac{\partial\psi(t)}{\partial x_j}\frac{\partial\psi(t)}{\partial x_i} dxdt\end{aligned} \tag{3.46}$$

de (3.25) on a

$$\left|\int_0^s \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a'_{i,j}(x,t)\frac{\partial\psi(t)}{\partial x_j}\frac{\partial\psi(t)}{\partial x_i} dxdt\right| \leq c_1 \int_0^s \|\psi(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} dt;$$

et comme $\psi(t) = w_1(t) - w_1(s)$; on obtient :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^s \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a'_{i,j}(x,t)\frac{\partial\psi(t)}{\partial x_j}\frac{\partial\psi(t)}{\partial x_i} dxdt\right| &\leq c_1 \int_0^s \|w_1(t) - w_1(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} dt \\ &\leq c_1 \int_0^s \|w_1(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} dt + c_1 \int_0^s \|w_1(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} dt \\ &\leq c_1 \int_0^s \|w_1(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} dt + c_1 T\|w_1(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} dt\end{aligned}$$

on suppose que $|v| < |u|$ donc :

$$\begin{aligned}&\int_0^s \left|\int_\Omega (|u(t)|^\rho u(t) - |v(t)|^\rho v(t))\psi(t) dx\right| dt \\ &\leq \int_0^s \int_\Omega ||u(t)|^{\rho+1} - |v(t)|^{\rho+1}||\psi(t)| dxdt \\ &\leq \int_0^s \int_\Omega ||u(t)| - |v(t)||(|u(t)|^\rho + |v(t)|^{\rho-1}|v(t)| + ... + |v(t)|^\rho)|\psi(t)| dxdt \\ &\leq (\rho+1)\int_0^s \int_\Omega |u(t)|^\rho |w(t)||\psi(t)| dxdt.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^s \left|\int_\Omega (|u(t)|^\rho u(t) - |v(t)|^\rho v(t))\psi(t) dx\right| dt &\leq (\rho+1)\int_0^t \int_\Omega ||u(t)|^\rho|_{L^n(\Omega)} |w(t)|_{L^2(\Omega)} |\psi(t)|_{L^q(\Omega)} dxdt. \\ &\leq (\rho+1)\int_0^t ||u(t)|^\rho|_{L^n(\Omega)} |w(t)|_{L^2(\Omega)} \\ &\times (|w_1(t)|_{L^q(\Omega)} + |w_1(s)|_{L^q(\Omega)}) dt,\end{aligned} \tag{3.47}$$

où

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} = 1,$$

mais d'après (3.35) on a :

$$\rho n \leq kq$$

alors

$$||u|^\rho|_{L^n(\Omega)} \leq |u|^\rho_{L^{\rho n}(\Omega)} \leq |u|^\rho_{L^{kq}(\Omega)},$$

d'autre part on a (voir [12]) :

$$|u|^{\rho}_{L^{kq}(\Omega)} = ||u|^{k}|_{L^{q}(\Omega)},$$

on en déduit que :

$$|u|_{L^{kq}(\Omega)} \leq \||u|^{k}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|u\|^{k}_{H_0^1(\Omega)},$$

d'où

$$||u|^{\rho}|_{L^{n}(\Omega)} \leq \|u\|^{\rho k}_{H_0^1(\Omega)},$$

ce qui est majoré par une constante c_3 car

$$u \in L^{\infty}(0,T; H_0^1(\Omega)),$$

donc (3.47) devient :

$$\begin{aligned}\int_0^s \left| \int_{\Omega} (|u(t)|^{\rho}u(t) - |v(t)|^{\rho}v(t))\psi(t)dx \right| dt &\leq c_3 \int_0^s |w(t)|_{L^2(\Omega)}(\|w_1(t)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|w_1(s)\|_{H_0^1(\Omega)})dt \\ &\leq \frac{\alpha}{4}\|w_1(s)\|_{H_0^1(\Omega)} + c_4 \int_0^s (|w_1(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_1(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)})dt,\end{aligned}$$

où Alors de (3.46), on conclut :

$$\begin{aligned}|w(s)|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\|w_1(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq (2c_1T + \frac{\alpha}{2})\|w_1(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + 2c_4 \int_0^s |w(t)|^2_{L^2(\Omega)}dt \\ &\quad + 2(c_1 + c_4)\int_0^s \|w_1(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}dt \\ \Leftrightarrow |w(s)|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\|w_1(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} &- (2c_1T + \frac{\alpha}{2})\|w_1(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq c_5 \int_0^s (|w(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_1(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)})dt,\end{aligned}$$

