

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche scientifique



Université Mohamed Assidik Ben Yahia Jijel
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département d'Automatique
Filière : Automatique
Option : Automatique et informatique industrielle

Réf :

Mémoire de Fin d'Etudes En vue de
l'obtention du diplôme : **MASTER**

Thème

Modélisation et Commande d'un Segway

Présenté par : Benaliouche faissel
Bekioua sana

Proposé et dirigé par :
Mme. BOUDJEDIR Hana .

Années universitaire :2020/2021

Résumé :

L'objectif de ce travail est la modélisation du comportement d'un gyropode (segway) et la conception d'une commande automatique du système, avec une analyse détaillée. Le gyropode peut être considéré comme un pendule inversé, dont la consigne est de rester verticale. Lorsque l'utilisateur se penche, le véhicule conscient de ses états, va accélérer afin de retrouver sa stabilité.

La première partie de ce travail sera réservée à la modélisation du segway, qui basé sur le fonctionnement et les composants d'un sagway , puis par la suite ,en deuxième partie, on utilise la commande optimale LQR pour stabiliser ce système autour de son point d'équilibre instable et on teste plusieurs cas en différents étapes (avec et sans perturbation et le gain positif ou négatif) , afin de permettre la régulation de ce système. La dernière partie sera consacrée à l'utilisation de filtre de kalmane (LQG) pour quelques tests proposés pour le système segway pour traiter ces erreurs et donner une meilleure estimation de l'angle d'inclinaison.

Mots clés : Commande optimal – pendule inversé – Filtre de kalman – sagwey.

ملخص:

الهدف من هذا العمل هو نمذجة سلوك الجيرو بود (ساقوي) وتصميم نظام تحكم آلي مع تحليل مفصل. يمكن اعتبار الجيرو بود بندول مقلوب ، ونقطة ضبطه هي ابق في وضع عمودي. عندما ينحني المستخدم ، تكون السيارة على دراية بحالتها ، سوف تتسارع من أجل استعادة استقرارها سيتم تخصيص الجزء الأول من هذا العمل لنمذجة ساقوي ، والتي تعتمد على التشغيل ومكونات ساقوي ، ثم بعد ذلك ، في الوطن الثاني ، نستخدم التحكم الأمثل LQR لتثبيت هذا النظام حول نقطته. التوازن غير المستقر ويختبر أحدهما عدة حالات في مراحل مختلفة (مع وبدون اضطراب وكسب إيجابي أو سلبي) ، من أجل السماح بتنظيم هذا النظام. سيخصص الجزء الأخير لاستخدام مرشح كالمان) لبعض الاختبارات المقترحة لنظام (ساقوي) للتعامل مع هذه الأخطاء وتقديم تقدير أفضل. من زاوية الميل.

كلمات مفتاحية: تحكم أمثل - بندول مقلوب - مرشح كالمان - ساقوي

Abstract :

The objective of this work is the modeling of the behavior of a gyropod (segway) and the design of an automatic control of the system, with a detailed analysis

The gyropod can be considered as an inverted pendulum, whose instruction is to remain vertical. When the user leans, the vehicle is aware of its state and will accelerate in order to regain its stability

The first part of this work will be reserved for the modeling of the segway, which is based on the operation and components of a sagway, then subsequently, in the second part, we use the optimal control LQR to stabilize this system around its point of unstable equilibrium and we test several cases in different stages (with and without disturbance and the positive or negative gain), to allow the regulation of this system. The last part will be devoted to the use of Kalman filter (LQG) for some tests proposed for the segway system to treat these errors and give a better estimation of the tilt angle

Key words : Optimal control - inverted pendulum - kalman filter - sagwey

Remerciements

Je remercie avant tout le bon dieu de m'avoir donné courage et volonté pour réaliser ce travail et qui m'a éclairé les chemins par la lumière de son immense savoir

*Une grand merci assez particulier à notre encadreur, Madame docteur **Boudjire Hana** qui a su nous orienté, conseillé, motivé et qui nous a énormément aidé*

Je tiens à remercier aussi :

Mes amis pour leur présence ;

Les membres de jury pour avoir accepté d'évaluer mon travail ;

Je remercie énormément mes parents qui ont été toujours ma source d'inspiration, je leur dois d'être arrivé là, qu'ils trouvent ici une sorte de récompense pour tous les efforts consentis pour moi, ainsi que tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicace

*Je dédie ce travail à ma mère Hassina qui m'a porté dans
Son ventre pendant 9et a donné naissance à ce monde.
Et qui a été à mes cotés et m'a soutenu durant toute ma
Vie.*

A ma chère famille ; ma sœur Ahlem

*A toute la famille Benaliouche et pour toute ma
famille sans exception.*

*A tous mes amis et a tous ceux qui me connaissent de
Proche ou de loin.*

*Et, à toute la promotion Automatique et
l'informatique industrielle 2020-2021.*

Faïssel

Dédicaces

Celle qui sont la plus chers au monde, mes parents, à qui je n'arriverai jamais à exprimer ma gratitude et ma reconnaissance, pour son amour son soutien tout au long de mes études afin de faire de moi ce que je suis aujourd'hui, que DIEU les protège toujours.

Je dédie ce modeste travail :

A celle qui m'a donné la vie, le symbole de tendresse, qui c'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, à ma mère.

A mon père, école de mon enfance, qui a été mon ombre durant toutes les années des études, et qui a veillé tout au long de ma vie à m'encourager, à me donner "aide et à me protéger.

A mes frères et sœurs que DIEU les protège toujours

A mes amies.

A toutes la famille.

A tous ceux qui me sont chers.

sana

Listes des abréviations

TP : Transport Personale

HT: homme transport

CU : Système de contrôle

BSA : Capteurs d'équilibre

CC : courant continu

LQ : linéaire quadratique

LQR :linear quadratic regulator

DRE : Differential Riccati Equation

ARE : Algebric Riccati Equation

LTI : linéaire à temps invariant

x : vecteur d'état de processus

u : déterministe continu par morceaux fonctions d'entrée de contrôle

F : matrice de dynamique du système.

B : matrice d'entrée déterministe.

G : matrice d'entrée de bruit.

z : processus de mesure en temps discret

H : matrice de mesure

v : bruit blanc gaussien à temps discret

θ : Angle

$\dot{\theta}$: Vitesse angulaire

β : Biais du gyroscope

y_r : Vitesse réelle

y_m : Vitesse mesurée par gyroscope

w : Bruit de processus

τ_m : Couple moteur (Nm)

τ_e : Couple appliqué (Nm).

R : Résistance nominale aux bornes (Ohms)

L : inductance moteur (H)

k_f : Constante de frottement (Nms/rad)

k_m : Constante de couple (Nm/A)

k_e : Constante de fem arrière (Vs/rad)

θ : Position angulaire de l'arbre (rad).

ω : Vitesse angulaire de l'arbre (rad/s).

α : Accélération angulaire de l'arbre (rad/s²)

V_a : Tension aux bornes appliquée (V)

V_e : Tension emf arrière (V)

i : Courant à travers l'armature (A)

I_R : Inertie du rotor (kgm^2)

M_w : masse de la roue reliée à des deux côtés du robot.

M_p : masse du châssis du robot

I_w : moment d'inertie des roues

I_p : moment d'inertie du robot châssis

H_L, H_R, P_L, P_R : forces de réaction entre la roue et le châssis

l : distance entre les centres des roue et centre de gravité du robot

$C_L C_R$: couple appliqué des moteurs aux roues

H_{fL}, H_{fR} : forces de friction entre les sol et les roues

θ_w : angle de rotation des roues

θ_p : angle de rotation du châssis

$\dot{\theta}_w$: Vitesse angulaire de la roue (rad/s)

$R(t)$: Production (la sortie)

K_p : Gain proportionnel

K_i : Gain intégral

K_d : Gain dérivé

$e(t)$: Fonction d'erreur

Listes des figures

Chapitre 1 :Généralités sur les robots segway

Figure (I-1) :Dean kamen.....	3
Figure (I-2) : Le transporteur Personnel Segway.....	4
Figure (I-3) : Comment fonctionner un gyropode-inclinaison vers l'avant et l'arrière.....	5
Figure (I-4): Principe de fonctionnement du Segway - pour tourner.....	6
Figure (I-5) : les composantes du Segway.....	7
Figure (I-6): Les boutons et l'écran du dispositif de commande infokey	8
Figure (I-7) : Console et témoins lumineux	10
Figure (I-8) : Les capteurs de présence du conducteur	11
Figure (I-9): Capteurs d'équilibre (BSA).....	12
Figure (1.12): Schéma de carrosserie libre du châssis.....	17
Figure (I.10) Schéma d'un moteur à courant continu.....	13
Figure (I.11): Schéma de carrosserie libre des roues.....	15
Figure (1.13): la réponse indicielle en boucle ouvert du système.....	20

Chapitre III :Application de la commande optimale d'un segway

Figure (III-1-1) :la position x	41
Figure (III-1-2) :la vitesse linéaire.....	41
Figure (III-1-3) :l'angle φ	41
Figure (III-1-4) :la vitessse angulaire.....	42
Figure (III-1-5) :la commande (u).....	42
Figure (III-1-6) :l'erreur de pour suite angulaire.....	42

Figure (III-2-1) :la position x.....	43
Figure (III-2-2) :la vitesse linéaire.....	43
Figure (III-2-3) :l'angle φ	43
Figure (III-2-4) :la vitesse angulaire.....	44
Figure (III-2-5) :la commande u.....	44
Figure (III-2-6) :l'erreur de pour suite angulaire.....	44.
Figure (III-3-1) :la position x.....	45
Figure (III-3-2) :la vitesse linéaire.....	45
Figure (III-3-3) :l'angle φ	45
Figure (III-3-4) :la vitesse angulaire.....	46
Figure (III-3-5) :la commande u.....	46
Figure (III-3-6) :l'erreur de pour suite angulaire.....	46
Figure (III-4-1) :la position x.....	47
Figure (III-4-2) :la vitesse linéaire.....	47
Figure (III-4-3) :l'angle φ	47
Figure (III-4-4) :la vitesse angulaire.....	48
Figure (III-4-5) :la commande u.....	48
Figure (III-4-6) :l'erreur de pour suite angulaire.....	48

Chapitre IV : Commande optimale basée sur le filtre de Kalman pour un robot Segway

Figure IV.1 : Schéma fonctionnel du filtre de Kalman (cas $D=0$).....	55
Figure IV.2 : Structure du correcteur LQG.....	57
Figure (IV-1-1) :la position x.....	58
Figure (IV-1-2) :la vitesse linéaire.....	58
Figure (IV-1-3) :l'angle φ	59
Figure (IV-1-4) :la vitesse angulaire.....	59
Figure (IV-1-5) :la commande (u).....	59
Figure (IV-2-1) :la position x.....	60
Figure (IV-2-2) :la vitesse linéaire.....	60
Figure (IV-2-3) :l'angle φ	60
Figure (IV-2-4) :la vitesse angulaire.....	61
Figure (IV-2-5) :la commande (u).....	61
Figure (IV-3-1) :la position x.....	61
Figure (IV-3-2) :la vitesse linéaire.....	62
Figure (IV-3-3) :l'angle φ	62
Figure (IV-3-4) :la vitesse angulaire.....	62
Figure (IV-3-5) :la commande (u).....	63
Figure (IV-4-1) :la position x.....	63
Figure (IV-4-2) :la vitesse linéaire.....	63
Figure (IV-4-3) :l'angle φ	64
Figure (IV-4-4) :la vitesse angulaire.....	64
Figure (IV-4-5) :la commande (u).....	64

Liste des tableaux

Chapitre I : Généralités sur les robots segway

Tableau I.1 : Description des modèles Segway TP.....6

Tableau 1.2 : Boutons et icônes du dispositif de commande
infokey.....9

Sommaire

Remerciement

Dédicace

Liste des abréviations

Liste des Figures

Liste des tableaux

<i>Introduction Générale</i>	1
<i>Chapitre I : Généralités sur les robots Segway</i>	3
I.1. Introduction	3
I.2. Historique	3
I.3 Principe du fonctionnement d'un Segway	5
I.4 Description des modèles Segway TP	6
I.5. Composantes et sous-systèmes des segway TP	7
<i>I.5.1 Dispositif de commande infokey</i>	7
<i>I.5.2. Ensemble cadre LeanSteer / Guidon</i>	10
<i>I.5.3. Ensemble roue / pneu et garde-boues</i>	10
<i>I.5.4. Base électrique</i>	10
<i>I.5.5. Console équipée de témoins lumineux d'équilibre et de charge</i>	10
<i>I.5.6. Tapis</i>	11
<i>I.5.7. Les capteurs de présence du conducteur</i>	11
<i>I.5.8. Centrale inertielle (Capteurs d'équilibre (BSA))</i>	11
I.6. Modélisation du système	12
<i>I.6.1. Modèle linéaire d'un moteur à courant continu (CC)</i>	12
<i>I.6.2. Modèle dynamique pour un pendule inversé à deux roues</i>	14
I.7. Simulation en boucle ouverte	20
I.8. Conclusion	21
<i>Chapitre II : Principe de la commande optimale</i>	22

II.1. Introduction	22
II.2. Historique	22
II.3. La théorie de la commande optimale	23
<i>II.3.1 Principe d'optimalité</i>	24
<i>II.3.2 Formulation du problème de la commande optimale</i>	24
II.4. Position du problème	24
<i>II.4.1 Classement des problèmes de la commande optimale</i>	26
II.4.2 Rappel de principes fondamentaux	26
II.5. Commande Linéaire Quadratique	30
<i>II.5.1. Commande LQ à horizon fini</i>	32
<i>II.5.2. Commande LQ à horizon infini</i>	32
II.6. Commande LQ à temps discret	32
<i>II.6.1 Commande LQ à temps discret à horizon fini</i>	33
II.6.2. <i>Commande LQ à temps discret à horizon infini</i>	36
II.7. Conclusion	37
Chapitre III : Commande LQR pour un robot Segway	39
III.1. Introduction :	39
III.2. Synthèse d'une loi de commande LQR	39
III.3. Résultats de Simulation	40
III. Conclusion	49
Chapitre IV : Commande optimale basé sur le filtre de Kalman pour un robot Segway	50
IV.1. Introduction	50
IV.2. Définition	50
IV.3. Principe du Filtre	51
IV.4. Avantage et Inconvénient de FK	51
IV.5. Limites	52
IV.6. Le modèle de Kalman	52

<i>IV.6.1. Structure d'un estimateur non biaisé</i>	53
IV.7. Estimateur à variance minimale	55
IV.7.1 Solution générale	56
IV.7.2 filtre de Kalman continu	56
<i>IV.7.3. filtre de Kalman discret</i>	<i>56</i>
IV.8. Régulateur linéaire quadratique gaussien	57
IV.9. les résultats de la simulation	58
CONCLUSION	65
Conclusion générales	66
Références bibliographiques	67

INTRODUCTION GENERALE

Un robot mobile se déplaçant à une vitesse élevée sur un sol naturel est soumis à des phénomènes de glissement et de dérapage qui peuvent altérer les performances, voire déstabiliser la commande du système en suivi de trajectoire ou de chemin. Au cours des dernières années, beaucoup d'attention a été focalisée sur les véhicules autonomes à roues se déplaçant rapidement sur des terrains naturels. La maîtrise des déplacements à haute vitesse en environnement naturel peut devenir un enjeu important pour des applications robotiques dans l'exploration terrestre, spatiale, ou dans l'agriculture [1]

Le transport dans le monde s'est développé très rapidement, à travers des moyens évolués que ce soit en ce qui concerne la vitesse ou le confort. Les scientifiques et les ingénieurs ont travaillé dur afin d'aider les gens à inventer de petits scooters, des vélos électriques et des robots mobiles, parmi lesquels, on trouve le Segway. Il s'agit d'un moyen de transport motorisé qui permet de se déplacer en ville. En termes de prestations, il est moins rapide qu'une voiture ou qu'un scooter, plus maniable, plus écologique, moins encombrant et nettement plus moderne. [2]

Le Segway est un gyropode, c'est-à-dire un véhicule électrique monoplace, constitué d'une plateforme munie de deux roues parallèles sur laquelle l'utilisateur se tient debout, d'un système de stabilisation gyroscopique et d'un manche et de conduite. Ce moyen de transport personnel, construit autour du principe du pendule inversé, où le centre de gravité du système est situé très au-dessus de l'axe de rotation des roues. C'est ainsi qu'un système instable en tant que tel, doit être stabilisé dynamiquement afin de remplir son rôle de véhicule.

Dans le domaine de la recherche scientifique, l'automatique constitue une importante discipline qui permet d'améliorer le développement de techniques de commande non linéaires, afin d'aboutir à de meilleurs systèmes.

Pour un Segway le plus part des travaux [3] consistent à utiliser une loi de commande linéaire telles que, le PID est le retour d'états. Cela, revient à son modèle dynamique linéaire qu'est très proche à la réalité. La commande LQR (Linéaire Quadratique Régulateur) [4] est une commande qui a le même principe de retour d'état. La différence principale entre la commande LQR et la commande par retour d'états, est que la première son gain est synthétisé afin de minimiser un critère donné. La caractéristique d'avoir un gain variable selon le temps

et l'environnement, implique la robustesse de la commande LQR par rapport à la commande par retour d'état simple.

L'observateur est un capteur informatique responsable sur la reproduction de vecteur d'état à tout instant [5]. Cependant, pour plusieurs raisons techniques et économiques, l'implémentation d'un capteur pour chaque variable d'état est impossible. A partir de ce problème l'utilisation d'un observateur est indispensable pour estimer les variables d'états inconnues.

Le filtre de Kalman est l'observateur souvent utilisé pour un Segway [27]. Cet observateur est caractérisé principalement par son modèle linéaire et sa capacité d'estimation à la présence des bruits de mesure et d'états d'où, le gain d'observation est synthétisé afin de minimiser la covariance de l'erreur d'observation. Ce qui donne, des signaux estimés moins bruités que les signaux réels.

Le principe du pendule inverse avec son modèle mathématique sont présentés au début du premier chapitre. Par la suite, on présente le principe du Segway basé sur le pendule inverse et qui est un système non linéaire instable sous actionné à plus d'un degré de liberté. Son modèle mathématique sous deux formes est présenté à la fin de ce chapitre.

Dans le deuxième chapitre, de nature théorique, nous abordons les bases de la commande des systèmes non linéaires tout en développant celle de la commande optimale utilisée dans ce travail.

Ensuite, Dans le troisième chapitre, nous étudions l'application de la commande optimale sur le système de base du gyropode qui est le pendule inversé et les différents résultats de simulation sont annoncés et interprétés pour plusieurs tests (avec et sans perturbations avec l'angle soit positif où bien négatif).

Le chapitre quatre, s'intéresse quant à lui, à l'observateur de type kalman, utilisé dans ce travail. Après une petite introduction, une démonstration de son modèle dynamique est établit accompagnés de résultats de la simulation du chapitre III après contrôle par cet observateur.

Enfin, nous terminons par une synthèse sur l'ensemble du projet et les perspectives à ce travail sous forme de conclusion générale.

Chapitre I: Généralités sur les robots segway

Chapitre I :

Généralités sur les robots Segway

I.1.Introduction

Le principe de fonctionnement et la modélisation d'un gyropode segway ont été présentés dans ce chapitre. Ce système robotique est en effet un assemblage complexe d'une multitude d'éléments mécaniques et électroniques, de automatiques et informatiques en temps réel. Notre objectif est de rechercher un modèle qui décrit avec exactitude le comportement d'un gyropode.

I.2.Historique

Le **SegwayPT**, ou *Segway TP*, pour *Transporteur Personnel Segway* (anciennement appelé **Segway HT**) est un gyropode, c'est-à-dire un véhicule électrique monoplace, constitué d'une plateforme munie de deux roues parallèles sur laquelle l'utilisateur se tient debout, d'un système de stabilisation gyroscopique et d'un manche de maintien et de conduite. Il a été inventé par Dean Kamen et mis sur le marché en 2001.



Figure (I-1) :Dean kamen

- ❖ Il y a deux générations de gyropode Segway TP :
- ❖ La première génération, introduite en décembre 2001 et dont la commercialisation s'est terminée en 2006.
- ❖ La seconde génération, introduite en août 2006. Ce sont les modèles actuellement disponibles.
- ❖ Il y a deux principales différences entre la première et la seconde génération :
- ❖ Commande de direction
 1. La première génération avait une poignée qui tournait sur elle-même pour faire tourner le gyropode Segway TP. Pour tourner à droite, il fallait tourner la poignée vers la droite, et vice-versa).
 2. La seconde génération a vu apparaître une technologie appelée *LeanSteer* qui permet de faire tourner le gyropode Segway TP lorsque l'utilisateur penche son corps sur le côté. Pour cela, il suffit qu'il se penche en tenant le guidon, et l'ensemble colonne/guidon se penche avec lui, ce qui permet de donner une commande de direction. Cette technologie permet de supprimer les effets de déséquilibres latéraux (le roulis) que provoquent les irrégularités du sol.
- ✓ **Dispositif de commande :**
 - La première génération avait un jeu de trois clés de type *i Button* pour démarrer le gyropode Segway TP. Avec la seconde génération est apparu le dispositif de commande *InfoKey*, sorte de télécommande sans fil qui permet :
 - De démarrer et d'éteindre le gyropode Segway TP
 - D'avoir des informations sur le trajet parcouru (heure, date, vitesse instantanée, vitesse moyenne, nombre de kilomètres parcourus, nombre de kilomètres total)
 - De changer la vitesse maximale autorisée
 - D'activer le système d'alarme du gyropode Segway TP (figure I.1) :



Figure (I-2) : Le transporteur Personnel Segway

I.3 Principe du fonctionnement d'un Segway

Le Segway TP fonctionne comme le corps humain : quand vous marchez, si vous vous penchez en avant, vous faites un pas en avant pour conserver votre équilibre. Si vous vous penchez en l'arrière, vous faites un pas en arrière. Sur un Segway TP, lorsque vous vous penchez en avant ou arrière, la machine actionne les roues dans la direction où vous vous penchez.

Le Segway TP utilise une technologie appelée stabilisation dynamique pour maintenir son équilibre et avancer ou reculer.

Lorsque vous vous penchez, votre centre de gravité se déplace au-delà de l'aire de contact (la zone de contact des pneus avec le sol), ce qui entraîne l'inclinaison du Segway TP. Les systèmes du Segway TP détectent ce changement et actionnent les roues.

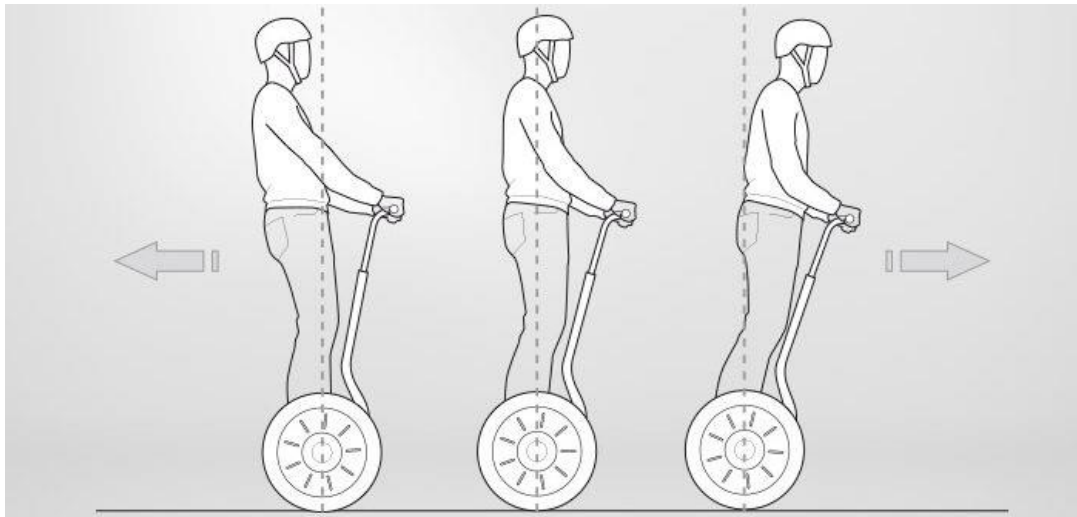


Figure (I-3) : Comment fonctionner un gyropode-inclinaison vers l'avant et l'arrière

Lorsque vous faites pivoter le cadre LeanSteer vers la gauche, le Segway TP tourne à gauche. Lorsque vous faites pivoter le cadre LeanSteer vers la droite, le Segway TP tourne à droite. Pour faire tourner le Segway TP, orientez le cadre LeanSteer dans la direction voulue en maintenant le guidon aligné par rapport à votre corps.

Lorsque le cadre LeanSteer est centré, le Segway TP va tout droit.

Voir la (Figure I- 4).

