

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed seddik Ben Yahia – Jijel



Faculté des Sciences et de la Technologie

Département d'Automatique

Mémoire de fin d'études

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Master

Automatique

Option : Automatique et systèmes

Thème

Commande non linéaire d'un engin volant

Encadré par :

Dr : OUAAR.M

Présenté par :

Asma Boulaghlem

Hamza Mekdabi

Année Universitaire : 2020/2021

Remerciements et dédicaces

Remerciements

« Le grand merci pour le bon dieu »

Ce mémoire sanctionne la fin de nos études à l'université de Jijel, pour l'obtention d'un diplôme de Master en Automatique et systèmes.

Nous remercions de la plus grande des manières nos parents pour leur soutien démesurer durant nos études et prions le tout puissant de nous les garder le plus longtemps possible ainsi que nous frères et sœurs et particulièrement.

*Nous remercions très sincèrement à madame Ouaar **Mounia**, l'encadreur de ce travail, pour son grand intérêt et la présentation de sa riche expérience, de ses conseils pertinents, de ses orientations avisées, de sa patience et de sa diligence malgré les circonstances.*

Nous remercions les membres du jury d'avoir bien évalué notre travail, pour avoir accepté l'examinassions de ce travail.

Nos plus vifs remerciements vont à tous nos professeurs qui ont contribué à notre formation.

Enfin, je ne saurais terminer ces remerciements sans oublier toute ma famille, sans exception, ainsi que tous mes amis.



Je dédie ce modeste travail à :

Le soleil qui m'a donné de la chaleur et qui a éclairé mon chemin :

Ma chère mère.

Celui qui a une réputation parfumée et une pensée éclairée : mon père

MEKDABI MOHAMED

Mon frère : Bilel

Et mes chères sœurs : Lamia, Sarah, Ilham, Warda

Je le dédie aussi à :

Toute ma famille,

A mon binôme,

*Tous mes amis avec qui j'ai partagé mes souvenirs durant tous mes parcours
d'étude.*

Hamza





Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Le soleil qui m'a donné de la chaleur et qui a éclairé mon chemin : ma chère mère.

*Celui qui a une réputation parfumée et une pensée éclairée : mon père
allah yerahmou*

Mes chers frères : Fatah, Hichem, Cifeadine, hamza,

Et ma chère sœur : Karima

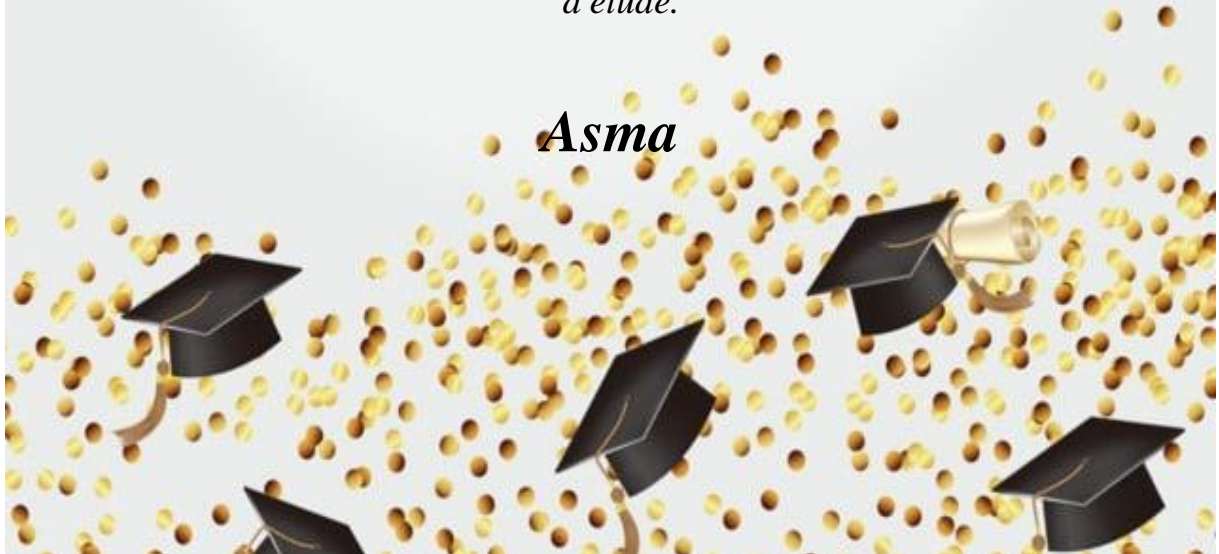
Je le dédie aussi à :

Toute ma famille,

A mon binôme,

*Tous mes amis avec qui j'ai partagé mes souvenirs durant tous mes parcours
d'étude.*

Asma



Résumé :

Ce mémoire traite la modélisation, la conception et la commande des robots volant miniature de type quadrirotor.

Des techniques de commande ont été utilisées le long de ce travail algorithmes en se basant sur la théorie de Lyapunov et la technique de Backstepping.

En se basant sur le modèle dynamique du quadrirotor, des simulations sont effectuées afin vérifier la stabilité et la robustesse de la commande.

Mots clés : Quadrirotor, stabilisation, simulation, backstepping

Abstract :

This memory deals with modelization, desing and control of four-rotor type mini-flying robots.

Control techniques have been used throughout this work algorithms based on lyapunov theory and the backstepping technique.

Based on the dynamic model of the quadotor, simulations are carried out in order to verify the stability and robustness of the contol.

Key words : quadrotor , stabilization,simulation, backstepping .

ملخص

تعالج هذه الأطروحة تصميم والتحكم في الروبوتات الطائرة من نوع أربع دورات.

خلال عمل الخوارزمية هذا بناء على نظرية تم استخدام تقنيات التحكم وتقنية لياپونوف و backstepping

استنادا الى النموذج الديناميكي للطائرة الرباعية، يتم اجراء عمليات المحاكاة من اجل التحقق من استقرار ومثانة عنصر التحكم.

الكلمات الدالة: رباعية المحرك، التثبيت، المحاكاة،backsetiping.

Table des matières

Introduction générale	1
 Chapitre I : Fonctionnement et modélisation dynamique du quadrirotor	
I.1 Introduction	3
I.2 Un peu d’historique	3
I.3 CLASSIFICATION DES DRONES :	5
I.4 Constitution du drone :	6
I.4.1 Batteries :	6
I.4.2 Propulseurs :	6
I.4.2.1 Hélices :	6
I.4.2.2 Moteur électrique :	6
I.4.3 Capteurs :	6
I.4.3.1 Capteurs à ultrason :	7
I.4.3.2 Centrale inertielle :	7
I.4.3.3 Carte intelligente :	7
I.4.3.4 Localisation par le GPS :	7
I.4.3.5 Caméra :	7
I.5 Modes de vol :	7
I.5.1 Mouvement vertical	8
I.5.2 Rotation de roulis	8
I.5.3 rotation de tangage	8
I.5.4 Rotation de lacet	9
I.5.5 Translations sur l’axe X	10
I.5.6 Translations sur l’axe Y	10
I.6 Modèle dynamique d’un quadrirotor	10
I.6.1. Angles d’Euler	12
I.6.2. Vitesses de rotation	13
I.6.3. Vitesses linéaires	14
I.6.4. Effets physiques agissant sur le quadrirotor	15
I.6.4.1. Forces	15
I.6.4.2. Moments	15

I.7. Application du formalisme de Newton-Euler sur le modèle mathématique du quadrirotor	16
I.7.1. Equation de mouvement de translation	19
I.7.2. Equation de mouvement de rotation.....	21
I.8. Dynamique du rotor :	21
I.9. Représentation d'état du système	21
I.10. Conclusion.....	23

Chapitre II : Commande par la technique de backstepping

II.1. Introduction.....	25
II.2. Définition	25
II.2.1. Système non linéaire	25
II.2.4. Stabilité	25
II.3. Méthodes d'analyse de la stabilité de Lyapunov	26
II.3.1. Première méthode de Lyapunov	26
II.3.2. Deuxième méthode de Lyapunov	26
II.3.3.1. Stabilité simple	26
II.3.3.2. Stabilité asymptotique.....	26
II.3.3.3. Stabilité asymptotique locale et globale	26
II.4. Principe de la méthode de backstepping.....	27
II.4.1. Backstepping dans le cas monovariable	27
II.4.2. Backstepping dans le cas multivariable	27
II.5. Application de la technique de Backstepping sur le quadrirotor	33
II.5.1. Contrôleur des angles de rotation	34
II.5.2. Contrôleur de position	36
II.5.3. Contrôleur d'altitude.....	37
II.6. Simulation.....	39
II.7. Résultats et interprétations.....	40
II.8. Conclusion	48

Chapitre III : Commande hybride par retour d'état et backstepping

III.1. Introduction	49
III.2. Retour d'état des systèmes non linéaires.....	50
III.2.1 Principe de commande par retour d'état	50
III.2.2. Notion de commandabilité des systèmes non linéaire.....	51
III.2.2.1. Commandabilité et commandabilité locale	51

III.2.2.2. Commandabilité faible et commandabilité faible locale	51
III.3. Commandabilité au sens du rang.....	52
III.4. Application sur le modèle dynamique du quadrirotor	53
III.4.1. Calcul de la matrice de commandabilité.....	53
III.4.2. Synthèse d'un contrôleur d'état	54
III.5. Synthèse de la loi de commande par backstepping	57
III.6. Contrôleur de backstepping avec incertitudes	57
III.7. Conception de la loi de commande hybride	58
III.8. Simulation.....	58
III.9. Résultats et interprétations.....	59
III.10. Conclusion	63
Conclusion générale	64
Liste des références.....	65

Liste des figures :

Chapitre I

Fonctionnement et modélisation dynamique du quadrirotor

Figure I.1. KetteringBug (à gauche) Aerial Target (à droite)	03
Figure I.2. Avion Voisin BN3	04
Figure I.3. Drone Denny 1 (TDD-1).....	04
Figure I.4. Predator-and-hellfire	04
Figure I.5. Mouvement de translation verticale.....	08
Figure I.6. Mouvement de roulis	09
Figure I.7. Mouvement de tangage.....	09
Figure I.8. Mouvement de lacet.....	09
Figure I.9. Mouvement de translation sur l'axe X.....	10
Figure I.10. Mouvement translation de sur l'axe Y.....	10
Figure I.11. Modèle dynamique de quadrirotor.....	10
Figure I.12. Configuration du quadrirotor	11

Chapitre II

Commande du quadrirotor par la technique de backstepping

Figure II.1. Schéma synoptique de la commande par backstepping	40
Figure II.2. Angle de roulis.....	41
Figure II.3. Angle de tangage.....	41
Figure II.4. Angle de lacet.....	41
Figure II.5. Position selon l'axe X.....	41
Figure II.6. Position selon l'axe Y.....	41
Figure II.7. Position selon l'axe Z.....	42
Figure II.8. Signal de commande U1.....	42
Figure II.9. Signal de commande U2.....	42
Figure II.10. Signal de commande U3.....	42
Figure II.11. Signal de commande U4.....	42

Figure II.12. Angle de roulis.....	43
Figure II.13. Angle de tangage.....	43
Figure II.14. Angle de lacet.....	43
Figure II .15 .Position selon l'axe X.....	44
Figure II.16. Position selon l'axe Y.....	44
Figure II.17. Position selon l'axe Z.....	44
Figure II.18.Signal de commande U1.....	44
Figure II.19. Signal de commande U2.....	44
Figure II.20.Signal de commande U3.....	45
Figure II.21. Signal de commande U4.....	45
Figure II.22. Angle de roulis.....	46
Figure II.23. Angle de tangage.....	46
Figure II.24. Angle de lacet.....	46
Figure II.25. Position selon l'axe X.....	46
Figure II.26. Position selon l'axe Y.....	46
Figure II.27. Position selon l'axe Z.....	47
Figure II.28. Erreur de poursuite selon l'angle de tangage.....	47
Figure II.29. Erreur de poursuite selon l'angle de roulis.....	47
Figure II.30. Erreur de poursuite selon l'angle de lacet.....	47
Figure II.31. Erreur de poursuite selon l'axe X.....	48
Figure II.32. Erreur de poursuite selon l'axe Y.....	48
Figure II.33. Erreur de poursuite selon l'axe Z.....	48
Figure II.34. Trajectoire globale du quadrirotor en 3D.....	48

Chapitre III

Commande hybride par retour d'état et backstepping

Figure III.1. Schéma de commande par retour d'état.....	62
Figure III.2 .Structure de la loi de commande.....	71
Figure III.3. Angle de roulis.....	71
Figure III.4. Angle de tangage.....	71

Figure III.5. Angle de lacet.....	71
Figure III.6. Signal de commande U1	72
Figure III.7. Signal de commande U2	72
Figure III.8. Signal de commande U3	72
Figure III. 9. Signal de commande U4	72
Figure III.10. Position selon l'axe X	73
Figure III.11. Position selon l'axe Y	73
Figure III.12. Position selon l'axe Z.....	73
Figure III.13. Erreur de poursuite sur le roulis.....	73
Figure III.14. Erreur de poursuite sur le tangage.....	73
Figure III.15. Erreur de poursuite sur le lacet	74
Figure III.16. Erreur de poursuite sur l'axe X.....	74
Figure III.17. Erreur de poursuite sur l'axe Y.....	74
Figure III.18. Erreur de poursuite sur l'axe Z	74

Liste des tableaux

Tableau I.1. Recense les différents drones commerciaux et militaires (de Fatima Bento, 2008)	05
Tableau II.1. Paramètres α_i utilisés pour stabiliser le contrôleur de position et altitude...40	
Tableau II.2. Paramètres α_i utilisés pour stabiliser le contrôleur des angles.....40	

Introduction générale

Introduction générale

Les drones ou UAV (Unmanned Aerial Vehicles) sont des engins volants sans pilote capable de mener à bien une mission de façon semi autonome [1] ou en mode téléguidé. Leur utilisation est d'abord militaire pour des missions de reconnaissances ou de surveillance. En effet, ils sont bien adaptés pour des missions dangereuses ou qui nécessitent une permanence sur zone. Des applications civiles font leur apparition comme la surveillance du trafic autoroutier [2].

Le développement de plates formes robotiques volantes connaît un essor croissant depuis quelques années en raison de la miniaturisation plus poussée des capteurs et des actionneurs, mais surtout grâce à la possibilité d'embarquer des cartes de commande plus performantes capables d'exécuter la masse de calcul nécessaire au contrôle des robots volants [3].

Une des raisons expliquant cela est qu'une représentation simple du comportement dynamique complet de l'hélicoptère ou du quadrirotor dans tous ses modes de vol n'existe pas. Ceci est dû au fait que leurs dynamiques complexes résultent principalement de la nature variable des forces aérodynamiques dans les différentes conditions de vol.

Bien que les effets aérodynamiques soient en réalité continus, lorsque l'on passe d'un vol stationnaire à un vol en marche avant, les expressions données dans la littérature sont différentes pour chaque cas.

Le peu de modèles dynamiques proposés ces dernières années souffre d'un problème majeur consistant en la détermination précise des forces aérodynamiques générées par la rotation des pâles [4]. En effet, la plupart des développements théoriques actuels, dans le domaine de la commande des drones à voilures tournantes, essaient de franchir la modélisation explicite de ces effets aérodynamiques et, par conséquent, les lois de commande proposées ne sont pas robustes vis-à-vis du changement des paramètres de vol [5].

Notre objectif principal porte sur la modélisation dynamique et là de la synthèse de lois de commande stabilisantes pour un mini drone de type *quadrirotor*.

Ce mémoire est divisé en trois chapitres organisés de la manière suivante :

✚ Chapitre I: Fonctionnement et modélisation dynamique du quadrirotor

Ce chapitre est consacré à la modélisation dynamique, et notamment au problème du sous actionnement par le calcul des contraintes non holonomes.

✚ Chapitre II: Commande du quadrirotor par la technique de backstepping

Ce chapitre est consacré à la synthèse de loi de commande non linéaire stabilisante par backstepping assurant la poursuite de trajectoires à la présence des perturbations.

✚ Chapitre III: Commande hybride par retour d'état et backstepping

Ce chapitre est consacré à la synthèse d'une loi de commande hybride (retour d'état non linéaire et backstepping) non linéaire stabilisante, assurant la poursuite de trajectoires à la présence des perturbations, et des incertitudes paramétriques.

Et une conclusion générale clôture ce travail. Nous résumons dans cette conclusion, les principaux résultats obtenus et évoquons quelques perspectives.

Chapitre I : Fonctionnement et modélisation dynamique du quadrirotor

I.1. Introduction

Depuis une dizaine d'années, les avancées technologiques ont permis la conception et la construction de mini-avions ou de mini-hélicoptères avec des capacités toujours plus développées pour réaliser des vols autonomes. Ces appareils sont connus sous le nom de drones ou UAV (Unmanned aerial Vehicle).

La recherche dans le domaine des véhicules aériens autonomes est essentiellement pluridisciplinaire. En effet elle fait intervenir des domaines très variés tels que l'aérodynamique, le traitement du signal et de l'image, la commande automatique, la mécanique, etc...

I.2. Un peu d'histoire

La conception des drones a commencé pendant la Première Guerre mondiale : des prototypes ont été proposés, avec des tentatives de « torpilles aériennes » (telle le Kettering Bug) télécommandées par télégraphie sans fil et embarquant un gyroscope, mais qui n'a jamais été opérationnel sur le terrain. En 1916, au Royaume-Uni, fut conçu l'Aerial Target, un projet d'avion-cible, par l'ingénieur Archibald Low.

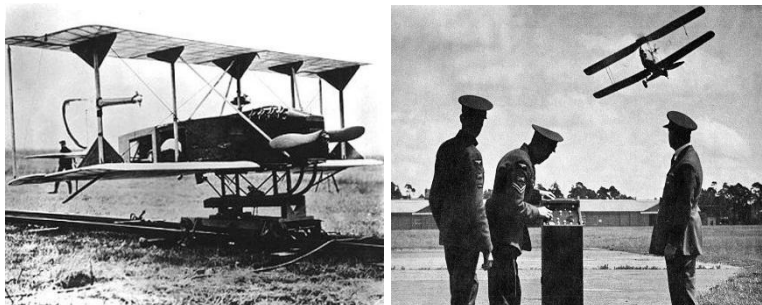


Figure I.1. KetteringBug (à gauche) Aerial Target (à droite)

Le 2 juillet 1917 en France le pilote Max Boucher, fait voler un avion Voisin « sans l'intervention de l'homme » sur 1 km. Au début de l'année 1918, un projet d'« avions sans pilotes » a été lancé. Après l'amélioration du système de pilotage automatique, l'avion Voisin BN3 a volé pendant 51 min sur un parcours de 100 km.

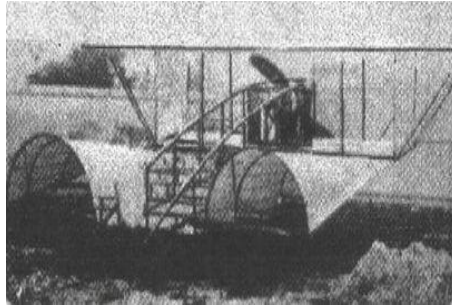


Figure I.2. Avion Voisin BN3

En 1941, l'US Navy passa commande de plus de mille exemplaires d'un nouveau modèle baptisé Target Drone Denny 1 (TDD-1). En 1938 l'armée allemande développa des recherches sur des vecteurs guidés à distance et prenant la forme de bombes planantes antinavires, de bombes antichars radioguidées et surtout de véhicules à chenilles filoguidés.