pour un choix convenable pour la constante c en obtient :

$$\beta(|w(s)|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_1(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}) \leq c_5 \int_0^s (|w(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_1(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)})dt, \tag{3.48}$$

où

$$\beta = \min(1, \frac{\alpha}{2} - 2c_1T), c_5 = 2(c_1 + c_4),$$

en utilisant le lemme de Gronwall sur (3.48) avec :

$$f(s) = |w(s)|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_1(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)},$$

et

$$g(s) = \frac{c_5}{\beta},$$

donc on obtient :

$$|w(s)|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_1(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq 0 \exp(\int_0^s \frac{c_5}{\beta}dt) = 0,$$

d'où

$$w = 0.$$

■

3.4 Régularité de la solution

Théorème 3.4. *On se place dans les condition du théorème* (3.2) *avec en outre*

$$f, \frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(Q), \tag{3.49}$$

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \tag{3.50}$$

$$u_1 \in H_0^1(\Omega), \tag{3.51}$$

$$\rho \leq \frac{2k}{n-2} (\rho \textit{ fini quelconque si } n{=}2\ )\ k \in \mathbb{N}^*. \tag{3.52}$$

Il existe alors une solution du problème (P_2) *vérifiant :*

$$u \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \tag{3.53}$$

$$u' \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)), \tag{3.54}$$

$$u'' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)). \tag{3.55}$$

Preuve.

Existence : On utilisant les même étapes de la démonstration du théorème d'existence (3.2) ; dans ce cas, on pose $V = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ qui est séparable, on construit de la même façon une base $\{w_1, ..., w_n\}$ dans l'espace V (3.16) ;

on cherche alors une solution approchées u_m donnée par (P_m), (3.17), (3.18) on suppose que

$$u_{0m} \longrightarrow u_0 \text{ dans } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \tag{3.56}$$

$$u_{1m} \longrightarrow u_1 \text{ dans } H_0^1(\Omega). \tag{3.57}$$

Étape i : Dérivons l'équation (3.19) en t, on trouve :

$$\frac{d}{dt}(u_m''(t), w_k)_{0,\Omega} + \frac{d}{dt}a(u_m(t), w_k) + \frac{d}{dt}(|u_m(t)|^\rho u_m(t), w_k)_{0,\Omega} = \frac{d}{dt}(f(t), w_k)_{0,\Omega},$$

d'où

$$(\frac{d}{dt}u_m''(t), w_k)_{0,\Omega} + \frac{d}{dt}\left(\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_j}\frac{\partial w_k}{\partial x_i}dx\right) + (\frac{d}{dt}(|u_m(t)|^\rho u_m(t)), w_k)_{0,\Omega}$$
$$= (\frac{d}{dt}f(t), w_k)_{0,\Omega},$$

donc

$$(u_m'''(t), w_k)_{0,\Omega} + \left(\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}'(x,t)\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_j}\frac{\partial w_k}{\partial x_i}dx\right) + \left(\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial u_m'(t)}{\partial x_j}\frac{\partial w_k}{\partial x_i}dx\right)$$
$$+ (\rho+1)(|u_m(t)|^\rho u_m'(t), w_k)_{0,\Omega} = (f'(t), w_k)_{0,\Omega},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}(u_m'''(t), w_k)_{0,\Omega} + a(u_m'(t), w_k) + (\rho+1)(|u_m(t)|^\rho u_m'(t), w_k)_{0,\Omega}\\ = (f'(t), w_k)_{0,\Omega} - \left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}'(x,t)\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_j}\frac{\partial w_k}{\partial x_i}dx\right),\end{aligned} \tag{3.58}$$

on multiple l'équation (3.58) par $g_m''(t)$ et on somme sur k, on obtient :