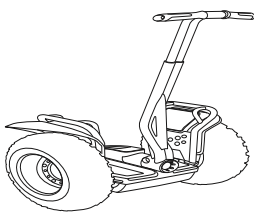
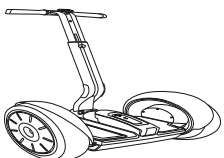


Figure (I-4): Principe de fonctionnement du Segway - pour tourner

La technologie de stabilisation dynamique du Segway TP lui permet de s'équilibrer vers l'avant et l'arrière, mais pas d'un côté à l'autre. Si vous faites basculer le Segway TP sur une seule roue, il ne se placera pas dynamiquement en dessous de vous et risque de tomber. Le conducteur est responsable de maintenir sa stabilité latérale en gardant le corps aligné par rapport au cadre LeanSteer. De même, penchez-vous à l'intérieur des virages et vers l'amont lorsque vous conduisez sur une pente.

I.4 Description des modèles Segway TP

Tableau I.1 : Description des modèles Segway TP

Nom du modèle	Description
<p>x2</p> 	<p>Le modèle x2 est optimisé pour la conduite à l'extérieur. Il est équipé de plus grandes roues et de pneus plus larges à crampons et est conçu pour être conduit sur des terrains plus accidentés et plus variés que les autres modèles. La voie plus large et les pneus à basse pression du modèle x2 assurent une plus grande stabilité et une meilleure adhérence sur terrains accidentés. Le modèle x2 n'est pas conçu pour la conduite sur les trottoirs.</p>
<p>i2</p> 	<p>Le modèle i2 est optimisé pour l'utilisation à l'intérieur ou l'extérieur dans une grande variété d'environnements.</p>

I.5. Composantes et sous-systèmes des segway TP

Le Segway TP comprend les composants et sous-systèmes suivants [6] (**figure I-5**)

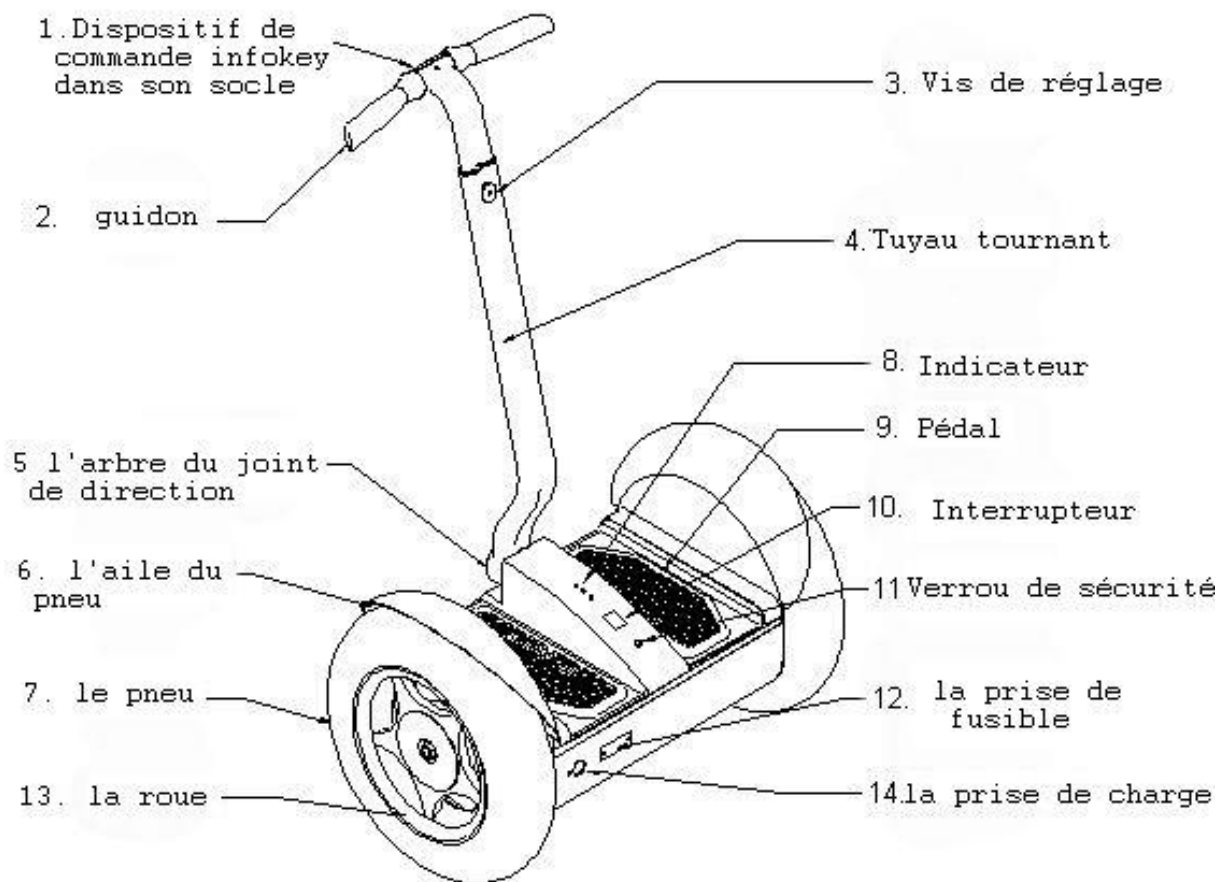


Figure (I-5) : les composantes du Segway

1.5.1 Dispositif de commande infokey

L'infokey est le dispositif de commande sans fil qui sert à manœuvrer et à contrôler le Segway TP et il est propre à chaque Segway (gyropode). Il est doté de quatre boutons sur son contour externe et d'un écran en son centre. Il n'affiche pas seulement les informations pratiques concernant votre trajet, à savoir la quantité d'énergie restante, le nombre de kilomètres parcourus ou la vitesse instantanée. Il est indispensable pour le démarrage et permet d'activer une alarme qui rend toute tentative de vol inutile [7].

L'écran du dispositif de commande InfoKey affiche des informations d'état telles que des messages et avertissements.

La **Figure I-6** montre les boutons et les icônes données qui s'affichent sur le dispositif de commande InfoKey.

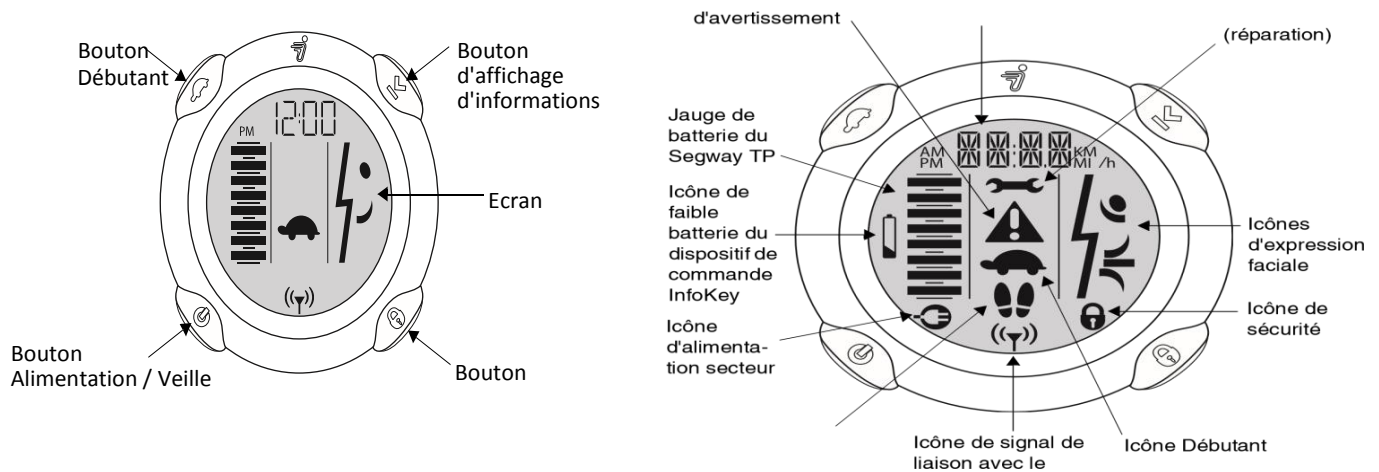











Figure (I-6) : Les boutons et l'écran du dispositif de commande infokey

Tableau 1.2 : Boutons et icônes du dispositif de commande infokey

Commande	Description
Boutons	
Bouton Alimentation / Veille 	Permet de mettre en marche et de couper le contact du Segway TP et de passer du mode Equilibre au mode Veille.
Bouton Débutant 	Permet d'activer et de désactiver le mode de conduite Débutant et d'allumer le rétroéclairage.
Bouton d'affichage D'informations 	Permet de parcourir diverses informations comme l'heure, la date, la vitesse, la vitesse moyenne, la distance parcourue et le compteur kilométrique. Permet de régler l'heure, le format de vitesse / distance et la date et de remettre à zéro la vitesse moyenne et la distance parcourue.
Bouton Sécurité 	Permet d'activer la fonction de sécurité (alarme).

Commande	Description
Icônes d'erreur de détection de conducteur 	Si deux des quatre capteurs de présence de conducteur (deux sous chaque tapis) ne sont pas enclenchés en présence d'un conducteur, les icônes d'erreur de détection de conducteur s'affichent. Celles-ci s'affichent en mode Veille si vous essayez de monter sur votre Segway TP alors qu'il n'est pas prêt pour la conduite. Elles s'affichent au démarrage si aucun poids n'est exercé sur les tapis.
Icône d'alimentation secteur 	Indique que le Segway TP est branché sur une prise secteur.
Icône de faible batterie du dispositif de commande InfoKey 	Indique que la batterie du dispositif de commande InfoKey doit être remplacée. Les batteries doivent être éliminées conformément aux réglementations en vigueur concernant l'élimination de matériaux toxiques. Les batteries de remplacement CR2430 sont vendues dans les magasins d'électronique. Votre nouveau Segway TP est livré avec une batterie de rechange pour le dispositif de commande InfoKey, située sous l'habillage de la console.
Jauge de batterie du Segway TP 	Indique le niveau de charge restant dans les batteries du Segway TP.
Icône d'avertissement 	Indique une condition d'avertissement causée par des facteurs tels qu'une conduite agressive, l'utilisation de la machine en dehors de la plage de températures, le décollement du pied sur le tapis, etc.

1.5.2. Ensemble cadre Lean Steer / Guidon :

Le cadre Lean Steer pivote à la base pour contrôler la direction gauche/droite du Segway TP.

1.5.3. Ensemble roue / pneu et garde-boues :

Le Segway TP est équipé de garde-boues conçus pour protéger le conducteur contre les projections de débris et dans les virages.

1.5.4. Base électrique :

La base électrique contient la console, les capteurs de présence de conducteur, les cartes de commande (Système de contrôle (CU), Moteurs, Boîte à vitesses, Centrale inertielle (Capteurs d'équilibre (BSA)).

1.5.5. Console équipée de témoins lumineux d'équilibre et de charge :

La console est située sous le cadre LeanSteer et entre les deux tapis. Elle est assemblée avec un couvercle qui ne doit pas être retiré.

Il y a deux groupes de témoins lumineux sur la console : Les témoins lumineux d'équilibre qui indiquent visuellement si le Segway TP est prêt à recevoir le conducteur et les témoins de charge des batteries qui indiquent le niveau de charge des batteries du Segway TP (**Figure : I-7**).

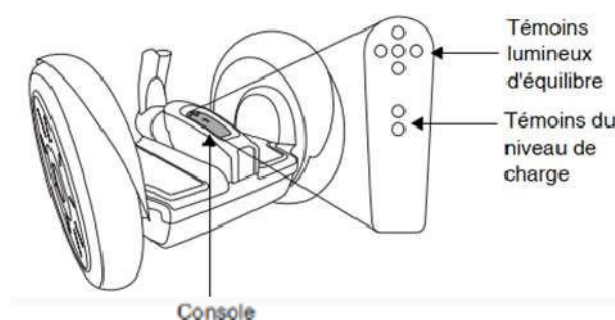


Figure (I-7) : Console et témoins lumineux

1.5.6. Tapis :

Le Segway TP contient deux tapis posés à droit et à gauche de la console. Les tapis protègent les capteurs de présence du conducteur situés en dessous et permettant une conduite en tout confort.

1.5.7. Les capteurs de présence du conducteur :

Le Segway TP est équipé de quatre capteurs situés sous les tapis pour détecter la présence ou l'absence du conducteur pendant la mise en marche du Segway TP :

- a) Si les pieds sont à la position correcte sur les tapis, les quatre capteurs sont enclenchés, permettant au Segway TP de fonctionner normalement en mode Equilibre.
- b) Si moins de trois capteurs sont enclenchés pendant la conduite, le Segway TP réduit la vitesse limite maximale, que le mode de conduite (Débutant) soit activé ou non. Dès que les pieds sont correctement repositionnés, le Segway TP reprend à plein régime.
- c) Si le Segway TP est déplacé trop rapidement en mode Equilibre et qu'aucun capteur de présence ne s'enclenche, un avertissement par vibration du guidon est généré avant de passer du mode Equilibre au mode Veille (**Figure: I-8**).

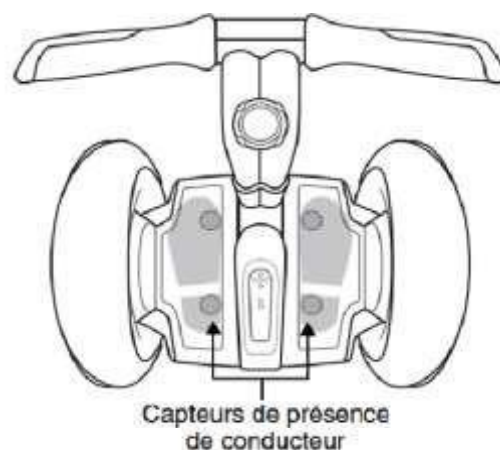


Figure (I-8) : Les capteurs de présence du conducteur

1.5.8. Centrale inertielle (Capteurs d'équilibre (BSA) :

La centrale inertielle ou Le capteur d'équilibre (BSA) est un modèle d'élégance pour un appareil extrêmement résistant et particulièrement sensible qui contient cinq capteurs de taux angulaire (gyroscopes à semi-conducteurs) et deux capteurs d'inclinaison. Elle envoie aux cartes de commande des informations sur l'orientation du Segway TP. Tous les capteurs sont surveillés en permanence par le Segway TP afin d'en assurer le fonctionnement. En cas de défaillance de l'un de ces capteurs, le Segway déclenche un arrêt d'urgence (**Figure : I-9**).

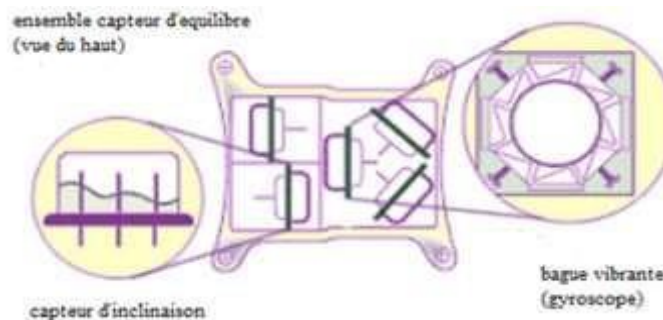


Figure (I-9): Capteurs d'équilibre (BSA)

Le Segway a été conçu dans un souci de sécurité du conducteur et des personnes se trouvant à proximité. Des sous-systèmes redondants assurent le fonctionnement contrôlé du Segway pour le cas improbable d'une défaillance d'un composant. En cas de défaillance d'un composant de sous-système, l'autre composant continue de fonctionner pour permettre l'arrêt en toute sécurité avant de descendre de la machine [8].

I.6. Modélisation du système

La dynamique du robot doit être décrite par un modèle mathématique afin de faciliter le développement d'un système de contrôle efficace pour le robot d'équilibrage. Dans ce chapitre, l'équation du mouvement pour un pendule inversé à deux roues et un modèle linéaire pour un moteur à courant continu est dérivée en détail [9].

I.6.1. Modèle linéaire d'un moteur à courant continu (CC)

Le robot est alimenté par deux moteurs à courant continu. Dans cette section, le modèle d'espace d'états du moteur à courant continu est dérivé. Ce modèle est ensuite utilisé dans le modèle dynamique du robot d'équilibrage pour fournir une relation entre la tension d'entrée des moteurs et le couple de commande nécessaire pour équilibrer le robot [9].

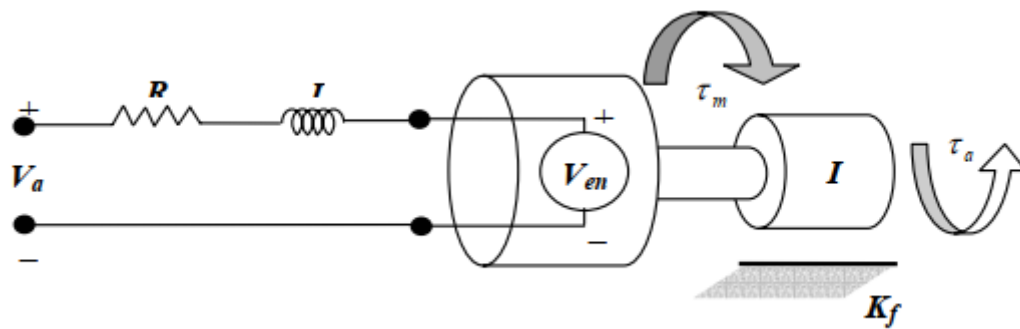


Figure (I. 10) Schéma d'un moteur à courant continu

La figure (I.10) illustre un modèle linéaire efficace pour un moteur à courant continu. Lorsqu'une tension est appliquée aux bornes du moteur, un courant i est généré. Le moteur produit un couple τ_m , proportionnel au courant. Cette Relation peut être exprimée comme :

$$\tau_m = K_m i \quad (\text{I.1})$$

Une paire résistance-inductance en série avec une tension, V_e , peut être utilisée pour modéliser le circuit du moteur. Cette tension de force électromotrice arrière est produite parce que les bobines du moteur se déplacent à travers un champ magnétique. La tension produite peut être approximée comme une fonction linéaire de la vitesse de l'arbre, qui peut s'écrire

$$V_e = K_e \omega \quad (\text{I.2})$$

À ce stade, une équation différentielle linéaire pour le circuit électrique du moteur à courant continu peut être écrite en utilisant la loi de tension de Kirchoff, la loi stipule que la somme de toutes les tensions dans le circuit doit être égale à zéro. Pour le moteur à courant continu, cela peut être écrit comme

$$V_a - Ri - L \frac{di}{dt} = 0 \quad (\text{I.3})$$

En dérivant l'équation de mouvement du moteur, le frottement sur l'arbre du moteur est approximé comme une fonction linéaire de la vitesse de l'arbre. L'approximation de frottement sur l'arbre du moteur est proportionnelle au vitesse de l'arbre par K_f .

La loi du mouvement de Newton stipule que la somme de tous les couples produits sur l'arbre est linéairement liée à l'accélération de l'arbre par la charge d'inertie de l'armature. I_R .

L'instruction précédente peut être écrite comme

$$\sum M = \tau_m - K_f \omega - \tau_a = I_R \dot{\omega} \quad (\text{I.4})$$

Substituer les équations (I.1) et (I.2) dans les équations (I.3) et (I.4), et réorganiser en

Termes des dérivées temporelles, conduit aux deux équations fondamentales suivantes qui régit le mouvement du moteur. Tous les deux

$$\frac{di}{dt} = \frac{R}{L} i + \frac{k_e}{L} \omega + \frac{V_a}{L} \quad (\text{I.5})$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{K_m}{I_R} i - \frac{k_e}{I_R} \omega - \frac{\tau_a}{I_R} \quad (\text{I.6})$$

Les deux équations sont des fonctions linéaires du courant et de la vitesse et elles incluent la première commandée des dérivés de temps. Un modèle de moteur à courant continu simplifié suffit pour l'équilibrage cas de robot. Pour cette raison, l'inductance et le frottement du moteur sont pris en compte négligeable et est égal à zéro. Par conséquent, (I.5) et (I.6) peuvent être approximés comme

$$i = \frac{-k_e}{R} \omega + \frac{1}{R} V_a \quad (\text{I.7})$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{K_m}{I_R} i - \frac{\tau_a}{I_R} \quad (\text{I.8})$$

En remplaçant l'équation (I.7) dans l'équation (I.8), une approximation pour le moteur à courant continu qui est uniquement fonction de la vitesse actuelle du moteur, de la tension appliquée et du couple appliqué est disponible.

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{K_m k_e}{I_R R} \omega + \frac{1}{I_R R} V_a - \frac{\tau_a}{I_R} \quad (\text{I.9})$$

Comme l'inductance du moteur est négligée, le courant à travers les enroulements n'est pas considéré dans l'équation du mouvement du moteur. Le courant atteindra alors un état constant immédiatement par rapport à la vitesse de l'arbre, ce qui prend du temps pour passer d'une vitesse initiale à une vitesse finale après un changement de la tension d'entrée. La dynamique du moteur peut être représentée avec un modèle d'espace d'états, c'est un système de premier ordre avec les paramètres position, θ , et vitesse, ω , qui représente son fonctionnement. Les entrées du moteur sont alors la tension appliquée et couple appliqué [9]

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{K_m k_e}{I_R R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{K_m}{I_R R} & -\frac{1}{I_R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ \tau_a \end{bmatrix} \quad (\text{I.10})$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + [0 \quad 0] \begin{bmatrix} V_a \\ \tau_a \end{bmatrix} \quad (\text{I.11})$$

1.6.2. Modèle dynamique pour un pendule inversé à deux roues

Le pendule inversé à deux roues, bien que plus complexe dans la dynamique du système, a un comportement similaire avec un pendule sur un chariot. Le pendule et la dynamique des roues

sont analysés séparément au début, mais cela conduira finalement à deux équations de mouvement qui décrivent complètement le comportement du robot d'équilibrage. Comme le comportement du robot peut être influencé par des perturbations ainsi que par le couple du moteur, le modèle mathématique devra s'adapter à de telles forces. D'abord les équations de mouvement associées aux roues gauche et droite sont obtenues. La figure suivante montre le diagramme de carrosserie libre pour les deux roues. Puisque l'équation pour les roues gauche et droite sont complètement analogues, seule l'équation pour la roue droite est donnée [9].

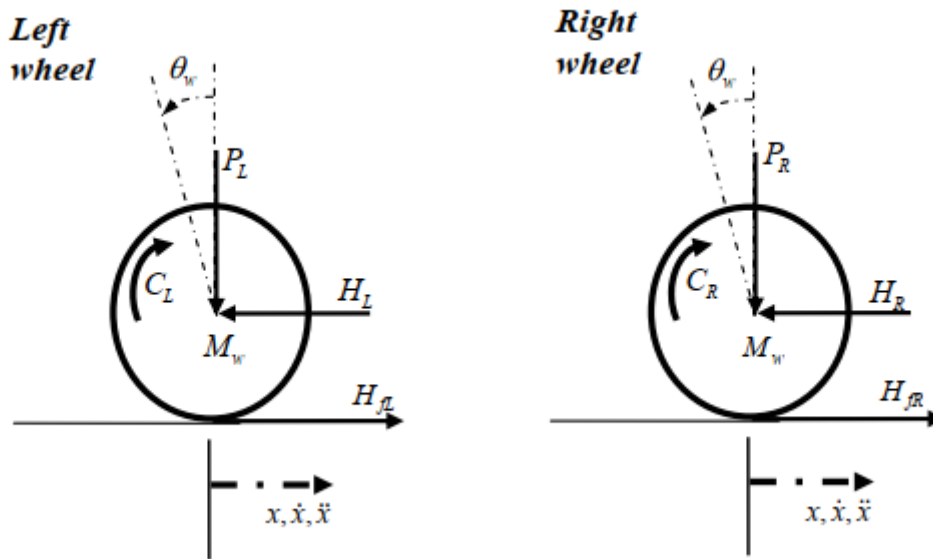


Figure (I.11): Schéma de carrosserie libre des roues

En utilisant la loi du mouvement de Newton, la somme des forces sur la direction horizontale x est :

$$\sum F_x = Ma \quad (\text{I.12})$$

$$M_w \ddot{x} = H_{fR} - H_R \quad (\text{I.13})$$

La somme des forces autour du centre de la roue donne :

$$\sum M_0 = Ia \quad (\text{I.14})$$

$$I_w \ddot{\theta}_w = C_R - H_{fR} r \quad (\text{I.15})$$

À partir de la dynamique du moteur à courant continu, le couple du moteur peut être exprimé comme :

$$\tau_m = I_R \frac{d\omega}{dt} + \tau_a \quad (\text{I.16})$$

En réorganisant l'équation et en remplaçant les paramètres du moteur à courant continu

Section de dérivation, le couple de sortie aux roues est atteint :

$$C = I_R \frac{d\omega}{dt} = -\frac{K_m K_e}{R} \dot{\theta}_w + \frac{K_m}{R} V_a \quad (\text{I.17})$$

Par conséquent, l'équation (I.15) devient :

$$I_w \ddot{\theta}_w = \frac{-K_m K_e}{R} \dot{\theta}_w + \frac{K_m}{R} V_a - H_{fR} r \quad (\text{I.18})$$

Ainsi

$$H_{fR} = \frac{-K_m K_e}{Rr} \dot{\theta}_w + \frac{K_m}{Rr} V_a \frac{I_w}{r} \ddot{\theta}_w \quad (\text{I.19})$$

L'équation (I.15) est substituée à (I.12) pour obtenir l'équation des roues gauche et droite

Pour la roue gauche

$$M_w \ddot{x} = \frac{-K_m K_e}{Rr} \dot{\theta}_w + \frac{K_m}{Rr} V_a - \frac{I_w}{r} \ddot{\theta}_w - H_L$$

Pour la roue droite

$$M_w \ddot{x} = \frac{-K_m K_e}{Rr} \dot{\theta}_w + \frac{K_m}{Rr} V_a - \frac{I_w}{r} \ddot{\theta}_w - H_R$$

Parce que le mouvement linéaire agit sur le centre de la roue, la rotation angulaire peut

Être transformé en mouvement linéaire par simple transformation

$$\ddot{\theta}_w r = \ddot{x} \Rightarrow \ddot{\theta}_w = \frac{\ddot{x}}{r}$$

$$\dot{\theta}_w r = \dot{x} \Rightarrow \dot{\theta}_w = \frac{\dot{x}}{r}$$

Par la transformation linéaire, les équations (I.18) et (I.19) deviennent :

Pour la roue gauche,

$$M_w \ddot{x} = \frac{-K_m K_e}{Rr^2} \dot{x} + \frac{K_m}{Rr} V_a - \frac{I_w}{r^2} \ddot{x} - H_L \quad (\text{I.20})$$

Pour la roue droite

$$M_w \ddot{x} = \frac{-K_m K_e}{Rr^2} \dot{x} + \frac{K_m}{Rr} V_a - \frac{I_w}{r^2} \ddot{x} - H_R \quad (\text{I.21})$$

L'addition des équations (I.20) et (I.21) donne ensemble,

$$2\left(M_w + \frac{I_w}{r^2}\right) \ddot{x} = \frac{-2K_m K_e}{Rr^2} \dot{x} + \frac{2K_m}{Rr} V_a - (H_L + H_R) \quad (\text{I.22})$$

Le châssis du robot peut être modélisé comme un pendule inversé, **la figure (I.12)** montre le libre schéma de carrosserie du châssis.