Figure I.3. Drone Denny 1 (TDD-1)

Dans les années 1990, la doctrine de la guerre « zéro mort » conduit à développer les projets de drones armés à travers le monde mais la toute première utilisation de ceux-ci a eu lieu durant la guerre Iran-Irak où l'Irak a déployé un drone armé de six RPG-7.



Figure I.4. Predator-and-hellfire

Dans les années 2000, le drone est de tous les conflits et opérations de maintien de la paix, dont au Kosovo ou au Tchad, lors des attaques aériennes américaines au Pakistan ou contre la piraterie maritime, par les Américains qui l'ont introduit en 2009 [6].

I.3. Classification des drones

Il existe de nombreux critères pour classer un drone. Ils diffèrent par leur altitude maximale, leur autonomie, leur taille, ou encore leur charge utile.

Le tableau 1.1 recense les différents drones commerciaux et militaires [7].

Catégorie	Acronyme	Poids maximum au décollage (kg)	Altitude de vol maximale (km)	Endurance (h)	Exemple
Drones tactiques	CR	150	3	2 - 4	<i>R-Max</i>
	SR	200	3	3 - 6	<i>Phantom</i>
	MR	150 - 500	3 - 5	6 - 10	<i>Hunter B</i>
	LR	-	5	6 - 13	<i>Vigilante 502</i>
	EN	500 – 1 500	5 - 8	12 - 24	<i>Aerosonde</i>
	MALE	1 000 – 1 500	5 - 8	24 - 48	<i>Predator-IT</i>
Drones Stratégiques	HALE	2 500 – 12 500	15 - 20	24 - 48	<i>Global Hawk</i>
Drones spécialisés	LET	250	3 - 4	3 - 4	<i>Harpy</i>
	DEC	250	0.05 - 5	< 4	<i>Nulka</i>
	STRATO	À déterminer	20 - 30	> 48	<i>Pegasus</i>
	EXO	À déterminer	> 30	À déterminer	<i>MarsFlyer</i>

I.4. Constitution du drone

I.4.1. Les batteries

Le développement des drones connaît un essor croissant depuis quelques années et ce en raison des grands avancements faits dans le domaine des capteurs et des cartes Électroniques qui sont de plus en plus légers et performants, mais aussi le développement des batteries qui a permis de réduire considérablement le poids de celle-ci pour une autonomie plus importante.

I.4.2. Les propulseurs

Les propulseurs du drone XSF sont composés d'un moteur à courant continu de type Brushless, un variateur et une hélice. Ils représentent le cœur même du drone XSF et leur consommation dépend de l'autonomie de vol du XSF.

I.4.2.1. Les hélices

Le drone XSF fonctionne avec le même principe que les hélicoptères, ceci implique que les hélices des propulseurs doivent supporter tout le poids du drone et ainsi être capable de produire la poussée nécessaire au fonctionnement du drone. Le XSF a un poids estimé à 2 kg, en répartissant les efforts sur l'ensemble des quatre propulseurs, chaque hélice doit être capable de produire une poussée de 4.9 N à l'équilibre.

I.4.2.2. Le moteur électrique

Le choix pour la motorisation des propulseurs du XSF, porte sur l'utilisation de moteur électrique de type brushless. Ce choix s'explique par le meilleur rapport puissance /poids que présente ce genre de moteur. Par ailleurs, le choix de ce moteur électrique s'inscrit dans la volonté de rendre le XSF silencieux ce qui est un énorme atout pour le genre de mission qu'il a à accomplir.

I.4.3. Les capteurs

Ces dernières années, une grande variété de systèmes capables de produire des mesures tridimensionnelles ont été développés pour permettre de réaliser une loi de commande pour un vol autonome d'un drone. Pour cela, il faut avoir toutes les mesures nécessaires (position, orientation, vitesse, accélération, ...) et en temps réel. Ces mesures, dans notre cas, sont délivrées par la centrale inertielle et les capteurs ultrasons ainsi que d'autres capteurs.

I.4.3.1. Les capteurs à ultrason

Le capteur à ultrasons est un capteur télémétrique composé d'un émetteur, un récepteur et d'un microcontrôleur PIC. Il sert à mesurer la distance qui le sépare d'un obstacle se situant devant lui. L'inconvénient de ces capteurs c'est qu'on ne connaît pas par le premier obstacle qui va être touché par l'onde émise, ou bien, durant le mouvement de l'objet, l'onde peut tomber sur des obstacles différents à chaque instant et à des distances différentes.

I.4.3.2. La centrale inertielle

La centrale inertielle est un capteur qui permet de mesurer en temps réel les mouvements (accélération, vitesse angulaire). Conçue à partir des nouvelles micro technologies, la centrale regroupe un ensemble intégré de trois gyroscopes, trois

magnétomètres et trois accéléromètres formant un trièdre les données fournies par les différents capteurs qui composent la centrale inertielle sont exprimée dans un trièdre direct.

I.4.3.3. La carte intelligente

La carte intelligente est l'élément principale dans drone. Cette carte doit gérer l'ensemble des capteurs montés sur le drone (sauf la caméra, les images sont transmises directement sur la base au sol).

I.4.3.4. Localisation par le GPS

Le GPS peut se traduire par le système de positionnement général, c'est un système de positionnement par satellites. Actuellement, en utilisant certaines technique particulière, la précision peut atteindre le mètre, mais dans son utilisation basique, elle est l'ordre de 50 mètres lorsqu'il n'y a aucun filtrage.

I.4.3.5. La caméra

Le choix d'une caméra est complexe, puisqu'il dépend de l'application même parce que le marché offre de multiples options, solutions et marques toutes différents. Dans le domaine de la robotique mobile terrestre, ce procédé est déjà largement exploité avec notamment l'emploi d'omni caméras. Toutefois, dans genre d'application, la précision des données n'est pas particulièrement critique. Dans le domaine aérien, cela est beaucoup plus problématique. En effet, de la qualité des données dépend la stabilité de l'objet volant. il existe deux catégories de cameras (caméra numérique, caméra analogique).

I.5. Les mouvements du quadrirotor

Pour réaliser les six mouvements du quadrirotor nous n'avons à notre disposition que quatre actionneurs, par conséquent les mouvements de l'appareil sont couplés ce qui signifie que nous ne pouvant pas effectuer un des mouvements sans en impliquer d'autres. Par exemple en réduisant la vitesse du rotor droit, le quadrirotor s'incline de ce côté et l'équilibre entre les rotors qui tourne dans le sens des aiguilles d'une montre et les rotors qui tourne dans le sens inverse est perturbé, ce qui implique deux mouvements de rotation appelés roulis et lacet. Le mouvement de rotation de roulis implique un mouvement de translation sur l'axe Y. C'est cette particularité qui permet de commander le quadrirotor sur six degrés de libertés avec seulement quatre actionneurs [8].

Ainsi le quadrirotor a les six mouvements suivants :

Mouvement vertical

Rotation de roulis

Rotation de tangage

Rotation de lacet

Translations sur l'axe X

Translations sur l'axe Y

I.5.1. Mouvement vertical

La force combinée des quatre rotors, projetés sur l'axe Z, s'oppose à la force de pesanteur. C'est la somme de ces deux forces qui détermine si le quadrirotor s'élève ou descend, si la force exercée par les rotors est supérieure à la force de pesanteur alors l'appareil s'élève sinon l'appareil descend, si ces deux forces sont d'intensité égale alors le quadrirotor planera.

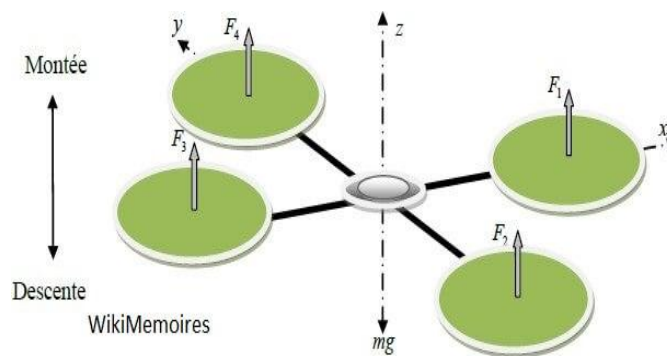


Figure I.5. Mouvement de translation verticale

I.5.2. Rotation de roulis

Le mouvement de roulis est obtenu en appliquant une différence de poussée entre le rotor 2 et 4, ce qui implique une rotation autour de l'axe X couplé à une translation sur l'axe Y. Si le changement de poussée est appliqué sur un seul rotor alors l'équilibre général des rotors est rompu et l'appareil effectue une rotation sur l'axe Z (Lacet).

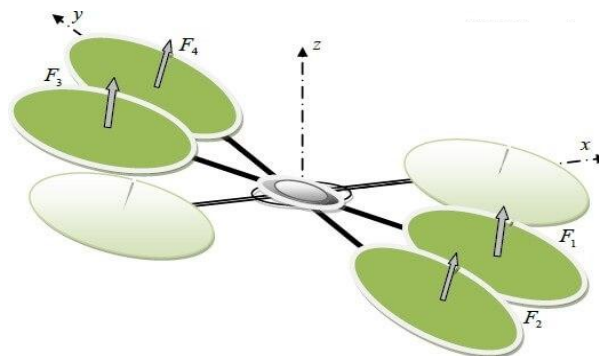


Figure I.6. Mouvement de roulis

I.5.3. Rotation de tangage

Le mouvement de Tangage est obtenu en appliquant une différence de poussée entre le rotor 1 et 3, ce qui implique une rotation autour de l'axe Y couplé à une

translation sur l'axe X. Si le changement de poussée est appliqué sur un seul rotor alors l'équilibre générale des rotors est rompu et l'appareil effectue une rotation sur l'axe Z (Lacet).

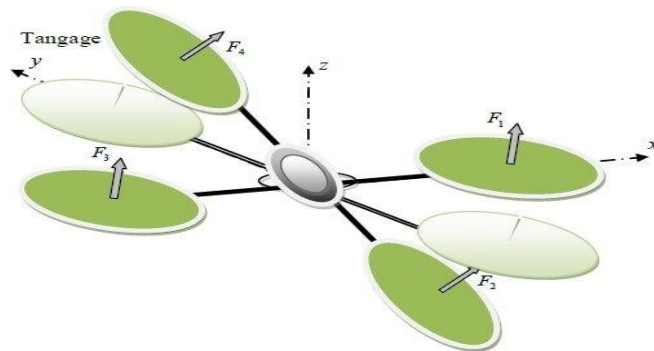


Figure I.7. Mouvement de tangage

I.5.4. Rotation de lacet

Pour réaliser ce mouvement, il est nécessaire d'appliquer un couple autour de l'axe Z, pour ce faire, il suffit d'appliquer une différence de vitesse entre les rotors (1-3) et les rotors (2-4). Pour ne pas coupler ce mouvement de rotation avec les autres mouvements de rotation, il est nécessaire que les vitesses des paires de rotors sur le même bras soient égales. Et pour garder la force de poussée constante, il est indispensable que l'augmentation de la vitesse de rotation sur une paire de rotors soit égale à la diminution de la vitesse de rotation sur l'autre paire.

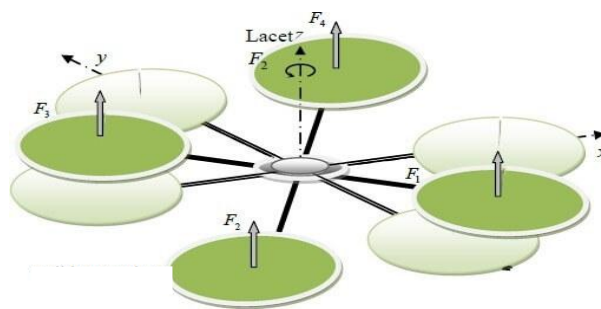


Figure I.8. Mouvement de lacet

I.5.5. Translations sur l'axe X

Pour réaliser une translation sur l'axe X, nous devons réaliser une rotation autour de l'axe Y comme expliqué précédemment tout en respectant les conditions nécessaires pour ne pas avoir de rotation de Lacet.

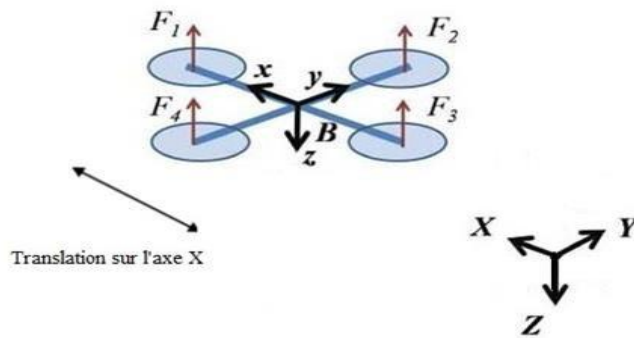


Figure I.9. Mouvement de translation sur l'axe X

I.5.6. Translations sur l'axe Y

Pour réaliser une translation sur l'axe Y, nous devons réaliser une rotation autour de l'axe X tout en respectant les conditions citées précédemment pour ne pas avoir de rotation de Lacet [9].

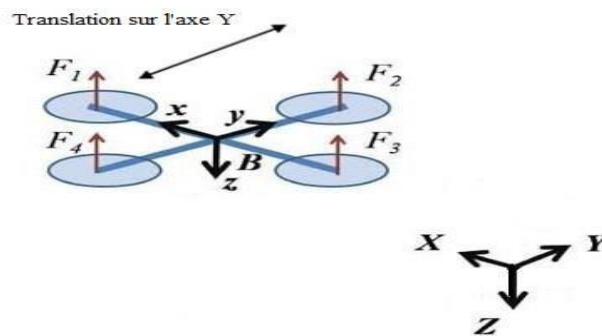


Figure I.10. Mouvement translation de sur l'axe Y

I.6. Modèle dynamique d'un quadrirotor

Le modèle dynamique du quadrirotor peut être vu comme un système où les évolutions spatiales du quadrirotor sont les sorties et la tension de chacun de ses moteurs sont les entrées [10].



Figure I.11. Le modèle dynamique de quadrirotor

- La structure du quadrirotor est supposée rigide et symétrique (c.-à-d. sa matrice d'inertie est diagonale).
- Le centre de masse et l'origine du repère lié à la structure coïncident.
- Les hélices sont supposées rigides.
- Les forces de portance et de traînée sont proportionnelles aux carrés de la vitesse de rotation des rotors.

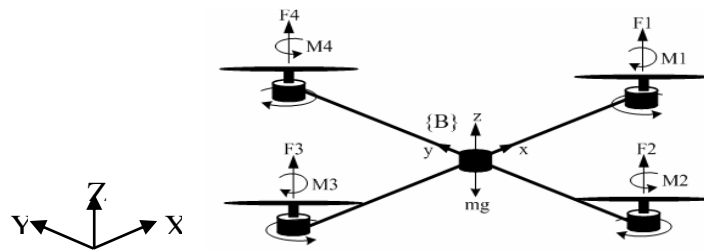


Figure I.12. Configuration du quadrirotor

Pour étudier le mouvement du quadrirotor, nous utilisons deux repères (Figure I.7) : le repère absolu ou Galiléen (ou fixe) $E (X, Y, Z)$ et le repère $B (x, y, z)$ lié au corps du quadrirotor.

La matrice de transformation T qui englobe le mouvement de rotation ainsi que celui de translation est donnée par :

$$T = \begin{bmatrix} R & \zeta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.1})$$

R : est la matrice de rotation

ζ : est le vecteur de position, il est donné par : $\zeta = [x \quad y \quad z]^T$

La détermination de la matrice de rotation sera effectuée en utilisant la méthode des angles d'Euler.

I.6.1. Les angles d'Euler

Le mouvement d'un solide par rapport à un référentiel fait intervenir six coordonnées, qui sont, les trois coordonnées décrivant la position de son centre de masse et trois angles, nommés les angles d'Euler.

- **L'angle ψ** : il caractérise la première rotation autour de l'axe (OZ). Cette rotation est appelée le lacet et également la précession.
- **L'angle θ** : il caractérise la seconde rotation autour de l'axe (OY) nouvellement créé. Cette rotation est appelée le tangage.
- **L'angle ϕ** : il caractérise la dernière rotation autour de l'axe (OX) créé suite aux deux premières rotations. Cet angle représente la rotation propre du solide et est également appelée l'angle de roulis.

On s'intéresse seulement ici à la description du mouvement du quadrirotor en rotation autour du point O, qui est un point fixe dans le référentiel de référence O_{XYZ} ou le centre de masse.

On considère au début que le repère mobile coïncide avec le repère fixe, après le repère mobile fait une rotation autour de l'axe X avec un angle ϕ suivi d'une rotation autour de l'axe Y avec un angle θ , suivi d'une Rotation selon l'axe Z avec un angle ψ .

La formule de la matrice de rotation reliant le repère lié au solide au repère inertiel est obtenue en multipliant les trois matrices de rotation par rapport à chaque axe :

$$R = Rot_z(\psi) \times Rot_y(\theta) \times Rot_x(\phi) \quad (I.2)$$

Après calcul, la matrice de rotation obtenue, est donnée par la formule suivante :

$$R = \begin{pmatrix} C\theta C\psi & S\theta S\phi C\psi - S\psi C\phi & S\theta C\phi C\psi + S\psi S\phi \\ C\theta S\psi & S\theta S\phi S\psi + C\psi C\phi & S\theta C\phi S\psi - C\psi S\phi \\ -S\theta & S\phi C\theta & C\phi C\theta \end{pmatrix} \quad (I.3)$$

La matrice de transformation globale qui décrit les mouvements du quadrirotor est donnée par la formule suivante :

$$T = \begin{pmatrix} C\theta C\psi & S\theta S\phi C\psi - S\psi C\phi & S\theta C\phi C\psi + S\psi S\phi & x \\ C\theta S\psi & S\theta S\phi S\psi + C\psi C\phi & S\theta C\phi S\psi - C\psi S\phi & y \\ -S\theta & S\phi C\theta & C\phi C\theta & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (I.4)$$

Où **C** et **S** désignent les fonctions trigonométriques **Cos** et **Sin** respectivement.

I.6.2. Les vitesses de rotation

On considère que la vitesse de rotation initiale du quadrirotor est nulle $\Omega_{initiale} = [0 \ 0 \ 0]^T$.

Après, le quadrirotor trois mouvements de rotation selon X, Y et Z avec les angles ϕ , θ et ψ respectivement.

Les vitesses de rotations $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ dans le repère fixe sont exprimées en fonction des vitesses de rotation $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ dans le repère mobile.

Nous avons maintenant calculé la vitesse angulaire du quadrirotor, après chaque mouvement.

