République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahai - Jijel

Faculté des Sciences Exacte et Informatique
Département de Mathématique

№ d'ordre : ....
№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques Appliquées.

Option : EDP et applications.

Thème

Régularisation du processus d'évolution de Moreau

Présenté par :

- **Boulali Chahrazad.**
- **Seghier Fadila.**

Devant le jury :

Président	: **T.Haddad**	**M.C.B**	**Université de Jijel**
Encadreur	: **Ch.Arroud**	**M.C.B.**	**Université de Jijel**
Examinateur	: **S.Maarouf**	**M.C.B.**	**Université de Jijel**

Promotion **2018/2019**

Remerciement

Nous tenons d'abord à remercier DIEU *de nous avoir donné la force et la patience pour terminer ce travail* .

Nous remercions particulièrement notre encadreur Mr.Arroud Chems Eddine *pour nous avoir encadré ce travail et pour ses conseils et ses orientation sur tout pour sa présence continue.*

Nous tenons à remercier sincèrement le nombres de jury Maarouf Sara et Touma Haddad qui ont accepté de jurer notre travail .

Nous remercions tous ceux que ont contribué de prés ou de loi à l'élaboration de ce travail.

Nous tenons aussi à remercier tous les enseignants du département de Mathématique de l'université de jijel qui ont contribué à notre formation .

merci pour tout à tout

Didicace

Je dédie ce travail à ceux qui m'ont donné leur amour, m'ont appris la persévérance, le gôut de la victoire et la joie de tous les jours.

A mes chères parents Brahim et terkia.

A mes frères : Noureddine , Radoiane et Ramzi .

A mes chéres sœurs : Aida, Loubna et ma grande sœur Razika et leur maris Nizar et leur enfants Adem, Hadil et chouib .

A toute la famille .

A mes amis, pour leur amitié, leur soutien moral, et leur conseil.

A tous les étudiants de mathématiques et plus particulièrement les étudiants des
EDP et applications .

A toute personne dont j'ai une place dans son cœur, que je connais, que j'estime et que j'aime.

Chahrazad

Didicace

Au terme de cette étude, je remercie avant tout, ***Dieu*** *tout puissant de m'avoir guidé de suivre le chemin de la science permis la réalisation de ce travail.*

Je dédie ce mémoire à :

A la fleurs de ma vie, ma mère ***Fatiha Benamor****, ma raison d'être, ma raison vivre, la lanterne qui éclaire mon chemin et m'illumine de douceur et d'amour.*

Mon père ***Alloia****, on signe d'amour, de reconnaissance et de gratitude pour tout les soutiens et les sacrifices dont il a fait preuve à mon égard .*

A mon fiancé ***Mourad.***

A mes sœurs,leurs maris et leurs enfants chacun son nom, surtout ma grande soeur ***Saliha****.*

A mes frères.

A mes chers amies : ***Fahima, Nadia, Affaf*** et ***wafa*** .

A tout mes proches qui m'ont aidé d'une façon ou d'une autre.

fadila

Table des matières

Introduction Générale **3**

1 Définitions et résultats préliminaires **4**

1.1 Notations 4

1.2 Préliminaires 5

1.2.1 Ensembles et fonctions convexes 5

1.2.2 Opérateur monotone et la régularisation de Yosida 5

1.2.3 Fonction distance et la projection 6

1.2.4 Cône normal 7

1.2.5 Enveloppe de Moreau 10

1.2.6 Ensemble ρ-prox-régulier 11

1.2.7 Étude de la convergence 11

1.2.8 Définitions 12

2 Introduction au processus de Moreau **14**

2.1 Introduction 14

2.2 Méthodes de résolution 16

2.2.1 Algorithme de rattrapage de Moreau 16

2.2.2 Régularisation du cône normal 18

2.2.3 Réduction à une inclusion différentielle sans contrainte 18

2.3 Système régularisé 18

3 Régularisation du processus de Moreau 20

3.1 Existence 22

3.2 Unicité 35

3.3 Exemple 36

Conclusion 39

Bibliographie 40

Introduction Générale

La théorie de l'analyse non lisse à été introduite dans les années quarante pour l'étude des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaire [3, 9], récemment elle est devenue une des méthodes importantes pour l'étude des inégalités variationnelles d'évolution, principalement celles gouvernées par le cône normal.

Moreau dans [12] a étudié les problèmes d'évolution, un type spéciale des inclusions différentielles celles gouvernées par le cône normal. Cette inclusion différentielle est définie comme suit :

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) \quad p.p\ t \in [0, T] \\ u(0) = u_0 \in C(0) \end{cases}$$

où $C(t)$ est un sous ensemble de l'espace de Hilbert H, C est l'ensemble des contraintes et N_C désigne le cône normal. Cette inclusion est appelée le processus de rafle (sweeping process), elle provenant du phénomène de l'élastoplasticité [2, 11].

Le sujet principal de ce mémoire est l'étude de l'existence et l'unicité de solutions pour ce type de problème d'évolution gouverné par le cône normal. Dans le premier chapitre, on rappelle les notions essentielles et les résultats de base concernant l'analyse convexe et non convexe.