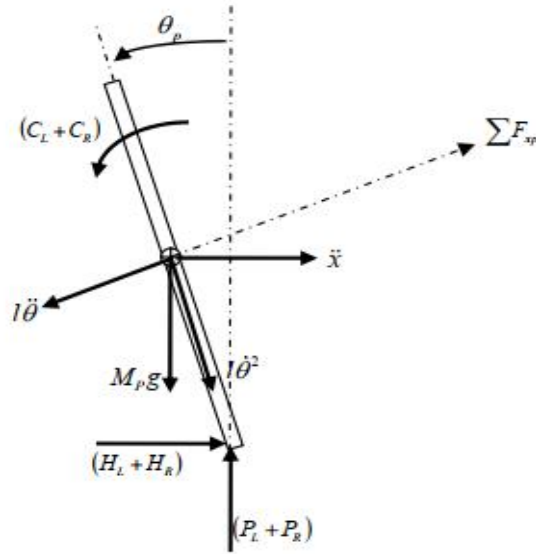


Figure (I.12): Schéma de carrosserie libre du châssis

Encore une fois, en utilisant la loi du mouvement de Newton, la somme des forces dans la direction horizontale,

$$\sum F_x = M_p \ddot{x}$$

$$(H_L + H_R) - M_p l \ddot{\theta}_p \cos \theta_p + M_p l \dot{\theta}_p^2 \sin \theta_p = M_p \ddot{x} \quad (\text{I.23})$$

Donc:

$$(H_L + H_R) = M_p \ddot{x} + M_p l \ddot{\theta}_p \cos \theta_p - M_p l \dot{\theta}_p^2 \sin \theta_p \quad (\text{I.24})$$

La somme des forces perpendiculaires au pendule

$$\sum F_{xp} = M_p \ddot{x} \cos \theta_p$$

$$(H_L + H_R) \cos \theta_p + (P_L + P_R) \sin \theta_p - M_p g \sin \theta_p - M_p l \ddot{\theta}_p = M_p \ddot{x} \cos \theta_p \quad (\text{I.25})$$

La somme des moments autour du centre de masse du pendule :

$$\sum M_o = I \alpha$$

$$-(H_L + H_R) l \cos \theta_p - (P_L + P_R) l \sin \theta - (C_L + C_R) = I_p \ddot{\theta}_p \quad (\text{I.26})$$

Le couple appliqué au pendule par le moteur, tel que défini dans l'équation (I-15) et après une transformation linéaire :

$$C_L + C_R = \frac{-2k_m k_e x}{R r} + 2 \frac{2k_m}{R} V_a$$

En substituant cela dans l'équation (I-26), on obtient :

$$-(H_L + H_R)l \cos \theta_p - (P_L + P_R)l \sin \theta - \left(\frac{-2k_m k_e x}{R} \frac{x}{r} + 2 \frac{2k_m}{R} V_a \right) = I_P \ddot{\theta}_P$$

Donc :

$$-(H_L + H_R)l \cos \theta_p - (P_L + P_R)l \sin \theta = \left(\frac{-2k_m k_e \dot{x}}{R} \frac{x}{r} + 2 \frac{2k_m}{R} V_a \right) + I_P \ddot{\theta}_P \quad (I.27)$$

Multipliez l'équation (I-25) par (-l) :

$$[-(H_L + H_R)l \cos \theta_p - (P_L + P_R)l \sin \theta] + M_p g l \sin \theta_p + M_p l^2 \ddot{\theta}_p = -M_p \ddot{x} l \cos \theta_p \quad (I.28)$$

Substituer l'équation (I-27) à l'équation (I-28) :

$$I_P \ddot{\theta}_P \frac{-2k_m k_e}{Rr} \dot{x} + 2 \frac{2k_m}{R} V_a + M_p g l \sin \theta_p + M_p l^2 \ddot{\theta}_p = -M_p \ddot{x} l \cos \theta_p \quad (I.29)$$

Pour éliminer $(H_L + H_R)$ de la dynamique motrice, l'équation (I-24) est remplacée par l'équation (I-22):

$$2 \left(M_w + \frac{I_w}{r^2} \right) \ddot{x} = \frac{-2k_m k_e}{Rr^2} \dot{x} + 2 \frac{2k_m}{Rr} V_a - M_p \ddot{x} - M_p l \ddot{\theta}_p \cos \theta_p + M_p l \dot{\theta}_p^2 \sin \theta_p \quad (I.30)$$

Le réarrangement des équations (I-29) et (I-30) donne les équations de mouvement non linéaire du système :

$$(I_p + M_p l^2) \ddot{\theta}_p - \frac{2K_m K_e}{Rr^2} \dot{x} + \frac{2K_m}{Rr} V_a + M_p g l \sin \theta_p = -M_p l \ddot{x} \cos \theta_p \quad (I.31)$$

$$\frac{2K_m}{Rr} V_a = (2M_w + \frac{2I_w}{r^2} + M_p) \ddot{x} + \frac{2K_m K_e}{Rr^2} \dot{x} + M_p l \dot{\theta}_p \cos \theta_p - M_p l \dot{\theta}_p^2 \sin \theta_p \quad (I.32)$$

Les deux équations ci-dessus peuvent être linéarité en supposant que : $\theta_p = \pi + \varphi$ où φ

Représente un petit angle par rapport à la verticale vers le haut. Cette simplification a été utilisée pour permettre un modèle linéaire à obtenir pour pouvoir mettre en œuvre des contrôleurs d'espace à état linéaire.

Par conséquent :

$$\cos \theta_p = -1, \sin \theta_p = -\varphi \text{ et } \left(\frac{d\theta_p}{dt} \right) = 0$$

L'équation linéarité du mouvement est :

$$(I_p + M_p l^2) \ddot{\varphi} - \frac{2K_m K_e}{Rr} \dot{x} + \frac{2K_m}{R} V_a - M_p g l \varphi = -M_p l \ddot{x} \quad (I.33)$$

$$\frac{2K_m}{R} V_a = (2M_w + \frac{2I_w}{r^2} + M_p) \ddot{x} + \frac{2K_m K_e}{Rr} \dot{x} - M_p l \ddot{\phi} \quad (I.34)$$

Afin d'obtenir la représentation de l'espace d'état du système, les équations (I.33) et (I.34) sont réorganisés :

$$\ddot{\phi} = \frac{M_p l}{(I_p + M_p l^2)} \ddot{x} + \frac{2K_m K_e}{Rr(I_p + M_p l^2)} \dot{x} - \frac{2K_m}{R(I_p + M_p l^2)} V_a + \frac{M_p g l}{(I_p + M_p l^2)} \phi \quad (I.35)$$

$$\ddot{x} = \frac{2K_m K_e}{Rr(2M_w + \frac{2I_w}{r^2} + M_p)} V_a - \frac{2K_m K_e}{Rr^2(2M_w + \frac{2I_w}{r^2} + M_p)} \dot{x} + \frac{M_p l}{(2M_w + \frac{2I_w}{r^2} + M_p)} \ddot{\phi} \quad (I.36)$$

En substituant l'équation (I.35) à l'équation (I.34), en substituant l'équation (I.36) à l'équation (I.33) et après une série de manipulations algébrique, l'équation de l'espace d'état pour le système est obtenue

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{Rr^2 a} & \frac{0}{a} & 0 \\ -0.0097 & \frac{K_m K_e (M_p l r - I_p - M_p l^2)}{Rr^2 a} & \frac{M^2_p g l^2}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2K_m K_e (r\beta - M_p l)}{Rr^2 a} & \frac{2K_m K_e (r\beta - M_p l)}{Rr^2 a} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2K_m (I_p + M_p l^2 - M_p l r)}{Rra} \\ 0 \\ \frac{2K_m (M_p l - r\beta)}{Rra} \end{pmatrix} V_a \dots \dots \dots (I.37)$$

$$(y) = \begin{pmatrix} c1 \\ c2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}$$

Où :

$$\beta = \left(2M_w + \frac{2I_w}{r^2} + M_p \right) a = \left[I_p \beta + 2M_p l^2 \left(M_w + \frac{2I_w}{r^2} \right) \right]$$

Dans le modèle ci-dessus, on suppose que les roues du véhicule resteront toujours en contact avec le sol et qu'il n'y a pas de glissement des roues. Les forces de virage sont également considérées comme négligeables

Selon le modèle dynamique présenté par l'équation (I.37), le robot mobile Segway est un système sous actionné qui contient deux sorties (x, phi) commandées par une seule entrée Va.

I.7. Simulation en boucle ouverte

Une simulation en boucle ouverte a été effectuée sur le modèle dynamique d'un robot Segway avec la représentation d'état suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0097 & 11.1594 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.0293 & 172.1160 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0815 \\ 0 \\ 0.2456 \end{pmatrix} V_a \quad (\text{I.37})$$

$$(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

Les résultats sont présentés comme suit :

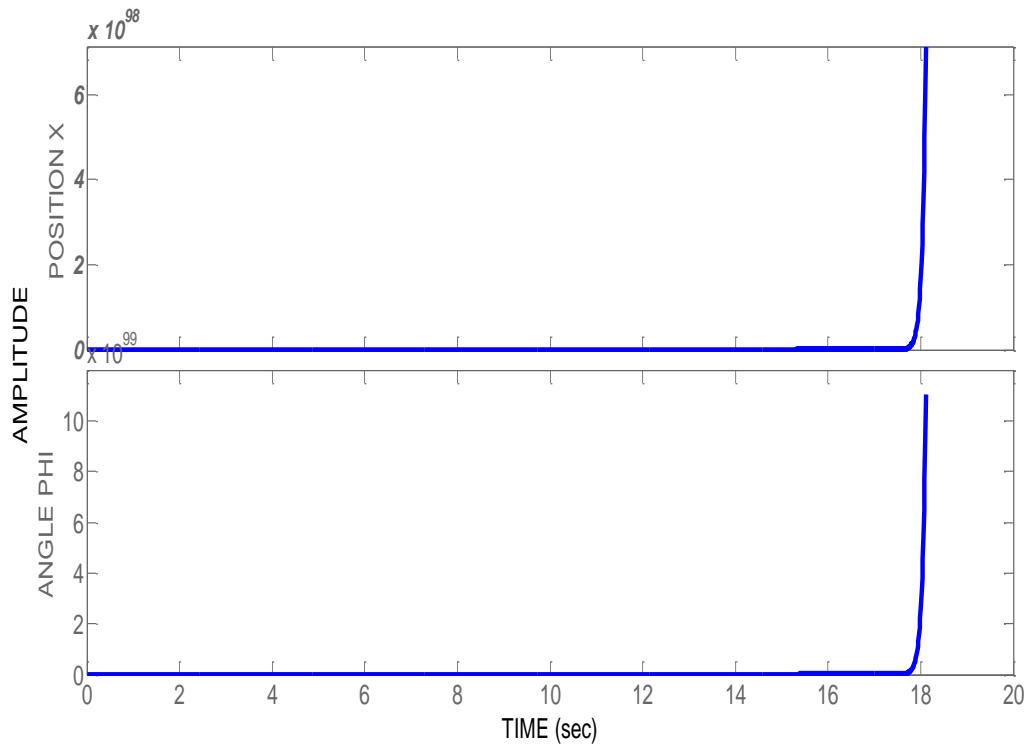


Figure (I.13): Réponse indicielle de Segway

Les résultats impliquent que le robot Segway est instable, alors, la synthèse d'un régulateur est nécessaire pour le stabiliser.

I.8.Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit des généralités à l'un des robots mobiles, qui présente un intérêt particulier dans le domaine de l'automatisation. C'est le transporteur personnel Segway.

Une description générale a été présentée avec son principe de fonctionnement. Le formalisme de Newton a été utilisé pour trouver le modèle dynamique du robot Segway. Ce dernier est un système sous actionné avec deux sorties commandées par une seule entrée.

Un test en boucle ouverte a été réalisé à la fin de ce chapitre pour montrer le comportement instable du Segway.

Dans le prochain chapitre le principe de la commande optimale est présenté afin de l'utilisée pour stabiliser le Segway.

Chapitre II :
Théorie de la
commande optimale

Chapitre II :

Principe de la commande optimale

II.1. Introduction :

La commande optimale est appliquée dans la vie quotidienne : comment arriver à certaine destination le plus rapidement possible, comment minimiser sa consommation... soit un système dynamique donné et dont les équations sont connues, le problème de commande optimale consiste alors à trouver la commande minimisant un critère donné. C'est à cet aspect que la commande optimale a été étudiée dès le 19^{ème} siècle avec le calcul des variations.

Notons néanmoins que les difficultés soulevées par ce genre de problème sont loin d'être complètement résolues comme en témoignent les sessions dédiées à la commande optimale dans les conférences d'automatique. La commande optimale reste donc un sujet de recherche d'actualité [10].

II.2. Historique :

Historiquement la théorie de la commande optimale est liée aux principes variationnels de la mécanique classique. Couramment, le célèbre problème d'optimisation de la courbe brachistochrone de Johann Bernoulli est considéré comme l'origine du calcul des variations. Bernoulli et, plus tard, Euler et Lagrange, ont contribué de manière consistante au développement du calcul des variations. Au dix-neuvième siècle, Hamilton, Weierstrass et Jacobi ont développé davantage cette théorie [11].

Le célèbre principe du maximum de Pontryagin, formulé par L. S. Pontryagin en 1956, qui donne une condition nécessaire d'optimalité représente le point clé de la théorie de la commande optimale. Par la suite cette théorie a été renforcée par la méthode de programmation dynamique de Bellman qui fournit une condition suffisante d'optimalité et la découverte des liens entre la solution d'une commande optimale et la solution fondée sur la théorie de stabilité de Lyapunov [12].

Nous présentons dans la suite la formulation de problème classique de commande optimale, dont on déduit les conditions d'optimalité. L'indice de performance principal a adopté tout au long de notre travail est l'indice quadratique au cas des systèmes sans contraintes. Les démarches présentées dans ce chapitre ne se limitent pas nécessairement à la robotique.

II.3. La théorie de la commande optimale :

La théorie de la commande optimale est le dernier avatar du calcul des variations qui représente en Mathématique, et plus précisément en Analyse fonctionnelle, un ensemble de méthodes permettant de minimiser une fonctionnelle. A cet égard on pourra dire que l'objectif de la commande optimale est bien que la résolution d'un problème de commande exigeant l'optimisation d'un critère de performances et le respect de certaines conditions. Le problème général de l'évaluation d'une commande optimale d'un mécanisme peut se synthétiser avec la manière qui suit :

Un mécanisme étant donné et défini par son modèle, apercevoir au nombre des commandes elle qui permet à la fois :

1. De vérifier les conditions terminales (initiales et finales).
2. De satisfaire les contraintes physiques et de ressources.
3. D'optimiser le critère de performances choisi.

La formulation Mathématique d'un problème de commande optimale se résume comme suit :

Généralement le système dynamique est décrit par son équation d'évolution :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (\text{II.1})$$

Cette équation est en général non linéaire, où le vecteur d'état $x(t)$ appartient à R^n , et la loi de commande $u(t)$, est à valeur dans R^m , . De plus le vecteur $u(t) \in R^m$ doit appartenir à un certain ensemble de vecteurs de commande accessibles.

$$u(t) \in U(t) \quad (\text{II.2})$$

Une forme courante de ces contraintes est que les variables de commande ne peuvent aller au-delà en module des valeurs imposées.

Dans ces circonstances, on prétend mener le système d'un état initial $x(t_0)$ à un état final $x(t_f)$ tout en minimisant la fonction de coût.

$$J(x(t), t) = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt \quad (\text{II.3})$$

Par conséquent le coût minimal est noté :

$$J^* = \min_{u(t) \in U(t)} J \quad (\text{II.4})$$

II.3.1 Principe d'optimalité :

Le principe de commande optimale relève des points suivants :

- Au lieu de chercher toutes les valeurs de la séquence optimale du signal de commande, simultanément, on calcule une valeur par itération jusqu'à ce que toute la séquence soit terminée ;
- Ce principe décompose un problème de décision de N étapes à N sous-processus de décisions élémentaires sur une seule itération ;
- Le calcul des commandes optimales se fait de la décision finale U_{N+1} la décision initiale U_0 .

II.3.2 Formulation du problème de la commande optimale

C'est un problème très difficile à résoudre analytiquement pour les régimes dynamiques ; la plupart des travaux que nous connaissons se limite au cas statique pour la conception de la commande optimale.

II.4. Position du problème

Soit un système à temps continu de représentation d'état :

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (\text{II.5})$$

et de condition initiale $x(t_0) = x_0$, où $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Les signaux u et x sont des fonctions de \mathbb{R} vers respectivement \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n . Pour la condition initiale x_0 et la commande, l'équation d'état (II.5) définit une trajectoire unique x pour l'état sur $[t_0, t_f]$. Celle-ci est fonction de la condition initiale x_0 et de la commande u sur $[t_0, t_f]$.

Soit un critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x, u, t) dt \quad (\text{II.6})$$

Avec $x_f = x(t_f)$. Les fonctions θ et φ ainsi que les instants t_0 et t_f étant donnés, ce critère ne dépend que de x_0 et de u sur $[t_0, t_f]$. L'application qui au signal de commande u associe le scalaire $J(x_0, t_0, u)$ est une fonctionnelle. On peut noter que différentes présentations existent dans la littérature :

➤ **La présentation de Mayer et de Lagrange :** [13]

La présentation de Mayer et de Lagrange est donnée sous la forme d'un système $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$, $x(t_0) = x_0$, $x(t_f) = x_f$, $u \in U$, Soit. Le principe d'optimalité de Bellman stipule que la trajectoire optimale sur l'intervalle contient nécessairement la trajectoire

optimale sur partant cette fois de la condition initiale.

Le critère peut dès lors s'écrire sous la forme : l'objectif étant de minimiser le coût

$$J(t_f, u) = \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t), u(t), t) dt + \theta(x_f, t_f) \quad (\text{II.7})$$

Lorsque $\theta(x_f, t_f) = 0$ dans l'expression de la fonctionnelle (t_f, u) , donc :

$$J(t_f, u) = \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t), u(t), t) dt \quad (\text{II.8})$$

On parlera de présentation de **Lagrange**. Et lorsque $\varphi(x(t), u(t), t) = 0$

$$J(t_f, u) = \theta(x_f, t_f) \quad (\text{II.9})$$

On parlera de présentation de **Mayer**.

➤ **La présentation de Bolza :**

L'avantage de la présentation de **Bolza** est que cette dernière regroupe les deux précédentes formulations à savoir les formulations de **Lagrange** et de **Mayer**. [14]

$$J(t_f, u) = \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x, u, t) dt \quad (\text{II.10})$$

Les trois formulations (II.10), (II.9) et (II.8) sont équivalentes dans le sens où on peut toujours se ramener de l'une à l'autre.

En plus de l'équation d'état qui lie les trajectoires de u et x de, d'autres contraintes peuvent intervenir (sans pour autant remettre en cause le critère choisi). Typiquement :

- L'instant final peut être imposée ou libre ;
- la commande peut appartenir à un ensemble $u \in U \neq \mathbb{R}^m$;
- des contraintes peuvent exister sur l'état final : $x_f \in X$.

Le problème de la commande optimale consiste alors à trouver la commande \tilde{u}

minimisant $J(x_0, t_0, u)$:

$$\tilde{u} = \min_{u \in U} J(x_0, t_0, u) \quad (\text{II.11})$$

On notera alors \tilde{x} la trajectoire correspondante de l'état et

$$\tilde{J}(x_0) = J(x_0, t_0, \tilde{u}) \quad (\text{II.12})$$

La valeur du critère.

II.4.1 Classement des problèmes de la commande optimale :

On peut classer les fonctions objectives en deux critères physiques de performance.

[15]

II.4.1.1 Temps optimal

On parle d'un problème en temps optimal lorsque $(x, u, t) = 1, \theta(x_f, t_f) = 0$ et le temps final est libre dans l'expression de

$$\min_u \int_{t_0}^{t_f} 1 dt \quad (\text{II.13})$$

II.4.1.2 Coût optimal

On parle d'un problème en coût optimal $[t_0, t_f]$ lorsque le temps final t_f est fixé dans l'expression

$$\min_u \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x, u, t) dt + \theta(x_f, t_f) \quad (\text{II.14})$$

Evidemment, il existe des problèmes qui combinent les deux critères physiques de performance, et on parlera dans ce cas d'un problème de contrôle en temps et en coût optimal. Dans certains problèmes de contrôle optimal, il peut s'avérer utile et efficace de s'intéresser tout d'abord au problème de minimisation du temps de transfert afin de pouvoir traiter correctement le problème de minimisation du coût. On comprend bien qu'une minimisation de la consommation d'énergie se doit de ne pas engendrer de temps de transfert prohibitif à l'égard du temps de transfert minimum.

Si dans l'expression de J , φ est proportionnelle à u^2 on parle alors d'un coût quadratique. Si u est un contrôle scalaire et φ proportionnelle à u , on parle de problème de contrôle à coût d'approvisionnement.

Lorsque les équations d'état $\dot{x} = f(x, u, t)$ ne dépendent pas explicitement du temps, c'est-à-dire $\dot{x} = f(x, u)$, on parle dans ce cas de problème autonome. Si t est présent dans les équations d'état on parle de problème non-autonome.

II.4.2 Rappel de principes fondamentaux**II.4.2.1. Le principe d'optimalité de Bellman** [16] [17]

Soit le système d'équation d'état défini par la relation :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

On considère le critère de performance suivant (II.16) associé au système (II.15) :

$$J(x_0, t_0, u) = \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x, u, t) dt \quad (\text{II.16})$$

On définit alors, sur l'horizon temporel $[t_0, t_f]$, la commande optimale \tilde{u} , conduisant au critère optimisé :

$$\tilde{J}(x_0, t_0) = \min_{u [t_0, t_f]} J(x_0, t_0, u) = J(x_0, t_0, \tilde{u}) \quad (\text{II.17})$$

Soit $t_1 \in [t_0, t_f]$. Le principe d'optimalité de Bellman stipule que la trajectoire optimale sur l'intervalle $[t_0, t_f]$ contient nécessairement la trajectoire optimale sur $[t_0, t_1]$, partant cette fois de la condition initiale $x_1 = x(t_1)$.

Le critère peut dès lors s'écrire sous la forme :

$$\tilde{J}(x_0) = \min_{u [t_0, t_f], x_1} \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x, u, t) dt + \tilde{J}(x_1) \quad (\text{II.18})$$

Ce résultat permet d'obtenir une solution optimale en découplant l'intervalle d'optimisation et en résolvant récursivement le problème.

II.4.2.2. Principe d'optimalité de Pontriaguine

Considérons à nouveau le système (II.15) et le critère de performance (II.16). L'Hamiltonien correspondant est défini par :

$$H(x, u, \lambda, t) = \phi(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t) \quad (\text{II.19})$$

Où λ est dénommé vecteur d'état adjoint.