❖ *Mouvement de rotation selon l'axe X*

L'expression de la vitesse angulaire est la suivante :

$$\begin{aligned}\Omega &= Rot_x(X, \phi)\Omega_{initiale} + \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= [\dot{\phi} \ 0 \ 0]^T\end{aligned}\tag{I.5}$$

❖ *Mouvement de rotation selon l'axe Y*

L'expression de la vitesse angulaire devient :

$$\begin{aligned}\Omega &= Rot_y(Y, \phi)\Omega_{précédente} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= [\dot{\phi} \ C\phi\dot{\theta} \ -S\phi\dot{\theta}]^T\end{aligned}\tag{I.6}$$

❖ *Mouvement de rotation selon l'axe Z*

L'expression de la vitesse angulaire devienne donc :

$$\begin{aligned}\Omega &= Rot_z(Z, \psi)\Omega_{précédente} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\phi} - S\theta\dot{\psi} \\ C\phi\dot{\theta} - S\phi C\theta\dot{\psi} \\ C\phi S\theta\dot{\psi} - S\phi\dot{\theta} \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{I.7}$$

Alors, la vitesse angulaire du quadrirotor exprimé dans le repère inertiel est désignée par le vecteur suivant :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \sin \theta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (\text{I.8})$$

Dans le cas où le quadrirotor réalise des mouvements angulaires de faibles amplitudes, le vecteur Ω peut être assimilé à $\begin{bmatrix} \dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{bmatrix}^T$.

I.6.3. Les vitesses linéaires

Les Vitesses linéaires v_x^f, v_y^f, v_z^f dans le repère fixe en fonction des vitesses linéaires dans le repère mobile v_x^m, v_y^m, v_z^m sont donnée par :

$$v = \begin{bmatrix} v_x^f \\ v_y^f \\ v_z^f \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} v_x^m \\ v_y^m \\ v_z^m \end{bmatrix} \quad (\text{I.9})$$

I.6.4. Les effets physiques agissant sur le quadrirotor

I.6.4.1. Les forces

Le quadrirotor est soumis sous l'effet de plusieurs forces, parmi les on trouve :

I.6.4.1.1. Le poids du quadrirotor

La force dû au poids du quadrirotor est donné par : $P = mg$

Où :

m : est la masse totale du quadrirotor.

g : représente la gravité.

I.6.4.1.2. Les forces de poussées

En aérodynamique, la poussée est la force exercée par le déplacement de l'air brassé par un moteur, dans le sens inverse de l'avancement.

En autre terme, La poussée ou plus exactement la force de poussée est une force provoquée par la rotation des moteurs, elle est agie sur une direction perpendiculaire sur le plan des hélices. Ces forces sont proportionnelles au carrée de la vitesse de rotation des moteurs :

$$F_i = b\omega_i^2 \quad i=1:4$$

b :est le coefficient de portance, il dépend de la forme et le nombre des pales et la densité de l'air.

I.6.4.1.3. Les forces de traînée

La force de traînée est une force résistante qui s'oppose au mouvement de l'aile dans l'air. Elle est agie sur une direction parallèle sur le plan des hélices.

Autrement dit, la force de traînée est le couplage entre la force de pression et la force de frottement visqueux, dans ce cas on a deux forces de la traînée agissant sur le système qu'elles sont :

- ❖ **La traînée dans les hélices** : elle agisse sur les pales, elle est proportionnelle à la densité de l'air, à la forme des pales et au carrée de la vitesse de rotation de l'hélice, elle est donnée par la relation suivante :

$$T_h = d\omega^2 \quad (\text{I.10})$$

Avec : d est le coefficient de drag il dépend de la fabrication de l'hélice.

- ❖ **La traînée selon les axes (x, y, z)** : elle est due au mouvement du corps du quadrirotor.

$$F_t = K_{ft}v \quad (\text{I.11})$$

Avec : K_{ft} le coefficient de traînée de translation et v la vitesse linéaire.

I.6.4.2. Les moments

Les moments agissants sur le quadrirotor sont dus aux forces de poussée et de traînée et aux effets gyroscopiques. De ce fait, on peut distinguer plusieurs moments, entre autres nous avons :

I.6.4.2.1. Moments dus aux forces de poussée

Tout dépend l'axe autour duquel le quadrirotor fait la rotation (X ou Y), on distingue les deux moments suivants :

- ❖ La rotation autour de l'axe X avec un angle ϕ est due à la différence entre les forces de portance des rotors 2 et 4, ce moment est donné par la relation suivante :

$$M_x = l(F_4 - F_2) = ld(\omega_4^2 - \omega_2^2) \quad (\text{I.12})$$

Avec :

l :est la longueur du bras entre le rotor et le centre de gravité du quadrirotor.

D'après cette relation, si ω_4 est supérieure à ω_2 , la rotation est dans le sens positif, sinon la rotation est dans le sens négatif.

- ❖ La rotation autour de l'axe Y avec un angle θ est due à la différence entre les forces de portance des rotors 1 et 3, ce moment est donné par la relation suivante :

$$M_Y = l(F_3 - F_1) = ld(\omega_3^2 - \omega_1^2) \quad (\text{I.13})$$

D'après cette relation, si ω_3 est supérieure à ω_1 , la rotation est dans le sens positif, sinon la rotation est dans le sens négatif.

I.6.4.2.2. Moments dus aux forces de traînée

On distingue deux moments :

- ❖ La rotation autour de l'axe Z avec un angle ψ elle est due à un couple réactif provoqué

Par les couples de traînée dans chaque hélice, ce moment est donné par la relation suivante :

$$M_Z = d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \quad (\text{I.14})$$

D'après cette formule, l'augmentation de ω_1 et ω_3 par rapport à ω_2 et ω_4 , donne un mouvement de rotation positif. Dans le cas contraire, on obtient un mouvement de rotation négatif.

- ❖ Le moment résultant des frottements aérodynamiques, est donné par :

$$\Gamma_a = K_{fa} \Omega^2 \quad (\text{I.15})$$

Avec :

K_{fa} : le coefficient des frottements aérodynamiques et Ω est la vitesse angulaire.

I.7. Application du formalisme de newton-Euler sur le modèle mathématique du quadrirotor

En utilisant le formalisme de Newton Euler, les équations de la dynamique s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = v \\ m\ddot{\xi} = F_f + F_t + F_g \\ \dot{R} = RS(\Omega) \\ J\dot{\Omega} = -\Omega \wedge J\Omega + \Gamma_f - \Gamma_a - \Gamma_g \end{cases} \quad (\text{I.16})$$

ξ : représente la position du centre de masse du quadrirotor par rapport au repère inertiel (le repère lié à la terre).

m : est la masse totale du quadrirotor.

J : est une matrice de dimension (3x3), représente l'inertie du quadrirotor, elle est donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \quad (\text{I.17})$$

Ω : est vecteur qui désigne la vitesse angulaire du quadrirotor exprimé dans le repère inertiel tel que :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \sin \theta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (\text{I.18})$$

Dans le cas où le quadrirotor réalise des mouvements angulaires de faibles amplitudes, le vecteur Ω peut être assimilé à $[\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$

R : est la matrice de transformation homogène reliant le repère lié au solide au repère inertiel.

$S(\Omega)$: est la matrice antisymétrique. Pour un vecteur de vitesse donné $\Omega = [\Omega_1 \ \Omega_2 \ \Omega_3]^T$, elle est définie comme suit :

$$S(\Omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.19})$$

F_f : est la résultante des forces de poussée générées par les quatre rotors, elle est donnée par :

$$F_f = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi \sin \theta + \sin \phi \sin \psi \\ \cos \phi \sin \psi \sin \theta - \sin \phi \cos \psi \\ \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \sum_{i=1}^4 F_i \quad (\text{I.20})$$

$$F_i = K_p \omega_i^2 \quad (\text{I.21})$$

Où :

K_p : désigne le coefficient de portance.

ω_i : la vitesse angulaire du rotor en question.

F_t : est la résultante des forces de traînée selon (X, Y, Z).

$$F_t = \begin{pmatrix} -K_{f_{tx}} & 0 & 0 \\ 0 & -K_{f_{ty}} & 0 \\ 0 & 0 & -K_{f_{tz}} \end{pmatrix} \dot{\xi} \quad (\text{I.22})$$

$K_{f_{tx}}$, $K_{f_{ty}}$ et $K_{f_{tz}}$: Sont les coefficients des forces de traînées selon les trois axes.

F_g : est la force qui regroupe les forces liées à la gravité, elle est donnée par :

$$F_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \quad (\text{I.23})$$

Γ_f : représente le vecteur résultant des moments appliqués sur la structure du quadrirotor.

$$\Gamma_f = \begin{bmatrix} d(F_3 - F_1) \\ d(F_3 - F_1) \\ K_d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \end{bmatrix} \quad (\text{I.24})$$

D : est la distance entre le centre de masse du quadrirotor et l'axe de rotation du rotor

K_d : est le coefficient de traînée.

Γ_a : est le vecteur résultant des frottements dus aux couples aérodynamiques, il est donné

par :

$$\Gamma_a = \begin{pmatrix} K_{f_{ax}} & 0 & 0 \\ 0 & K_{f_{ay}} & 0 \\ 0 & 0 & K_{f_{az}} \end{pmatrix} \Omega^2$$

$$= \begin{pmatrix} K_{f_{ax}} \dot{\phi}^2 \\ K_{f_{ay}} \dot{\theta}^2 \\ K_{f_{az}} \dot{\psi}^2 \end{pmatrix} \quad (\text{I.25})$$

Avec :

$K_{f_{ax}}$, $K_{f_{ay}}$ et $K_{f_{az}}$: Sont les coefficients des frottements aérodynamiques selon les trois axes.

Γ_g : représente l'ensemble des couples dus aux effets gyroscopiques, il est donné par :

$$\Gamma_g = \sum_{i=1}^4 \Omega \wedge J_r \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (-1)^{i+1} \omega_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_r \Omega_r \theta \\ -J_r \Omega_r \dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.26})$$

Tel que :

J_r et ω_i : représentent l'inertie et la vitesse de rotation du rotor en question.

I.7.1. Equation de mouvement de translation

Nous avons :

$$m\ddot{\xi} = F_f + F_t + F_g \quad (\text{I.27})$$

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \psi \sin \theta + \sin \phi \sin \psi \\ \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \\ \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \sum_{i=1}^4 F_i - \begin{bmatrix} K_{f_{tx}} \dot{x} \\ K_{f_{ty}} \dot{y} \\ K_{f_{tz}} \dot{z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \quad (\text{I.28})$$

On obtient alors le modèle dynamique de translation, régit par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{m} \{ (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) U_1 - K_{f_{tx}} \dot{x} \} \\ \ddot{y} = \frac{1}{m} \{ (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) U_1 - K_{f_{ty}} \dot{y} \} \\ \ddot{z} = \frac{1}{m} \{ (\cos \phi \cos \theta) U_1 - K_{f_{tz}} \dot{z} \} - g \end{cases} \quad (\text{I.29})$$

I.7.2. Equation de mouvement de rotation

On suppose que les perturbations de vol sont très petites, alors le vecteur Ω sera donnée par :

$$\Omega = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

On a :

$$J\dot{\Omega} = -\Omega \wedge J\Omega + \Gamma_f - \Gamma_a - \Gamma_g \quad (\text{I.30})$$

En remplaçant par les équations, nous trouvons :

$$\begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \wedge \left(\begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \right) - \begin{pmatrix} K_{fax} \dot{\phi}^2 \\ K_{fay} \dot{\theta}^2 \\ K_{faz} \dot{\psi}^2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} d(F_3 - F_1) \\ d(F_3 - F_1) \\ K_d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_r \Omega_r \theta \\ -J_r \Omega_r \dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.31})$$

On obtient alors le modèle dynamique de rotation, régit par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \frac{1}{I_x} \{ \dot{\theta} \dot{\psi} (I_y - I_z) - K_{fax} \dot{\phi}^2 - J_r \overline{\Omega} \dot{\theta} + dU_2 \} \\ \ddot{\theta} = \frac{1}{I_y} \{ \dot{\phi} \dot{\psi} (I_z - I_x) - K_{fay} \dot{\theta}^2 - J_r \overline{\Omega} \dot{\phi} + dU_3 \} \\ \ddot{\psi} = \frac{1}{I_z} \{ \dot{\theta} \dot{\phi} (I_x - I_y) - K_{faz} \dot{\psi}^2 + K_d U_4 \} \end{cases} \quad (\text{I.32})$$

En conséquence, le modèle dynamique complet du quadrirotor est défini comme suit :

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \frac{1}{I_x} \{ \dot{\theta} \dot{\psi} (I_y - I_z) - K_{fax} \dot{\phi}^2 - J_r \overline{\Omega} \dot{\theta} + dU_2 \} \\ \ddot{\theta} = \frac{1}{I_y} \{ \dot{\phi} \dot{\psi} (I_z - I_x) - K_{fay} \dot{\theta}^2 - J_r \overline{\Omega} \dot{\phi} + dU_3 \} \\ \ddot{\psi} = \frac{1}{I_z} \{ \dot{\theta} \dot{\phi} (I_x - I_y) - K_{faz} \dot{\psi}^2 + K_d U_4 \} \\ \ddot{x} = \frac{1}{m} \{ (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) U_1 - K_{fxx} \dot{x} \} \\ \ddot{y} = \frac{1}{m} \{ (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) U_1 - K_{fyy} \dot{y} \} \\ \ddot{z} = \frac{1}{m} \{ (\cos \phi \cos \theta) U_1 - K_{fzz} \dot{z} \} - g \end{cases} \quad (\text{I.33})$$

A signaler que U_1, U_2, U_3 et U_4 sont les entrées de commande du système et qui s'écrivent en fonction des vitesses angulaires des quatre rotors comme suit :

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} K_p & K_p & K_p & K_p \\ -K_p & 0 & K_p & 0 \\ 0 & -K_p & 0 & K_p \\ K_d & -K_d & K_d & K_d \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix} \quad (\text{I.34})$$

Et :

$$\bar{\Omega} = (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \quad (\text{I.35})$$

I.8. La dynamique du rotor

Le rotor est un ensemble constitué d'un moteur à courant continu entraînant une hélice via un réducteur ; le moteur à courant continu est régi par les équations dynamiques suivantes :

$$\begin{cases} V = ri + L \frac{di}{dt} + k_e \omega \\ K_m i = J_r \frac{d\omega}{dt} + C_s + k_r \omega^2 \end{cases} \quad (\text{I.36})$$

Les différents paramètres du moteur sont définis comme suit :

V : est la tension d'entrée du moteur.

ω_i : est la vitesse angulaire du rotor.

k_e, k_m : représentent les constantes des couples électrique et mécanique respectivement.

k_r : Est la constante du couple de charge.

r : désigne la résistance du moteur.

J_r : désigne l'inertie du rotor.

C_s : représente le frottement sec.

Ainsi ; le modèle choisit pour le rotor est le suivant :

$$\dot{\omega}_i = bV_i - \beta_0 - \beta_1 \omega_i - \beta_2 \omega_i^2 \quad (\text{I.37})$$

$$i \in [1, 4]$$

Avec :

$$\beta_0 = \frac{C_s}{J_r}, \beta_1 = \frac{k_e k_m}{r J_r}, \beta_2 = \frac{k_r}{J_r}, \text{ et } b = \frac{k_m}{r J_r} \quad (\text{I.38})$$

I.9. La représentation d'état du système

Pour un système physique, la représentation d'état n'est pas unique, il existe une multitude de représentations, pour se faire, il faut choisir des variables d'état. Les variables d'état du quadrirotor sont choisies afin de le stabiliser en rotation ainsi qu'en translation.

En considérant le vecteur d'état suivant :

$$X = [\phi \ \dot{\phi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi} \ x \ \dot{x} \ y \ \dot{y} \ z \ \dot{z}]^T \quad (\text{I.39})$$

$$= [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}]^T$$

Nous obtenons les équations d'état sous forme canonique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a_1 x_4 x_6 + a_2 x_2^2 + a_3 x_4 \bar{\Omega} + b_1 U_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = a_4 x_2 x_6 + a_5 x_4^2 + a_6 x_2 \bar{\Omega} + b_2 U_3 \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = a_7 x_2 x_4 + a_8 x_6^2 + b_3 U_4 \\ \dot{x}_7 = x_8 \\ \dot{x}_8 = a_9 x_8 + \frac{1}{m} U_x U_1 \\ \dot{x}_9 = x_{10} \\ \dot{x}_{10} = a_{10} x_{10} + \frac{1}{m} U_y U_1 \\ \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = a_{11} x_{12} + \frac{1}{m} U_z U_1 - g \end{array} \right. \quad (\text{I.40})$$

Ces équations peuvent être réécrites dans l'espace d'état sous la forme suivante :

$$\dot{x} = F(x) + G(x, U) \quad (\text{I.41})$$

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ a_1 x_4 x_6 + a_2 x_2^2 + a_3 x_4 \bar{\Omega} \\ x_4 \\ a_4 x_2 x_6 + a_5 x_4^2 + a_6 x_2 \bar{\Omega} \\ x_6 \\ a_7 x_2 x_4 + a_8 x_6^2 \\ x_8 \\ a_9 x_8 \\ x_{10} \\ a_{10} x_{10} \\ x_{12} \\ a_{11} x_{12} - g \end{pmatrix}, \text{ et } G(x, U) = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 U_2 \\ 0 \\ b_2 U_3 \\ 0 \\ b_3 U_4 \\ 0 \\ \frac{1}{m} U_x U_1 \\ 0 \\ \frac{1}{m} U_y U_1 \\ 0 \\ \frac{1}{m} U_z U_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} U_x = \cos x_1 \sin x_3 \cos x_5 + \sin x_1 \sin x_5 \\ U_y = \cos x_1 \sin x_3 \sin x_5 - \sin x_1 \cos x_5 \\ U_z = \cos x_1 \cos x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = \left(\frac{I_y - I_z}{I_x} \right), a_2 = \frac{-K_{fax}}{I_x}, a_3 = \frac{-J_r}{I_x} \\ a_4 = \left(\frac{I_z - I_x}{I_y} \right), a_5 = \frac{-K_{fay}}{I_y}, a_6 = \frac{-J_r}{I_y} \\ a_7 = \left(\frac{I_x - I_y}{I_z} \right), a_8 = \frac{-K_{faz}}{I_x}, a_9 = \frac{-K_{fix}}{m} \\ a_{10} = \frac{-K_{fyz}}{m}, a_{11} = \frac{-K_{fzx}}{m} \\ b_1 = \frac{d}{I_x}, b_2 = \frac{d}{I_y}, b_3 = \frac{1}{I_z} \end{cases} \quad (\text{I.42})$$

I.10. Conclusion

Dans ce chapitre, Nous avons essayé d'éclaircir la notion d'un quadrirotor, en donnant des concepts préliminaires et des généralités sur sa dynamique et son principe de fonctionnement.

Ensuite, nous avons présenté le modèle dynamique complet du quadrirotor en utilisant le formalisme de Newton-Euler, prenant en compte tous les effets agissant sur son comportement.

Ce modèle est plus réaliste car il introduit des coefficients aérodynamiques variables. A partir de ce modèle nous avons montré que le quadrirotor est un système complexe, non linéaire, fortement couplé (ce que l'on peut conclure à travers les interactions entre ses états), et sous-actionné parce qu'il a six sorties alors qu'elle n'a que quatre entrées. De plus, la dynamique des moteurs a été présentée.