Dans le deuxième chapitre, nous intéressons au problème du processus de rafle et nous donnons les méthodes de résolution de ce problème.

Dans le dernier chapitre nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution du problème :

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) \quad p.p\ t \in [0, T], \\ u(t) \in C(t), \\ u(0) = u_0 \in C(0). \end{cases}$$

en utilisant la méthode de régularisation de Moreau [10].

Chapitre 1

Définitions et résultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de base et quelques résultats fondamentaux concernant la convergence et la compacité qui seront utilisé dans les chapitres ultérieures [1] [4] [7] [8].

1.1 Notations

H	espace de Hilbert.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produit de dualité.
$\|x\|$	la norme de x dans un espace normé.
$I := [0, T]$	intervalle compact de $\mathbb{R}$ pour certains réels $T > 0$.
p.p	presque partout.
$D(A)$	domaine de l'opérateur A.
$proj_C(x)$	la projection de $x \in H$ sur C.
$N(C, x) = N_C(x)$	le cône normal à C au point x.
$\mathrm{int}(C)$	l'intérieure de l'ensemble C.
$L^p(H, I),\ p \geq 1$	espace de Hilbert des fonctions de carré Lebesgue intégrable muni de sa norme habituelle.
$B(x_0, r)$	boule ouvert centrée en x_0 de rayon r.
$S(x_0, r)$	sphère centrée en x_0 de rayon r.

$\nabla f(x)$ gradient de f.

1.2 Préliminaires

1.2.1 Ensembles et fonctions convexes

Définition 1.1. *Un sous ensemble C de H est dit convexe si* $\forall x, y \in C$, $\forall \alpha \in (]0,1[)$

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in C.$$

Autrement dit, un sous ensemble convexe joignant toujours le segment (x, y) reliant deux de ses points x et y.

Définition 1.2. *Soit* $f : H \longrightarrow]-\infty, +\infty]$

- *On appel domaine de f l'ensemble défini par*

$$D(f) := \{x \in H, f(x) < +\infty\}.$$

- *On dit que f est convexe si et seulement si :* $\forall x, y \in D(f)$, $\forall \alpha \in]0,1[$

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

- *On dit que f est strictement convexe si*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y), \text{ telle que } x \neq y.$$

$\forall x, y \in D(f)$, $\forall \alpha \in]0,1[$.

1.2.2 Opérateur monotone et la régularisation de Yosida

Définition 1.3. *Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur linéaire non-borné, on dit que A est monotone si :* $\forall x_1, x_2 \in D(A)$

$$\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0,$$

ou plus précisément, $\forall y_1 \in Ax_1, y_2 \in Ax_2$:

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

Définition 1.4. *Un opérateur de* H *est dit maximal monotone s'il est maximal dans l'ensemble des opérateurs monotones, ou bien* A *est maximal monotone si :* $\forall f \in H, \exists u \in D(A)$ *tel que :*

$$u + Au = f.$$

Définition 1.5. *Soit* A *un opérateur maximal monotone, on pose pour tout* $\lambda > 0$,

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1},$$

et

$$A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda),$$

tel que J_λ *est la résolvante de* A *et* A_λ *est la régularisée de Yosida de* A.

1.2.3 Fonction distance et la projection

Définition 1.6. *Soit* C *un sous ensemble fermé non vide de* H*, la fonction de distance que l'on note* $d_C(\cdot)$ *est donnée par :*

$$d_C(x) := \inf\{\|x - y\|;\ y \in C\}.$$

$\forall\ x, y$ *et* $z \in H$ *la distance* $d(\cdot)$ *vérifiant*

- $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Définition 1.7. *Soit* $C \subset H$ *un sous ensemble non vide, la projection de* x *sur* C *est définie par*

$$proj_C(x) := \{y \in C; d_C(x) = \|x - y\|\ \forall x \in H\}.$$

Proposition 1.8. [4]

Soit C *un sous ensemble fermé non vide de* H*, alors les propositions suivant satisfait :*

- $x \in C \Longleftrightarrow d_C(x) = 0$, $\forall x \in H$,

- *La fonction distance est continument Lipschitzienne avec la constante de Lipschitz égale à 1,*
- $\forall x, y \in H \,:\, d_C(x+y) \leq d_C(x) + d_C(y)$,
- $p = proj_C(x) \Longleftrightarrow \{p \in C$ *et* $\forall y \in C,\ \langle y-p, x-p\rangle \leq 0\}$,
- *Si* $d_C(x) < k,\ k > 0$ *alors* $\forall x \in H \,:\, \|x - proj_C(x)\| = d_C(x)$,
- $\forall x, y \in H : \|proj_C(x) - proj_C(y)\|^2 \ \leq \langle x-y, proj_C(x) - proj_C(y)\rangle$.