Le principe du minimum de Pontriaguine stipule que la trajectoire optimale minimise l'Hamiltonien du système :

$$H(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{\lambda}, t) \leq H(x, u, \lambda, t) \forall u \in U \quad (\text{II.20})$$

En faisant appel au calcul des variations, on définit un certain nombre d'équations permettant de résoudre le problème de commande optimale. Ces équations correspondent aux équations canoniques de Hamilton qui régissent les dynamiques de l'état et de l'état adjoint, et sont données par :

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{x} \quad (\text{II.21})$$

Pour l'état adjoint :

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = -\dot{\lambda} \quad (\text{II.22})$$

On leur ajoute les conditions aux limites (en t_0 et en t_f), dites équations de transversalité :

À l'origine :

$$\left(H(t_0) + \frac{\partial \theta}{\partial t_0} \right) \partial t_0 + \left(-\lambda(t_0) + \frac{\partial \theta}{\partial x_0} \right)^T \partial x_0 = 0 \quad (\text{II.23})$$

En fonction de la nature du problème considéré, on peut aussi préciser d'autres relations additionnelles :

▪ si aucune contrainte (de type saturation) n'est imposée sur $u(t)$ à l'instant t , on a :

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t) = 0 \quad (\text{II. 24})$$

▪ Si H n'est pas une fonction explicite du temps, on a :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt} = 0 \quad (\text{II. 25})$$

➤ *Lien avec le calcul des variations*

Il s'agit d'un problème d'optimisation sous contrainte égalité $f(x, u, t) - \dot{x} = 0$.

En s'appuyant sur le calcul des variations [10], on est amené à introduire un multiplicateur de Lagrange, qui est une fonction du temps, et hamiltonien

$$H(x, u, \lambda, t) = \phi(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t) \quad (\text{II. 26})$$

Le critère s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \tilde{j} &= \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (\phi(x, u, t) + \lambda^T (f(x, u, t) - \dot{x})) dt \\ &= \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (H(x, u, \lambda, t) - \lambda^T \dot{x}) dt \\ &= \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} H(x, u, \lambda, t) dt - \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T \dot{x} dt \\ &= \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} H(x, u, \lambda, t) dt + \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T x dt - \lambda^T(t_f)x(t_f) + \lambda^T(t_0)x(t_0) \\ &= \tilde{\theta}(x_0, t_0, x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (H(x, u, \lambda, t) + \lambda^T x) dt \end{aligned} \quad (\text{II. 27})$$

Où $\tilde{\theta}(x_0, t_0, x_f, t_f) = \theta(x_f, t_f) - \lambda^T(t_f)x(t_f) + \lambda^T(t_0)x(t_0)$.

Le calcul des variations permet de donner des conditions nécessaires pour résoudre ce problème.

Prenons la première variation de \tilde{j} .

$$\delta \tilde{j} = \delta_x^T \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \lambda \right) + \int_{t_0}^{t_f} \left(\delta_x^T \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda} \right) + \delta_u^T \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \right) dt \quad (\text{II. 28})$$

Où δ_x et δ_u sont des variations de \tilde{x} et de \tilde{u} , l'état et la commande optimaux.

L'optimum est atteint quand la première variation est nulle, ceci implique que :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{\lambda} \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \end{cases} \quad (\text{Équation de Hamilton- jacobi})$$

$\delta_X^T \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \lambda \right) = 0$ à $t = t_0$ et $t = t_f$, qui sont des conditions de transversalité

II.4.2.3. Principe de moindre action de Maupertuis

L'équation d'Euler-Lagrange, bien connue en mécanique, peut être retrouvée à partir du principe du minimum. En notant T , l'énergie cinétique et U l'énergie potentielle d'un système mécanique [10], le principe de moindre action énoncée par Maupertuis postule que le système évolue en minimisant l'intégrale :

$$\int_{t_0}^{t_f} (T - U) dt \quad (\text{II.29})$$

Notons q les coordonnées généralisées du système. Soit $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$ le lagrangien, avec le critère :

$$J(q_0, t_0, \dot{q}) = \int_{t_0}^{t_f} L(q, \dot{q}) dt \quad (\text{II.30})$$

On considère un système dont on commande la vitesse, l'équation d'état du système s'écrivant alors simplement :

$$\dot{q} = u \quad (\text{II.31})$$

L'hamiltonien s'écrit alors :

$$H(q, \dot{q}) = L(q, \dot{q}) + \lambda^T \dot{q} \quad (\text{II.32})$$

Et le principe du minimum donne les deux équations suivantes :

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q} = -\dot{\lambda} \quad (\text{II.33})$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \lambda \quad (\text{II.34})$$

En dérivant la seconde équation par rapport au temps puis en remplaçant $\dot{\lambda}$ grâce à la première, on obtient l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (\text{II.35})$$

II.5. Commande Linéaire Quadratique

On parle de commande linéaire quadratique : LQ ou LQR pour Linear Quadratic Regulator. Le système est linéaire et la commande est quadratique [10] [18]. La commande optimale est un retour d'état.

II.5.1. Commande LQ à horizon fini

Soit le problème de commande optimale du système :

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (\text{II.36})$$

Avec le critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2} x_f^T S x_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} (x^T) Q(t) x + u^T R(t) u dt \quad (\text{II.37})$$

Les matrices Q , R et S étant symétriques avec $Q = Q^T$ et $R = R^T > 0$ et $S = S^T \geq 0$ [10] [19] :

L'Hamiltonien s'écrit alors :

$$H(x, u, \lambda, t) = \lambda^T A(t)x + \lambda^T B(t)u + \frac{1}{2} (x^T) Q(t) x + u^T R(t) u \quad (\text{II.38})$$

L'Hamiltonien vérifie les conditions suivantes :

•équation de l'état adjoint

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -A^T(t)\lambda - Q(t)x \quad (\text{II.39})$$

•Condition de transversalité

$$\lambda(t_f) = S x_f \quad (\text{II.40})$$

•Absence de contrainte sur la commande

$$\frac{\partial H}{\partial u} = B^T(t)\lambda + R(t)u = 0 \quad (\text{II.41})$$

De l'équation (3-38), on déduit :

$$u = -R^{-1}(t)B^T(t)\lambda \quad (\text{II.42})$$

Alors l'équation dynamique du système s'écrit :

$$\dot{x} = A(t)x + -B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\lambda \quad (\text{II.43})$$

Les équations (II.39) et (II.43) peuvent se mettre sous la forme d'un système matriciel appelé système hamiltonien :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (\text{II.44})$$

Posons $\lambda = p(t)x$ avec, d'après (II.40), la condition finale $p(t_f) = S$. L'équation (II.39) s'écrit alors :

$$\dot{\lambda} = -A^T(t)p(t)x - Q(t)x = -(A^T(t)p(t) + Q(t))x \quad (\text{II.45})$$

Avec $\dot{\lambda} = \dot{p}x + p\dot{x}$ et l'équation d'état (II.36) du système, l'équation (II.45) s'écrit alors (en omettant la référence au temps afin d'alléger les notations) :

$$(\dot{p} + pA + A^T p - pBR^{-1}B^T P + Q)x = 0 \quad (\text{II.46})$$

La solution est alors obtenue en résolvant l'équation (différentielle) de **Riccati** suivante :

$$\dot{p} + pA + A^T p - pBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (\text{II.47})$$

avec la condition finale $p(t_f) = S$.

On montre que la condition :

$$x^T(\dot{p} + pA + A^T p - pBR^{-1}B^T P + Q)x = 0 \quad (\text{II.48})$$

S'écrit aussi :

$$\frac{d}{dt}(x^T p x) + x^T Q x + u^T R u = 0 \quad (\text{II.49})$$

Le critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2} x_f^T S x_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} (x^T Q(t)x + u^T R(t)u) dt \quad (\text{II.50})$$

S'écrit alors :

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2} (x_f^T S x_f - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} (x^T p x) dt) \quad (\text{II.51})$$

Soit, avec la condition de transversalité $p(t_f) = S$:

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2} (x_0^T p(t_0) x_0) \quad (\text{II.52})$$

Le minimum du critère est donc :

$$\tilde{J}(t_0) = J(x_0, t_0, \tilde{u}) = \frac{1}{2} (x_0^T p(t_0) x_0) \quad (\text{II.53})$$

Il est intéressant de noter que la commande optimale obtenue s'écrit comme un retour d'état $u = -L(t)x$ avec :

$$L = -R^{-1}B^T P \quad (\text{II.54})$$

Néanmoins, n'oublions pas que, dans le cas présent, L varie en fonction du temps, même dans le cas d'un système et d'un critère à temps invariant (c'est-à-dire si les matrices A, B, Q et R ne dépendent pas du temps). En effet, la matrice $p(t)$ reste dépendant du temps dans le cas d'un critère à temps fini.

II.5.2. Commande LQ à horizon infini

Intéressons-nous ici au cas du système LTV (linéaire à temps variant) précédent où :

$$J(x_0, t_0, u) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} (x^T) Q(t) x + u^T R(t) u dt \quad (\text{II.55})$$

On montre que ce critère est fini si le système est stabilisable à tout instant t , (c'est-à-dire qu'à chaque instant, il existe un $L(t)$ tel que les valeurs propres de $A - BL$ soient à partie réelle négative). Remarquons par ailleurs que la partie du critère concernant l'état final n'est plus pertinente car, sur un horizon infini, l'état tend vers zéro si le système bouclé est stable. Dans le cas d'un problème LTI (linéaire à temps invariant), la commande optimale est un retour d'état statique $u = -Lx$ où L est exprimé par l'équation (II. 54) et où p vérifie l'équation algébrique de **Riccati**:

$$P + pA + A^T p - pBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (\text{II.56})$$

II.6. Commande LQ à temps discret

L'utilisation d'un correcteur se fait dans la majorité du temps de manière numérique.

En passant dans le domaine discret [20] [21], l'équation dynamique (II. 36) devient :

$$x(k + 1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \quad (\text{II.57})$$

avec la condition initiale

$$x(k = k_0) = x(k_0) = x_0 \quad (\text{II.58})$$

et cherchons la commande minimisant le critère :

$$J = \frac{1}{2} x^T(k_f) F(k_f) x(k_f) + \frac{1}{2} \sum_{k=k_0}^{k_f-1} (x^T(k) Q(k) x(k) + u^T(k) R(k) u(k)) \quad (\text{II.59})$$

Où :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (x^T(k) Q(k) x(k) + u^T(k) R(k) u(k)) \quad (\text{II.60})$$

où $F(k_f)$ et $Q(k)$ sont des matrices d'ordre $n \times n$ symétriques, semi-définie positive, et $R(k)$ est une matrice d'ordre $r \times r$ symétrique, définie positive. Le problème à résoudre n'est plus un problème en temps continu. Si on étudie le problème à horizon fini, il suffit de trouver les $n + 1$ ou $k_f + 1$ valeurs de la commande pour chaque pas de temps.

II.6.1 Commande LQ à temps discret à horizon fini

On doit alors résoudre un problème de minimisation classique sous contraintes et on utilisera la formulation conventionnelle basée sur l'écriture du Lagrangien. [10] [21] [20]

$$L = \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{2} x^T(k) Q(k) x(k) + \frac{1}{2} u^T(k) R(k) u(k) + \lambda^T(k+1) (-x(k+1) A(k) x(k) + B(k) u(k)) \right) \quad (\text{II.61})$$

et la solution optimale vérifie les équations suivantes :

$$\frac{\partial L}{\partial u(k)} = R(k) u(k) + B^T(k) \lambda(k+1) = 0 \quad (\text{II.62})$$

$$\frac{\partial L}{\partial x(k)} = Q(k) x(k) - \lambda(k) + A^T(k) \lambda(k+1) = 0 \quad (\text{II.63})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda(k+1)} = -x(k+1) + A(k) x(k) + B(k) u(k) = 0 \quad (\text{II.64})$$

L'équation de la commande (II.62) donne :

$$u(k) = -R^{-1}(k) B^T(k) \lambda(k+1) \quad (\text{II.65})$$

Alors l'équation (II.64) s'écrit :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k) x(k) - B(k) R^{-1}(k) B^T(k) \lambda(k+1) \\ &= A(k) x(k) - B(k) R^{-1}(k) B^T(k) (-A^{-T}(k) Q(k) x(k) + A^{-T}(k) \lambda(k)) \\ &= (A(k) + B(k) R^{-1}(k) B^T(k) A^{-T}(k) Q(k)) x(k) \\ &\quad - B(k) R^{-1}(k) B^T(k) A^{-T}(k) \lambda(k) \end{aligned} \quad (\text{II.66})$$

Par utilisation de l'équation (II.63), nous trouvons

$$\lambda(k+1) = -A^{-T}(k) Q(k) x(k) + A^{-T}(k) \lambda(k) \quad (\text{II.67})$$

Les équations (II.64) et (II.65) peuvent se mettre sous la forme d'un système matriciel

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \lambda(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}B^T A^{-T} Q & -BR^{-1}B^T A^{-T} \\ -A^{-T} Q & A^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(k) \end{bmatrix} \quad (\text{II.68})$$

$$\text{Où} \quad \begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & A^{-1} B R^{-1} B^T \\ Q A^{-1} & A^T + Q A^{-1} B R^{-1} B^T \end{bmatrix} \quad (\text{II.69})$$

La dernière commande $u(n)$ n'a aucun effet sur l'évolution du système sur l'horizon considéré ; sa valeur optimale est donc nulle :

$$u(n) = 0 \quad (\text{II.70})$$

On a ainsi d'après l'équation (II. 62):

$$\lambda(k + 1) = 0 \quad (\text{II. 71})$$

et d'après l'équation adjointe(II. 63):

$$\lambda(n) = Q(n)x(n) \text{ où } n = k_f \Rightarrow \lambda(k_f) = Q(k_f)x(k_f) \quad (\text{II. 72})$$

aussi d'après les équations (II. 59), (II. 60) et (II. 70)

$$Q(n) = Q(k_f) = F(k_f) \quad (\text{II. 73})$$

Il s'agit d'un problème aux deux bouts : une condition initiale est disponible pour l'état alors que c'est une condition finale qui est disponible pour l'état adjoint. Ainsi, la résolution du problème doit se faire pour l'ensemble de la trajectoire, ce qui peut représenter une charge de calcul élevée dans le cas d'un horizon n élevé.

Les équations précédentes peuvent être résolues directement en x et λ . On peut aussi adopter la démarche suivante, basée sur un changement de variable suivant pour la variable adjointe :

$$\lambda(k) = p(k)x(k) \quad (\text{II. 74})$$

Où $p(k)$ est une matrice qu'il faudra déterminer, partant de (II. 61), on obtient :

$$p(k)x(k) = Q(k)x(k) + A^T(k)p(k+1)x(k+1) \quad (\text{II. 75})$$

Et on a

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) - B(k)R^{-1}(k)B^T(k)x(k+1)p(k+1) \\ &= [I + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)p(k+1)]^{-1} A(k)x(k) \end{aligned} \quad (\text{II. 76})$$

En substituant (II. 76) dans (II. 75), on obtient :

$$p(k)x(k) = Q(k)x(k) + A^T(k)p(k+1)[I + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)p(k+1)]^{-1} A(k)x(k) \quad (\text{II. 77})$$

Depuis, cette relation (II. 77) doit valoir pour toutes les valeurs de, nous avons

$$p(k) = Q(k) + A^T(k)p(k+1)[I + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)p(k+1)]^{-1} A(k) \quad (\text{II. 78})$$

Cette relation (II. 78) est appelée Equation différentielle de Riccati (DRE).

Alternativement, nous pouvons exprimer (II. 78) par :

$$p(k) = Q(k) + A^T(k)[p^{-1}(k+1) + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)]^{-1} A(k) \quad (\text{II. 79})$$

Où, nous supposons que l'inversion $\text{dep}(k)$ existe pour tout $k \neq k_f$. La dernière condition pour résoudre la matrice DRE (II. 78) ou (II. 79) est obtenue à partir de (II. 72), (II. 71) et (II. 72).

$$\lambda(k_f) = Q(k_f)x(k_f) = p(k_f)x(k_f) \Rightarrow Q(k_f) = p(k_f) = F(k_f) \quad (\text{II. 80})$$

Dans l'équation (II. 78), le terme $p(k)$ est sur le côté gauche et $p(k+1)$ est sur le côté droit et par conséquent, il doit être résolu récursivement à partir de l'état final (II. 80). Du fait que $Q(k_f)$ et $F(k_f)$ sont supposées semi-définies positives, nous pouvons montrer que la matrice de Riccati $p(k)$ est définie positive.

Pour obtenir la commande optimale en boucle fermée, nous éliminons $\lambda(k+1)$ à partir de la relation de la commande (II. 65) et la relation d'état (II. 66) et en utilisant la transformation (II. 72)

$$u(k) = -R^{-1}(k)B^T(k)A^{-T}(k)[p(k) - Q(k)]x(k) \quad (\text{II. 81})$$

Ici, A^{-T} est l'inverse transposé de A et nous supposons que l'inverse de $A(k)$ existe. Cette dernière relation est la version souhaitée pour la commande optimale en boucle fermée en fonction de l'état. Nous pouvons écrire la relation de la commande optimale en boucle fermée (II. 81) sous une forme simplifiée

$$u(k) = -L(k)x(k) \quad (\text{II. 82})$$

Où

$$L(k) = R^{-1}(k)B^T(k)A^{-T}(k)[p(k) - Q(k)] \quad (\text{II. 83})$$

Il s'agit de la relation requise pour la loi de commande de rétroaction optimale et le gain de rétroaction $L(k)$ est appelé le "gain de Kalman". L'état optimal $x^*(k)$ est obtenu en substituant la commande optimale $u^*(k)$ donné par (II. 82) dans l'équation d'état initial (II. 57) en tant que

$$x(k+1) = (A(k) - B(k)L(k))x(k) \quad (\text{II. 84})$$

- **Les autres formes de la (DRE) :**

D'autres formes qui ne nécessitent pas l'inversion de la matrice $A(k)$ pour l'équation (II. 80) et la commande optimale (II. 84) sont obtenues comme suit :
On a la relation suivante : [23] [22] [20]

$$[A_1^{-1} + A_2A_4A_3]^{-1} = A_1 - A_1A_2[A_3A_1A_2 + A_4^{-1}]^{-1}A_3A_1 \quad (\text{II. 85})$$

En utilisant la relation (II. 85) dans (II. 79), on obtient pour l'équation (DRE) :

$$p(k) = Q + A^T(k)[p(k+1) - p(k+1)B(k)[B^T(k)p(k+1)B(k) + R(k)]^{-1}B^T(k)p(k+1)] A(k) \quad (\text{II.86})$$

Ensuite, on utilise la commande optimale (II. 65) et la transformation (II. 72), pour obtenir :

$$u(k) = -R^{-1}(k)B^T(k)p(k+1)x(k) \quad (\text{II. 87})$$

Qui, lors de l'utilisation de l'équation d'état (II. 57) devient :

$$u(k) = -R^{-1}(k)B^T(k)p(k+1)[A(k)x(k) + B(k)u(k)] \quad (\text{II. 88})$$

Après une réorganisation, on obtient :

$$[I + R^{-1}(k)B^T(k)p(k+1)B(k)]u(k) = -R^{-1}(k)B^T(k)p(k+1)A(k)x(k) \quad (\text{II. 89})$$

Multipliant à gauche par $R(k)$ et en résolvant pour $u(k)$,

$$u(k) = -L_a(k)x(k) \quad (\text{II. 90})$$

Où $L_a(k)$, appelé matrice de gain de kalman est :

$$L_a(k) = [R(k) + B^T(k)p(k+1)B(k)]^{-1}B^T(k)p(k+1)A(k) \quad (\text{II. 91})$$

Notons à partir de la loi de commande de rétroaction optimale (II. 90) que les gains de Kalman sont tributaires de la solution de la matrice (DRE) (II. 86) impliquant les matrices du système et des matrices de l'indice de performance. Enfin., la commande optimale en boucle fermée (II. 90) avec l'état (II. 57) nous donne le système optimal

$$x(k+1) = (A(k) - B(k)L_a(k))x(k) \quad (\text{II. 92})$$

En utilisant la relation du gain (II. 91), on obtient une nouvelle forme de la fonction (II. 86) qui est :

$$p(k) = Q(k) + A^T(k)p(k+1)[A(k) - B(k)L_a(k)] \quad (\text{II. 93})$$

Faisons maintenant quelques constatations :

- Il existe plusieurs formes de la matrice (DRE) données par (II. 77) (II. 78) ou (II. 79), (II. 86) et (II. 93)
- on a deux formes données pour la matrice de gain de Kalman, la première forme (II. 83), qui va de pair avec la (DRE) (II. 78) ou (II. 79) et la seconde forme (II. 91) qui correspond à l'équation différentielle de Riccati (II. 86) ou (II. 93).

II.6.2. Commande LQ à temps discret à horizon infini

Cherchons la commande minimisant le critère :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k_0}^{k_f} (x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k)) \quad (\text{II. 94})$$

Tel que k_f tend vers l'infini, nous avons la matrice de Riccati $p(k)$ qui atteint une valeur de régime permanent \bar{p} . Autrement dit :

$$p(k) = p(k + 1) = \bar{P} \quad (\text{II. 95})$$

Donnant l'équation algébrique de Riccati (ARE) qui s'écrit :

$$\bar{P} = Q + A^T \bar{P} [I + B R^{-1} B^T \bar{P}]^{-1} A \quad (\text{II. 96})$$

ou en utilisant l'équation (II. 79), on aura :

$$\bar{P} = Q + A^T [\bar{P}^{-1} + B R^{-1} B^T]^{-1} A \quad (\text{II. 97})$$

La commande optimale de retour d'état (II. 81) devient :

$$u(k) = -R^{-1} B^T A^{-T} [\bar{P} - Q] x(k) = -\bar{L} x(k) \quad (\text{II. 98})$$

où, le gain de Kalman (II. 83) devient

$$\bar{L} = -R^{-1} B^T A^{-T} [\bar{P} - Q] \quad (\text{II. 99})$$

- **Autre forme :**

Une autre forme de l'équation algébrique de Riccati (ARE) (II. 96) est obtenue en considérant l'état stable de la forme différentielle (DRE) (II. 86) qui est :

$$\bar{P} = Q + A^T [\bar{P} - \bar{P} B [B^T \bar{P} B + R]^{-1} B^T \bar{P}] A \quad (\text{II. 100})$$

La commande optimale (II. 90) devient

$$u(k) = -\bar{L}_a x(k) \quad (\text{II. 101})$$

Où, la matrice de gain optimal (II. 91) devient

$$\bar{L}_a = [R + B^T \bar{P} B]^{-1} B^T \bar{P} A \quad (\text{II. 102})$$

La commande optimale (II. 101) avec l'Etat (II. 57) nous donne le système optimal

$$x(k + 1) = [A - B \bar{L}_a(k)] x(k) \quad (\text{II. 103})$$

II.7. Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons parlé sur de la commande optimale d'une manière générale et plus particulièrement de la commande quadratique linéaire. Les principaux critères utilisés dans l'application de la commande optimale se résument au temps et à un indice de

performance ou à un cout. Quelques principes fondamentaux d'optimalité tels que le principe de Bellman, le principe de Pontriaguine et le principe de moindre action de Maupertuis sont aussi présentés.

Enfin, nous avons détaillés un type de commande optimale qui est appliquée à des systèmes linéaires, qu'est la commande LQR. Cette dernière est présentée dans les deux cas, continu et discret. Le régulateur est basé sur la résolution de l'équation de Riccati à horizon finie ou bien à horizon infini.

Dans le prochain chapitre, on s'intéresse à la synthèse d'une loi de commande LQR pour le système sous actionné Segway.

Chapitre III :
Application de la
commande optimale

Chapitre III :

Commande LQR pour un robot Segway

III.1. Introduction :

La commande LQR est une technique utilisée pour synthétiser le gain de retour d'état. La synthèse est basée sur la minimisation d'une fonction coût représentative à l'énergie de système.

Dans ce chapitre, une commande LQR est utilisée pour commander le robot mobile Segway. Ce dernier, est sous actionné on va voir comment faire pour commander toutes les sorties.

Des simulations ont été effectuées à la fin de ce chapitre à l'aide du logiciel Matlab, pour montrer l'efficacité de la méthode et sa robustesse.

III.2. Synthèse d'une loi de commande LQR:

Le modèle dynamique du robot mobile Segway est définie par :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{III.1}$$

Avec les matrices A, B, et C sont définies dans le premier chapitre,

Le gain de retour d'état est synthétisé afin de stabiliser le système en boucle fermé, comme suit :

$$u = -Kx + T\tag{III.2}$$

Remplaçant l'équation (III.2) dans (III.1) on aura :

$$\dot{x} = (A - BK)x + BT\tag{III.3}$$

Selon cette dernière équation, le choix du gain K est responsable sur la stabilité de système bouclé et le deuxième terme T dans la loi de commande est responsable sur la poursuite du système bouclé, son expression est défini par :

$$T = (B^T B)^{-1} B^T x_d\tag{III.4}$$

Avec x_d est le vecteur d'état désiré.

Cependant, le retour d'état basé sur le déplacement des pôles seulement n'est pas robuste car le gain reste constant quelque soit les changements et les perturbations

agissant sur le système.