$$\begin{aligned}(u_m'''(t), u_m''(t))_{0,\Omega} + a(u_m'(t), u_m''(t)) + (\rho+1)(|u_m(t)|^\rho u_m'(t), u_m''(t))_{0,\Omega}\\ = (f'(t), u_m''(t))_{0,\Omega} - \left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}'(x,t)\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_j}\frac{\partial u_m''(t)}{\partial x_i}dx\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m''(t)|^2_{L^2(\Omega)} + a(u_m'(t), u_m''(t)) + (\rho+1)(|u_m(t)|^\rho u_m'(t), u_m''(t))_{0,\Omega}\\ = (f'(t), u_m''(t))_{0,\Omega} - \left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}'(x,t)\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_j}\frac{\partial u_m''(t)}{\partial x_i}dx\right),\end{aligned} \tag{3.59}$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(a(u_m'(t), u_m'(t)) &= \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega \frac{d}{dt}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u_m'(t)}{\partial x_j}\frac{\partial u_m'(t)}{\partial x_i}\right)dx,\\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}'(x,t)\frac{\partial u_m'(t)}{\partial x_j}\frac{\partial u_m'(t)}{\partial x_i}dx + \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial u_m''(t)}{\partial x_j}\frac{\partial u_m'(t)}{\partial x_i}dx\\ &\qquad + \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial u_m'(t)}{\partial x_j}\frac{\partial u_m''(t)}{\partial x_i}dx\\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}'(x,t)\frac{\partial u_m'(t)}{\partial x_j}\frac{\partial u_m'(t)}{\partial x_i}dx + 2a(u_m'(t), u_m''(t)),\end{aligned}$$

donc

$$a(u_m'(t), u_m''(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[a(u_m'(t), u_m'(t))] - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}'(x,t)\frac{\partial u_m'(t)}{\partial x_j}\frac{\partial u_m'(t)}{\partial x_i}dx. \tag{3.60}$$

On remplace (3.60) dans (3.59), on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m''(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[a(u_m'(t), u_m'(t))] + (\rho+1)(|u_m(t)|^\rho u_m'(t), u_m''(t))_{0,\Omega}\\ = (f', u_m''(t))_{0,\Omega} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}'(x,t)\frac{\partial u_m'(t)}{\partial x_j}\frac{\partial u_m'(t)}{\partial x_i}dx\\ - \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}'(x,t)\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_j}\frac{\partial u_m''(t)}{\partial x_i}dx;\end{aligned}$$

d'après la coercivité de $a(.,.)$ on a :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m''(t)|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\|u_m'(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \le (f'(t),u_m''(t))_{0,\Omega} - (\rho+1)(|u_m(t)|^\rho u_m'(t),u_m''(t))_{0,\Omega} - \sum_{i,j=1}^n\int_\Omega a_{ij}'(x,t)\left(\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_j}\frac{\partial u_m''(t)}{\partial x_i}-\frac{1}{2}\frac{\partial u_m'(t)}{\partial x_j}\frac{\partial u_m'(t)}{\partial x_i}\right)dx. \tag{3.61}$$

D'après l'inégalité de Hölder on a :

$$|(|u_m(t)|^\rho u_m'(t),u_m''(t))_{0,\Omega}| \le ||u_m(t)|^\rho|_{L^n(\Omega)}|u_m'(t)|_{L^q(\Omega)}|u_m''(t)|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.62}$$

avec $\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{q}+\frac{1}{n}=1.$

Comme, d'après (3.52), $\rho n\le kq$, on a :

$$||u_m(t)|^\rho|_{L^n(\Omega)} \le \|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^{\rho k} \le \text{conctante, d'après (3.27)},$$

de sorte que (3.62) donne

$$|(|u_m(t)|^\rho u_m'(t),u_m''(t))_{0,\Omega}| \le C\|u_m'(t)\|_{H_0^1(\Omega)}|u_m''(t)|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.63}$$

et (3.61) donne alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m''(t)|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\|u_m'(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \le |(f'(t),u_m''(t))_{0,\Omega}|+C\|u_m'(t)\|_{H_0^1(\Omega)}|u_m''(t)|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^n\int_\Omega |a_{ij}'(x,t)|\left|\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_j}\frac{\partial u_m''(t)}{\partial x_i}\right|dx + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega |a_{ij}'(x,t)|\left|\frac{\partial u_m'(t)}{\partial x_j}\frac{\partial u_m'(t)}{\partial x_i}\right|dx.$$