Définition 1.9. *Soit* $f : H \to]-\infty, +\infty[$ *et soit* $x \in C$ *alors l'ensemble défini par :*

$$\partial f(x) = \{\zeta \in H, \langle \zeta, y-x\rangle \leq f(y) - f(x), \forall y \in H\}$$

est le sous-différentiel de f *en* x*.*

- *L'ensemble* $\partial f(x)$ *est une partie convexe fermée.*
- *Soit* $\zeta_1 \in \partial f(x_1)$ *et* $\zeta_2 \in \partial f(x_2)$ *c-à-d :*

$$\langle \zeta_1, x_2 - x_1\rangle \leq f(x_2) - f(x_1),\ \forall x_2 \in H. \tag{1.1}$$

et

$$\langle \zeta_2, x_1 - x_2\rangle \leq f(x_1) - f(x_2),\ \forall x_1 \in H. \tag{1.2}$$

en addition (1.1) *et* (1.2)

$$\begin{aligned} &\langle \zeta_1, x_2 - x_1\rangle + \langle \zeta_2, x_1 - x_2\rangle \leq 0 \\ &\Longrightarrow \langle \zeta_1, x_1 - x_2\rangle - \langle \zeta_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0 \\ &\Longrightarrow \langle \zeta_1 - \zeta_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Donc le sous-différentiel d'une fonction est monotone dans H*.*

Définition 1.10. *Le gradient d'une fonction* $f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ *qu'on note* ∇f *est le vecteur des composantes* $\partial f/\partial x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$*, c-à-d les dérivées partielles de f par rapport aux coordonnées.*

1.2.4 Cône normal

Définition 1.11. *Un sous ensemble* C *est dit cône si* $\forall x \in C$

$$\forall \alpha \geq 0, \alpha x \in C.$$

C-à-d :

$$\forall \alpha \geq 0,\ \alpha C \subset C.$$

De plus si C est convexe on dit que C est cône convexe.

Définition 1.12. *La fonction indicatrice d'un ensemble convexe C de H qu'on note par $\psi_C(\cdot)$ est définie par :*

$$\psi_C(u) = \begin{cases} 0 & si\ u \in C, \\ +\infty & sinon. \end{cases}$$

Définition 1.13. *Le cône normal à un sous ensemble convexe non vide fermé $C \subset H$ en un point $x \in C$ est défini par :*

$$N_C(x) = \begin{cases} \zeta \in H : \langle \zeta, y - x \rangle \leq 0 & si\ y \in C, \\ \emptyset & sinon. \end{cases}$$

Définition 1.14. *Soit C un sous ensemble non vide de H, le cône normal proximal à C en $x \in H$ qu'on note $N_C^p(\cdot)$ est définie comme l'ensemble :*

$$N_C^p(x) = \begin{cases} v \in H : \exists r > 0,\ x \in proj_C(x + rv) & si\ x \in C, \\ \emptyset & sinon. \end{cases}$$

Pour chaque $x \in C$, on sait que N_C^p est un cône convexe (n'est pas nécessairement fermé) contenant l'origine.

Proposition 1.15. *Soit C un sous ensemble fermé non vide de H*

- *Si $x \in C$, alors $\partial \psi_C(x) = N_C(x)$,*
- *Si $x \in int(C)$, alors $N_C(x) = \{0\}$.*

Preuve.

- $\partial \psi_C(x) = N_C(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} a.\ \partial \psi_C(x) \subset N_C(x) \quad et \\ b.\ N_C(x) \subset \partial \psi_C(x). \end{cases}$

a. Soit $\zeta \in \partial \psi_C(x)$ alors $\langle \zeta, y - x \rangle \leq \psi_C(y) - \psi_C(x)\ \forall y \in H$,
en particulier $y \in C$

$$\langle \zeta, y - x \rangle \leq \psi_C(y) = 0,$$

or $\zeta \in N_C(x)$.

b. Soit $\zeta \in N_C(x)$ alors

$$\langle \zeta, y-x \rangle \leq 0 \ \forall y \in C \Longrightarrow \langle \zeta, y-x \rangle \leq \psi_C(y) - \psi_C(x) \quad \forall y \in C.$$

De plus $\langle \zeta, y-x \rangle \leq \psi_C(y) - \psi_C(x) \quad \forall y \in H$, car $\psi_C(y) = +\infty \ si \ y \notin C$.

- $N_C(x) = \{0\} \Longleftrightarrow \begin{cases} i. \ \{0\} \subset N_C(x). \ \ et \\ ii. \ N_C(x) \subset \{0\}. \end{cases}$

$i.$ $\{0\} \subset N_C(x)$.
Soit $x' \in N_C(x) \Longleftrightarrow \langle x', y-x \rangle \leq 0 \ \forall y \in C$, pour $x' = 0$ on a

$$0 = \langle x', y-x \rangle \leq 0,$$

donc $\{0\} \subset N_C(x)$.

$ii.$ Soit $x \in int(C) \Longleftrightarrow \exists \epsilon > 0, B(x,\epsilon) \subset C$. Soit $z \in S(0,1)$ alors $\|z\|$=1
On pose $y = x + \delta z$ tel que $0 < \delta < \epsilon$ on obtient :

$$\|y-x\| = \|\delta z\| = \delta \|z\| = \delta < \epsilon,$$

par conséquent $y \in B(x,\epsilon) \subset C$, c-à-d $y \in C$.
Soit $x' \in N_C(x)$ donc

$$\begin{aligned} \langle x', y-x \rangle \leq 0 &\Longrightarrow \langle x', x+\delta z - x \rangle \leq 0 \\ &\Longrightarrow \delta \langle x', z \rangle \leq 0 \\ &\Longrightarrow \langle x', z \rangle \leq 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

D'autre part, soit $y = x - \delta z$ alors

$$\|y-x\| = \|-\delta z\| = \delta \|z\| = \delta < \epsilon,$$

par conséquent $y \in B(x,\epsilon) \subset C$ c-à-d $y \in C$.