La commande LQR elle est synthétisée telle que la fonction coût suivante est minimale avec le temps :

$$J(x_0, u) = \frac{1}{2} x^T(t_f) S x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t)) dt \quad (\text{III.5})$$

Les matrices de pondération S , Q et R sont définies positives et symétriques, dont, S est la solution de l'équation de Riccati à l'instant t_f

$$P(t_f) = S \quad (\text{III.6})$$

Selon, La démonstration présentée dans le deuxième chapitre, le gain de la commande LQR est donné par :

$$K = R^{-1} B^T P(t) \quad (\text{III.7})$$

Avec

$$\dot{P} + P A + A^T P - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (\text{III.8})$$

L'objectif est de minimiser la matrice P avec le temps en utilisant le gain K dans (III.7).

Cependant, le robot Segway est sous actionné, alors, l'utilisation directe du gain K donné par (III.7) est impossible.

A partir du principe de fonctionnement du robot Segway, l'angle d'inclinaison de φ est celui responsable sur le mouvement de robot,

Alors la loi de commande est utilisée pour stabiliser l'angle φ et celle-ci est capable de stabiliser le mouvement de translation.

III.3. Résultats de Simulation

Des simulations ont été effectuées sur le modèle dynamique d'un robot Segway, les paramètres de simulation utilisés sont :

$$Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$R = 0.1 ;$$

La simulation est réalisée dans quatre cas afin de comprendre le comportement du système, et pour montrer l'efficacité de la commande LQR même à la présence des perturbations.

Première cas : sans perturbation et condition initiale nulle

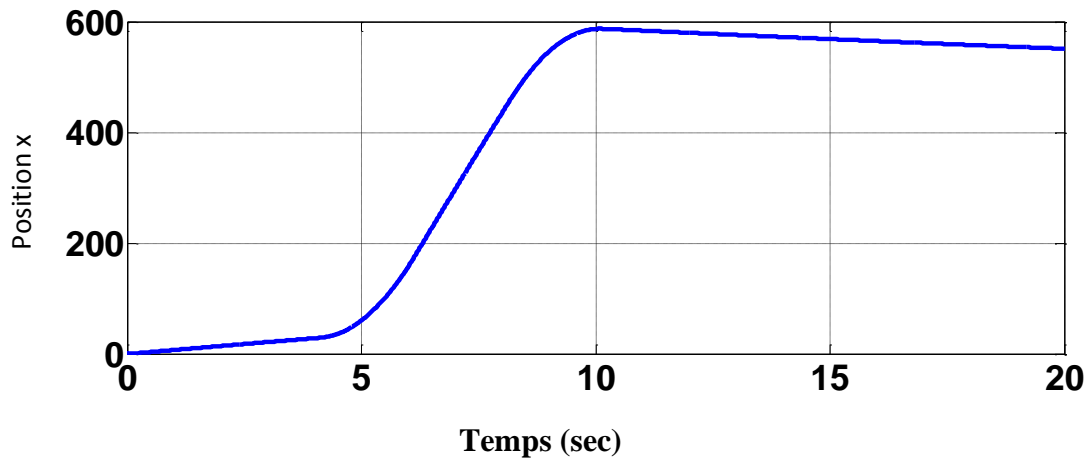


Figure (III-1-1) :la position x

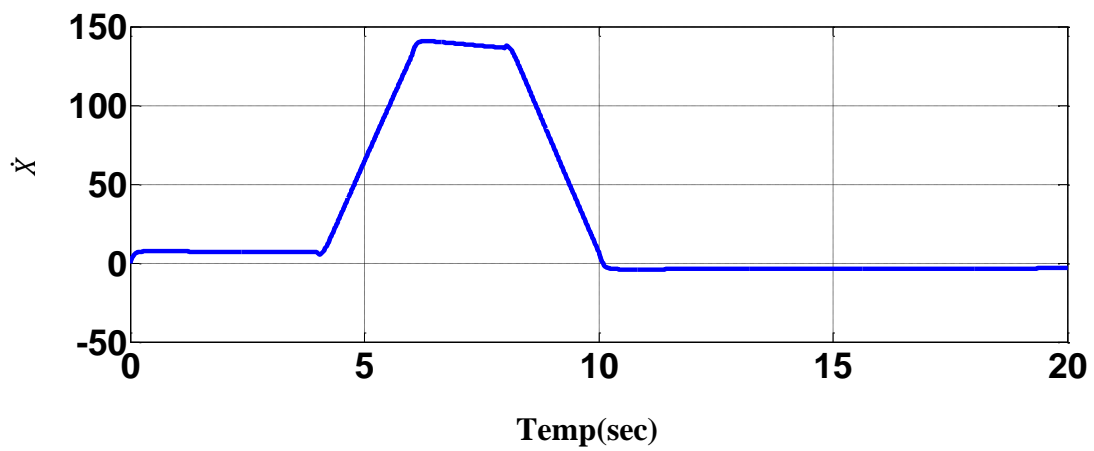


Figure (III-1-2) :la vitesse linéaire

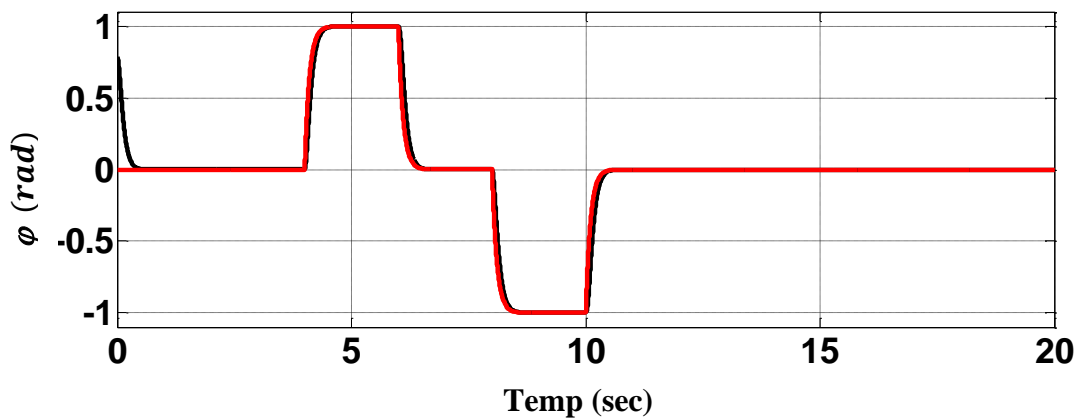


Figure (III-1-3) :l'angle φ

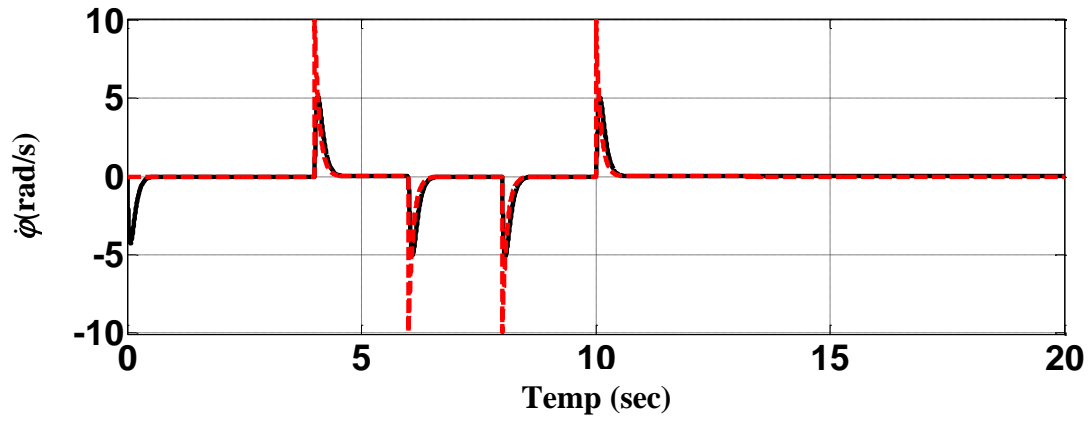


Figure (III-1-4) :la vitesse angulaire

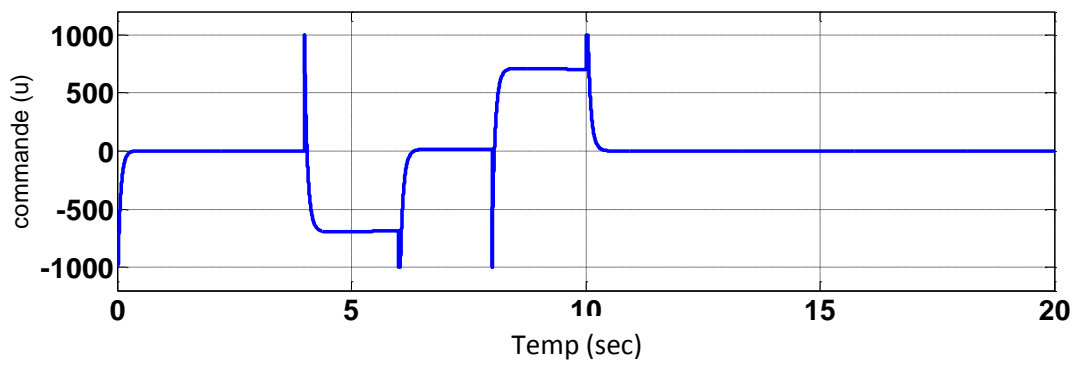


Figure (III-1-5) :la commande (u)

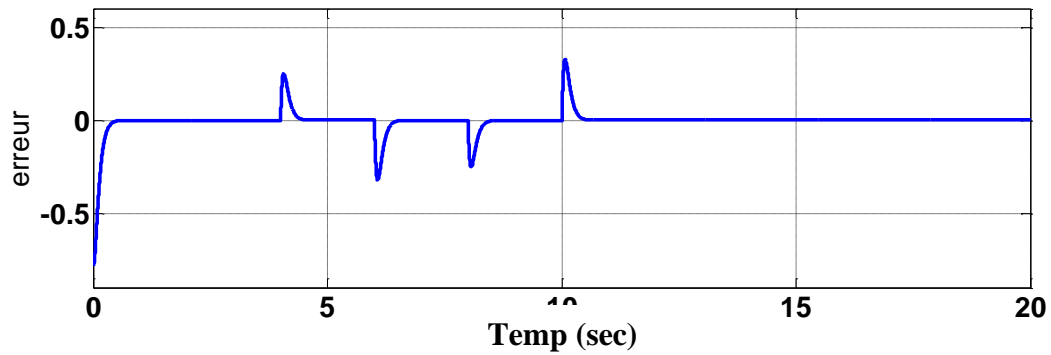


Figure (III-1-6) :l'erreur de poursuite angulaire

Deuxième cas : Sans perturbation et condition initiale $\varphi(0) = -\frac{\pi}{4}$

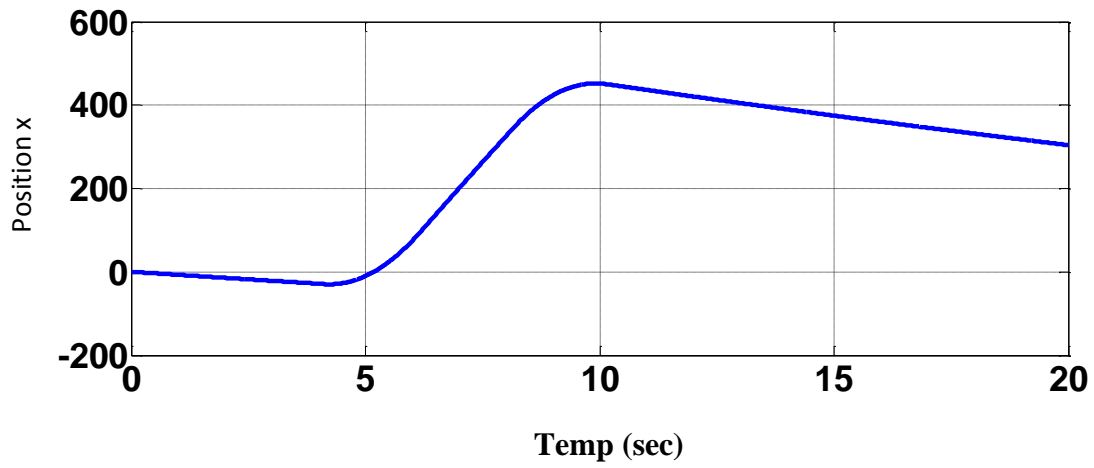


Figure (III-2-1) :la position x

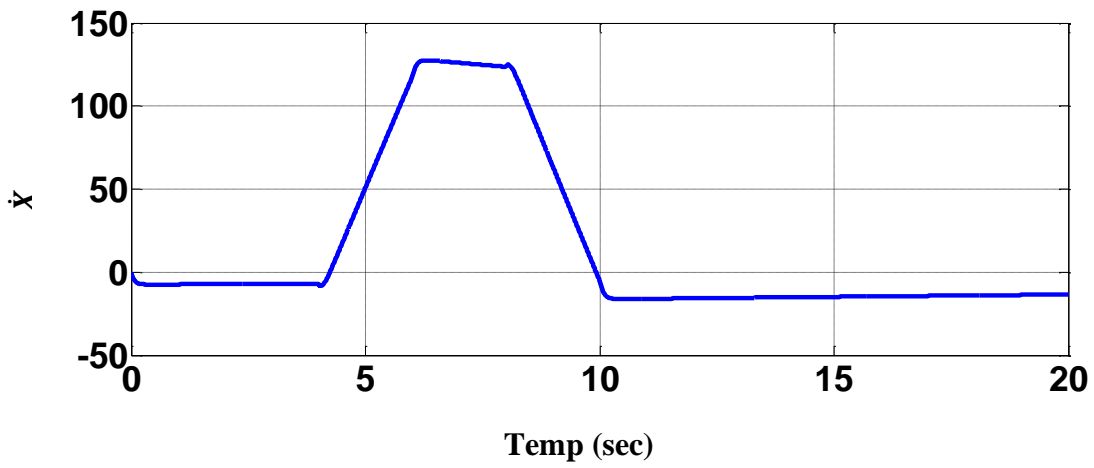


Figure (III-2-2) :la vitesse linéaire

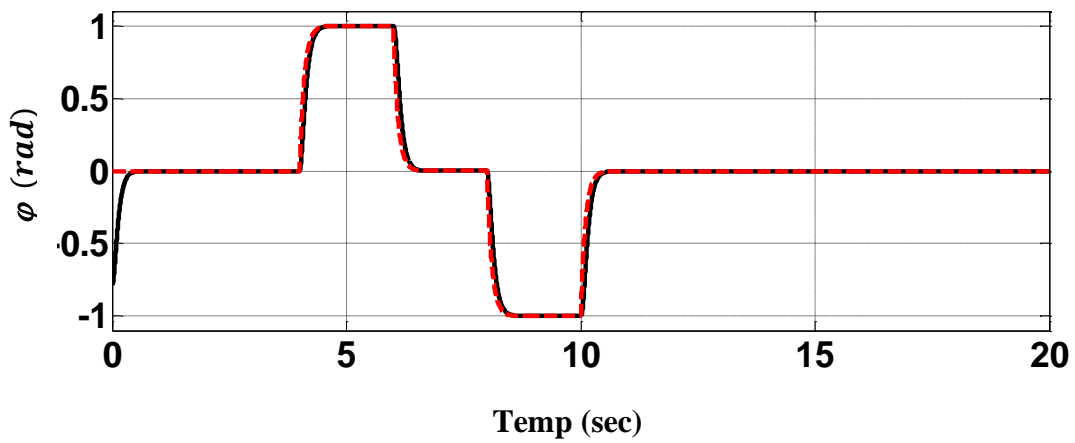


Figure (III-2-3) :l'angle φ

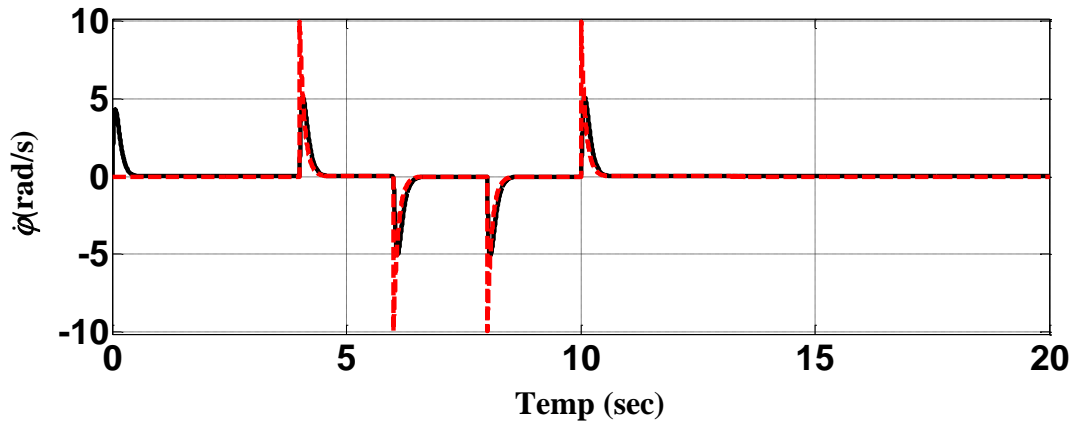


figure (III-2-4) :la vitesse angulaire

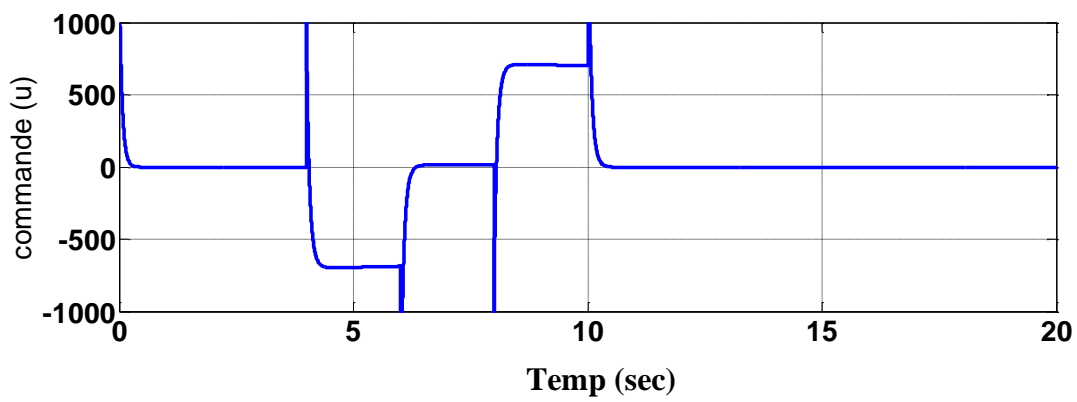


figure (III-2-5) :la commande u

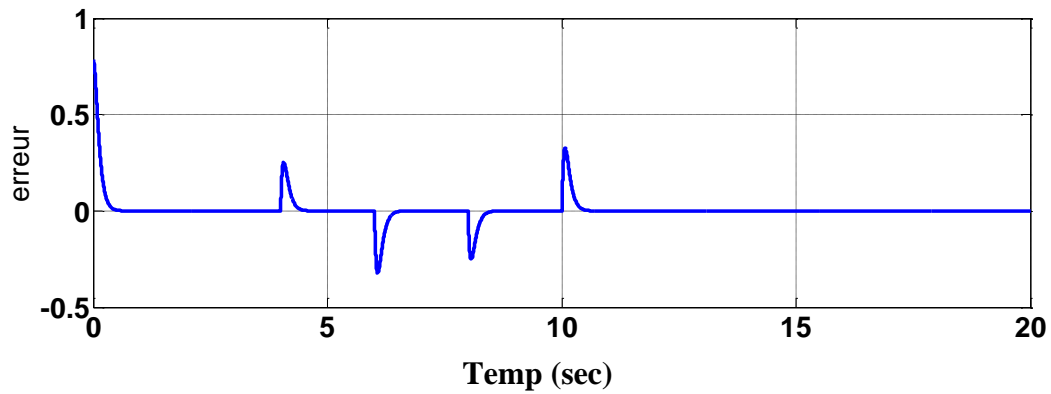


Figure (III-2-6) :l'erreur de poursuite angulaire

troisième cas : Avec perturbation et condition initiale $\varphi(0) = \frac{\pi}{4}$