Enfin pour stabiliser ce système dans le chapitre qui suit, nous allons présenter une loi de commande basée sur la technique de backstepping.

Chapitre II : Commande par la technique de backstepping

II.1. Introduction

Durant ces dernières années, une grande partie de la communauté s'est intéressée à la recherche de procédures récursives pour la mise au point de lois de commande pour les systèmes non linéaires, comme par exemple le backstepping ou le forwarding, et un certain nombre d'ouvrages traitant de cette nouvelle approche théorique sont apparus (Krstic *et al.*, 1995 ; Freeman and Kokotovic, 1996 ; Khalil, 1996 ; Sepulchre *et al.*, 1997).

Des applications à des procédés sont aussi été présentées dans la littérature (Mascolo and Grassi, 2000). Ces techniques maintenant relativement connues sont essentiellement basées sur l'utilisation de fonctions de Lyapunov pour ce qui est de l'étude de la stabilité [11].

Dans ce chapitre, nous allons donner quelques notions sur le système non linéaire ainsi que la stabilité avant de présenter le développement analytique détaillé de la loi de commande basée sur la technique de backstepping.

Ensuite, nous allons étudier comment utiliser la technique de backstepping pour tester de la stabilité puis le suivi de trajectoire du quadrirotor.

II.2. Définition

II.2.1. Système non linéaire

De façon générale, les systèmes physiques représentés par des équations différentielles linéaires à coefficients constants sont appelés systèmes linéaires. L'hypothèse de linéarité équivaut au principe de superposition. Les systèmes non linéaires, par opposition aux systèmes linéaires, sont des systèmes physiques qui ne sont pas régis par des équations linéaires. Autrement dit, le principe de superposition ne peut pas leur être appliqué [12].

Les systèmes non linéaires peuvent être le lieu de plusieurs phénomènes, par exemple ils peuvent converger en régime permanent, à différents points d'équilibre, contrairement aux systèmes linéaires, qui n'ont souvent qu'un seul.

II.2.2. Stabilité

De façon générale, on dit qu'un système est stable si, déplacé de sa position d'équilibre, il tend à y revenir ; instable, s'il tend à s'en écarter d'avantage [13].

II.3. Méthodes d'analyse de la stabilité de Lyapunov

Il y a deux approches possibles pour la commande d'un système non linéaire. La première vise à linéariser le système à commander, afin de profiter des techniques des modèles linéaires. Cette linéarisation est réalisée, moyennant des approximations géométriques dans l'espace de phase. Le système linéarisé est ensuite traité avec la théorie des systèmes linéaires.

La deuxième approche consiste à trouver une Fonction de Commande de Lyapunov garantissant certaines performances pour le système en boucle fermée. De telles fonctions peuvent être très difficiles à trouver pour un système non linéaire d'ordre élevé. C'est là qu'entre en jeu la technique du backstepping qui permet de réduire cette complexité. Toutefois, avant d'introduire le backstepping, les deux méthodes d'analyse des systèmes non linéaires, fournies par Lyapunov, vont être brièvement décrites.

II.3.1. Première méthode de Lyapunov

Le théorème de stabilité locale de Lyapunov, connu sous le nom de première méthode, permet de se prononcer sur la linéarisation d'une dynamique autour d'un point d'équilibre. Cette méthode apporte validité théorique à la technique de linéarisation.

Elle mentionne que si le système linéarisé est asymptotiquement stable, alors il y a stabilité asymptotique. Dans le cas où le système linéarisé est instable, il y a instabilité. Par contre si celui-ci est stable sans pour autant l'être asymptotiquement, alors il est impossible de se prononcer sur la stabilité. Ce théorème est d'une importance limitée, car il ne permet d'étudier que la stabilité d'un point singulier (stabilité locale) et ne donne aucune information sur le domaine de stabilité (stabilité globale) [14].

II.3.2. Deuxième méthode de Lyapunov

Cette méthode est basée sur le concept d'énergie dans un système. Pour un système physique, l'énergie est une fonction définie positive de son état. Dans un système conservatif, l'énergie reste constante ; pour un système dissipatif, elle décroît. Pour ces deux cas le système est stable. Si l'énergie croît, le système est instable.

II.3.3.3. Stabilité asymptotique locale et globale

Si la stabilité asymptotique est vérifiée pour les conditions initiales, on a alors une stabilité asymptotique globale du point $x = 0$. Si ce n'est pas le cas, on a alors une stabilité asymptotique locale.

➤ Théorème

1- S'il existe une fonction $V(x)$ ayant sa première dérivée partielle continue tel que :

- $V(x)$ Est définie positive (localement dans l'ensemble $B_R = \{X / \|X\| < R\}$).
- $\dot{V}(x)$ Est semi définie négative (localement dans B_R).

Alors le point d'équilibre $x = 0$ est stable

Si $\dot{V}(x)$ est définie négative (localement dans B_R), alors la stabilité est asymptotique locale.

2- S'il existe une fonction scalaire $V(x)$ ayant sa première dérivée partielle continue tel que :

- $V(x)$ Est définie positive.
- $\dot{V}(x)$ Est définie négative.
- $V(x) \rightarrow \infty$ Quand $\|x\| \rightarrow \infty$

Alors le point d'équilibre $x = 0$ est asymptotiquement stable globalement.

On voit ici la puissance du théorème de Lyapunov car il permet de conclure sur la stabilité d'un système dynamique grâce à une équation algébrique. Toute la difficulté est de trouver une fonction de Lyapunov $V(x)$. Pour remédier à ce problème, on utilise une méthode récursive dite : Backstepping, elle consiste à fragmenter le système en un ensemble de sous-systèmes imbriqués

II.4. Principe de la méthode de backstepping

Le backstepping est basé sur la méthode directe de Lyapunov. Elle permet la conception systématique et de manière récursive les fonctions de Lyapunov et donc, les commandes correspondantes.

II.4.1. Backstepping dans le cas monovariante

➤ *1^{ier} cas : système simple*

Considérons le système monovariante non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\xi \\ \dot{\xi} = u \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Où :

$$x \in R^n, \xi \in R, f(0) = 0, g(x) \neq 0.$$

La sortie du système $y = h(x) \in R$.

Le système est décomposé en deux sous-systèmes, le premier est donné par :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\xi \quad (\text{II.2})$$

Et, le deuxième est un système intégrateur comme suit :

$$\dot{\xi} = u \quad (\text{II.3})$$

Dans ce cas, ξ est la commande virtuelle du premier sous système et u est la commande du deuxième sous-système ainsi que le système global.

Supposons, qu'on peut stabiliser le premier sous-système par une commande $\phi(x)$ telle

$$\text{que : } \begin{cases} \phi(0) = 0 \\ et \\ \dot{x} = f(x) + g(x)\phi(x) \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

Et en plus, connaissant la fonction de Lyapunov qui vérifie :

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial X} \dot{x} = [f(x) + g(x)\phi(x)] \leq -W(x) \quad (\text{II.5})$$

Avec :

$$W(x) \geq 0 \quad (\text{II.6})$$

Avec l'addition de la soustraction du terme $g(x)\phi(x)$ dans l'équation (II.1), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x} = [f(x) + g(x)\phi(x)] + g(x)[\xi - \phi(x)] \\ \dot{\xi} = u \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

Posons :

$$e = \xi - \phi(x) \quad (\text{II.8})$$

Alors, on aura :

$$\begin{cases} \dot{x} = [f(x) + g(x)\phi(x)] + g(x)e \\ \dot{e} = u - \dot{\phi}(x) \\ \dot{\phi}(x) = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} [f(x) + g(x)\xi] \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

Posons $v = u - \dot{\phi}(x)$, alors le système de l'équation (II.7) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = [f(x) + g(x)\phi(x)] + g(x)e \\ \dot{e} = v \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

Ce système est similaire au système donné par l'équation (II.1) sauf que maintenant, le premier sous système est donné par :

$$\dot{x} = [f(x) + g(x)\phi(x)] + g(x)e \quad (\text{II.11})$$

Le système défini par l'équation ci-dessus est asymptotiquement stable lorsque $e=0$. Ce résultat sera exploité pour la synthèse de la commande v .

Considérons la fonction de Lyapunov :

$$V_a(x, e) = V(x) + \frac{1}{2}e^2 \quad (\text{II.12})$$

La dérivée de $V_a(x, e)$ par rapport au temps est donnée par :

$$\dot{V}_a(x, z) = \frac{\partial V}{\partial x} [f(x) + g(x)\phi(x) + g(x)e] + ev \quad (\text{II.13})$$

$$\Rightarrow \dot{V}_a(x, z) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} [f(x) + g(x)\phi(x) + g(x)e] + ev \quad (\text{II.14})$$

$$\Rightarrow \dot{V}_a(x, e) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} [f(x) + g(x)\phi(x)] + g(x)e + ev \quad (\text{II.15})$$

En remplaçant l'équation (II.15) dans l'équation (II.5), on obtient :

$$\dot{V}_a(x, e) \leq -W(x) + \frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x)e + ev \quad (\text{II.16})$$

On pose :

$$W_a = -\left(-W(x) + \frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x)e + ev \right) \quad (\text{II.17})$$

Alors, il faut choisir une commande v qui rend la fonction W_a défini positive (II.5) autrement dit distinguer une commande décroissante de la fonction de Lyapunov V_a .

On choisit :

$$v = -\frac{\delta V(x)}{\delta x} g(x) - \alpha v \quad (\text{II.18})$$

Où :

$$\alpha > 0$$

Alors l'équation (II.16) devient :

$$\dot{V}_a(x, z) \leq -W(x) - \alpha e^2 \quad (\text{II.19})$$

La fonction globale de Lyapunov est donc décroissante d'où, l'équation (II.17) devient :

$$W_a = -(-W(x) - \alpha e^2) \quad (\text{II.20})$$

La fonction W_a est définie positive.

D'après le théorème de Lyapunov le point $e=0$ est asymptotiquement stable et la commande stabilisante du système original est donnée par :

$$\begin{aligned} u &= v + \dot{\phi}(x) \\ &= v + \frac{\delta \phi(x)}{\delta x} \dot{x} \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

Remplaçant v et \dot{x} par leurs expressions, u devient :

$$u = -\frac{\delta V(x)}{\delta x} g(x) - \alpha(\xi - \phi(x)) + \frac{\delta \phi(x)}{\delta x} [f(x) + g(x)\xi] \quad (\text{II.22})$$

Cette commande rend le point $(x=0, \xi=0)$ asymptotiquement stable, et si $V(x)$ est radialement borné alors l'origine est globalement stable.

Lemme

Considérons le système (II.1) supposons qu'il existe un retour $\phi(x)$ satisfaisant l'équation algébrique $f(x_e) = 0$, et $V(x)$ est la fonction de Lyapunov qui satisfait (II.5) alors la commande u de (II.5) stabilise l'origine de (II.1) avec :

$$V_a(x, e) = V(x) + \frac{1}{2} e^2$$

Comme étant une fonction de Lyapunov globale et si la fonction $V(x)$ est radialement bornée alors l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement et globalement stable.

➤ 2^{ème} cas : système générale

Considérons un système plus général que (II.1)

Soit :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\xi \\ \dot{\xi} = f_a(x, \xi) + g_a(x, \xi)u \end{cases} \quad (\text{II.23})$$

Avec :

$$g_a(x, \xi) \neq 0$$

Considérons la transformation suivante :

$$u_a = f_a(x, \xi) + g_a(x, \xi)u \quad (\text{II.24})$$

Alors, la commande du système est donnée par :

$$u = \frac{1}{g_a(x, \xi)} [u_a - f_a(x, \xi)] \quad (\text{II.25})$$

Donc, on peut écrire le système (II.23) comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\xi \\ \dot{\xi} = u_a \end{cases} \quad (\text{II.26})$$

Il existe un retour $\phi(x)$ pour le premier sous système et une fonction de Lyapunov $V(x)$, la commande u_a , définit par la relation (II.22), et comme suit :

$$u_a = -\frac{\delta V(x)}{\delta x} g(x) - \alpha(\xi - \phi(x)) + \frac{\delta \phi(x)}{\delta x} [f(x) + g(x)\xi] \quad (\text{II.27})$$

Remplaçant l'équation (II.25) dans l'équation (II.27), on obtient la commande stabilisante u du système initial donné par (II.22) :

$$u = \frac{1}{g_a(x, \xi)} \left[\frac{\delta \phi(x)}{\delta x} (f(x) + g(x)\xi) - \frac{\delta V(x)}{\delta x} g(x) - \alpha(\xi - \phi(x)) - f_a(x, \xi) \right] \quad (\text{II.28})$$

En utilisant la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_a(x, z) = V(x) + \frac{1}{2}(\xi - \phi(x))^2 \quad (\text{II.29})$$

Dans le cas général d'un système possédant n sous système, ces étapes peuvent être appliquées autant de fois du premier sous-système jusqu'au dernier sous système. Donc, on peut stabiliser des systèmes de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3 \\ \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) + g_3(x_1, x_2, x_3)x_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)u \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

Où :

$$f_i(0)=0 \text{ et } g_i \neq 0 \quad \forall i$$

La procédure itérative commence par le premier sous-système donné par :

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \quad (\text{II.31})$$

Dans ce cas, la variable d'état x_2 est la commande virtuelle de ce premier sous système, e_1 est l'erreur et $V_1(e_1)$ est la première fonction de Lyapunov. Ensuite, on passe à l'étape suivante pour forcer la variable d'état du sous-système suivant à suivre la commande désirée de ce sous-système.

II.4.2. Le backstepping dans le cas multivariable :

Soit le système multivariable suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + G(x)\xi \\ \dot{\xi} = f_a(x, \xi) + G_a(x, \xi)u \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

Avec :

- ❖ $x(n, I)$: est le vecteur d'état.
- ❖ $u(m, I)$: est le vecteur de commande.
- ❖ $\xi(m, I)$: est un vecteur.

Ce système peut être vu comme étant deux sous-systèmes comme suit :

Le premier sous système est défini par :

$$\dot{x} = f(x) + G(x)\xi \quad (\text{II.33})$$

Et le deuxième sous-système par :

$$\dot{\xi} = f_a(x, \xi) + G_a(x, \xi)u \quad (\text{II.34})$$

Le vecteur d'état du premier sous-système (II.63) est x et son entrée, dite commande virtuelle, c'est ξ . Le deuxième sous-système (II.64) est défini par le vecteur d'état ξ et la commande u .

On suppose qu'il existe un vecteur de commande $\xi = \phi(x)$ stabilisant le premier sous-système avec $\phi(0) = 0$ et connaissant la fonction de Lyapunov $V(x)$ vérifiant :

$$\begin{cases} \dot{V}(x) = \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]^T [f(x) + g(x)\phi(x)] \leq -W(x) \\ W(x) \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II.35})$$

Soit $V_a(x, \xi)$ la fonction de lyapunov candidate du système global tel que :

$$V_a(x, \xi) = V(x) + \frac{1}{2} [\xi - \phi(x)]^T [\xi - \phi(x)] \quad (\text{II.36})$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient :

$$\dot{V}_a = \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]^T [f(x) + G\phi(x)] + \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]^T G[\xi - \phi] + [\xi - \phi]^T [f_a + G_a u - \frac{\delta \phi}{\delta x} (f + G\xi)] \quad (\text{II.37})$$

Choisissant :

$$u = G_a^{-1} \left[\left[\frac{\delta \phi}{\delta x} \right]^T [f + G\xi] - \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]^T G - f_a - \alpha [\xi - \phi] \right] \quad (\text{II.38})$$

Dans ce cas, \dot{V}_a devient :

$$\dot{V}_a = \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]^T [f + G\phi] - \alpha [\xi - \phi]^T [\xi - \phi] \leq -W(x) - \alpha [\xi - \phi]^T [\xi - \phi] \quad (\text{II.39})$$

Alors le point $(x = 0, \xi = 0)$ est asymptotiquement stable [15].

II.6. Application de la technique de Backstepping sur le quadrirotor

La technique de commande par backstepping a été choisie pour établir la loi de commande des contrôleurs des angles de rotation, position et altitude. Le contrôleur de

backstepping est un contrôleur du système en boucle fermée. Il essaye de corriger l'erreur calculée entre une variable mesurée de la sortie du système et la consigne donnée en entrée, en calculant une action stabilisante adaptée sensée ajuster la sortie du procédé.

II.6.1. Contrôleur des angles de rotation

C'est le Contrôleur de base, il permet de stabiliser l'orientation en 3D à une valeur désirée. Par ailleurs, l'altitude est fixée précédemment.

Généralement les angles de roulis, tangage et lacet sont forcés à zéro degré, pour assurer le vol stationnaire.

La dynamique de l'angle de roulis est comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_1(x_2, x_4, x_6, \bar{\Omega}) + b_1 U_2 \end{cases} \quad (\text{II.40})$$

Avec :

$$f_1(x_2, x_4, x_6, \bar{\Omega}) = a_1 x_4 x_6 + a_1 x_2^2 + a_3 x_4 \bar{\Omega} \quad (\text{II.41})$$

Etape 1

L'objectif de cette étape est de stabiliser le point d'équilibre $e_1 = 0$,

avec :

$$e_1 = x_{1d} - x_1 \quad : \text{ est l'erreur de poursuite.}$$

Le dérivé temporel de z_1 est donnée comme suit : $\dot{e}_1 = \dot{x}_{1d} - x_2$

La fonction de Lyapunov choisie pour ce système est de la forme suivante :

$$V_1 = \frac{1}{2} e_1^2 \quad (\text{II.42})$$

La dérivée temporelle de V_1 est :

$$\dot{V}_1 = e_1 \dot{e}_1 = e_1 (\dot{x}_{1d} - x_2) \quad (\text{II.43})$$

Par application du théorème de Lyapunov et spécialement $\dot{V}_1(x) \leq 0$, la stabilisation de z_1 peut être obtenue par l'introduction d'une nouvelle entrée de commande virtuelle x_2 :

$$x_2 = \dot{x}_{1d} + \alpha_1 e_1 \quad \text{Avec : } \alpha_1 > 0$$

L'équation (II.83) devient alors :

$$\dot{V}_1(e_1) = -\alpha_1 e_1^2 \quad (\text{II.44})$$

Comme x_2 ne peut pas prendre instantanément sa valeur désirée (la fonction stabilisante), on va définir une deuxième variable z_2 à stabiliser dans la deuxième étape, telle que :

$$e_2 = x_2 - \dot{x}_{1d} - \alpha_1 e_1 \quad (\text{II.45})$$

Etape 2

Dans l'espace des phases de l'erreur (e_1, e_2) , on peut écrire :

$$V_2 = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2) \quad (\text{II.46})$$

La dérivée de cette fonction est :

$$\dot{V}_2 = e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 \quad (\text{II.47})$$

Avec :

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \dot{x}_{1d} - x_2 = \dot{x}_{1d} - e_2 - \dot{x}_{1d} - \alpha_1 e_1 \quad \text{et} \quad \dot{e}_2 = \dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} - \alpha_1 \dot{e}_1 \\ &\Rightarrow \dot{V}_2 = a_1 x_4 x_6 + a_2 x_2^2 + a_3 x_4 \bar{\Omega} + b_1 U_2 - \ddot{x}_{1d} - \alpha_1 \dot{e}_1 \end{aligned}$$

(II.48)

Alors la loi de commande U_2 est déduite en satisfaisant $\dot{V}_2 < 0$:

$$U_2 = \frac{1}{b_1} \left\{ -a_1 x_4 x_6 - a_2 x_2^2 - a_3 x_4 \bar{\Omega} + \ddot{\phi}_d + \alpha_1 (\dot{\phi}_d - x_2) - \alpha_2 e_2 + e_1 \right\} \quad (\text{II.49})$$

Le terme $\alpha_2 e_2$ est ajouté afin de stabiliser e_1

Les mêmes étapes sont reprises afin d'extraire U_3, U_4

$$\begin{cases} U_3 = \frac{1}{b_2} \left\{ -a_4 x_2 x_6 - a_5 x_4^2 - a_6 x_2 \bar{\Omega} + \ddot{\theta}_d + \alpha_3 (\dot{\theta}_d - x_4) - \alpha_4 z_4 + z_3 \right\} \\ U_4 = \frac{1}{b_3} \left\{ -a_7 x_2 x_4 - a_8 x_6^2 + \ddot{\psi}_d + \alpha_5 (\dot{\psi}_d - x_6) - \alpha_6 z_6 + z_5 \right\} \end{cases}$$

(II.50)

$$\text{Avec : } \begin{cases} e_3 = x_{3d} - x_3 \\ e_4 = x_4 - \dot{x}_{3d} - \alpha_3 e_3 \\ e_5 = x_{5d} - x_5 \\ e_6 = x_6 - \dot{x}_{5d} - \alpha_5 e_5 \end{cases}$$

II.6.2. Contrôleur de position

Une autre contribution du travail effectué dans ce chapitre est la conception d'un contrôleur de position basé sur l'approche de backstepping.