Donc

$$\begin{aligned}\langle x', y - x\rangle \leq 0 &\Longrightarrow \langle x', x - \delta z - x\rangle \leq 0 \\ &\Longrightarrow -\delta\langle x', z\rangle \leq 0 \\ &\Longrightarrow \langle x', z\rangle \geq 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

De (1.3) et (1.4), on obtient

$$\begin{aligned}\langle x', z\rangle = 0 &\Longrightarrow \sup_{z \in S(0,1)} \langle x', z\rangle = 0 \\ &\Longrightarrow \|x'\| = 0 \\ &\Longrightarrow x' = 0. \end{aligned}$$

D'oû, $N_C(x) \subset \{0\}$, de i. et ii. on trouve que $N_C(x) = \{0\}$.

$\blacksquare$

1.2.5 Enveloppe de Moreau

Définition 1.16. *Soit $f : H \longrightarrow]-\infty, +\infty[$ est soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$, l'enveloppe de Moreau de f de paramètre λ est*

$$e_\lambda f := f \circ (\frac{1}{2\lambda}\|\cdot\|^2),$$

où :

$$(g \circ h)(x) := \inf_{y \in H}(g(y) + h(x - y)).$$

Propriétés 1.17. [4]
Soit $f \in \Gamma_0(H)$, $x \in H$. Alors on a :

- $e_\lambda \psi(\cdot) = \frac{1}{2\lambda} d_C^2(\cdot),\ \forall \lambda > 0,$
- $\forall \lambda > 0, e_\lambda f$ *est convexe,*
- $(e_\lambda f(x))_{\lambda > 0}$ *est décroissant,*
- $e_\lambda f(x) \longrightarrow f(x)$ *lorsque* $\lambda \to 0$ *et* $e_\lambda f(x) \longrightarrow \inf_{y \in H} f(y)$ *lorsque* $\lambda \to +\infty$,
- $e_\lambda f$ *est différentiable sur H avec le gradient λ^{-1}-Lipschitz.*

Proposition 1.18. *Soit $f \in \Gamma_0(H)$ alors la régularisation de Yosida de ∂f pour tout $\lambda > 0$ est le gradient $\nabla e_\lambda f$ associé à l'enveloppe de Moreau $e_\lambda f$.*

1.2.6 Ensemble ρ-prox-régulier

Définition 1.19. *Soient E un espace de Banach, C sous ensemble fermé de E, on dit que l'ensemble C est ρ-prox-régulier si pour tout $x \in C$ et $v \in N_C^p \setminus \{0\}$ on a :*

$$B(x + \rho\frac{v}{\|v\|}, \rho) \cap C = \emptyset.$$

Si $\rho = +\infty$ alors $\frac{1}{\rho} = 0$, dans ce cas le ρ-prox-régularité est équivalent à la convexité de C.

C est uniformément prox-régulier de constant ρ si tout point à distance de C inférieure à ρ a une unique projection sur C.

$$(\forall y \in C)\ \langle v, y - x\rangle \leq \frac{\|v\|}{2\rho}\|y - x\|^2.$$

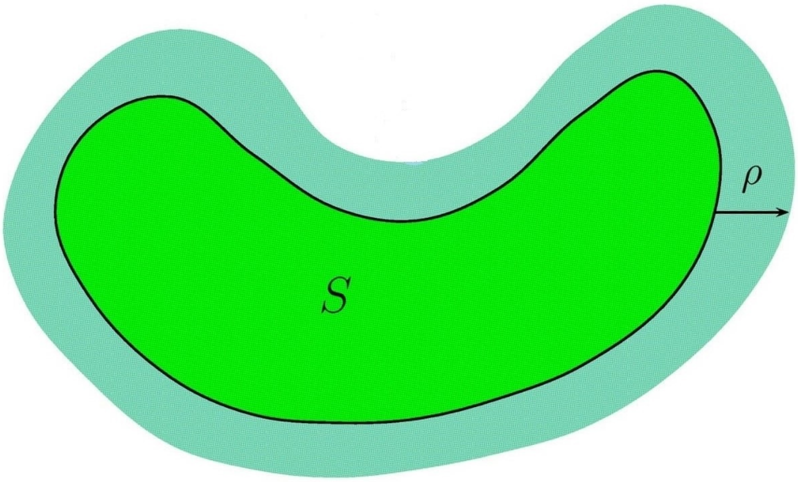

FIGURE 1.1 - Ensemble ρ -prox rigulier.

1.2.7 Étude de la convergence

Définition 1.20. *Soit E un espace de Banach et E' son dual, soit $f \in E'$, on désigne par $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f = \langle f, x\rangle$.*

La topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f\in E'}$.

Notation 1.21. *Si $x_n \longrightarrow x$ dans $\sigma(E, E')$ on notera $x_n \rightharpoonup x$ et on dira que x_n converge* *faiblement vers x dans E, et $x_n \longrightarrow x$ veut dire que x_n converge fortement vers x, c-à-d :* $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$.