En intégrant de 0 et t, on obtient :

$$|u_m''(t)|_{L^2(\Omega)}^2+\alpha\|u_m'(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \le |u_m''(0)|_{L^2(\Omega)}^2+\alpha\|u_m'(0)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 2\int_0^t|(f'(\sigma),u_m''(\sigma))_{0,\Omega}|d\sigma+2C\int_0^t\|u_m'(\sigma)\|_{H_0^1(\Omega)}|u_m''(\sigma)|_{L^2(\Omega)}d\sigma + \int_0^t\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega|a_{ij}'(x,\sigma)|\left|\frac{\partial u_m'}{\partial x_j}\frac{\partial u_m'}{\partial x_i}-2\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\frac{\partial u_m''}{\partial x_i}\right|dxd\sigma, \tag{3.64}$$

par la même technique de majoration de (3.25) on trouve :

$$\left|\int_0^t\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega a_{ij}'(x,\sigma)\left(\frac{\partial u_m'}{\partial x_j}\frac{\partial u_m'}{\partial x_i}-2\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\frac{\partial u_m''}{\partial x_i}\right)dxd\sigma\right| \le C_1\int_0^t\|u_m'(\sigma)\|_{H_0^1(\Omega)}^2d\sigma + 2C_1\int_0^t\|u_m(\sigma)\|_{H_0^1(\Omega)}|u_m''(\sigma)|_{L^2(\Omega)}d\sigma.$$

Moyennant (3.27) et l'inégalité de Young ($ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$), on trouve :

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^t \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a'_{ij}(x,\sigma) \frac{\partial u'_m}{\partial x_j} \frac{\partial u'_m}{\partial x_i} - 2 \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \frac{\partial u''_m}{\partial x_i} d\sigma dx \right| &\leq C_1 \int_0^t \|u'_m(\sigma)\|^2_{H_0^1(\Omega)} d\sigma \\
&+ 2C_1 \int_0^t (\frac{1}{2} \|u_m(\sigma)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{1}{2} |u''_m(\sigma)|^2_{L^2(\Omega)}) d\sigma \\
&\leq C_1 \int_0^t \|u'_m(\sigma)\|^2_{H_0^1(\Omega)} d\sigma + C_1 \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^2_{H_0^1(\Omega)} d\sigma \\
&+ C_1 \int_0^t |u''_m(\sigma)|^2_{L^2(\Omega)} d\sigma \\
&\leq Cst + C_1 \int_0^t \|u'_m(\sigma)\|^2_{H_0^1(\Omega)} d\sigma \\
&+ C_1 \int_0^t |u''_m(\sigma)|^2_{L^2(\Omega)} d\sigma.
\end{aligned}$$

Alors (3.64) donne

$$\begin{aligned}
|u''_m(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha \, |u'_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq |u''_m(0)|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha \|u'_m(0)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \\
&+ 2 \int_0^t |(f'(\sigma), u''_m(\sigma))_{0,\Omega}| d\sigma \\
&+ 2C \int_0^t \|u'_m(\sigma)\|_{H_0^1(\Omega)} |u''_m(\sigma)|_{L^2(\Omega)} d\sigma \\
&+ Cst + C_1 \int_0^t \|u'_m(\sigma)\|^2_{H_0^1(\Omega)} d\sigma + C_1 \int_0^t |u''_m(\sigma)|^2_{L^2(\Omega)} d\sigma,
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Young on a :

$$\begin{aligned}
|u''_m(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha \|u'_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq Cst + |u''_m(0)|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha \|u'_m(0)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \int_0^t |f'(\sigma)|^2_{L^2(\Omega)} d\sigma \\
&+ (1 + C_1 + C) + \int_0^t |u''_m(\sigma)|^2_{L^2(\Omega)} d\sigma + (C + C_1) \int_0^t \|u'_m(\sigma)\|^2_{H_0^1(\Omega)} d\sigma,
\end{aligned}$$

et comme $u'_m(0) = u_{1m} \in H_0^1(\Omega)$, alors $\|u'_m(0)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C_1$.
On doit vérifier que :

$$|u''_m(0)|_{L^2(\Omega)} \leq C_1. \tag{3.65}$$

Posons $t = 0$ dans l'équation (3.19) on trouve :

$$(u''_m(0), w_k)_{0,\Omega} + a(u_m(0), w_k) + (|u_m(0)|^\rho u_m(0), w_k)_{0,\Omega} = (f(0), w_k)_{0,\Omega}, \ 1 \leq k \leq m,$$