Les étapes nécessaires pour la synthèse d'une loi de commande stabilisante de la position sur l'axe X sont :

La dynamique de la translation sur X est comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_7 = x_8 \\ \dot{x}_8 = f_4(x_8) + \frac{U_1}{m} U_x \end{cases} \quad (\text{II.51})$$

Avec :

$$f_4(x_8) = a_9 x_8 \quad (\text{II.52})$$

Etape1

$e_7 = x_{7d} - x_7$: est l'erreur de poursuite.

$\dot{e}_7 = \dot{x}_{7d} - x_8$: est la dérivée de l'erreur.

La fonction de Lyapunov choisie pour ce système est de la forme suivante :

$$V_7 = \frac{1}{2} e_7^2 \quad (\text{II.53})$$

La dérivée temporelle de V_7 est :

$$\dot{V}_7 = e_7 \dot{e}_7 = e_7 (\dot{x}_{7d} - x_8)$$

On prend :

$$x_8 = \dot{x}_{7d} + \alpha_7 e_7 \text{ Avec: } \alpha_7 > 0 \quad (\text{II.54})$$

L'équation (II.93) devient alors :

$$\dot{V}_7(e_7) = -\alpha_7 e_7^2 \quad (\text{II.55})$$

$$e_8 = x_8 - \dot{x}_{7d} - \alpha_7 e_7 \quad (\text{II.56})$$

Etape 2

$$V_8 = \frac{1}{2}(e_7^2 + e_8^2) \quad (\text{II.57})$$

La dérivée de cette fonction est :

$$\dot{V}_8 = e_7 \dot{e}_7 + e_8 \dot{e}_8$$

Avec :

$$\begin{aligned} \dot{e}_7 &= \dot{x}_{7d} - \dot{x}_8 = \dot{x}_{7d} - e_8 - \dot{x}_{7d} - \alpha_7 e_7 \quad \text{et} \quad \dot{e}_8 = \dot{x}_8 - \ddot{x}_{7d} - \alpha_7 \dot{e}_7 \\ \Rightarrow \dot{V}_8 &= a_9 x_8 + \frac{U_1}{m} U_x - \ddot{x}_{7d} - \alpha_7 \dot{e}_7 \end{aligned}$$

Alors la loi de commande U_x est déduite en satisfaisant $\dot{V}_2 < 0$:

$$U_x = \frac{m}{U_1} \{-a_9 x_8 + \ddot{x}_d + \alpha_7 (\dot{x}_d - x_8) - \alpha_8 e_8 + e_7\} \quad / \quad U_1 \neq 0 \quad (\text{II.58})$$

Les mêmes étapes sont reprises afin d'extraire U_y ki

$$U_y = \frac{m}{U_1} \{-a_{10} x_{10} + \ddot{y}_d + \alpha_9 (\dot{y}_d - x_{10}) - \alpha_{10} e_{10} + e_9\} \quad / \quad U_1 \neq 0 \quad (\text{II.59})$$

Avec :

$$\begin{cases} e_9 = x_{9d} - x_9 \\ e_{10} = x_{10} - \dot{x}_{9d} - \alpha_9 e_9 \end{cases}$$

II.6.3. Contrôleur d'altitude

Ce contrôleur a pour rôle de commander le quadrirotor durant les tâches de décollage, atterrissage, et vol stationnaire.

La dynamique de l'altitude est comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = f_6(x_{12}) + \frac{\cos x_1 \cos x_3}{m} U_1 \end{cases} \quad (\text{II.60})$$

Avec :

$$f_6(x_{12}) = a_{11}x_{12} - g \quad (\text{II.61})$$

Et les étapes à suivre pour synthétiser ce contrôleur sont :

Etape1

L'erreur de poursuite est : $e_{11} = x_{11d} - x_{11}$

Le dérivé temporel de e_{11} est donnée comme suit : $\dot{e}_{11} = \dot{x}_{11d} - x_{12}$

La fonction de Lyapunov choisie pour ce système est de la forme suivante :

$$V_{11} = \frac{1}{2} e_{11}^2 \quad (\text{II.62})$$

La dérivée temporelle de V_1 est :

$$\dot{V}_{11} = e_{11} \dot{e}_{11} = e_{11} (\dot{x}_{11d} - x_{12}) \quad (\text{II.63})$$

Pour que $\dot{V}_{11}(x) \leq 0$ la commande virtuelle x_{12} est :

$$x_{12} = \dot{x}_{11d} + \alpha_{11} e_{11} \quad \text{Avec : } \alpha_{11} > 0$$

L'équation (II.42) devient alors :

$$\dot{V}_{11}(e_{11}) = -\alpha_{11} e_{11}^2 \quad (\text{II.64})$$

Comme x_{12} ne peut pas prendre instantanément sa valeur désirée (la fonction stabilisante), on va définir une deuxième variable e_{12} à stabiliser dans la deuxième étape, telle que :

$$e_{12} = x_{12} - \dot{x}_{11d} - \alpha_{11} e_{11}$$

Etape 2

Dans l'espace des phases de l'erreur (e_{11}, e_{12}) , on peut écrire :

$$V_{12} = \frac{1}{2} (e_{11}^2 + e_{12}^2) \quad (\text{II.65})$$

La dérivée de cette fonction est :

$$\dot{V}_{12} = e_{11}\dot{e}_{11} + e_{12}\dot{e}_{12}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \dot{e}_{11} &= \dot{x}_{11d} - x_{12} = \dot{x}_{11d} - e_{12} - \dot{x}_{11d} - \alpha_{11}e_{11} \quad \text{et} \quad \dot{e}_{12} = \dot{x}_{12} - \ddot{x}_{11d} - \alpha_{11}\dot{e}_{11} \\ \Rightarrow \dot{V}_{12} &= a_{11}x_{12} + \frac{\cos x_1 \cos x_3}{m} U_1 - g - \ddot{x}_{12d} - \alpha_{11}\dot{e}_{11} \end{aligned}$$

Alors la loi de commande U_1 est déduite en satisfaisant $\dot{V}_{12} < 0$

$$U_1 = \frac{m}{\cos x_1 \cos x_3} \{g - a_{11}x_{12} + \ddot{z}_d + \alpha_{11}(\dot{z}_d - x_{12}) - \alpha_{12}e_{12} + e_{11}\} / \cos x_1 \cos x_3 \neq 0 \quad (\text{II.66})$$

II.7. Simulation

Afin de valider la loi de commande par backstepping présenté, et appliqué précédemment sur le modèle mathématique du quadrirotor, nous avons présenté plusieurs tests.

❖ **Test n°1** : on choisit les conditions initiales du vecteur d'état suivants :

$X = [\pi/6 \ \pi/6 \ \pi/6 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5]^T$, et on cherche à stabiliser le système et maintenir tous ses états à zéro pour ces conditions initiales.

❖ **Test n°2** : On choisit les conditions initiales du vecteur d'état suivant :

$X = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, et on cherche à stabiliser le système et maintenir tous ses états à 1 pour ces conditions initiales.

❖ **Test n°3** : On va défini une trajectoire à suivre par chacun des états du quadrirotor et voir leurs comportements.

Pour se faire, nous devons réaliser le schéma de commande suivant :

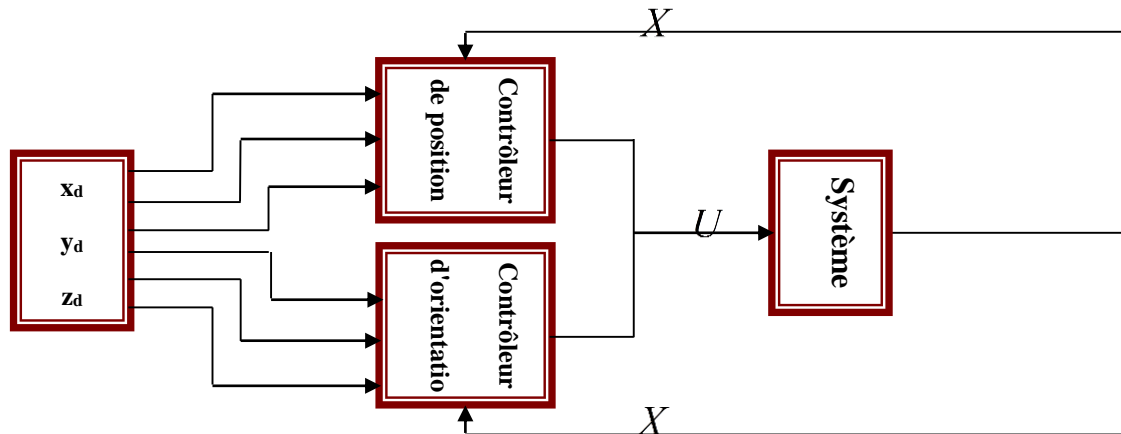


Figure II.1. Schéma synoptique de la commande par backstepping

Il est à noter que cette simulation est accomplie avec les paramètres de contrôleur des tableaux (II.1) et (II.2). Ces paramètres sont choisis d'une façon empirique, pour les ajuster selon les performances désirées.

Paramètre	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}
Valeur	4	0.01	7.5	5	7	5	13.35	4.6	13.35	4.6	5	35

Tableau II.1. Les paramètres α_i utilisés pour stabiliser le contrôleur de position altitude

Paramètre	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}
Valeur	4	2.37	7	5	7	5	0	0	0	0	0	0

Tableau II.2. Les paramètres α_i utilisés pour stabiliser le contrôleur des angles

II.7.1. Résultats et interprétations

❖ Pour le test n°1

Angles

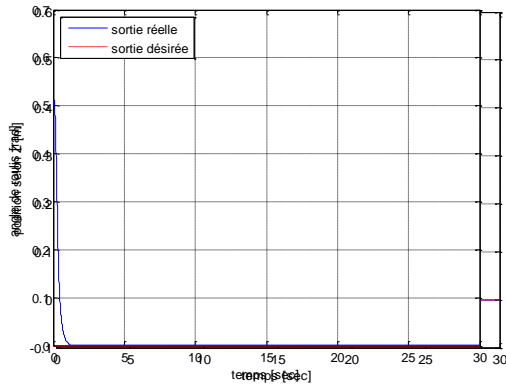


Figure II.2. Angle de roulis

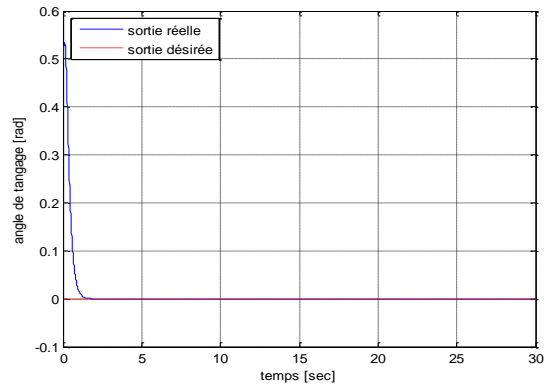


Figure II.3. Angle de tangage

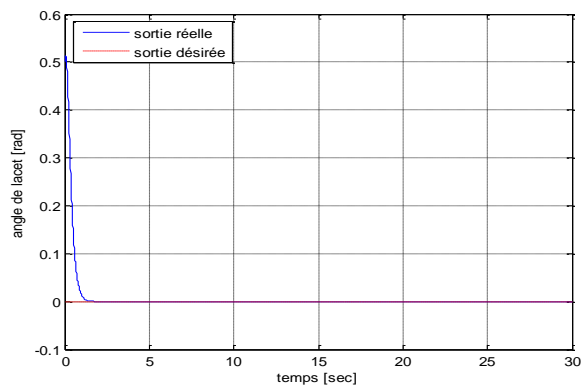


Figure II.4. Angle de lacet

Les positions selon les axes

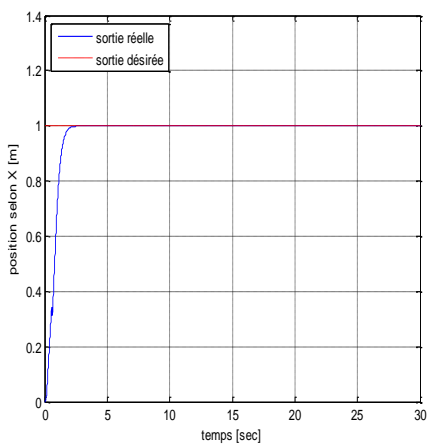


Figure II.5. Position selon l'axe X

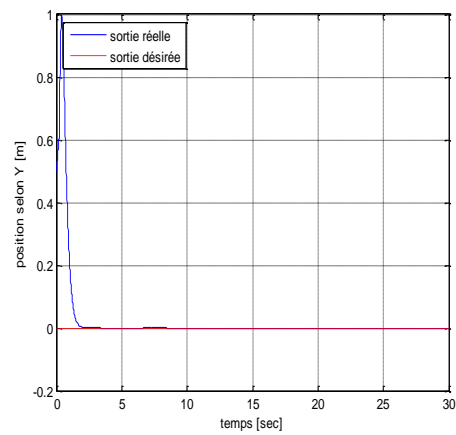


Figure II.6. La position selon l'axe Y

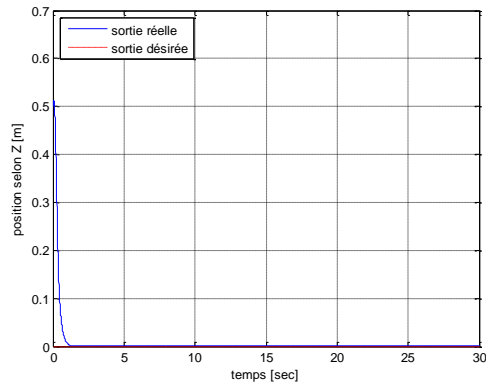


Figure II.7. Position selon l'axe Z

Les signaux de commande :