Proposition 1.22. [7]
Soit $(x_n)_n$ une suite des points de E, et E' le dual de E alors

- $x_n \rightharpoonup x \Longleftrightarrow \langle f, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle\ \forall f \in E'$,
- $x_n \longrightarrow x \Longrightarrow x_n \rightharpoonup x$,
- *si* $x_n \rightharpoonup x$ *alors* $\|x_n\|$ *est bornée et* $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$,
- *si* $x_n \rightharpoonup x$ *et* $f_n \longrightarrow f$ *fortement dans* E', *alors* $\langle f_n, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle$.

1.2.8 Définitions

Définition 1.23. *Soit $f : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ on dit que f est lipschitzienne s'il existe $l > 0$ tel que*

$$\mid f(x) - f(y) \mid \leq l\|x - y\|, \forall x, y \in H.$$

Définition 1.24. *On dit que $u : I \longrightarrow H$ est absolument continue s'il existe une suite $\dot{u} : I \longrightarrow H$ et $\dot{u} \in L^1(I, H)$*
et

$$u(t) = u(0) + \int_0^t \dot{u}(s) ds, \quad \forall t \in I.$$

Remarque 1.25.

- *toute fonction absolument continue est continue,*
- *toute fonction lipschitzienne est absolument continue,*
- *toute fonction absolument continue est uniformément continue .*

Définition 1.26. *Une fonction lisse est une fonction qui a des dérivées de tous les ordres partout dans son domaine. Ou si les dérivés de f de tous les ordres existent et sont continues, alors f est dit infiniment différentiable, ou tout simplement lisse.*

Lemme 1.27. (***Lemme de Mazur***) : *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et soit u_n une suite qui converge faiblement vers u dans E lorsque $n \to \infty$. Alors il existe une fonction $M : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et une suite d'ensemble des nombres réels, $\{\alpha_{n_k},\ k = n, ..., M(n)\}$ telles que $\alpha_{n_k} \geq 0$ et $\sum_{k=n}^{M(n)} \alpha_{n_k} = 1$, telle que $\sum_{k=n}^{M(n)} \alpha_{n_k} u_k$ converge fortement dans E vers u , c-à-d :*

$$\|\sum_{k=n}^{M(n)} \alpha_{n_k} u_k - u\| \longrightarrow 0, \ lorsque\ n \to \infty.$$

Théorème 1.28. (***convergence dominée de Lebesgue***) : *Soit* (f_n) *une suite de fonctions mesurables telle que* $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *p.p si :* $\exists g \in L^p,\ \forall (x,n),\ |f_n(x)| \leq g(x)$. *Alors ;*

$$f \in L^p \text{ et } f_n \longrightarrow f \text{ en norme } L^p.$$

Chapitre 2

Introduction au processus de Moreau

2.1 Introduction

Le processus de rafle a été introduit par Jean Jacques-Moreau dans les années 1970, il a examiné le probléme suivant :
pour $a \in C(0)$, un point $u(t)$ doit se trouver dans un ensemble mobile convexe $C(t) \subset H$, lorsque ce point touche la borne du cercle $C(t)$, il se déplace dans le sens contraire de la direction normale extérieure de la borne, car il est poussé par une force physique affin de rester à l'intérieure de l'ensemble convexe $C(t)$.

Alors $u(t)$ est la position de ce point qui peut être une solution du problème lorsqu'il touche la borne, ce phénomène est décrit par cette inclusion différentielle :

$$-\dot{u}(t) \in \partial\psi(u(t)) \; et \; u(0) = a, \tag{2.1}$$

où l'ensemble $\partial\psi(u(t))$ est le sous différentiel de la fonction indicatrice $\psi(\cdot)$ au point u.

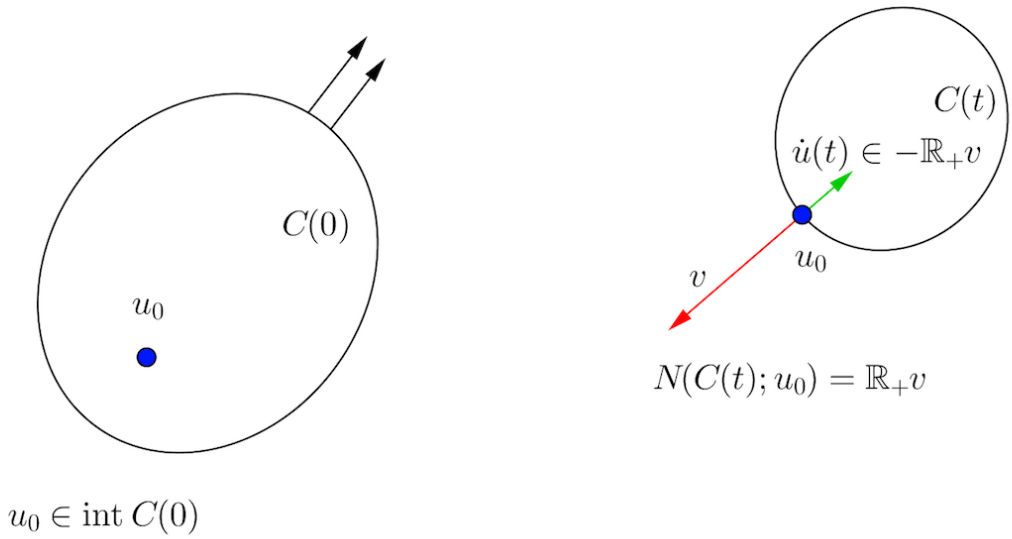

FIGURE 2.1 - Processus de rafle .