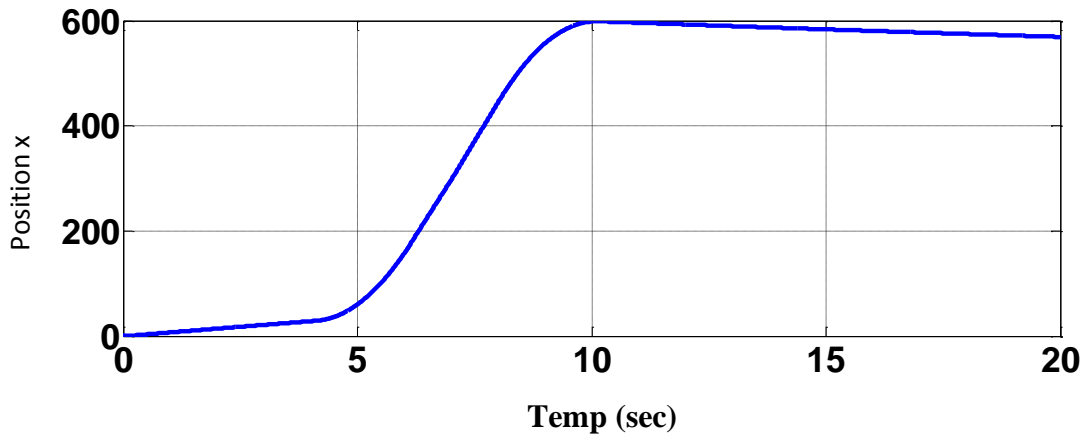


Figure (III-3-1) :la position x

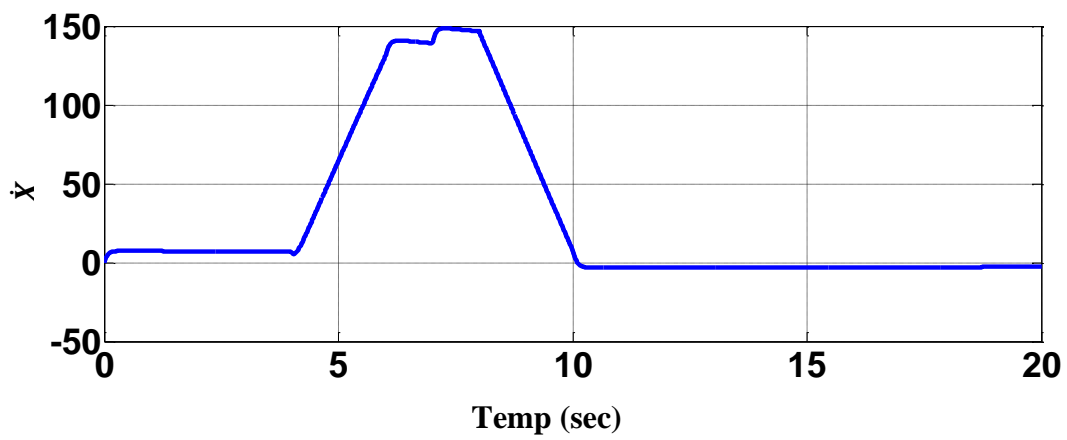


Figure (III-3-2) :la vitesse linéaire

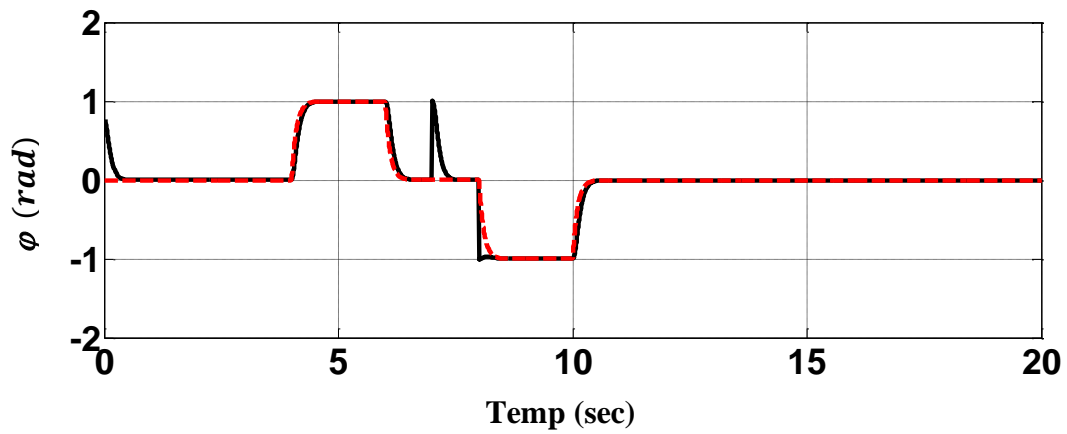


Figure (III-3-3) :angle φ

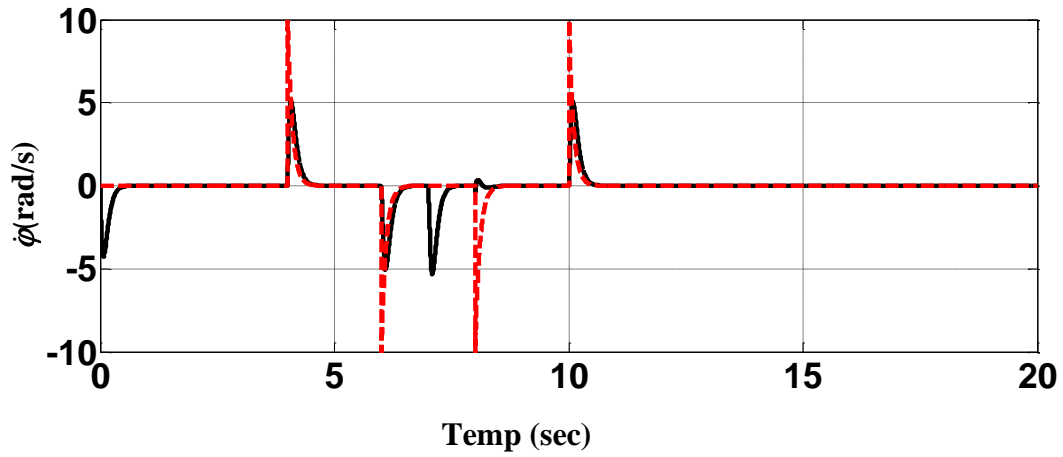


figure (III-3-4) :la vitesse angulaire

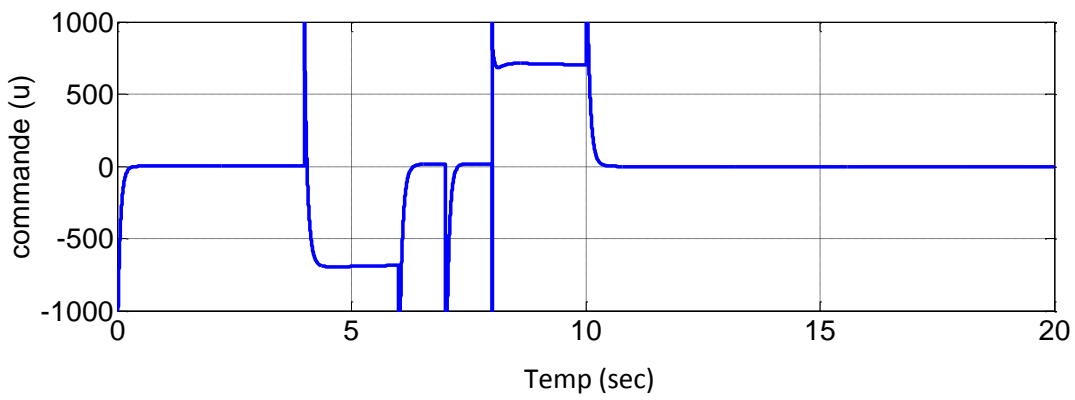


figure (III-3-5) :la commande u

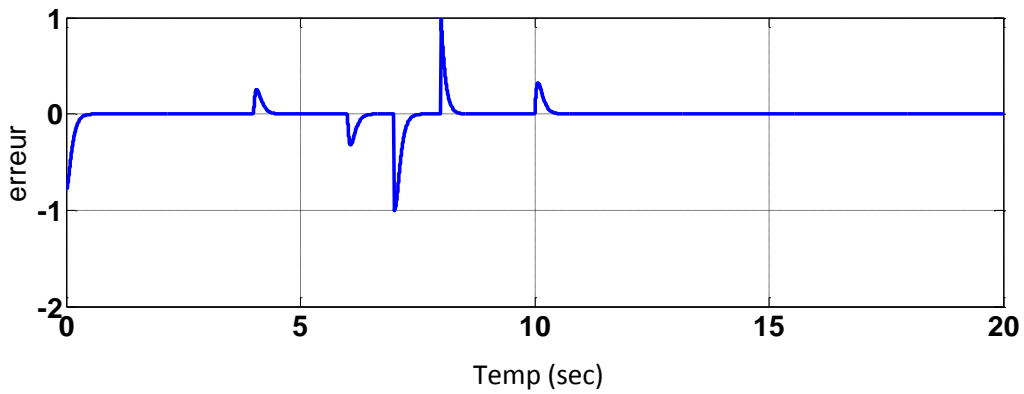


Figure (III-3-6) : l'erreur de poursuite angulaire

quatrième cas : avec perturbation et condition initiale $\varphi(0) = -\frac{\pi}{4}$

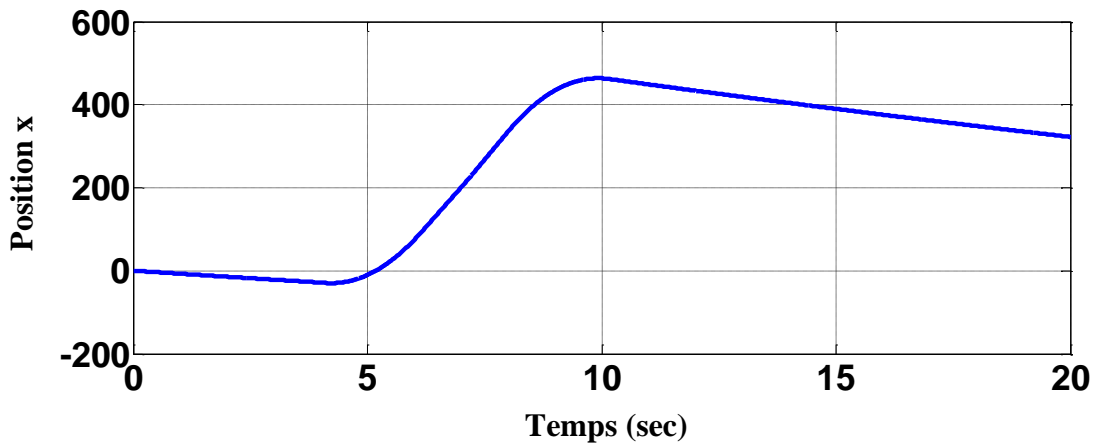


Figure (III-4-1) :la position x

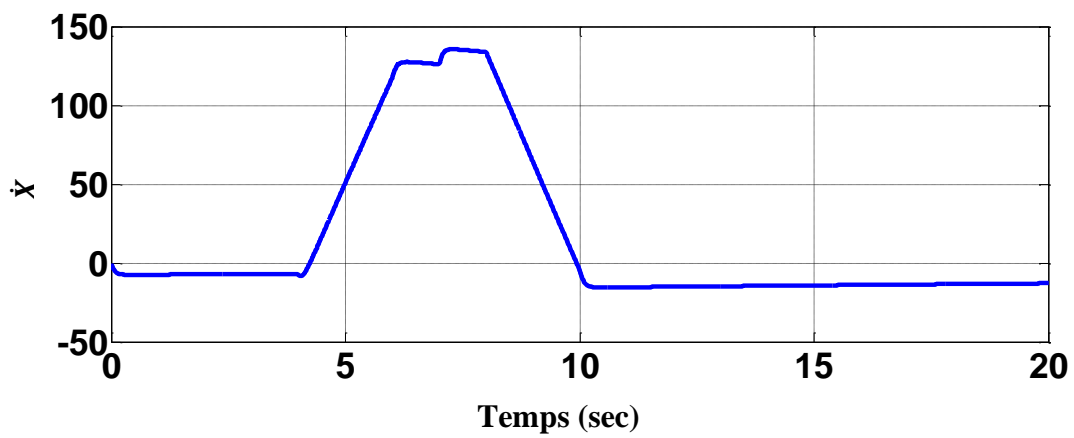


Figure (III-4-2) :la vitesse linéaire

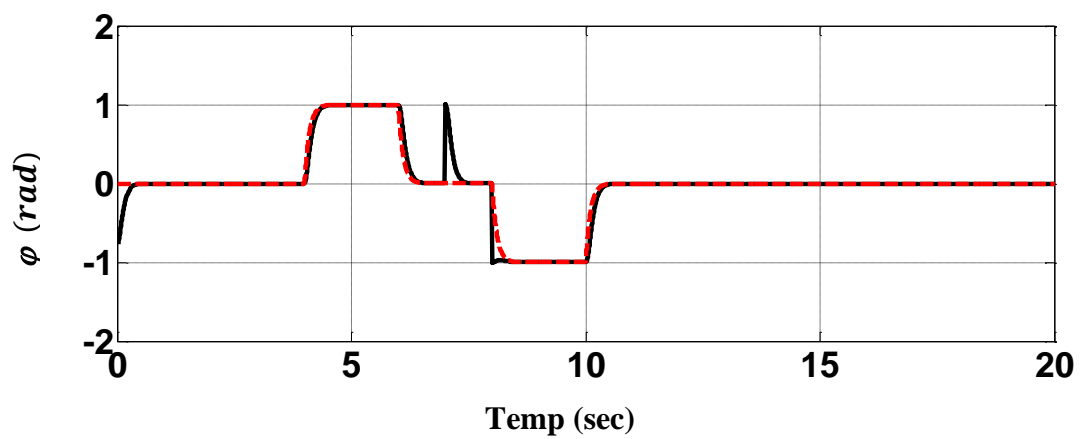


Figure (III-4-3) :l'angle φ

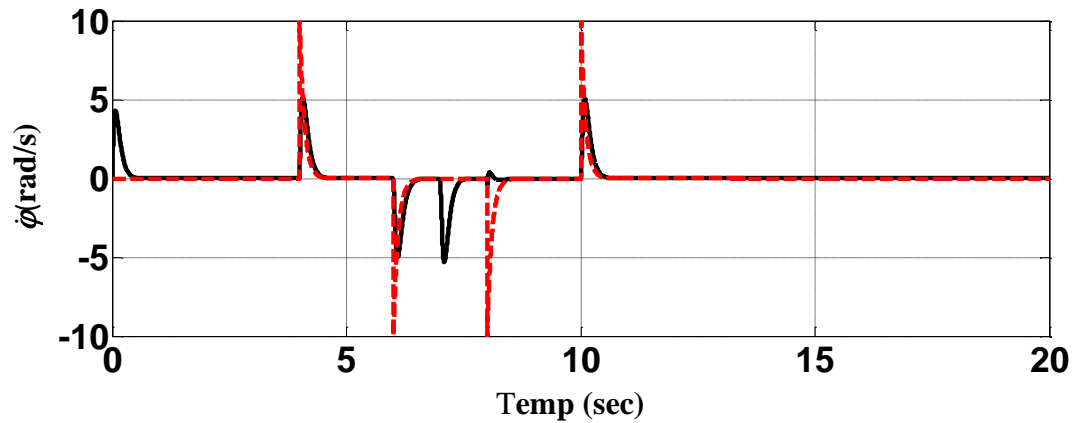


Figure (III-4-4) :la vitesse angulaire

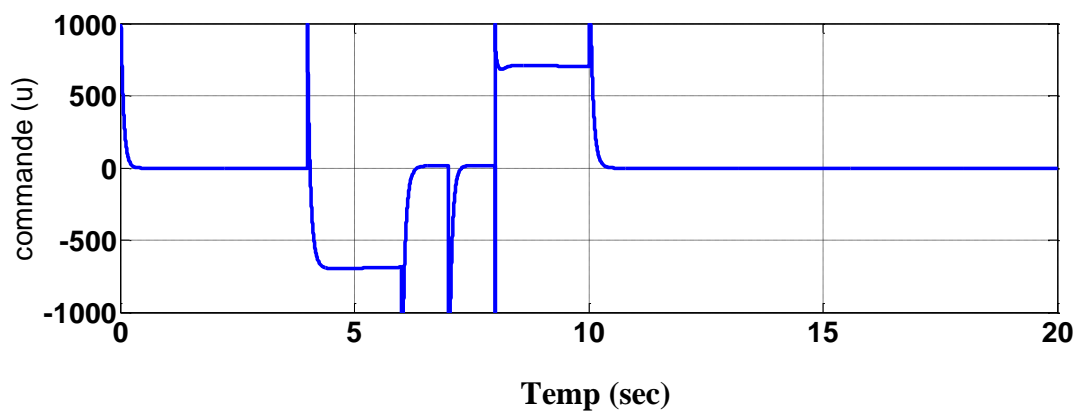


Figure (III-4-5) :la commande u

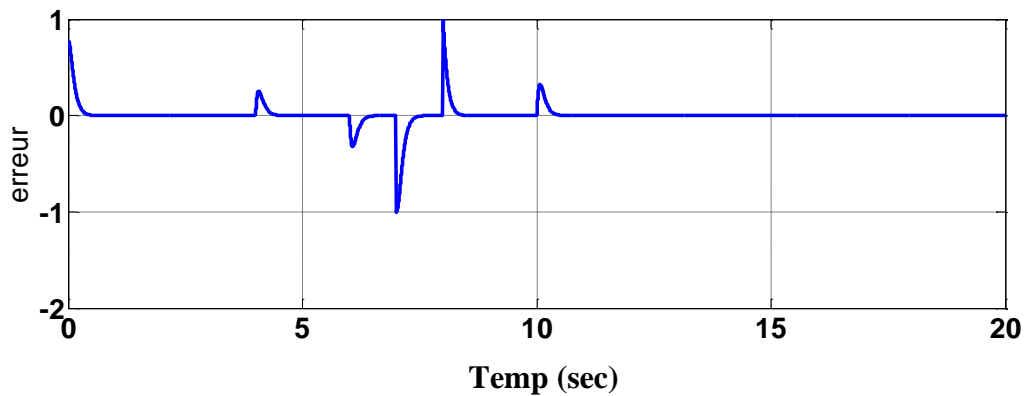


Figure (III-4-6) :l'erreur de poursuite angulaire

Interprétation des résultats obtenus :

Les Figures (III,1), (III,2) et(III ,3) ,(III,4) représentent respectivement les schémas

La translation ,la vitesse linéaire ,l'angle φ et la vitesse angulaire,l'analyse des ces resultas est détaillé comme suit :

- *Première cas : condition initiale nulle ($\varphi= 0^\circ$)*

- De(0-4) sec quand le chariot est en position de repos ($\varphi=0^\circ$), le segway ne pas bouger ($X=0$ m) et sa vitesse égale à zéro
- De(4-6) sec quand le chariot est penché vers l'avant ($\varphi>0^\circ$), le segway avance rapidement en fonction de l'augmentation de l'angle d'inclinaison φ
- De(6-8) sec le chariot est remis à centre du gravéte ($\varphi=0^\circ$), le segway continue d'avancer à une vitesse constante.
- De(8-10) sec le chariot est incliné vers l'arrière ($\varphi<0^\circ$), le segway continue de progresser à une vitesse décroissante jusqu'à ce qu'il cesse d'exister, puis se retirer en arrière.
- De(10-20) sec le chariot est remis à centre du gravéte ($\varphi=0^\circ$), le segway continue d'incliner vers l'arrière à une vitesse constante

➤ **Deuxième cas : condition initiale non nulle ($\varphi \neq 0$)**

L'un des grands soucis d'un robot segway est la condition initiale non nulle, c'est-à-dire que lors de la montée au robot, la tige va s'incliner ou l'utilisateur risque de tomber de Segway.

Donc selon les résultats obtenus, la commande LQR a pu compenser l'effet de la condition initiale dans un minimum de temps sans influencer sur le déplacement linéaire.

➤ **Troisième cas : condition initiale non nulle ($\varphi \neq 0$) et perturbation**

La même remarque comme dans le cas précédent, même à la présence de perturbation la poursuite reste bonne ce qui prouve l'efficacité de la loi LQR.

III. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons appliqués la loi de commande optimale LQR sur le robot mobile Segway.

La loi de commande est synthétisée afin de contrôler l'inclinaison de la tige de robot. Ce dernier mouvement est celui responsable sur le déplacement de robot sur le plan.

Les simulations ont été réalisées à la fin pour montrer l'efficacité et la robustesse de cette commande même à la présence des perturbations et à des conditions initiales non nulles. Dans le prochain chapitre un filtre de Kalman est utilisé pour estimer le vecteur d'état si ce dernier est non mesurable.

CHAPITRE IV :

*Commande optimale basée sur
le filtre de Kalman pour un
robot Segway*

Chapitre IV :

Commande optimale basée sur le filtre de Kalman pour un robot Segway

IV.1. Introduction :

Le Filtre de Kalman est une approche statistique, d'assimilation de données, dont le principe est de corriger la trajectoire du modèle en combinant les observations avec l'information fournie par le modèle de façon à minimiser l'erreur entre l'état vrai et l'état filtré à la présence des bruits de mesure [27].

Dans ce chapitre, les notions, les concepts, les définitions et les principes généraux du filtre de Kalman. Le modèle mathématique de cet observateur est donné dans les deux cas discret et continu. Afin de commander le robot Segway, un filtre de Kalman, est implémenté pour reconstruire tout le vecteur d'état à la présence de bruit. La loi de commande appliquée dans ce chapitre est LQG (Linéaire Quadratique Gaussienne).

Des simulations ont été réalisées à la fin de ce chapitre pour montrer les performances de schéma de commande utilisée.

IV.2. Définition :

Le filtre de Kalman est un filtre récursif, qui utilise une approche temporelle [27]. Il permet d'estimer l'état d'un système dynamique à partir d'une information, à priori, sur l'évolution de cet état et de la mesure réelle. L'utilisation de ce filtre est particulièrement recommandée lorsque l'imprécision sur les données traitées peut être interprétée comme un bruit aléatoire, dont la distribution est connue à priori [28].

IV.3. Principe du Filtre :

Le filtre de Kalman est un estimateur récursif. Cela signifie que pour estimer l'état courant, l'estimation de l'état précédent est nécessaire. Le principe de ce filtre repose sur deux équations [29]:

- L'équation récursive de modélisation du processus aléatoire x_k (vecteur d'état) discret, dite équation d'état.
- L'équation d'observation du processus y_k (vecteur de mesure).

L'objectif est de déterminer une estimation récursive des x_k à partir des mesures y_k et du modèle de génération du processus même si le vecteur d'état x_k et la mesure y_k sont sous bruits.

IV.4. Avantage et Inconvénient de filtre de Kalman

❖ A. Avantage :

- ✓ La procuracy de l'erreur de prédiction qui présente en soit un indicateur de précision.
- ✓ Son algorithme travaille dans le domaine temporel avec une nature récursive et dispose d'un estimateur optimal dans le sens des moindres carrés.
- ✓ Un autre aspect de son optimalité est l'incorporation de toute l'information disponible sur le système, les mesures et les erreurs, dans un opérateur adaptatif qui est recalé à chaque fois qu'une nouvelle mesure devient disponible.
- ✓ Le gros avantage de la méthode est de fournir à chaque itération une estimation des matrices de covariance d'erreur de mesure et d'analyse. Il faut toutefois initialiser correctement ces matrices à l'instant (t_0), et avoir une estimation des matrices de Covariance d'erreur modèle et d'erreur d'observation.

❖ B. Inconvénient :

- ✓ Le filtre de Kalman est applicable sur les modèles linéaires gaussiens seulement.
- ✓ L'hypothèse des bruits gaussiens n'est pas essentielle pour le fonctionnement du filtre de Kalman, ce dernier approche la densité de l'état sachant l'observation (densité conditionnelle) par une densité gaussienne, déterminée par sa moyenne et sa matrice de covariance. La non linéarité du modèle peut entraîner la multimodalité de la loi conditionnelle de l'état, et ainsi rend le filtre de Kalman inadapté.

- ✓ Lorsque le système est fortement non linéaire le filtre de Kalman étendu peut diverger (Divergeant : quand l'estimation qu'il nous fournit est entachée d'erreurs qui deviennent de plus en plus importantes). Le filtre devient alors instable et donc insatisfaisant

IV.5. Limites

Le filtre de Kalman est une méthode d'estimation et de prédiction puissante prenant en compte la modélisation du système. Néanmoins, ce filtre n'est pas forcément l'outil à appliquer dans tous les cas [30]. En effet, le système doit être modélisé assez précisément afin d'obtenir un filtre efficace. Cependant, les systèmes physiques sont de nature non linéaire et leur modèle dynamique contient des incertitudes et des perturbations internes et externes.

Pour remédier à ce problème, un filtre de Kalman étendu a été développé. Ce dernier, permet de prendre en compte la nature non linéaire de système physique. Néanmoins, cette technique possède quelques inconvénients :

- La convergence de la covariance de l'erreur d'observation n'est pas toujours vérifiée. En effet, si le passage d'une estimation à une autre tend à sortir de la zone de linéarité, il est possible que le filtre diverge.
- Le coût calculatoire plus important. En effet, de nouvelles matrices coûteuses rentrent en jeux, ce qui peut être une limite à son utilisation.
- Une autre limite importante d'une telle méthode est que le filtre de Kalman permet de Prendre en compte uniquement un modèle de bruit gaussien. Cette restriction limite donc l'utilisation du filtre de Kalman

Le filtre de Kalman est donc une méthode d'estimation intéressante, mais qui n'est utilisable lorsque le modèle mathématique de système physique est imprécis.

IV.6. Modèle de Kalman :

Le filtre de Kalman est applicable sur les systèmes linéaires bruités de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t), & x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^q \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + v(t), & y \in \mathbb{R}^p, v \in \mathbb{R}^p \end{cases} \text{(IV.1)}$$

Avec :

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du système,
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des entrées déterministes et connues (commandes,...)

- $w \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur des signaux aléatoires inconnus qui viennent perturber directement l'équation d'état du système à travers une matrice d'entrée ($M_{n \times q}$ on note $w_x = Mw$ le bruit d'état) ;
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur des mesures,
- $v \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur des signaux aléatoires (bruit de mesure) qui polluent les mesures $y(t)$ (on suppose qu'il y a autant de bruits que de mesures). Auquel nous adjoindrons les hypothèses suivantes :

Nous supposons que :

Hypothèse 1: La paire (A, C) est observable.

Hypothèse 2: les signaux $w(t)$ et $v(t)$ sont des **bruits blancs gaussiens centrés de Densité Spectrale de Puissance (DSP)** W et V respectivement, c'est-à-dire:

- $E[w(t)w(t + \tau)^T] = W\delta(\tau)$,
- $E[v(t)v(t + \tau)^T] = V\delta(\tau)$
- $E[w(t)v(t + \tau)^T] = 0$ (Cette dernière relation traduit l'indépendance stochastique des bruits $w(t)$ et $v(t)$: cette hypothèse est introduite pour alléger les calculs qui vous suivent mais n'est pas nécessaire. On trouvera dans la référence [9] les formules qui prennent en compte une corrélation entre les bruits d'état et de mesure)

Hypothèse 3 : V est inversible

IV.6.1. Structure d'un estimateur non biaisé :

Un filtre de Kalman est un système dynamique avec 2 entrées : la commande déterministe u et la mesure y , c'est-à-dire tous les signaux connus du système. L'état \hat{x} (ou la sortie) de ce filtre est un estimé de l'état x du système.

Soit :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_f \hat{x}(t) + [B_f \quad K_f] \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \tag{IV.2}$$

$$= A_f \hat{x}(t) + B_f u(t) + K_f y(t) \tag{IV.3}$$

Il faut initialiser ce filtre par $\hat{x}(t_0)$: l'estimée de l'état du système à l'instant initial t_0

On note : $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ l'erreur d'estimation de l'état du système et $\varepsilon(t) = x(t_0) - \hat{x}(t_0)$ l'erreur d'initialisation.

En retranchant l'équation (IV.3) de l'équation d'état (IV.2) et en utilisant l'équation de mesure, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= Ax + Bu + Mw - A_f \hat{x} - B_f u - K_f (C_x + D_u + v) \\ &= (A - K_f C) \varepsilon + (A - K_f C - A_f) \hat{x} + (B - K_f D - B_f) u + Mw - K_f v \end{aligned} \quad (IV.4)$$

Le signal d'erreur $\varepsilon(t)$ est aléatoire gaussienne car les bruits w et v sont gaussiens.

✓ **Estimateur non biaisée:** avant tout, on souhaite que l'estimateur soit non biaisée, quel que soit la loi de commande $u(\tau)$ appliqué sur l'horizon $\tau \in [t_0, t]$ et l'initialisation $\hat{x}(t_0)$; on souhaite que la moyenne de l'erreur d'estimation tende vers 0 lorsque t tend vers l'infini.

Selon (IV. 4) la moyenne de l'erreur d'estimation est comme suit :

$$E[\dot{\varepsilon}(t)] = (A - K_f C)E[\varepsilon(t)] + (A - K_f C - A_f)E[\hat{x}(t)] + (B - K_f D - B_f)u(t) \quad (IV.5)$$

On aura $\lim_{t \rightarrow \infty} E[\varepsilon(t)] = 0$, $\forall u(t)$, $\forall E[\hat{x}(t)]$, si et seulement si : $A - K_f C$ est stable.