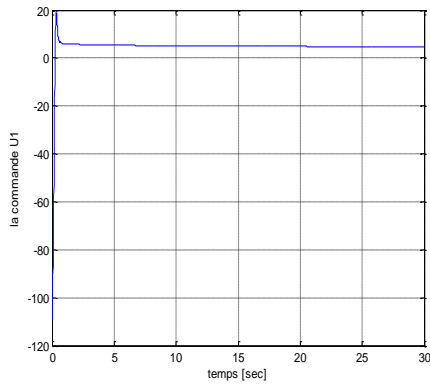


Figure II.8. Signal de commande U1

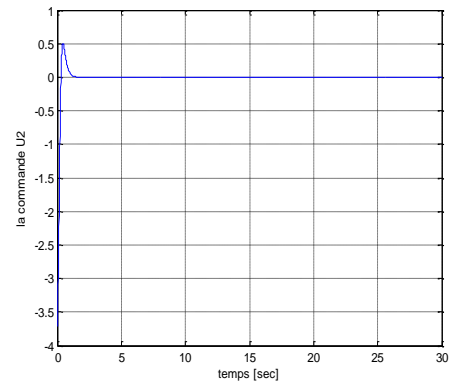


Figure II.9. Signal de commande U2

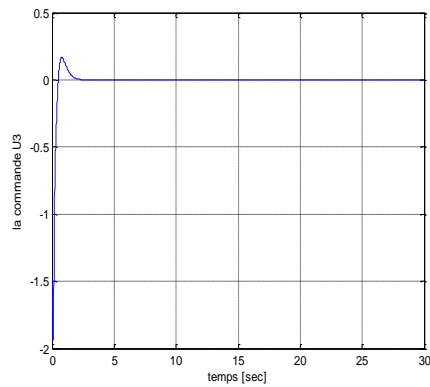


Figure II.10. Signal de commande U3

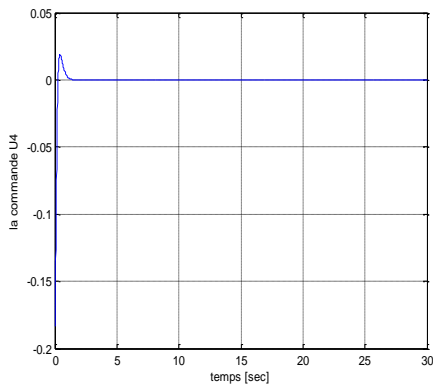


Figure II.11. Signal de commande U4

Pour le test n° 2

Angles

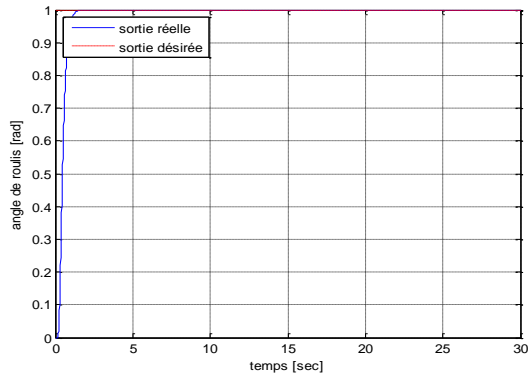


Figure II.2. Angle de roulis

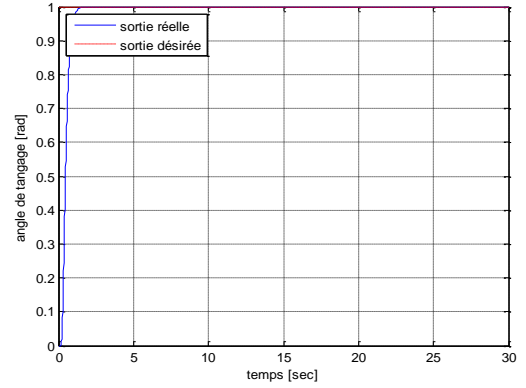


Figure II.3. Angle de tangage

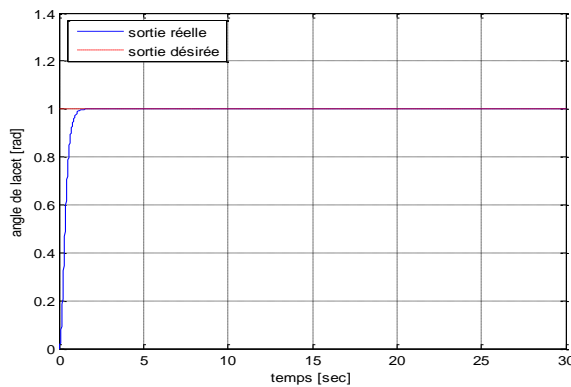


Figure II.4. Angle de lacet

Positions selon les axes

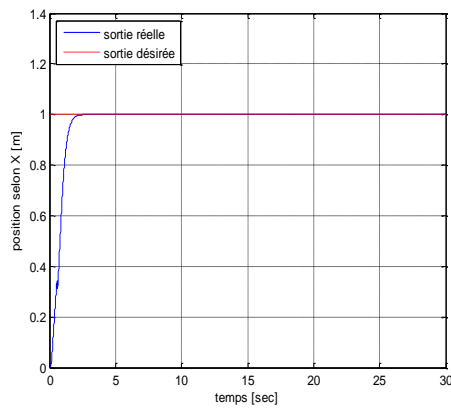


Figure II. 5. Position selon l'axe X

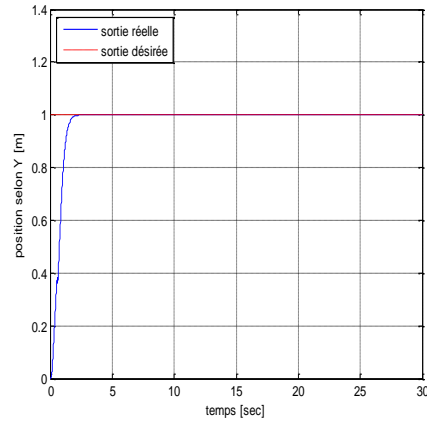


Figure II.16. Position selon l'axe Y

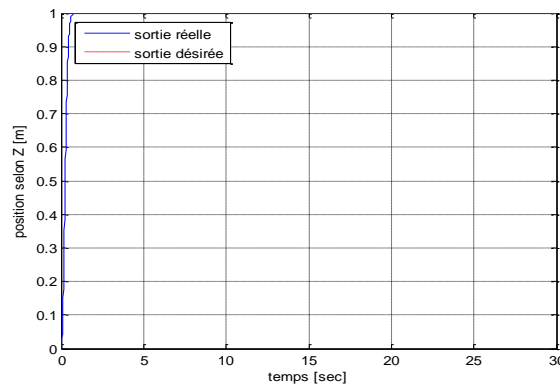


Figure II.17. position selon l'axe z

Signaux de commande

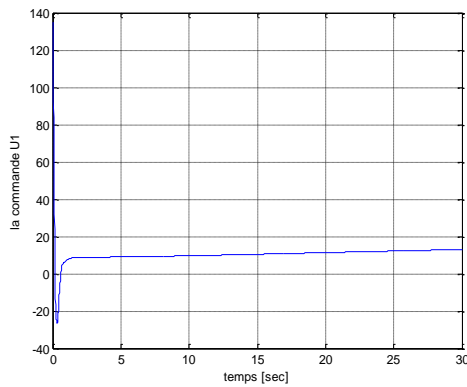


Figure II.18. signal de commande U1

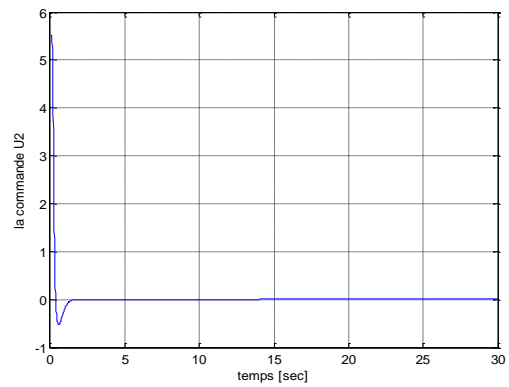


Figure II.19. Signal de commande U2

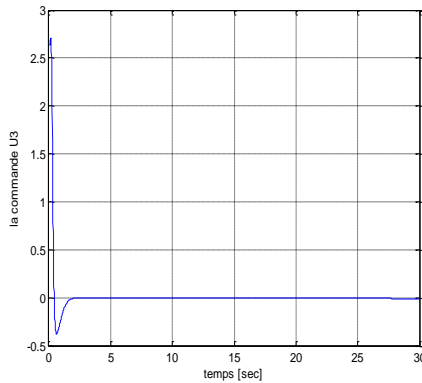


Figure II.6.Signal de commande U3

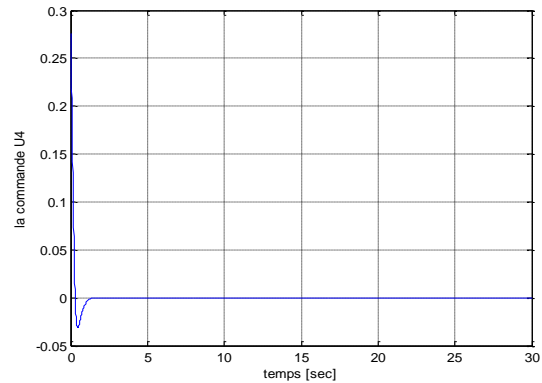


Figure II.7.Signal de commande U4

D'après les résultats de simulations obtenus, on constate que :

- Les sorties réelles suivent les sorties désirées.

Pour le contrôle des angles

Le contrôleur backstepping arrive à stabiliser le système au sens de Lyapunov, et maintenir les angles de roulis, de tangage et de lacet à la valeur désirée (zéro et 1) dans moins de 2 sec, malgré la présence du bruit blanc à cause des commandes U_2 , U_3 et U_4 qui prennent des valeurs positives alors, qu'il donne naissance à des couples sur les axes X, Y, Z pour incliner les angles de rotation vers la valeur désirée.

Pour le contrôle de l'altitude

Lors du décollage du quadrirotor à une altitude de 1m, la réponse est diminuée de 0 à 0.1 m, puis il est arrivé à s'envoler à l'altitude désirée puisque la commande U_1 provoque une force de portance supérieure à la force du poids.

- ❖ **Pour le test n°3**
angles

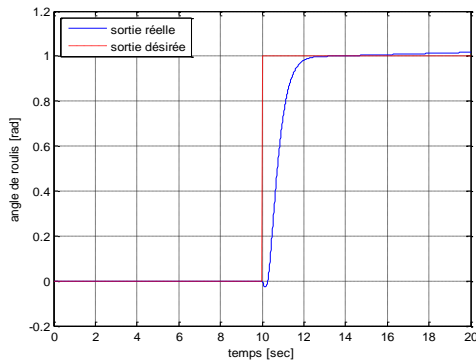


Figure II.8. Angle de roulis

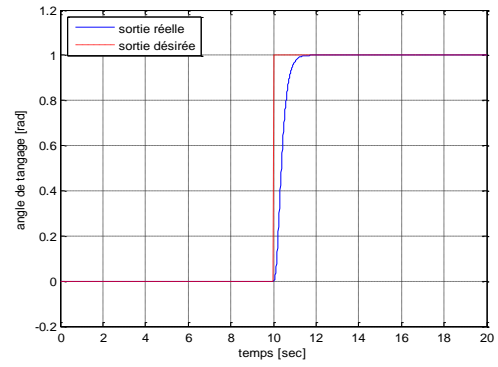


Figure II.23. Angle de tangage

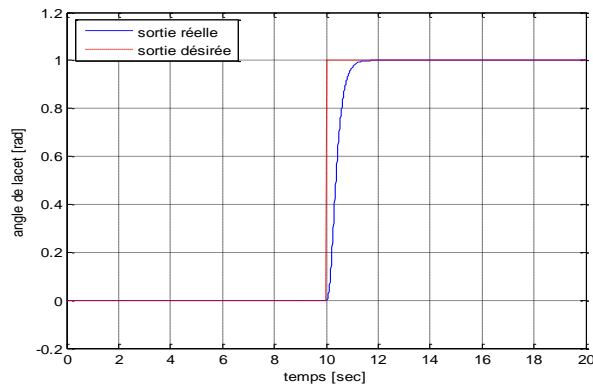


Figure II.24. Angle de lacet

Positions selon les axes

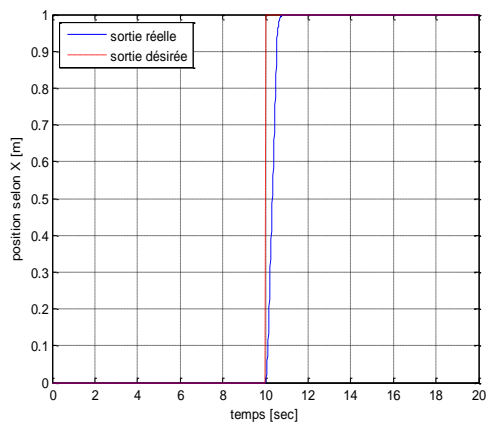


Figure II.25. Position selon l'axe X

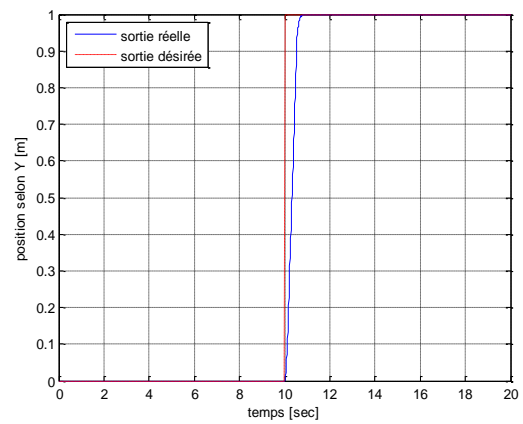


Figure II.26. Position selon l'axe Y

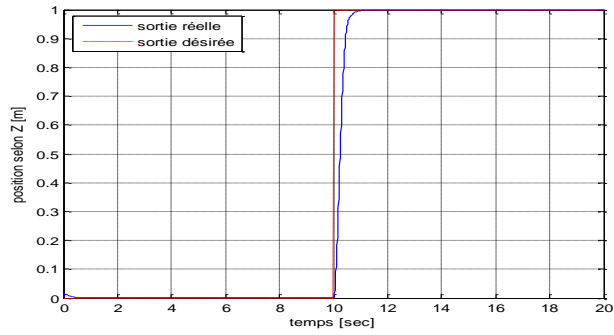


Figure II.27. Position selon l'axe Z

Erreurs de poursuite selon les angles

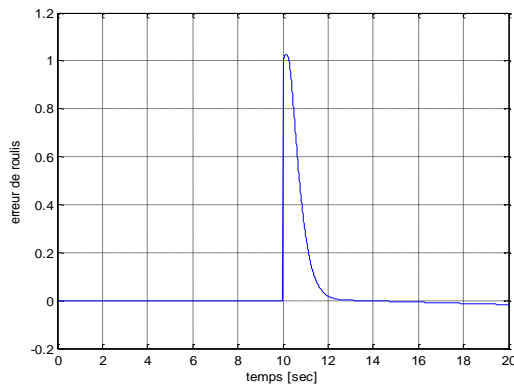


Figure II.28. Erreur de poursuite selon l'angle de roulis

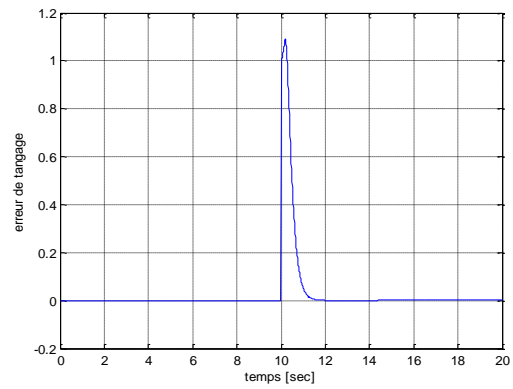


Figure II.29. Erreur de poursuite selon l'angle de tangage

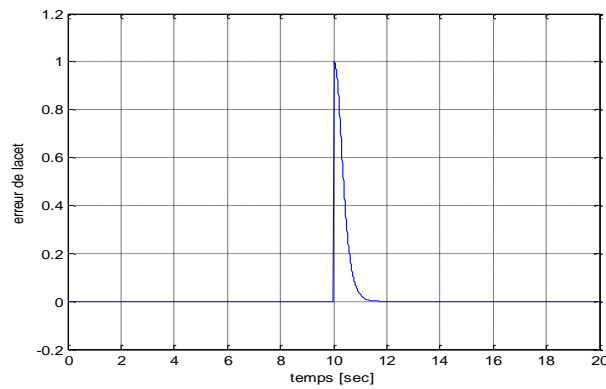


Figure II.30. Erreur de poursuite selon l'angle de lacet

Erreurs de poursuite selon les axes

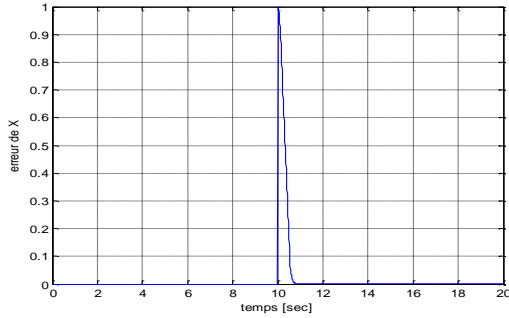


Figure II.31. Erreur de poursuite selon l'axe X

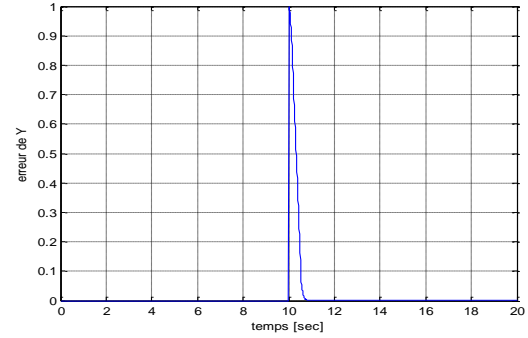


Figure II.32. Erreur de poursuite selon l'axe Y

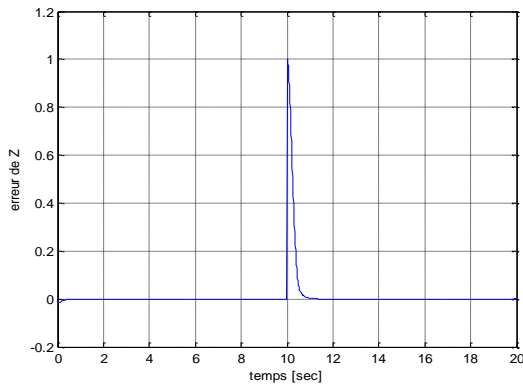


Figure II.33. Erreur de poursuite selon l'axe Z

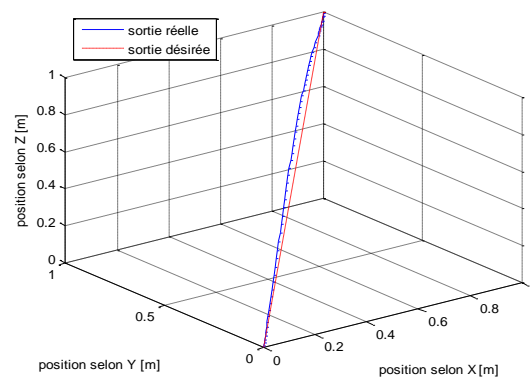


Figure II.34. Trajectoire globale du quadrirotor en 3D

II.8. Conclusion

Dans ce chapitre, en se basant sur le modèle dynamique présenté dans le chapitre I, nous avons introduit une technique de commande assurant la stabilité au sens de Lyapunov et conduisant le quadrirotor à suivre la trajectoire désirée, c'est la commande par backstepping.

Les résultats de simulation obtenus sont assez acceptables vu les performances réalisées.

Après avoir ces résultats on peut conclure que la loi de commande synthétisée par la technique de backstepping est une technique souple, elle prend, en considération, tous les non linéarités du système ainsi que la dynamique des trajectoires désirées.

On peut conclure aussi, que le choix des coefficients α_i peut être très délicat et difficile bien que ces derniers soient choisis positifs mais cela peut induire une instabilité, et même dans la plage où les α_i choisis assurent la stabilité du système, ils peuvent rendre les signaux de commande très énergétiques.

**Chapitre III : Commande hybride
par retour
D'état et backstepping**

III.1. Introduction

Contrairement à l'automatique linéaire, l'automatique non linéaire ne dispose pas de solutions universelles ni pour l'analyse des systèmes ni pour la conception de leurs contrôleurs. L'analyse et la commande de ces systèmes ne sont pas toujours des tâches faciles. La plupart des travaux dans la littérature proposent des approches qui sont, généralement limitées à des formes bien particulières de système. De plus, les performances assurées sont souvent, au prix de la complexité du schéma de commande et du développement théorique utilisé [16].

L'étude du contrôle non linéaire est d'un grand intérêt, puisque la majorité des systèmes réels sont essentiellement non linéaires. Les méthodes linéaires sont satisfaisantes mais pour des plages de fonctionnement restreintes. Dès que le système sort de ce domaine de fonctionnement, le contrôleur linéaire n'est plus valable et ne garantit plus la stabilité du système. D'où l'intérêt d'étudier plus profondément les méthodes de commande non linéaire par retour d'état.

Depuis quelques décennies, il a été prouvé que la méthode de la fonction de Lyapunov est un outil efficace pour la stabilité des systèmes non linéaires par retour d'état. Cette commande consiste à élaborer une loi de commande, à partir des grandeurs d'état mesurables [17], ceci a été confirmé par les résultats de Coron qui montre qu'un système, localement contrôlable pendant une courte durée, peut être stabilisé par une commande instationnaire continue en utilisant la technique de Lyapunov [18].

Dans ce chapitre, et pour obtenir des meilleures performances pour le quadrirotor, nous allons présenter la synthèse d'une nouvelle loi de commande (la commande hybride), basée sur la combinaison de l'approche par retour d'état et celle par backstepping, cette méthode présente l'avantage d'allier les performances des deux types de contrôleurs.

Après la citation de quelques notions de base sur la commande par retour d'état des systèmes non linéaires, une conception d'un contrôleur d'état stable du système bouclé a été présentée. Enfin, des résultats de simulations illustrent les performances de cette stratégie de commande.

III.2. Retour d'état des systèmes non linéaires

Cette section consiste en une introduction au problème de stabilisation d'état des systèmes non linéaires. Nous présentons le principe de la commande par retour d'état, et quelques définitions sur la notion de commandabilité des systèmes non linéaires.

III.2.1 Principe de commande par retour d'état

La commande par retour d'état consiste à utiliser le vecteur d'état en contre réaction pour améliorer le comportement propre du processus (S) sous la forme d'état suivante :

$$S: \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Où : $u \in \Omega \subset R^m$ est la commande (Ω est l'ensemble des entrées admissibles), $x \in M \subset R^n$ est l'état interne du système (M est l'ensemble des états possible), et $y \in R^p$ est la mesure.