mais comme :

$$a(u_m(0), w_k) = (Au_m(0), w_k)_{0,\Omega},$$

alors

$$(u''_m(0), w_k)_{0,\Omega} = (f(0) - Au_m(0) - |u_m(0)|^\rho u_m(0), w_k)_{0,\Omega}, \ 1 \leq k \leq m,$$

d'où

$$(u''_m(0), w_k)_{0,\Omega} = (f(0) - Au_{0m} - |u_{0m}|^\rho u_{0m}, w_k)_{0,\Omega},\ 1 \leq k \leq m, \tag{3.66}$$

d'après (3.50) et le lemme (1.27), on déduit que $f(0) \in L^2(\Omega)$, et comme l'opérateur A est continu, d'après (3.56) on a :

$$Au_{0m} \leq \text{ constante.}$$

Montrons que $|u_{0m}|^\rho u_{0m}$ demeure dans un borné de $L^2(\Omega)$. D'après l'inégalité de Cauchy Schwartz et de (3.56), (3.52), on déduire que :

$$\int_\Omega (|u_{0m}|^\rho u_{0m})^2 dx \leq ||u_{0m}|^{2\rho}|_{L^n(\Omega)} |u_{0m}^2|_{L^2(\Omega)} |mes(\Omega)|_{L^q(\Omega)} \leq |u_{0m}|^{2\rho}_{L^{2\rho n}(\Omega)} \leq C_{st} |u_{0m}|^{2\rho}_{L^{2kq}(\Omega)}$$

d'autre part on a :

$$|u_{0m}|_{L^{2kq}(\Omega)} = ||u_{0m}|^{2k}|_{L^q(\Omega)} \leq \||u_{0m}|^{2k}\|_{H_0^1(\Omega)}$$

d'où

$$\int_\Omega (|u_{0m}|^\rho u_{0m})^2 dx \leq C_{st} \|u_{0m}\|_{H_0^1(\Omega)})^{4k\rho} \leq \text{constante.}$$

En multipliant (3.66) par $g''_{km}(0)$ et sommant en k :

$$(u''_m(0), \sum_{k=1}^n g''_{km}(0) w_k)_{0,\Omega} = (f(0) - Au_m(0) - |u_m(0)|^\rho u_m(0), \sum_{k=1}^n g''_{km}(0) w_k)_{0,\Omega},$$

$$\Leftrightarrow (u''_m(0), u''_m(0))_{0,\Omega} = (f(0) - Au_m(0) - |u_m(0)|^\rho u_m(0), u''_m(0))_{0,\Omega},$$

alors

$$|u''_m(0)|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1,$$

d'où l'inégalité (3.65).

On a donc

$$\begin{aligned} |u''_m(t)|_{L^2(\Omega)} + \alpha \|u'_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C' + (1 + Cst + C) \int_0^t |u''_m(\sigma)|_{L^2(\Omega)} d\sigma \\ + (C + Cst) \int_0^t \|u'_m(\sigma)\|_{H_0^1(\Omega)}) d\sigma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\min(1, \alpha)(|u''_m(t)|_{L^2(\Omega)} + \|u'_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)})^2) \leq C' \\ &+ \max(1 + Cst + C, C + Cst) \int_0^t \left(|u''_m(\sigma)|_{L^2(\Omega)} + \|u'_m(\sigma)\|_{H_0^1(\Omega)} \right) d\sigma, \end{aligned}$$

on pose

$$\gamma = \min(1, \alpha), \quad \beta = \max(1 + Cst + C, C + Cst),$$

ce qui donne :

$$(|u''(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \|u'(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)}) \leq c + \frac{\beta}{\gamma} \int_0^t (|u''(\sigma)|^2_{L^2(\Omega)} + \|u'(\sigma)\|^2_{H^1_0(\Omega)}) d\sigma \tag{3.67}$$

où

$$c = \frac{c'}{\gamma},$$

en appliquant le lemme de Gronwall sur (3.67) on trouve :

$$\begin{aligned} |u''(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \|u'(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} &\leq c \exp(\int_0^T \frac{\beta}{\gamma} d\sigma) \\ &= c \exp \frac{\beta}{\gamma} T < \infty. \end{aligned}$$

donc on déduit que pour $m \longrightarrow \infty$:

$$\begin{cases} u'_m \text{ demeure dans un ensemble borné de et } L^\infty(0, T; H^1_0(\Omega)), \\ u''_m \text{ demeure dans un ensemble borné de } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \end{cases} \tag{3.68}$$

alors on peut extraire une sous suite $(u_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}$ comme dans la démonstration du théorème (3.2) et donc on en déduit que :
u vérifié (3.54) et (3.55) reste à vérifie que :

$$u \in L^\infty(0, T; H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \tag{3.69}$$