Dans ce cas on obtient :

$$E[\varepsilon(t)] = e^{(A - K_f C)(t - t_0)} \varepsilon(t_0) \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} E[\varepsilon(t)] = 0 \quad (IV.6)$$

Si l'on reporte (IV.5) dans (IV.3) l'équation du filtre de Kalman s'écrit :

$$\dot{\hat{x}} = (A\hat{x} + Bu) + K_f (y - C\hat{x} - Du) \quad (IV.7)$$

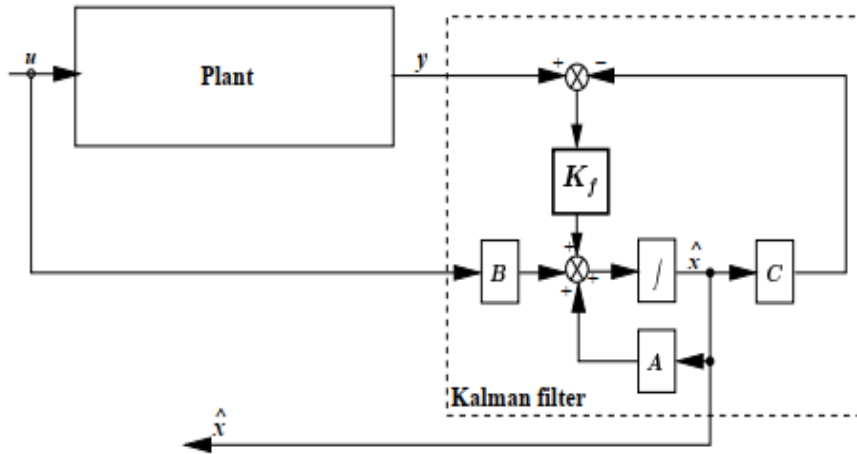


Figure IV.1 :Schéma fonctionnel du filtre de Kalman (cas D=0).

IV.7. Estimateur à variance minimale

Le gain K_f est calculé en fonction de la covariance de l'erreur d'estimation, dont l'objectif est de ramener cette dernière à zéro quand t tend vers l'infini.

IV.7.1 Solution générale :

On cherche donc K_f qui minimise :

$$\begin{aligned} J(t) &= \sum_{i=1}^n E[\varepsilon_i(t)^2] = E[\varepsilon^T(t)\varepsilon(t)] \\ &= \text{trace } E[\varepsilon(t)\varepsilon^T(t)] \\ &= \text{trace } P(t). \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

$P(t) = [(x(t) - \hat{x}(t))(x(t) - \hat{x}(t))^T]$: matrice de covariance de l'erreur d'estimation.

La dynamique de l'erreur d'observation $\varepsilon(t)$ est donnée par :

$$\dot{\varepsilon}(t) = (A - K_f C) \varepsilon(t) + [M \quad -K] \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.9})$$

Avec :

$$E \left[\begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^T(t+\tau) & v^T(t+\tau) \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} W_{q \times q} & 0_{q \times p} \\ 0_{p \times q} & V_{p \times p} \end{bmatrix} \delta(\tau). \quad (\text{IV.10})$$

L'équation différentielle de la covariance de l'erreur d'estimation est donnée par :

$$\dot{P}(t) = (A - K_f C)P(t) + P(t)(A - K_f C)^T + [M \quad -K_f] \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^T \\ -K_f^T \end{bmatrix}$$

$$= (A - K_f C)P(t) + P(t)(A - K_f C)^T + MWM^T + K_f V K_f^T \quad (\text{IV.11})$$

Pour minimiser trace $P(t)$, il suffit de minimiser trace $\dot{P}(t)$ comme suit :

$$\frac{\partial(\text{trace}\dot{P}(t))}{\partial K_f} = -P(t)C^T - P(t)C^T + 2K_f V \quad (\text{IV.12})$$

$$\Rightarrow K_f(t) = P(t)C^T V^{-1} \quad (\text{IV.13})$$

En reportant (IV.14) dans (IV.11), nous obtenons :

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T - P(t)C^T V^{-1} C P(t) + MWM^T \quad (\text{IV.14})$$

C'est l'équation de Riccati

IV.7.2 filtre de Kalman continu

En régime permanent, la dynamique de la covariance de l'erreur d'estimation sera :

$$\dot{P}(t) = 0 \quad (\text{IV.15})$$

D'où : P est la solution de l'équation de Riccati suivante :

$$AP + PA^T - PC^T V^{-1} C P + MWM^T = 0 \quad (\text{IV.16})$$

Le gain du filtre de Kalman est donnée par : $K_f(t) = P(t)C^T V^{-1}$.

On peut vérifier que la positivité de P implique la stabilité du filtre, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres de la matrice $A - K_f C$ sont à partie réelle négative

On trouvera dans [31], une méthode générale pour trouver la solution positive d'une équation de Riccati.

IV.7.3 filtre de Kalman discret

En pratique, l'implantation du filtre de Kalman se fera sur un calculateur numérique et donc en temps discret.

On peut alors discrétiser l'équation d'état (IV.7) du filtre de Kalman ou bien, on peut aussi choisir de faire la synthèse d'un filtre de Kalman directement en discret en passant par les étapes suivantes :

1) calcul de l'estimé $\hat{x}_k/k - 1$ et de la matrice de covariance $p_k/k - 1$ à partir des mesures disponibles à l'instant $k - 1$:

$$\hat{x}_{k/k-1} = A_{k-1} \hat{x}_{k-1} + B_{k-1} u_{k-1} \quad (\text{IV.17})$$

$$p_{k/k-1} = A_{k-1}P_{k-1}A^T_{k-1} + Q_{k-1}$$

2)calcul du gain de kalman :

$$K_k = p_{k/k-1}H^T_k(H_kP_{k/k-1}H^T_k + R_k)^{-1} \tag{IV.18}$$

3) Mise à jour de l'estimation :

$$\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + K_k(y_k - H_k\hat{x}_{k/k-1}) \tag{IV.19}$$

4) Calcul de la matrice de covariance de l'erreur :

$$p_{k/k} = (I - K_kH_k)p_{k/k-1} \tag{IV.20}$$

IV.8. Régulateur linéaire quadratique gaussien

Le régulateur LQG est une combinaison entre un régulateur LQR et un estimateur de Kalman (LQG=LQR+filtre de Kalman). La synthèse LQG de retours dynamiques d'état, qui combine un retour d'état LQ et un filtre de kalman

Par rapport à la commande LQ, la commande LQG présente l'intérêt de s'appliquer a des systèmes dont l'état n'est pas mesuré. La commande LQG est composée d'une commande LQR avec un observateur des états par la méthode du filtre de Kalman. Où le schéma de principe de cette commande est illustré par la figure (IV-3).

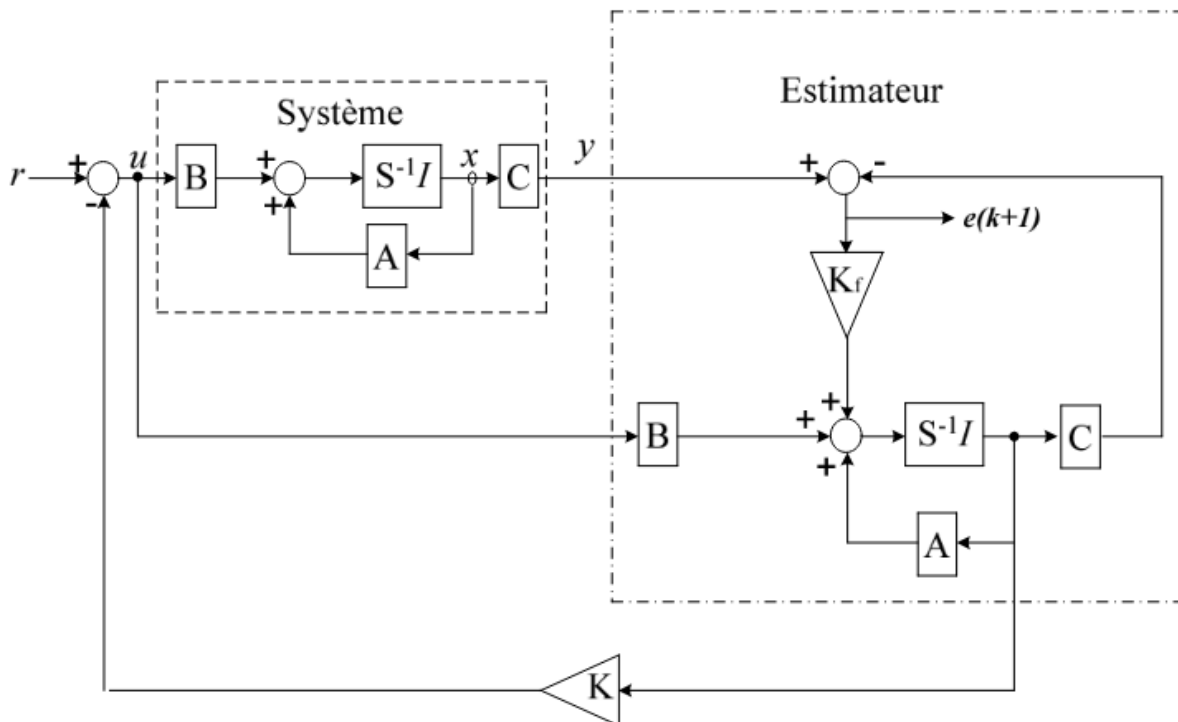


Figure IV.2 : Structure du correcteur LQG.

IV.9. les résultats de la simulation :

La LQG a été appliquée au robot segway dont la loi de commande est donnée par :

$$u_{opt}(t) = -k\hat{x}(t) \quad (IV.21)$$

Avec :

$$k = -R^{-1}B^T P \quad (IV.22)$$

Avec $\hat{x}(t)$ est l'estimé de vecteur d'état x par le filtre de Kalman présenté dans (IV.14), les paramètres de régulateur sont les mêmes dans le troisième chapitre, et les paramètres de filtre de Kalman sont donnés par :

$$V = \text{diag}([.1; .01]);$$

$$W = I;$$

$$M = 10 * [10; 100; .01; 1];$$

Les résultats de simulation sont comme Suit :

Première cas : sans perturbation et condition initiale nulle

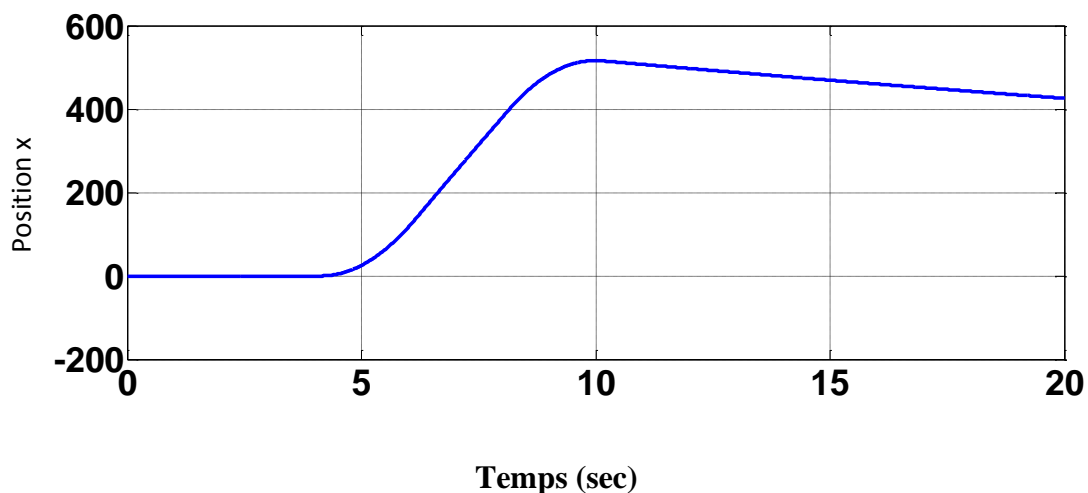


Figure (IV-1-1) : la position x

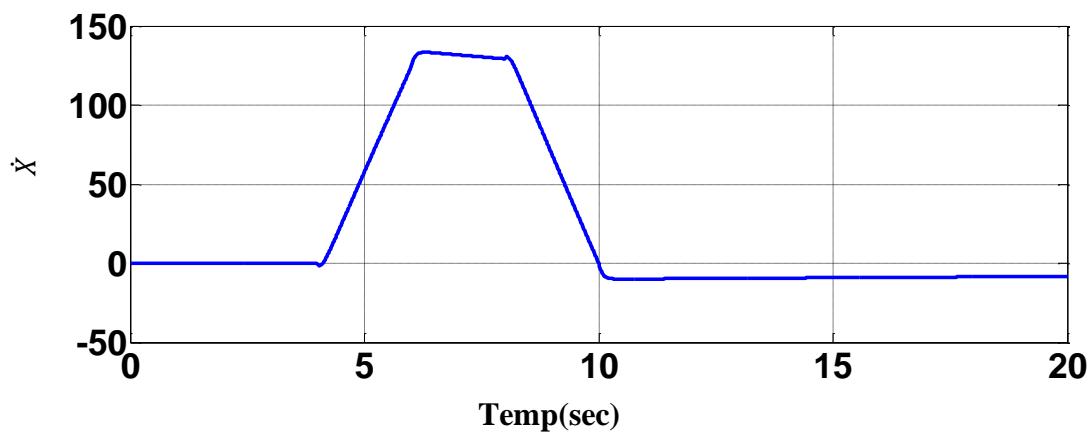


Figure (IV-1-2) : la vitesse linéaire

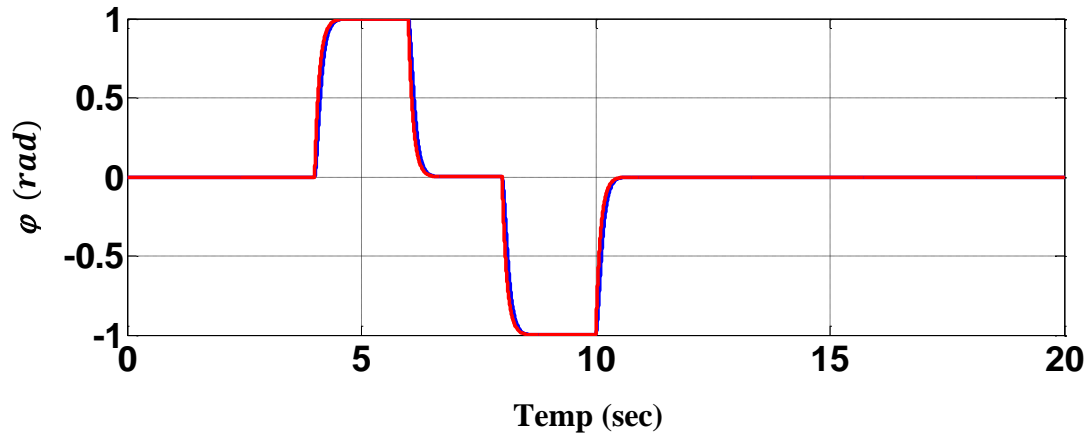
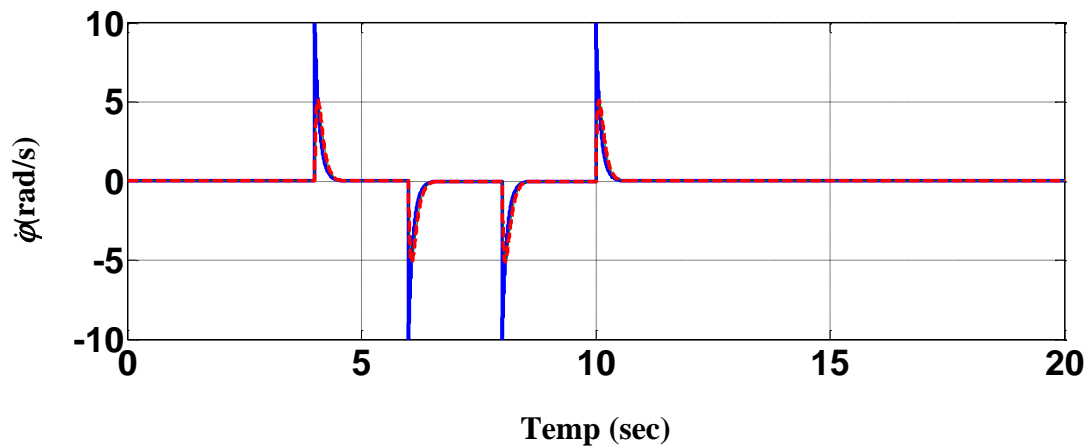
Figure (IV-1-3) :l'angle φ 

Figure (IV-1-4) :la vitesse angulaire

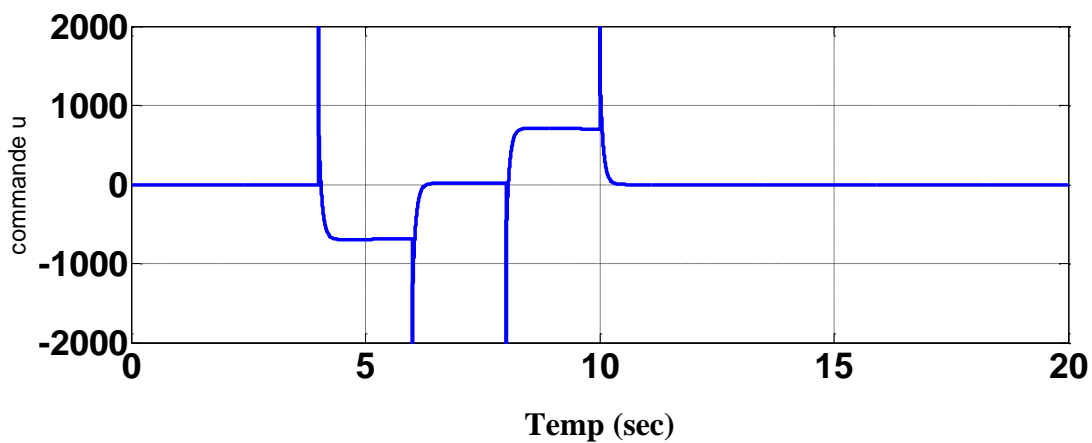


Figure (IV-1-5) :la commande (u)

Deuxième cas : Sans perturbation et condition initiale $\varphi(0) = -\frac{\pi}{4}$

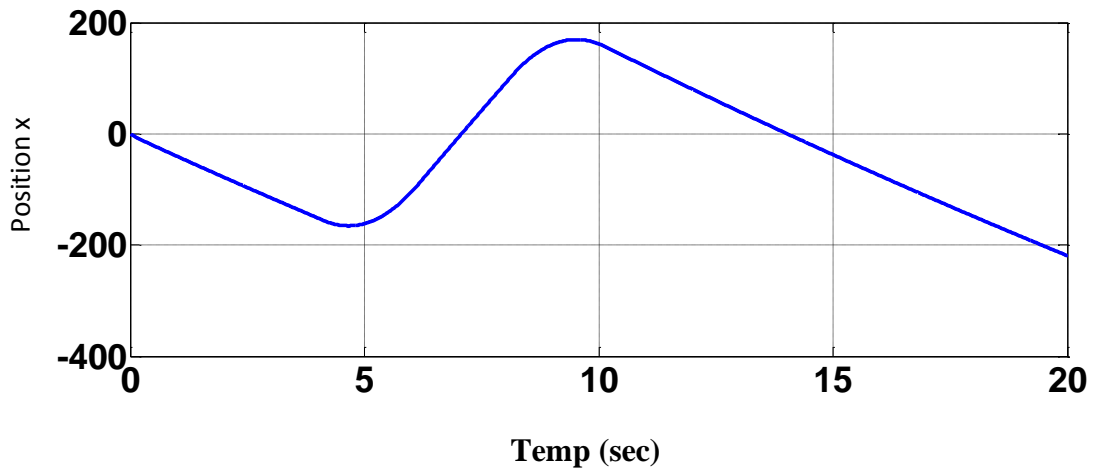


Figure (IV-2-1) :la position x

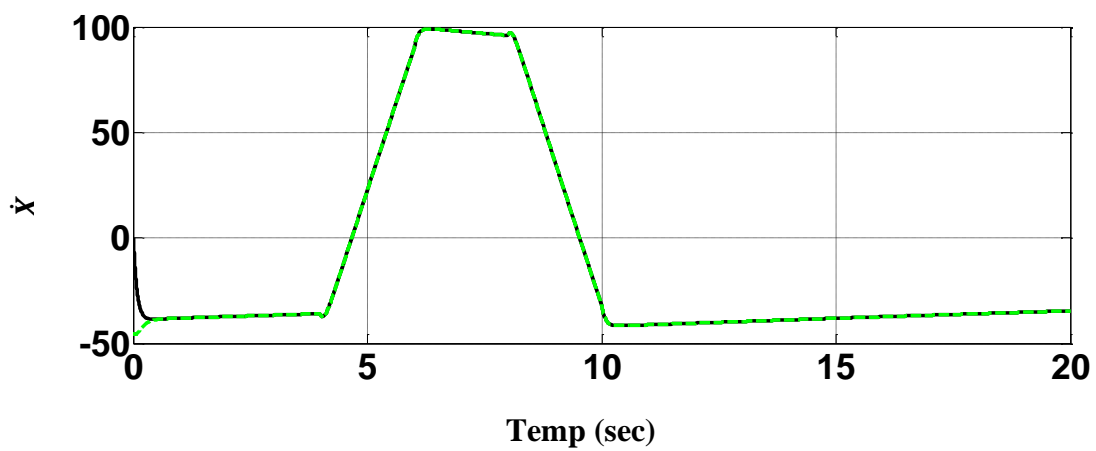


Figure (IV-2-2) :la vitesse linéaire

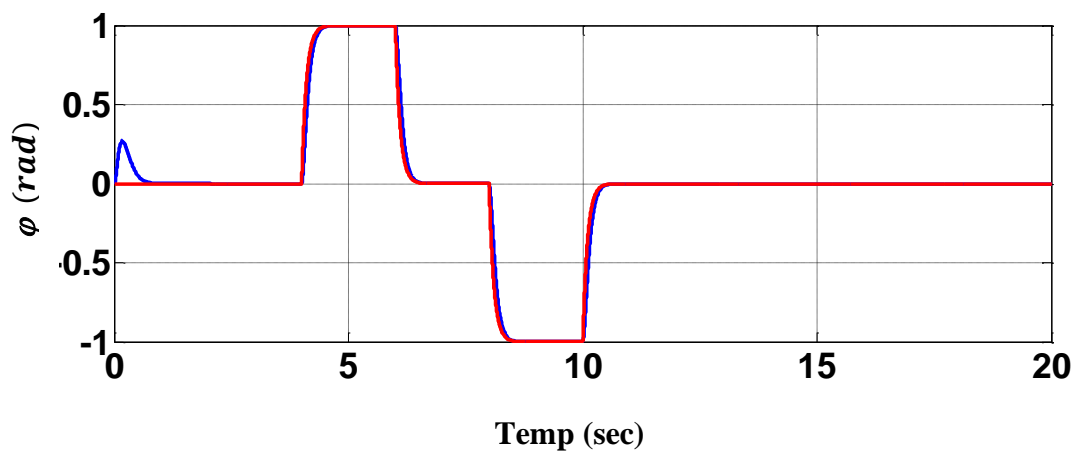


Figure (IV-2-3) :l'angle φ

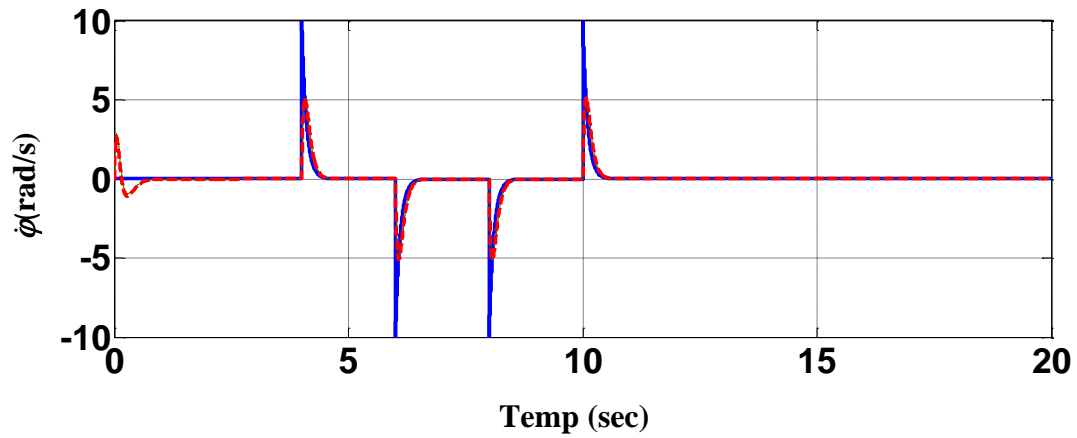


figure (IV-2-4) :la vitesse angulaire

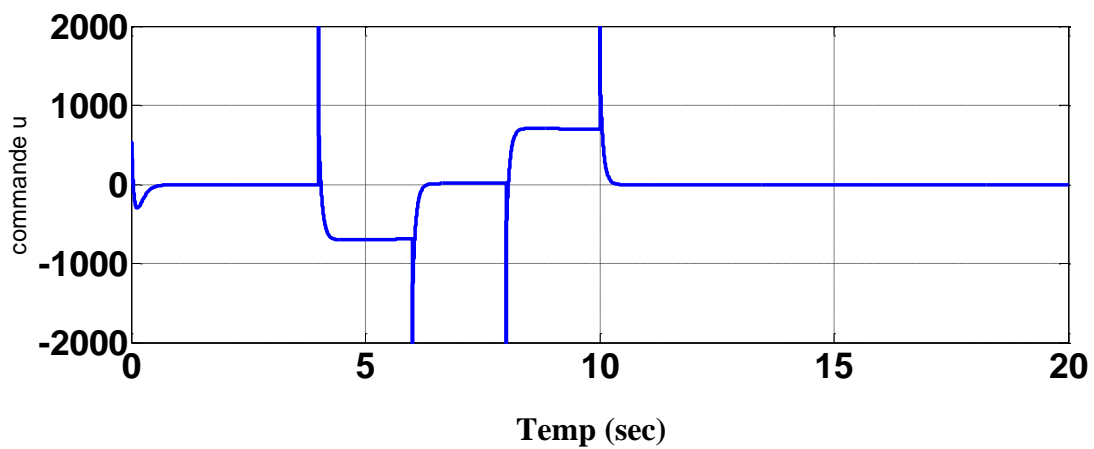


figure (IV-2-5) :la commande u

troisième cas : Avec perturbation et condition initiale $\varphi(0) = \frac{\pi}{4}$