Et chercher à trouver une commande de rétroaction qui stabilise la trajectoire du système, tel que :

$$u = -K(x(t)) \quad (\text{III.2})$$

Alors, l'équation différentielle qui en découle est de la forme suivante [19] :

$$S': \begin{cases} \dot{x}(t) = F(x) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

Avec :

$$F(x) = f(x(t), K(x(t))) \quad (\text{III.4})$$

Le choix des coefficients de $K(x(t))$ redéfinit totalement la dynamique du système. Il existe de nombreux développements à ce sujet : placement de pôles, critère quadratique, commande optimale, commande modale (en utilisant les variables d'état canonique), découplage, etc. [20].

Comme on a déjà cité, nous allons utiliser la méthode de la fonction de Lyapunov pour assurer la stabilité de notre système. Le schéma d'une commande par retour d'état est donné sur la figure III.1

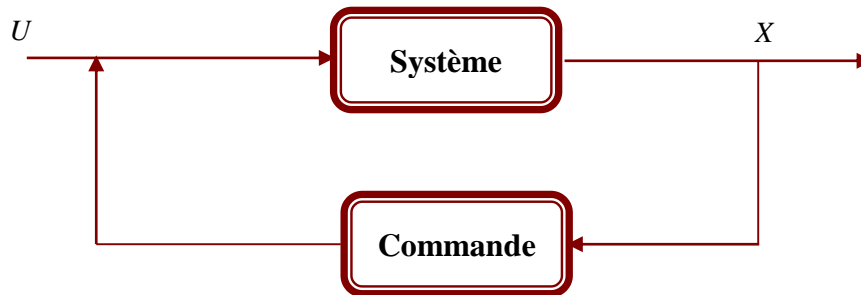


Figure III.1. Schéma de commande par retour d'état

Avant de se lancer dans la synthèse de notre contrôleur par retour d'état, la notion de commandabilité et certaines propriétés qui fournissent des conditions nécessaires à la synthèse du contrôleur d'état seront présentées.

III.2.2. Notion de commandabilité des systèmes non linéaire

La commandabilité est une propriété très importante dans le contrôle d'un système, elle joue un rôle crucial dans de nombreux problèmes tels que la stabilisation des systèmes instables par retour d'état, la commande optimale ...

Par définition, un système est dit commandable sur un intervalle $[t_0, t_1]$, s'il est possible de le conduire en lui appliquant un signal de commande u définie sur un intervalle de temps fini $[t_0, t_1]$, d'un état initial $x(t_0)$ à un état final $x(t_1)$. [21]

III.2.2.1. Commandabilité et commandabilité locale

Dans ce paragraphe, nous avons présentés quelques définitions sur la commandabilité et la commandabilité locale, rappelant une notion très importante du système complet.

- ❖ **Définition III.1:** (système complet) pour chaque entrée admissible $u(t)$, et pour chaque $x(t_0) \in M$, il existe une solution de l'équation différentielle $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, satisfaisant : $x(t_0) = x_0$, et $x(t) \in M, \forall t \in R$.
- ❖ **Définition III.2:** soit U un sous ensemble de M contenant l'état x_1 , on dit que x_1 est un état U accessible de x_0 (noté par $x_1 A_u(x_0)$). S'il existe une entrée admissible $u[t_0, t]$ du Système, et si $\forall t \geq t_0$, tel que la solution correspondante

$y(t)$ de l'équation différentielle $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, satisfait $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, et $y(t) \in U$.

❖ **Définition III.3:** (*commandabilité*) L'état x_0 est dit commandable si $A(x_0) = M$; et Le système est commandable si, pour tout $x \in M$, $A(x) = M$.

Notons que $A(x)$ est l'ensemble des points accessibles de x .

❖ **Définition III.4:** (*commandabilité locale*) le système est localement commandable à l'état x_0 , si pour tout voisinage U de x_0 , $A_u(x_0)$ est aussi un voisinage de x_0 ; le système (IV.1) est dit localement commandable, s'il est localement commandable pour tout $x \in M$.

III.3. Commandabilité au sens du rang

De raison de simplification, on fait ressortir la commandabilité en modifiant la représentation générale donné par un système non linéaire citée dans la section précédente (système (IV.1)) par une autre similaire [28] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases}$$

(III.5)

Etand donné les deux champs de vecteur $f : R^n \rightarrow R^n$ et $g : R^n \rightarrow R^n$, leurs crochets de Lie est défini par :

$$[f, g] = \frac{\delta f}{\delta x} g - \frac{\delta g}{\delta x} f \quad (\text{III.6})$$

Où : $\frac{\delta f}{\delta x}$ et $\frac{\delta g}{\delta x}$ sont les jacobienne de f et g , respectivement. Nous serons également utilisant une notation alternative de la forme suivante :

$$[f, g] = (ad_f^1 g) \quad (\text{III.7})$$

Nous définissons :

$$(ad_f^{n-1} g) = [f, (ad_f^{n-1} g)] \quad (\text{III.8})$$

Où :

$$(ad_f^0 g) = g \quad (III.9)$$

Pour un système linéaire d'entrée unique, $f(x) = Ax$ et $g(x) = b$, on a :

$$\begin{cases} (ad_f^0 g) = b, \\ (ad_f^1 g) = Ab, \\ \vdots \\ (ad_f^n g) = A^n b. \end{cases} \quad (III.10)$$

Ainsi, la matrice de commandabilité d'un système linéaire peut être exprimé en termes des crochets de Lié comme suit

$$[b \quad Ab \quad \cdots \quad A^{n-1}b] = [(ad_f^0 g) \quad (ad_f^1 g) \quad \cdots \quad (ad_f^{n-1} g)] \quad (III.11)$$

Nous appellerons la matrice $n \times n$ suivante :

$$C = [(ad_f^0 g) \quad (ad_f^1 g) \quad \cdots \quad (ad_f^{n-1} g)] \quad (III.12)$$

La matrice de commandabilité d'un système non linéaire.

III.4. Application sur le modèle dynamique du quadrirotor

III.4.1. Calcul de la matrice de commandabilité

Considérons le modèle d'état du quadrirotor (I), avec :

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ a_1 x_4 x_6 + a_2 x_2^2 + a_3 x_4 \bar{\Omega} \\ x_4 \\ a_4 x_2 x_6 + a_5 x_4^2 + a_6 x_2 \bar{\Omega} \\ x_6 \\ a_7 x_2 x_4 + a_8 x_6^2 \\ x_8 \\ a_9 x_8 \\ x_{10} \\ a_{10} x_{10} \\ x_{12} \\ a_{11} x_{12} - g \end{pmatrix}, \text{ et } g(x, U) = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 U_2 \\ 0 \\ b_2 U_3 \\ 0 \\ b_3 U_4 \\ 0 \\ \frac{1}{m} U_x U_1 \\ 0 \\ \frac{1}{m} U_y U_1 \\ 0 \\ \frac{1}{m} U_z U_1 \end{pmatrix} \quad (III.14)$$

La matrice de commandabilité de notre système est alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} C = ((ad_f^0, g) \ (ad_f^1, g) \ \dots \ (ad_f^{n-1}, g)) \\ 1 \leq m \leq 6 \end{array} \right.$$

En premier lieu nous allons commencer par construire cette matrice étape par étape et cela de la manière suivante :

$$C = \left(\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 b_2 \bar{\Omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 b_1 \bar{\Omega} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2gm & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2mg & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_9 gm & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2gm \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2gm & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_{10} gm \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ m/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (a_1 m/2) & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (\text{III.15})$$

Le rang de cette dernière est bien 12, ce qui nous ramène à conclure que notre système est localement commandable.

III.4.2. Synthèse d'un contrôleur d'état

Considérons le modèle dynamique présenté dans le premier chapitre (I). Pour calculer les commandes stabilisantes par retour d'état à appliquer au procédé, on procède de la même manière que dans le chapitre de la synthèse d'un observateur d'état.

Le système avec retour d'état est présenté comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 - \Lambda_1 \\ \dot{x}_2 = a_1 x_4 x_6 + a_2 x_2^2 + a_3 x_4 \bar{\Omega} - \Lambda_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 - \Lambda_3 \\ \dot{x}_4 = a_4 x_2 x_6 + a_5 x_4^2 + a_6 x_2 \bar{\Omega} - \Lambda_4 \\ \dot{x}_5 = x_6 - \Lambda_5 \\ \dot{x}_6 = a_7 x_2 x_4 + a_8 x_6^2 - \Lambda_6 \\ \dot{x}_7 = x_8 - \Lambda_7 \\ \dot{x}_8 = a_9 x_8 - \Lambda_8 \\ \dot{x}_9 = x_{10} - \Lambda_9 \\ \dot{x}_{10} = a_{10} x_{10} - \Lambda_{10} \\ \dot{x}_{11} = x_{12} - \Lambda_{11} \\ \dot{x}_{12} = a_{11} x_{12} - g - \Lambda_{12} \end{array} \right. \quad (\text{III.16})$$

Λ_i : représente les éléments du terme $g(x(t))$

Pour pouvoir calculer les gains du contrôleur, il est nécessaire que la dynamique du système (III.15) soit stable. Pour se faire nous choisissons une fonction de Lyapunov candidate défini positive dont sa dérivée est définie négative, et essayer de prouver la stabilité exponentielle.

Soit :

$$V(x_1) = \frac{1}{2} x_1^2 \quad (\text{III.17})$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1) &= \dot{x}_1 x_1 \\ &= x_1 (x_2 - \Lambda_1) \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

$\dot{V}(x_1) \leq -K_1 V(x_1)$ Si et seulement si:

$$\Lambda_1 = x_2 + K_1 x_1 \quad (\text{III.19})$$

Avec : $K_1 > 0$

De la même façon on peut calculer les autres gains :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_1 = x_2 + K_1 x_1 \\ \Lambda_2 = a_1 x_4 x_6 + a_2 x_2^2 + a_3 x_4 \bar{\Omega} + K_2 x_2 \\ \Lambda_3 = x_4 + K_3 x_3 \\ \Lambda_4 = a_4 x_2 x_6 + a_5 x_4^2 + a_6 x_2 \bar{\Omega} + K_4 x_4 \\ \Lambda_5 = x_6 + K_5 e_5 \\ \Lambda_6 = a_7 x_2 x_4 + a_8 x_6^2 + K_6 x_6 \\ \Lambda_7 = x_8 + K_7 x_7 \\ \Lambda_8 = a_9 x_9 + K_8 x_8 \\ \Lambda_9 = x_{10} + K_9 x_9 \\ \Lambda_{10} = a_{10} x_{10} + K_{10} x_{10} \\ \Lambda_{11} = x_{12} + K_{11} x_{11} \\ \Lambda_{12} = a_{11} x_{12} + K_{12} x_{12} \end{array} \right. \quad (\text{III.20})$$

Les lois de commande par retour d'état sont donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_2 = \frac{1}{b_1} \{-a_1 x_4 x_6 - a_2 x_2^2 - a_3 x_4 \bar{\Omega} - K_2 x_2\} \\ U_3 = \frac{1}{b_2} \{-a_4 x_2 x_6 - a_5 x_4^2 - a_6 x_2 \bar{\Omega} - K_4 x_4\} \\ U_4 = \frac{1}{b_3} \{-a_7 x_2 x_4 - a_8 x_6^2 - K_6 x_6\} \\ U_x = \frac{m}{U_1} \{-a_9 x_8 + \ddot{x}_d - K_8 x_8\} \quad / \quad U_1 \neq 0 \\ U_y = \frac{m}{U_1} \{-a_{10} x_{10} - K_{10} x_{10}\} \quad / \quad U_1 \neq 0 \\ U_1 = \frac{m}{\cos x_1 \cos x_3} \{g - a_{11} x_{12} - K_{12} x_{12}\} \quad / \quad \cos x_1 \cos x_3 \neq 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.21})$$

Pour synthétiser une loi de commande par retour d'état d'un système avec incertitudes paramétrique, on refaire le même travail précédent.

Les lois de commande sont, donc :

$$\left\{ \begin{array}{l}
U_2 = \frac{1}{(\Delta b_1 + b_1)} \left\{ -(\Delta a_1 + a_1)x_4 x_6 - (\Delta a_2 + a_2)x_2^2 - (\Delta a_3 + a_3)x_4 \bar{\Omega} - K_2 x_2 \right\} \\
U_3 = \frac{1}{(\Delta b_2 + b_2)} \left\{ -(\Delta a_4 + a_4)x_2 x_6 - (\Delta a_5 + a_5)x_4^2 - (\Delta a_6 + a_6)x_2 \bar{\Omega} - K_4 x_4 \right\} \\
U_4 = \frac{1}{(\Delta b_3 + b_3)} \left\{ -(\Delta a_7 + a_7)x_2 x_4 - (\Delta a_8 + a_8)x_6^2 - K_6 x_6 \right\} \\
U_x = \frac{m}{U_1} \left\{ -(\Delta a_9 + a_9)x_8 + \ddot{x}_d - K_8 x_8 \right\} \quad / \quad U_1 \neq 0 \\
U_y = \frac{m}{U_1} \left\{ -(\Delta a_{10} + a_{10})x_{10} - K_{10} x_{10} \right\} \quad / U_1 \neq 0 \\
U_1 = \frac{m}{\cos x_1 \cos x_3} \left\{ g - (\Delta a_{11} + a_{11})x_{12} - K_{12} x_{12} \right\} / \cos x_1 \cos x_3 \neq 0
\end{array} \right. \quad (\text{III.22})$$

III.5. Synthèse de la loi de commande par backstepping

Maintenant, nous faisons appel aux lois de commande synthétisées par backstepping dans le chapitre (I). Ils sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l}
U_2 = \frac{1}{b_1} \left\{ -a_1 x_4 x_6 - a_2 x_2^2 - a_3 x_4 \bar{\Omega} + \ddot{\phi}_d + \alpha_1 (\dot{\phi}_d - x_2) - \alpha_2 e_2 + e_1 \right\} \\
U_3 = \frac{1}{b_2} \left\{ -a_4 x_2 x_6 - a_5 x_4^2 - a_6 x_2 \bar{\Omega} + \ddot{\theta}_d + \alpha_3 (\dot{\theta}_d - x_4) - \alpha_4 e_4 + e_3 \right\} \\
U_4 = \frac{1}{b_3} \left\{ -a_7 x_2 x_4 - a_8 x_6^2 + \ddot{\psi}_d + \alpha_5 (\dot{\psi}_d - x_6) - \alpha_6 e_6 + e_5 \right\} \\
U_x = \frac{m}{U_1} \left\{ -a_9 x_8 + \ddot{x}_d + \alpha_7 (\dot{x}_d - x_8) - \alpha_8 e_8 + e_7 \right\} \quad / \quad U_1 \neq 0 \\
U_y = \frac{m}{U_1} \left\{ -a_{10} x_{10} + \ddot{y}_d + \alpha_9 (\dot{y}_d - x_{10}) - \alpha_{10} e_{10} + e_9 \right\} \quad / U_1 \neq 0 \\
U_1 = \frac{m}{\cos x_1 \cos x_3} \left\{ g - a_{11} x_{12} + \ddot{z}_d + \alpha_{11} (\dot{z}_d - x_{12}) - \alpha_{12} e_{12} + e_{11} \right\} / \cos x_1 \cos x_3 \neq 0
\end{array} \right. \quad (\text{III.23})$$

III.6. Contrôleur de backstepping avec incertitudes

Nous reprenons les mêmes étapes précédentes pour le modèle dynamique sans incertitudes, les lois de commande synthétisées par backstepping avec incertitudes paramétriques deviennent :

$$\begin{cases}
U_2 = \frac{1}{(\Delta b_1 + b_1)} \left\{ -(\Delta a_1 + a_1)x_4x_6 - (\Delta a_2 + a_2)x_2^2 - (\Delta a_3 + a_3)x_4\bar{\Omega} + \ddot{\phi}_d + \alpha_1(\dot{\phi}_d - x_2) - \alpha_2e_2 + e_1 \right\} \\
U_3 = \frac{1}{(\Delta b_2 + b_2)} \left\{ -(\Delta a_4 + a_4)x_2x_6 - (\Delta a_5 + a_5)x_4^2 - (\Delta a_6 + a_6)x_2\bar{\Omega} + \ddot{\theta}_d + \alpha_3(\dot{\theta}_d - x_4) - \alpha_4e_4 + e_3 \right\} \\
U_4 = \frac{1}{(\Delta b_3 + b_3)} \left\{ -(\Delta a_7 + a_7)x_2x_4 - (\Delta a_8 + a_8)x_6^2 + \ddot{\psi}_d + \alpha_5(\dot{\psi}_d - x_6) - \alpha_6e_6 + e_5 \right\} \\
U_x = \frac{m}{U_1} \left\{ -(\Delta a_9 + a_9)x_8 + \ddot{x}_d + \alpha_7(\dot{x}_d - x_8) - \alpha_8e_8 + e_7 \right\} \quad / U_1 \neq 0 \\
U_y = \frac{m}{U_1} \left\{ -(\Delta a_{10} + a_{10})x_{10} + \ddot{y}_d + \alpha_9(\dot{y}_d - x_{10}) - \alpha_{10}e_{10} + e_9 \right\} \quad / U_1 \neq 0 \\
U_1 = \frac{m}{\cos x_1 \cos x_3} \left\{ g - (\Delta a_{11} + a_{11})x_{12} + \ddot{z}_d + \alpha_{11}(\dot{z}_d - x_{12}) - \alpha_{12}e_{12} + e_{11} \right\} / \cos x_1 \cos x_3 \neq 0
\end{cases} \quad (\text{III.24})$$

III.7. Conception de la loi de commande hybride

La commande appliquée dans ce chapitre est composée de deux terme :

Un premier terme correspond à la loi de commande par backstepping synthétisé dans le deuxième chapitre pour assurer la poursuite des trajectoires.

Un deuxième terme correspond à la loi de commande par retour d'état synthétisé dans ce chapitre pour stabiliser le système.

III.8. Simulation

Afin de pouvoir valider la nouvelle structure de commande modélisée par l'équation (III.25) basée essentiellement sur la synthèse d'un retour d'état non linéaire effectuée dans la section précédente, et la commande par backstepping développée dans le deuxième chapitre, On se procède à effectuer 2 tests.