Soit $u_0 \in C(0)$, le problème (2.1) est équivalent au problème suivant :
Trouver la solution $u : I \longrightarrow H$ tel que :

$$(SP)\begin{cases} -\dot{u}(t) \in \partial\psi_{C(t)}(u(t)) \equiv N_{C(t)}(u(t)) & p.p.t \in I, \\ u(t) \in C(t) & \forall\ t \in I, \\ u(0) = u_0 \in C(0). \end{cases}$$

Le processus de rafle couvre plusieurs problèmes mécaniques, telle ; procédure de planification, mouvement de la foule, modèles élastoplastiques, circuits électriques non réguliers, problème d'évolution quasi statique avec les modèles de frottement et de dommages mécromécaniques pour les matériaux ferreux, etc.

On peut élargé ce problème dans différents cas :

- Dépendant de l'état(1987/1998) : dans ce cas l'ensemble $C(\cdot)$ dépend non seulement de t mais de l'état $u(t)$ aussi, le probléme (SP) devient :

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) & p.p.t \in I, \\ u(0) = u_0 \in C(0, u_0). \end{cases}$$

- Non convexe(1988) : c'est le même problème (SP), avec C non vide fermée et non convexe.
- Un probléme perturbé (1984) : le processus de rafle perturbé est l'inclusion différen-

tielle suivante :

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) + F(t, u(t)) & p.p.t \in I, \\ u(t) \in C(t) & pour\ tout\ t \in I. \end{cases}$$

Telle que $F : I \times H \longrightarrow H$ est un multifonction à valeurs convexes fermés non vides.

- Deuxième ordre (au sens de Schatzman (1978), au sens de Castaing (1988)) :

$$\begin{cases} -\ddot{u}(t) \in N_{C(u(t))}(\dot{u}(t)) & p.p.t \in I, \\ u(0) = u_0, \dot{u}(0) = v_0 \in C(0, u_0). \end{cases}$$

- Dans l'espace de Banach (2010) : dans ce cas on étudie le problème (SP) dans l'espace de Banach.

Il existent d'autre cas qu'on peut étudie le problème de rafle comme en Stochastique (1973), et dans l'espace de Wasserstein(2016).

2.2 Méthodes de résolution

Dans cette section nous allons aborder la question d'existence de solutions pour le problème (SP), trois méthodes existent : l'algorithme de rattrapage de Moreau, la réduction à une inclusion différentielle sans contraintes ainsi que la régularisation du cône normal.

2.2.1 Algorithme de rattrapage de Moreau

Dans cette méthode, pour chaque $n \geq 1$, on considère la discrétisation de l'intervalle $I = [0, T]$ comme suit :

$$0 = t_{n,0} < t_{n,1} < \cdots < t_{n,n-1} < t_{n,n} = T \ avec\ t_{n,i} = \frac{i}{n}T \ et\ 0 < i < n-1,$$

c-à-d

$$I_{n,i} = [t_{n,i}, t_{n,i+1}[,\ \ 0 < i \leq n-1.$$

avec

$$\begin{cases} n \geq 1, \\ t_{n,i+1} - t_{n,i} = \frac{T}{n} \quad 0 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

Nous définissons les approximations $(u_{n,i})_{i=0,n-1}$ comme suit

$$\begin{cases} u_{n,i+1} = proj_{C(t_{n,i+1})}(u_{n,i}), \\ u_{n,i} \in C(t_{n,i}), \\ u_{n,0} = u_0 \in C(0). \end{cases}$$

Selon l'algorithme ci-dessus, les approximations $(u_{n,i})$ sont tenues de rattrapes $C(t_{n,i})$, d'où l'appellation "algorithme de rattrapage".

On va définir la suite des solutions approchées $u_n : [0, T] \longrightarrow H$ sur chaque sous intervalles $[t_{n,i}, t_{n,i+1}],\ i = 0, ..., n-1$, via une interpolation linéaire comme suit :

$$u_n(t) = u_{n,i} + \frac{t - t_{n,i}}{t_{n,i+1} - t_{n,i}}(u_{n,i+1} - u_{n,i}) \ pour\ tout\ t \in [0, T],\ i = 0, ..., n-1.$$

ensuite on va montrer que (u_n) converge vers une fonction $u : I \longrightarrow H$ qui est la solution du problème (SP)