étape ii : dans cet étape en vérifiant que :

$$u \in L^\infty(0, T; H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)),$$

de (3.1) on déduit que :

$$Au = u'' + |u|^\rho u - f,$$

mais

$$f \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),$$

d'après (3.49),

$$|u|^\rho u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),$$

et d'après (3.52) et (3.8)

$$u'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),$$

grâce à (3.55), on déduit alors que :

$$Au \in L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega)).$$

On a : la forme bilinéaire $a(.,.)$ est coercive d'après (3.15) alors A est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega)$, si G son inverse on a pour $u \in L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega))$

$$u(t) = G(Au) \text{ p.p .} \tag{3.70}$$

la frontière Γ de Ω est assez régulière donc d'après le théorème de régularité des solutions des équations linéaires elliptiques on a :

$$G \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H^2(\Omega)), \tag{3.71}$$

alors (3.69) résulte de (3.70) et (3.71) et comme l'unicité est assurée d'après (3.52) d'où la démonstration de ce théorème.

Conclusion

Dans notre travail nous avons utilisé les techniques de Faedo-Galerkin et les résultats de compacité pour montrer l'existence, l'unicité de la solution du deux problèmes aux limites non linéaire d'évolution, dans **la première partie** on a montrer l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites non linéaire d'évolution d'ordre 1, qui décrit par l'équation de la diffusion dans un espace choisit. Dans **la deuxième partie** est par la même technique nous avons montré l'existence et l'unicité et la régularité de la solution d'un problème aux limites non linéaire d'évolution d'ordre 2, avec des hypothèses assez faible que celle proposé par J. L. Lions [9].

Bibliographie

[1] **A.Adams**, *Sobolev espaces*, Academic press, 1975.

[2] **Yamna Boukhatem, Benyattou Benabdrrahmane, Abita Rahmoune**, *méthode de Faedo-Galerkin pour un problème aux limites non linéaire*, Analele Univ, Oradea, Fasc. Matematica, Tom XVI (2009), 167-181.

[3] **B. Benabderrahmane et B. Nouiri**, *Résolvante du système de Lamé dans un polygone*, Analele Univ. Oradea, Fasc. Mat. 15 (2008), 219-238.

[4] **B. Benabderrahmane et B. Nouiri et Y. Boukhatem**, *Index of elasticity operator with contact without friction boundary*, Studia Univ. Babes-Bolyai, Math, Vol. LIIII, No.3, (2008), 3-11.

[5] **H. Brezis**, *Analyse Fonctionnelle (Théorie et applications)*, Masson, Paris, (1983).

[6] **R. Dautray, J. L. Lions**, *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Licences et les Technique*, Tome1, Masson, Paris, (1987).

[7] **Y. Choquet-Bruhat, C. Dewitt-Morette, M. Dillaard-Bleick** *Analysis, Manifolds and physics*, North-Holland Publishing Company, Amstrdam, New York, Oxford (1977).

[8] **Kerdoun Messouda**, *L'étude de deux Problèmes aux limites non linéaire d'évolution, Mémoire de Master,* Univ de Jijel. Soutenu. 2016.

[9] **J. L. Lions**, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux limites non linéaires*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, (1969).

[10] **J. L. Lions, E. Magenes**, *Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications*, 1, Dunod,(1968).

[11] **P. A. Raviart, Thomas**, *Introduction à L'analyse Numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, Paris, (1983).

[12] **M. Thérèse et Lacroisc. Sonier**, *Distributions Espace de Sobolev Application*, Ellipses, Marketing, S. A, (1998).

[13] **M.Sibony**, *Analyse numérique III, Itérations et apprpximations*, Hermann (1988).

[14] **Sandel Saida** , *Quelques Problèmes aux limites gouvernés par l'équation non linéaire de la diffusion. Mémoire de Magestère*, Univ de Setif. Soutenu. 2005.