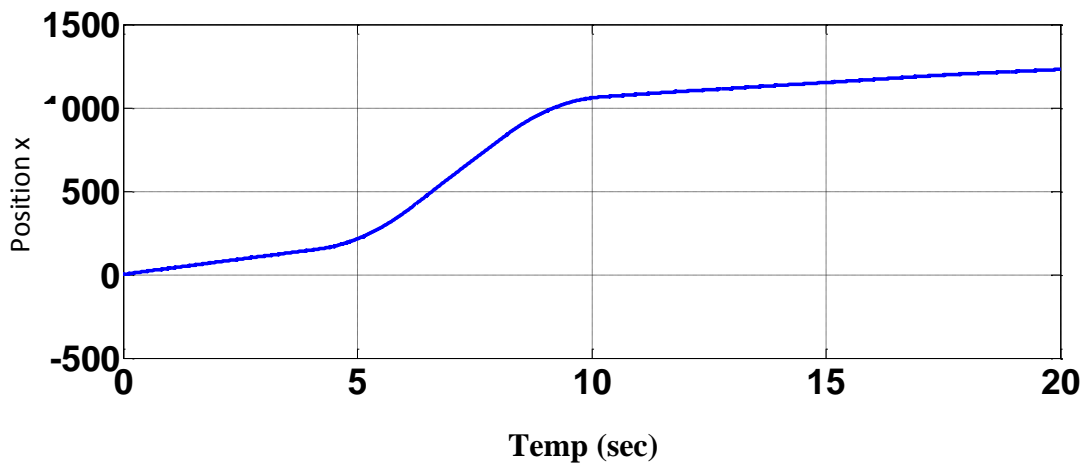


Figure (IV-3-1) :la position x

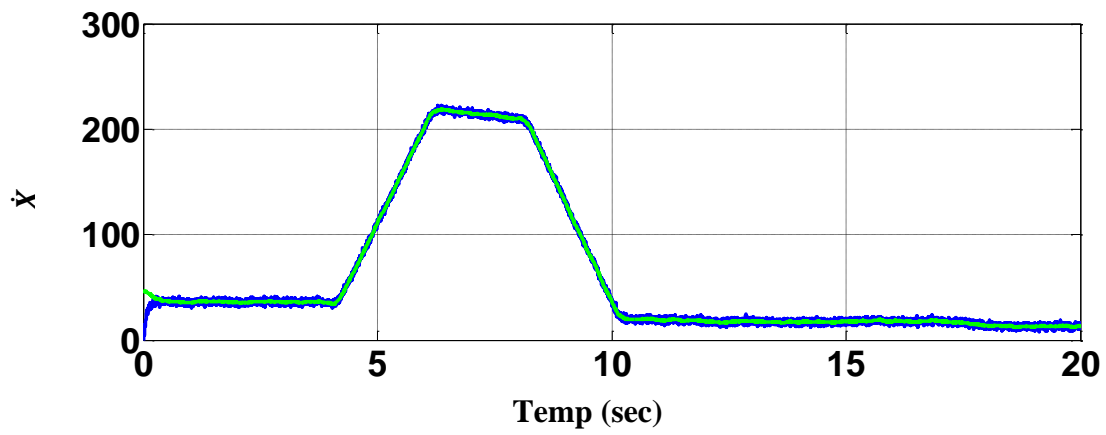


Figure (IV-3-2) :la vitesse linéaire

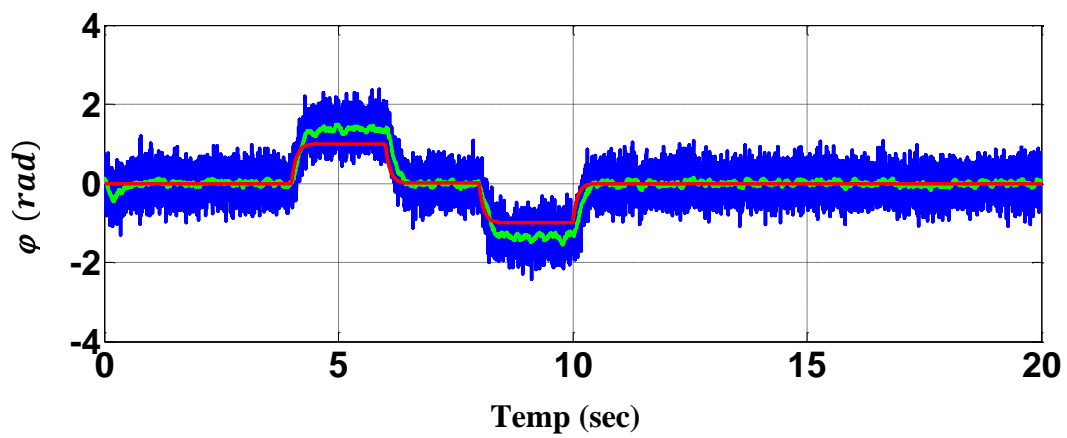


Figure (III-3-3) :angle φ

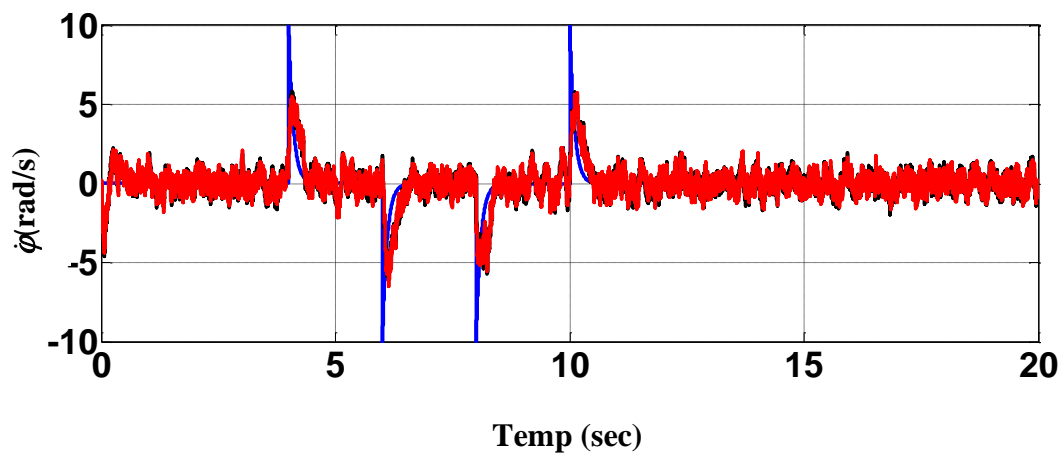


figure (III-3-4) :la vitesse angulaire

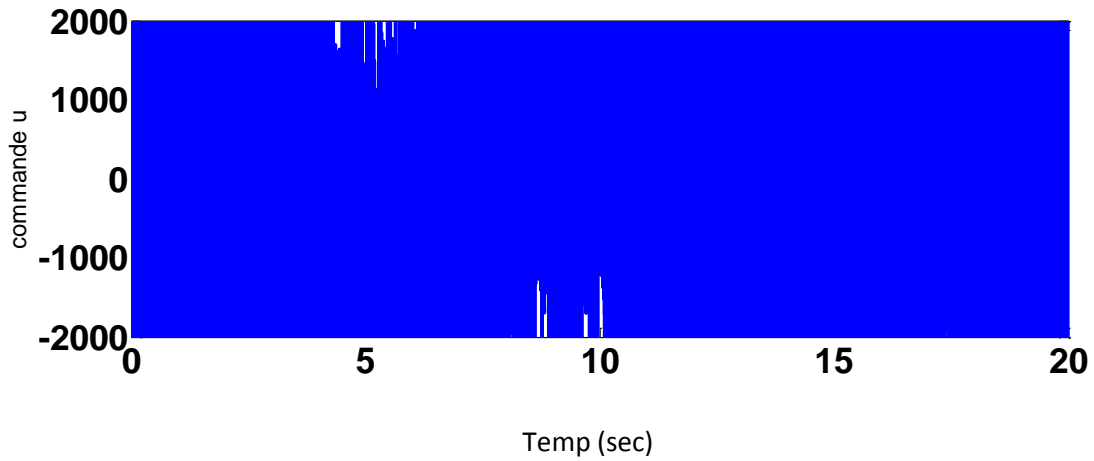


figure (IV-3-5) :la commande u

quatrième cas : avec perturbation et condition initiale $\varphi(0) = -\frac{\pi}{4}$

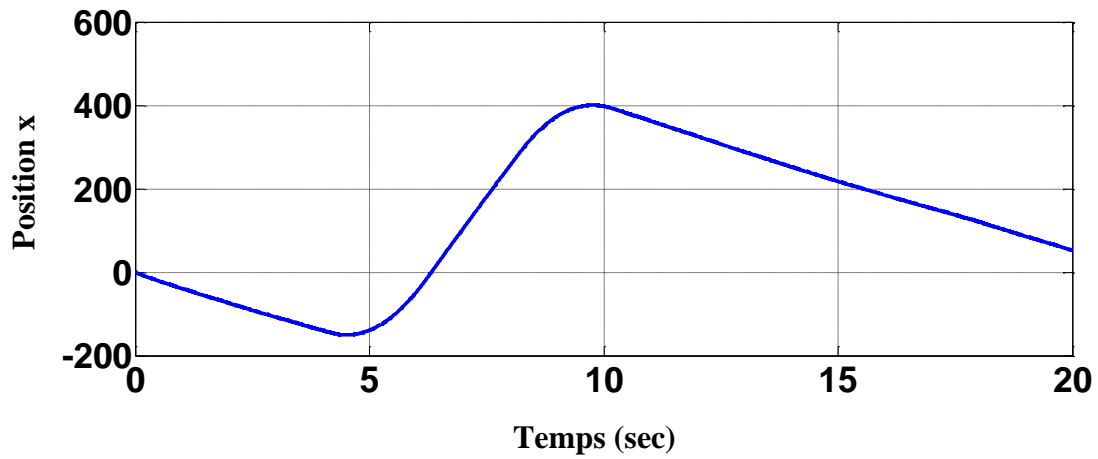


Figure (IV-4-1) :la position x

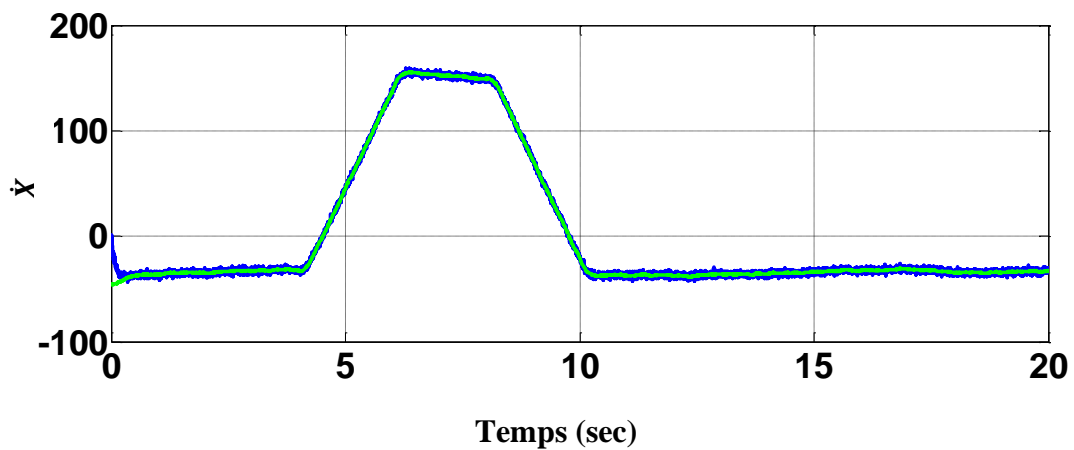


Figure (IV-4-2) :la vitesse linéaire

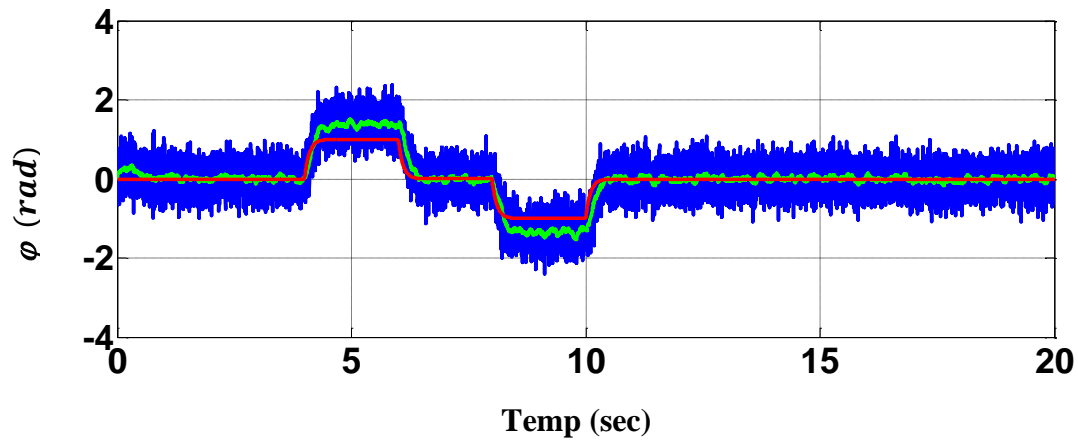
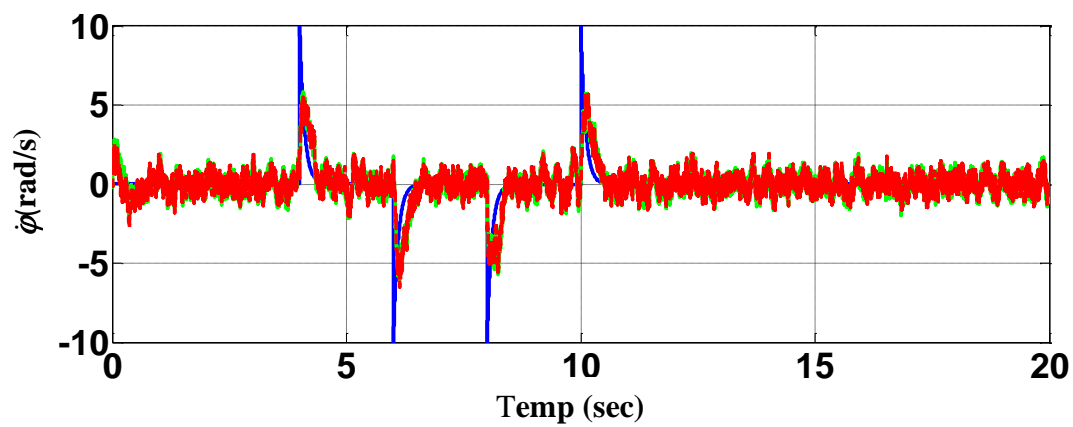
Figure (IV-4-3) :l'angle φ 

Figure (IV-4-4) :la vitesse angulaire

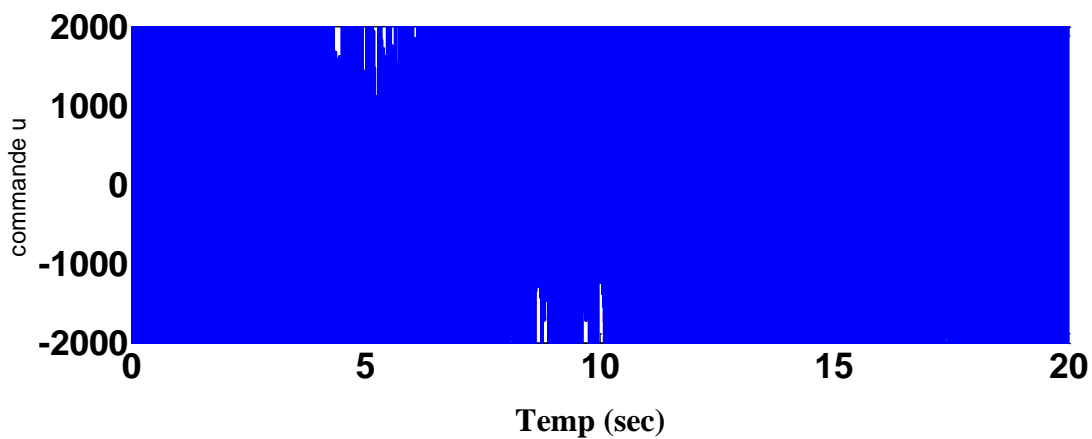


Figure (IV-4-5) :la commande u

Les performances sont bonnes dues à la loi de commande utilisée, mais la remarque la plus importantes est que les signaux issus du filtre de Kalman c'est-à-dire les variables d'états estimés sont la moyenne des trajectoires réelles

DE PLUS malgré que les paramètres de la loi de commande sont les mêmes comme dans le troisième chapitre, mais il est claire que la commande LQR est plus robuste que la commande LQG, de plus la poursuite de cette dernière est mauvaise par rapport à la commande LQR.

IV.10. Conclusion :

Le filtre de Kalman permet d'estimer les états d'un système dynamique à partir d'une série de mesures incomplètes ou bruitées. Malgré leur relative simplicité de modélisation, ce filtre a utilisé dans un large spectre scientifique dont le radar, la vision, et les communications. Ce succès repose, pour l'essentiel, sur l'existence d'algorithmes de filtrage et de lissage exacts et rapides, linéaires au nombre d'observations, qui minimisent l'erreur quadratique moyenne.

Ce filtre a été utilisé pour reconstruire le vecteur d'état d'un robot Segway, une commande LQG a été utilisée pour la stabilisation de ce système.

Des simulations ont été effectuées à la fin de chapitre à la présence es perturbation et de bruits de mesure pour mieux voir l'efficacité de la méthode.

Conclusion générale

Ce travail entre dans le cadre de commander un transporteur personnel Segway. Ce gyropode qui représente un moyen de transport très intéressant, qui permet aux individus de se déplacer d'une façon meilleure, vu qu'il est moins en cambrant, plus économique, plus maniable, et aussi plus moderne.

L'intérêt porté sur le développement de tels systèmes d'un point de vue automatique a mené à l'amélioration des techniques de commande.

Pour ce but, nous avons proposé dans ce travail de fin d'étude, une analyse détaillée du système segway qui est un système sous actionné, dont les deux sorties sont commandées par la même entrée.

La commande LQR a été utilisée pour stabiliser le système sous actionné Segway, ou plusieurs simulations ont été réalisées pour montrer les performances de cette méthode.

Pour résoudre le problème de vecteur d'état inconnu, le filtre de Kalman a été implémenté pour reconstruire les variables d'état à la présence des bruits de mesure.

Le schéma LQG a été implémenté pour pouvoir sans effet sur la complètement de Segway.

Les résultats de simulations, ont montrés l'efficacité des méthodes utilisées même à la présence des perturbations et même dans le cas ou la condition initiale est non nulle/

Nous avons également présenté la conception d'une commande optimale sur ce modèle.

Ce mémoire, propose plusieurs tests sur la commande optimal qui nous avons appliquées sur le système (Segway). D'après les résultats trouvés, On peut conclure à travers les courbes simulées pour plusieurs cas d'étude et présentées dans le troisième chapitre, que l'application de la commande optimale a été très bonne , ainsi que ces résultats de simulation montrent la relation physique entre l'angle de rotation et le mouvement de translation A la fin ce mémoire on cite les perspectives suivantes :

- Synthétiser des lois de commande non linéaires,
- Trouver une technique afin de commander la vitesse linéaire d'un Segway,
- Synthétiser des commandes sans modèle,
- Commander les dernières versions du robot Segway

REFERNECES

BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Lhomme-Desages, Damien. *Commande d'un robot mobile rapide à roues non directionnelles sur sol naturel*. Diss. Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 2008
- [2] ABBASSI, Smail. *Modélisation et commande non linéaires d'un segway*. Master2, biskra :Université Mohamed Khider ,2019.
- [3] Trélat, Emmanuel. "Commande optimale." *Notes de cours* (2007).
- [4] Benhaddouche, Djemai. *Commande Optimale Appliquée à un Robot Mobile*. Diss. Université de Batna 2, 2013
- [5] Kadri Mohamed « Le filtre de Kalman pour la prédiction multi-site des apports liquides annuels du bassin versant Cheliff » Université de Blida ,2017
- [6]. H. Benariba, "Commande d'un robot mobile sur deux roues", mémoire de Magister, Université de Telemcen 2013.
- [7].A. Castro, "Modeling and Dynamic Analysis of a Two-Wheeled Inverted-Pendulum", for the degree Master of Science, Georgia Institute of Technology, August 2012
- [8]. **MUDRY, Freddy**. Modélisation et régulation d'un pendule inversé. *Fascicule de travaux pratiques, Institut d'Automatisation industrielle de l'Ecole d'Ingénieurs du Canton de Vaud, Suisse*, 2003..
- [9] OOI, Rich Chi. Balancing a two-wheeled autonomous robot. *University of Western Australia*, 2003, vol. 3.
- [10] Edouard Laroche, " Commande Optimale ". Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg. Anne 2009-2010.
- [11] Desineni Subbaram. Optimal control systems. CRC, 2003.
- [12] Brian Anderson. Optimal control, linear quadratic methods. Prentice-Hall, 1989.
- [13] **Abdelkader Merakeb**, "Optimisation multicritères en contrôle optimal : Application au véhicule électrique". Thèse de Doctorat. Spécialité : mathématique. Université

Mouloud Mammeri, Tizi Ouzou. Soutenu le : 14/06/2011.

[14] Khenniche Ghania, "*Théorie et application du calcul des variations en commande optimale*". Mémoire de Magister Présenté à l'Université 20 Août 55, Skikda Faculté des Sciences et Sciences de l'Ingénierat. Spécialité : Mathématiques. Soutenu le : 04/06/2007.

[15] LAUB, Alan. A Schur method for solving algebraic Riccati equations. *IEEE Transactions on automatic control*, 1979, vol. 24, no 6, p. 913-921.

[16] Mohamed Bilel Ben Slimen, "*Conception de lois de commande structurées (hiérarchisées, décentralisées) pour les chaînes de traction pilotées*". Thèse de Doctorat. Discipline : Automatique. Ecole polytechnique de l'Université de Nantes. Soutenu le : 13/10/2011.

[17] Pierre Riedinger, "*Contribution à la commande des systèmes complexes*". Mémoire pour l'obtention de l'Habilitation à Diriger des Recherches de l'Institut National Polytechnique de Lorraine. Spécialité : Automatique et Traitement du Signal. Présenté publiquement le 4 juin 2010.

[18] Mariam Baroudi, "*Contrôle d'un bras robotique flexible*". Mémoire présenté comme exigence partielle de la maîtrise en ingénierie. Université du Québec. Année 2010.

[19] Régis Grasse, "*Aide à la navigation pour les personnes handicapées : reconnaissance de trajets*". Thèse pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de Metz. Discipline : Automatique. Soutenu le: 05/10/2007.

[20] Desineni Subbaram Naidu, "*Optimal Control Systems*". Idaho State University Pocatello. Idaho, USA. June 2002.

[21] Rémi Vial, "*Vers un dimensionnement optimal structure-commande de système multiconvertisseurs. Application aux réseaux de tramways*". Thèse pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de Grenoble. Spécialité : Génie électrique. Soutenu le: 26/01/2012.

[22] Nicholas Assimakis, "*Discrete Time Riccati Equation Recursive Multiple Steps Solutions*". Department of Electronics Technological Educational Institute of Lamia, Greece . Année 2009.

[23] Vladimir Kucera, "*The Discrete Riccati Equation of Optimal Control*". Ústav teorie informace a automatizace ČSA V (Institute of Information Theory and Automation — Czechoslovak Academy of Sciences), Vyšehradská 49, Praha 2. Année 1972.

[24].S.Harkat, Application du Filtre de Kalman sur la variabilité pluviométrique dans le bassin versant de Chellif » Algerie, Université de Chlef, 2016, 188pp

[25].Kalman R. E. (1960). A New Approach to linear Filtering and Prediction Problems.

[26]"Le filtrage et ses applications": M. Labarrère, J. P. Krief et B. Gimonet, Cépaduès Editions.

[27]M.S. Grewal, A.P. Andrews, "Kalman filtering, theory and practice," Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.