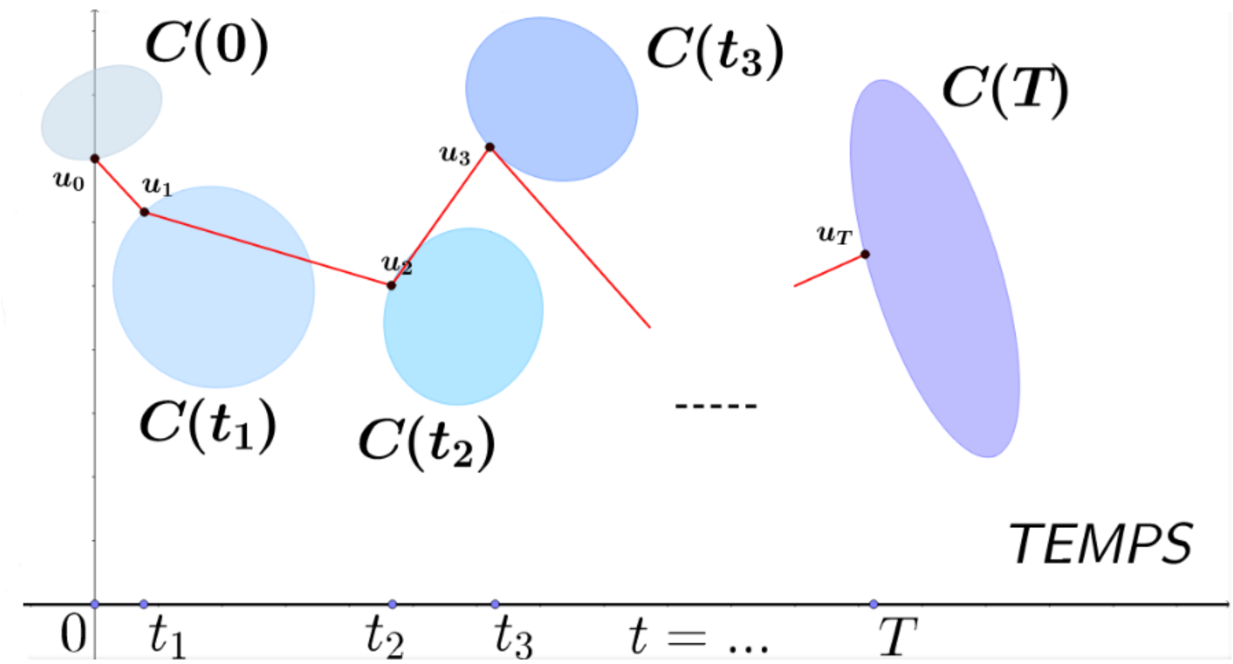

Figure 2.2 - Interprétation géomètrique de l'algorithme de rattrapage.

2.2.2 Régularisation du cône normal

Pour résoudre l'inclusion différentielle (SP), on cherche une famille où une équation différentielle ordinaire

$$(E_j)\begin{cases}\dot{u}_j(t) = f(t, u_j(t)),\\ u_j(0) = u_0.\end{cases}$$

Ensuite on va établir la convergence $u_j(\cdot) \longrightarrow u(\cdot)$, d'où $u(\cdot)$ est la solution du problème (SP).

2.2.3 Réduction à une inclusion différentielle sans contrainte

On suppose qu'il existe une fonction lipschitzienne $\zeta : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

$$|d(x, C(t)) - d(y, C(s))| \leq \|x - y\| + |\zeta(t) - \zeta(s)| \; pour \; tout \; x, y \in H$$

et $\forall s, t \in I$.
Alors l'idée est de transformer l'inclusion différentielle avec contrainte (SP) à un problème sans contrainte qui est équivalent comme suit :

$$\begin{cases}-\dot{u}(t) \in \dot{\zeta}(t)\partial_C d_{C(t)}(u(t)) \quad p.p.t \in I,\\ u(0) = u_0.\end{cases}$$

2.3 Système régularisé

Régularisation de Moreau Yosida : Soit $A : H \longrightarrow H$ un opérateur maximale monotone, nous considérons le problème d'évolution suivant : trouver la solution $u : [0, +\infty[\longrightarrow H$ telle que :

$$-\dot{u}(t) \in Au(t), \; u(0) = u_0. \tag{2.2}$$

Pour résoudre (2.2) on va suivre cette régularisation où l'équation différentiel ordinaire est comme suit

$$\dot{u}_\lambda(t) = -A_\lambda u_\lambda(t), \; u_\lambda(0) = u_0.$$

Si on pose $A_t(\cdot) = N_{C(t)}(\cdot)$, on a le processus de rafle.

La question qui se pose : comment calculer l'approximation de Yosida de $A_t(\cdot)$?

Soit la fonction $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, l'enveloppe de Moreau de f est la fonction $e_\lambda f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\lambda > 0$ défini par :

$$e_\lambda f(x) := \inf_{y \in H} (f(y) + \frac{1}{2\lambda}\|y - x\|^2) \textit{ pour tout } x \in H.$$

Pour $f = \psi_{C(t)}$ où $C(t)$ est un ensemble convexe fermé et non vide, $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} e_\lambda \psi_{C(t)}(x) &= \inf_{y \in H} (\psi_{C(t)}(y) + \frac{1}{2\lambda}\|x - y\|^2) \ \forall x \in H, \\ &= \inf_{y \in H} \frac{1}{2\lambda}\|x - y\|^2 \ \forall x \in H, \\ &= \frac{1}{2\lambda} d^2_{C(t)}(x). \end{aligned}$$