Pour se faire, nous devons réaliser le schéma de commande suivant :

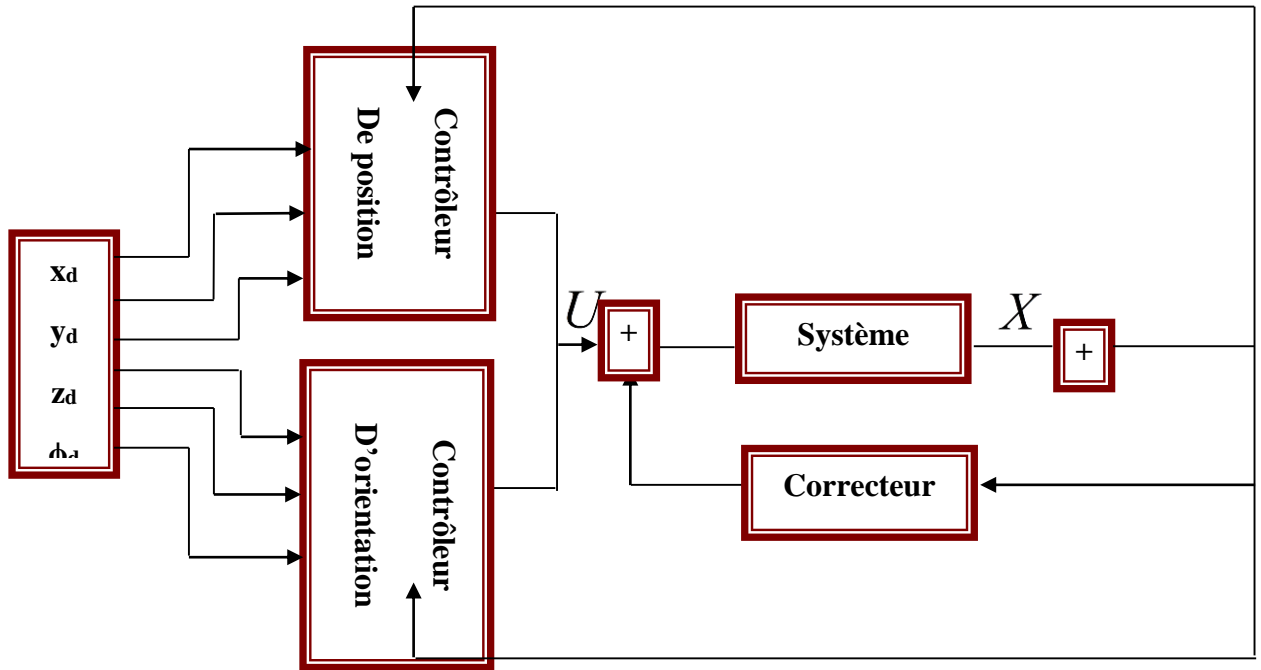


Figure III. 2 Structure de la loi de commande

III.9. Résultats et interprétations

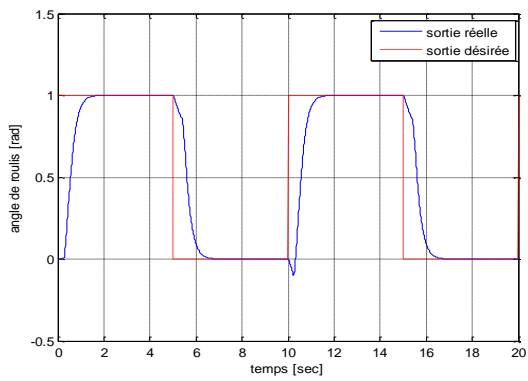


Figure III. 3. Angle de roulis

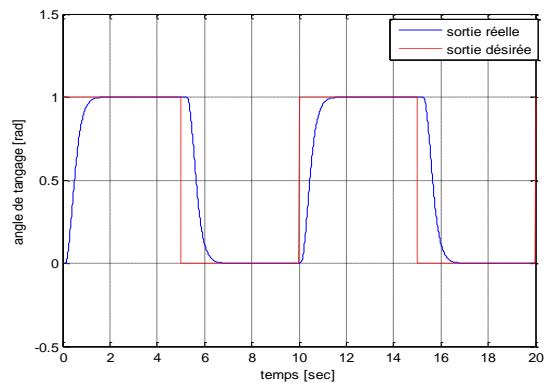


Figure III. 4. Angle de tangage

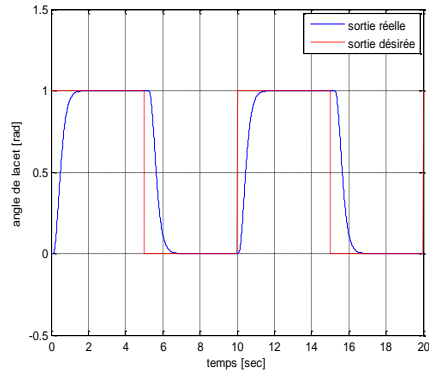


Figure III. 5. Angle de lacet

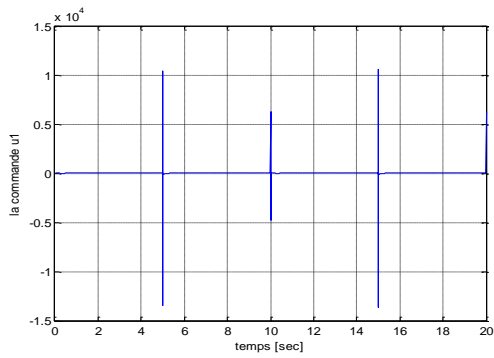


Figure III. 6. Signal de commande U1

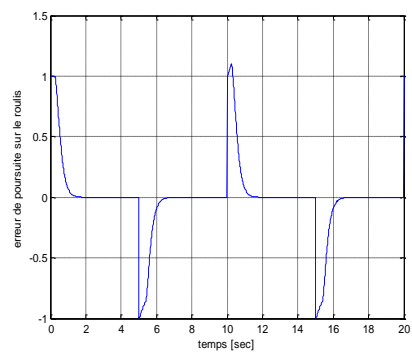


Figure III. 7. Signal de commande U2

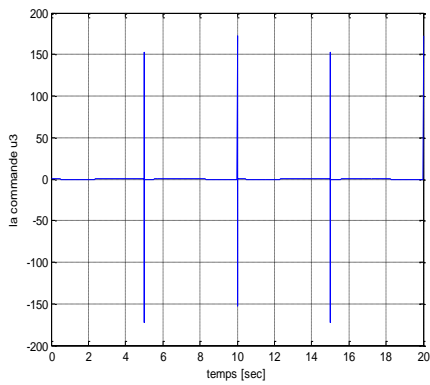


Figure III. 8. Signal de commande U3

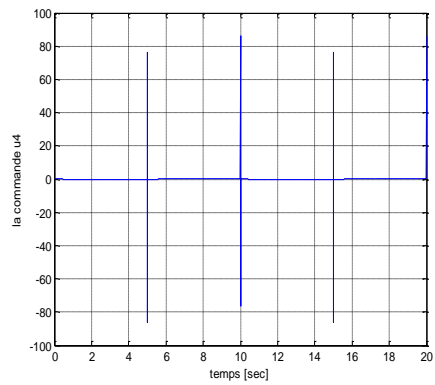


Figure III. 9. signal de commande U4

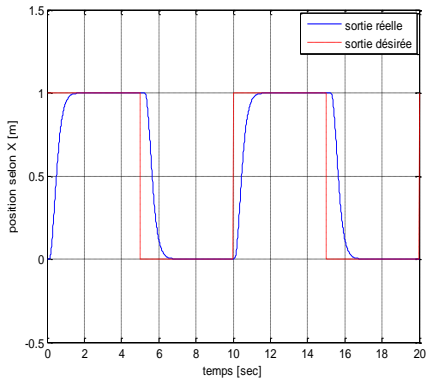


Figure III.10. Position selon l'axe X

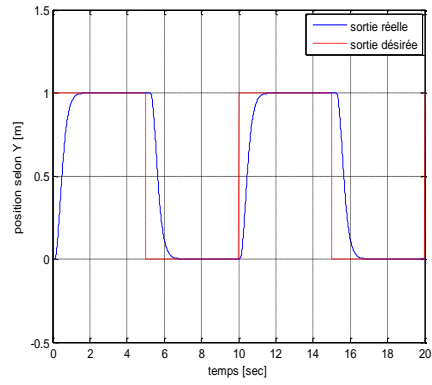


Figure III.11. Position selon l'axe Y

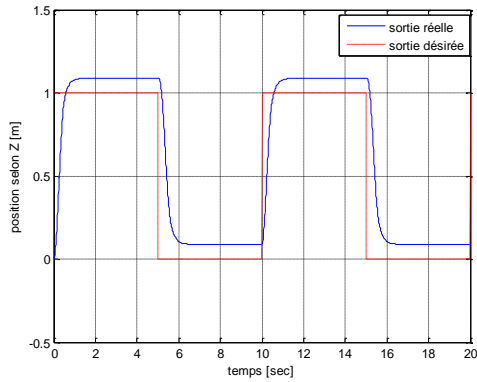


Figure III. 12. position selon l'axe Z

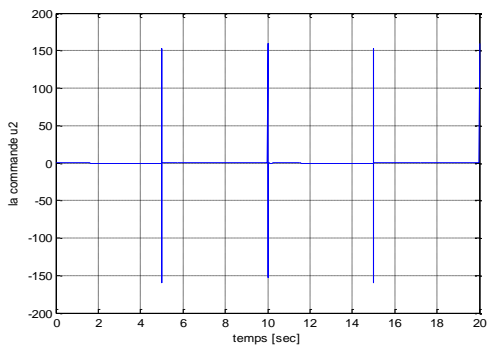


Figure III.13. Erreur de poursuite sur le roulis

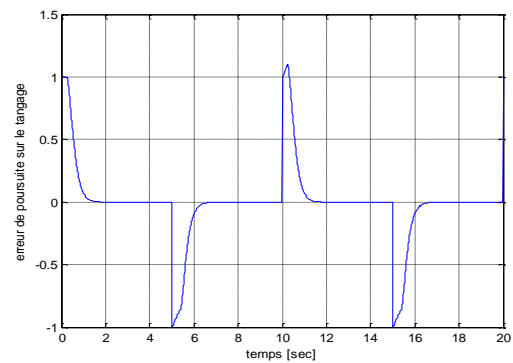


Figure III.14. Erreur de poursuite sur le tangage

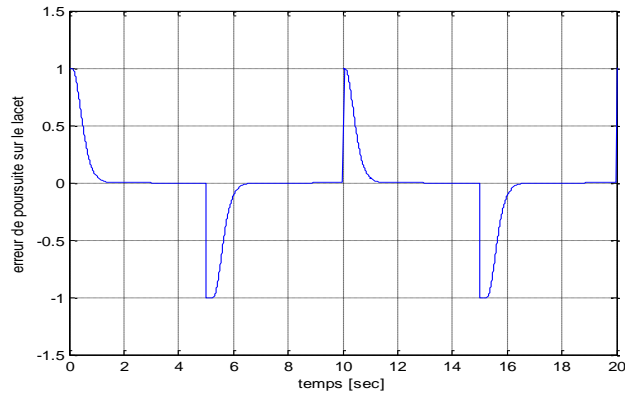


Figure III. 15. Erreur de poursuite sur le lacet

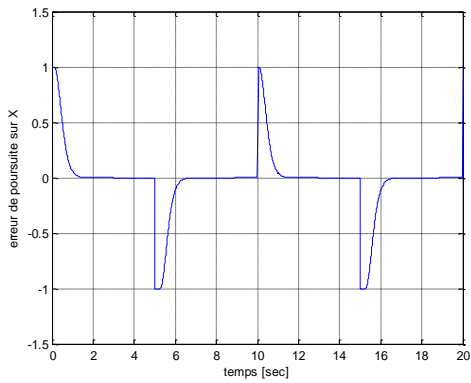


Figure III.16 Erreur de poursuite sur l'axe X

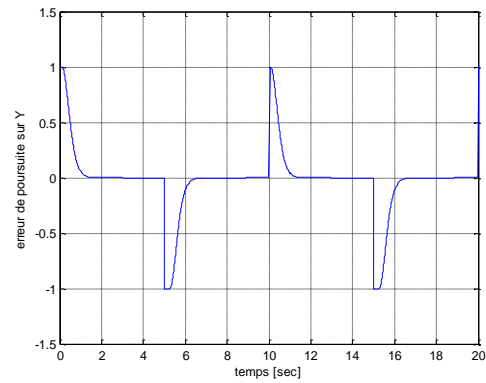


Figure III. 17. Erreur de poursuite sur L'axe Y

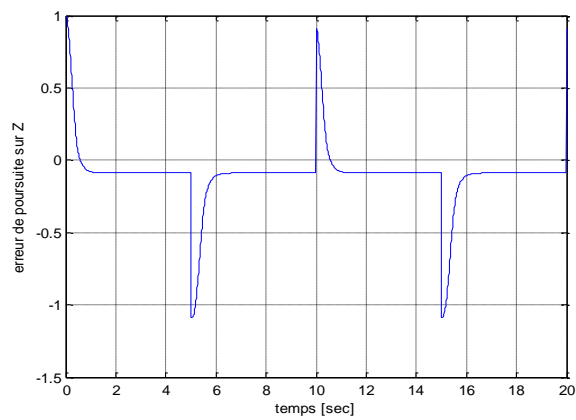


Figure III.18. Erreur de poursuite sur L'axe Z

D'après les résultats obtenus, nous remarquons que :

Les résultats de simulations du système soumis aux incertitudes paramétriques montrent que la stabilisation et les performances exigées sont satisfaites.

III.10. Conclusion

Dans ce chapitre, une loi de commande hybride par retour d'état et backstepping du quadricoptère a été présentée. L'utilisation d'une commande par retour d'état permet d'assurer la stabilité de la dynamique de notre procédé, et l'utilisation de la commande par backstepping est pour objectif de garantir la poursuite des trajectoires.

Cette structure a pour but de tester la robustesse et la rapidité de la commande hybride, ainsi que la flexibilité du contrôleur par retour d'état. Plusieurs simulations et résultats ont été présentés pour valider l'approche proposée ; nous avons traité le problème de poursuite dans le quadricoptère, incertain soumis aux perturbations externes.

En effet, la stabilité de notre commande en boucle fermée et la convergence de l'erreur de poursuite sont prouvées. Ainsi, l'efficacité de l'approche proposée est montrée par les résultats de simulation.

Les méfaits présentés par cette loi de commande résident dans l'énergie des commandes appliquées, ce qu'on peut voir qu'ils sont très grandes, en comparant les résultats trouvés dans ce chapitre à ceux trouvés dans le deuxième chapitre, en appliquant la commande par backstepping seule, et aussi que le contrôleur présenté dans ce chapitre ne peut pas supporter les milieux trop perturbés.

Conclusion générale

Conclusion générale

Avec la croissance de l'intérêt des UAV, celui des avions à atterrissage et à décollage verticale (VTOL), et le besoin d'une instrumentation discrète et surtout légère, le quadricoptère a connu une grande popularité ces dernières années. Ceci dit la principale motivation pour ce travail était la synthèse de lois de commande stabilisantes pour ce type d'engin chose indispensable pour la navigation.

Le quadricoptère est un système complexe non linéaire, multivariables, instable et présente une dynamique fortement couplée. Le problème traité consiste à garantir en premier lieu la stabilité de ce dernier ainsi que la poursuite de trajectoire avec plus au moins des performances acceptables vis-à-vis le milieu de navigation.

Souvent la commande de tels systèmes évoque de pré les problèmes de la modélisation dynamique ainsi que le problème de la fidélité du modèle au comportement dynamique du système, dans tous ces modes de vol, chose jusqu'à nos jours impossible à réaliser. Dans notre cas, le développement du modèle dynamique du quadricoptère était basé sur les travaux de recherche concernant l'identification expérimentale des paramètres d'un prototype existant au niveau de LISV (Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes de Versailles).

En effet, ce modèle a essayé de prendre en considération toutes les forces et tous les moments dont les coefficients ont été bien identifiés ; qui a permis par la suite de mettre le système sous une nouvelle représentation d'état, ce que nous avons présenté dans le chapitre I.

Dans les chapitres II, et III ; nous avons synthétisé deux différentes lois de commande la première est la commande par backstepping pure, et la deuxième est commande par backstepping et commande par retour d'état, en utilisant plusieurs techniques de commande non linéaire dans le but est d'assurer la stabilité du système ainsi que la poursuite (suivi) de trajectoire.

Dans la majorité des cas nous avons réussi à assurer en général la stabilité au sens de Lyapunov, on en déduit que quelques contrôleurs présentent de meilleures performances que d'autres.

Biographique

Liste des références

- [1] P.Cazin. La révolution des drones. Académie nationale de l'air et de l'espace, P87. n° 25. 2004.
- [2] N. Achotte. Conception, optimisation et dimensionnement des moteurs planaires à aimants permanents pour drones miniatures en vol stationnaire. PhD thesis, Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, Université Joseph Fourier, 2005.
- [3] A. Noth. Synthèse et Implémentation d'un Contrôleur pour Micro Hélicoptère à 4 Rotors. Projet de diplôme, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne. Février 2004.
- [4] C. Reboule. Appontage automatique d'un UAV Programme. ONERA/DCSD, Toulouse. JNRR'99, 27-29 septembre.
- [5] A.Vilchis. Modélisation et Commande d'Hélicoptère. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2001.
- [6] Wikipédia. <https://fr.wikipedia.org/wiki/dronehistoire>, 26 avril 2019.
- A.Vilchis, B.Brogliato, L.Dzul, and R.Lozano. Nonlinear modeling and control of helicopters. *Automatica*, 39: 1583-1596, 2003.
- [7] (de Fatima Bento, 2008).
- [8] T. Hamel, R. Mahony, R. Lozano, J. Ostrowski "Dynamic modelling and configuration
- [9] B. Toual "Modélisation et Commande Floue Optimisée d'une Génératrice à Double Alimentation, Application à un Système Eolien à Vitesse Variable", Université de Batna, 2010.
- [10] L.Gautier , B.hamilton , j.hazebrouck, T. Tourette. Pilotage d'un quadrirotor via un FPgA, journées pédagogiques,ESIEE engineering, 2008.
- [11] Edouard finoki . " commande de vol non linéaire d'un drone à voilure fixe par la méthode du backstepping m. Sc. A ". École de technologie supérieure université du Québec ; 20 mai 2015.
- [12] L. Derafa, T. Madani, A. Benallegue "Dynarnic Modelling and Experirmental Identification of Four Rotors Helicopter Parameters", IEEE 1-4244-0726-5/06, 2006, pp 1834-1839.

- [13] P. Pounds, R. Mahony, P. Hynes, J. Roberts “Design of a four rotor aerial robot”, Australasian conference on robotics and automation, 2002, pp 145-150.
- [14] B. Y. BOUSIFI Achraf, Etude en simulation d'une regulation thermique par logique floue, 2010.
- [15] L. N. Paquin. Application de backstepping à une colonne de flottation. M. Sc. thesis, Département de mines et métallurgie, Université Laval, Québec, 2001
- [16] A. Isodori, Nonlinear control systems II, Springer-verlag, 1999.
- [17] L. Bedji. Modélisation et commande de systèmes autonomes de type véhicules terrestres et aériens. Rapport présenté dans le cadre du: Programme SERST2007, Université de Tunisie, 2007.
- [18] F. H. Clarke. Yu. S. Leyaev. E. D. Sontag. A. I. Subbotin. Asymptotic controllability implies feedback stabilization. IEEE Trans. On automatic control, vol. XX, NO. 1999.
- [19] J. S. A. Wadoo. Feedback control and nonlinear controllability of nonholonomic systems. Masters of Science in Electrical Engineering thesis. Virginia, 2003
- [20] D. Bensoussan. Commande moderne. Approche par modèles continus et discret Masters of Science in Electrical Engineering thesis. Virginia, 2003.
- [21] A. Zamouche. Sur l'observation de l'état des systèmes dynamique non linéaires. Thèse