Alors

$$(A_t)_\lambda(x) := \frac{1}{2\lambda} \nabla d^2_{C(t)}(x).$$

Exemple 2.1. *La régularisation de Moreau Yosida permet de transformer une fonction convexe non nécessairement lisse (f) en une fonction convexe et lisse (g) en gardant le même minimum.*

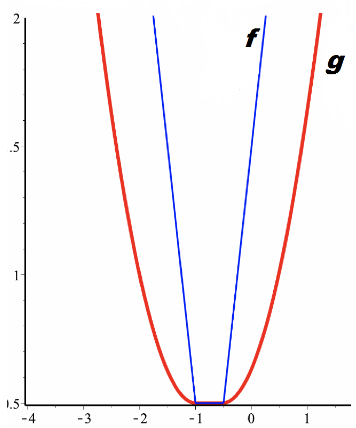

Figure *2.2* - ***Graphes de la fonction f et l'enveloppe de Moreau g.***

Chapitre 3

Régularisation du processus de Moreau

Ce chapitre est l'axe principal de ce mémoire, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution pour l'inclusion différentielle du premier ordre

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) & p.p\ t \in [T_0, T], \\ u(t) \in C(t) & pour\ tout\ t \in [T_0, T], \\ u(T_0) = a \in C(T_0), \end{cases}$$

où C est un sous ensemble fermé de H, bouge dans un sens lipschitzienne et $N_{C(t)}(u(t))$ désigne le cône normal a C au point $u(t)$.

Proposition 3.1. [14]

1. *L'ensemble fermé C est ρ-prox-régulier lorsqu'un point quelconque x de l'ouverture ρ-élargissement de C*
$$U_\rho(C) := \{u \in H; d_C(u) < \rho\},$$
2. *La fonction de distance au carré $d_C^2(\cdot)$ est continument différentiable sur $U_\rho(C)$,*
3. *Pour tout $0 < \delta < \rho$ la projection est $\frac{\rho}{\rho-\delta}$ lipschitzienne sur $U_\delta(C)$ c-à-d : $\forall x', x \in U_\delta(C)$:*
$$\|proj_C(x) - proj_C(x')\| \leq \frac{\rho}{\rho - \delta}\|x - x'\|. \tag{3.1}$$
De plus, si C est ρ-prox-régulier, on a :
$$\frac{1}{2}\nabla d_C^2(x) = x - proj_C(x), \tag{3.2}$$

4. *Soit C est un sous ensemble fermé, non vide et ρ-prox-régulier $\forall \zeta \in N_C(x)$, on a $x \in proj_C(x + \frac{\rho}{\|\zeta\|}\zeta)$, c-à-d : $\forall x' \in C$*

$$\|x - \left(x + \frac{\rho}{\|\zeta\|}\zeta\right)\|^2 \ \leq \|x + \frac{\rho}{\|\zeta\|}\zeta - x'\|^2,$$

c'est équivalent à :

$$\langle \zeta, x' - x \rangle \ \leq \frac{\|\zeta\|}{2\rho}\|x' - x\|^2, \forall x' \in C, \tag{3.3}$$

et cela donne que $\zeta \in N_C^F(x)$, donc $N_C^F(x) = N_C(x)$. Plus généralement, la ρ-prox-régulier de l'ensemble fermé C, donne

$$N_C(x) = N_C^F(x) = \{\zeta \in H : \exists r > 0, x \in proj_C(x + r\zeta)\}. \tag{3.4}$$

L'inégalité (3.3) *implique également que :*

$$\langle \zeta' - \zeta, x' - x \rangle \ \geq -\|x' - x\|^2, \tag{3.5}$$

$\forall \zeta \in N_C(x)$ et $\zeta' \in N_C(x')$ avec $\|\zeta\| \leq \rho$ et $\|\zeta'\| \leq \rho$,

5. *On dit que $C(t)$ se déplace de manière lipschitzien si $\forall t \in [T_0, T], \exists \gamma > 0$ telle que $\forall x \in H$:*

$$\mid d_{C(t)}(x) - d_{C(s)}(x) \mid \ \leq \gamma \mid t - s \mid, \tag{3.6}$$

$\forall t, s \in [T_0, T]$.

Lemme 3.2. *(**Lemme de Gronwall**) : Soit $b, c, \zeta : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ trois fonctions intégrable de Lebesgue, si la fonction $\zeta(\cdot)$ est absolument continue sur $[t_0, t_1]$ et*

$$\dot{\zeta}(t) \ \leq b(t) + c(t)\zeta(t) \ p.p.t \in [t_0, t_1],$$

alors $\forall t \in [t_0, t_1]$

$$\zeta(t) \ \leq \zeta(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} c(\tau)d\tau\right) + \int_{t_0}^{t} b(s) \exp\left(\int_{s}^{t} c(\tau)d\tau\right) ds.$$

Maintenons nous donnons le théorème principal de notre travail.

Théorème 3.3. *Soit $C(t)$ un sous ensemble de H fermé, non vide, ρ-prox-régulier, et se* *déplace de façon lipschitzienne c-à-d :*

$$| d_{C(t)}(x) - d_{C(s)}(x) | \leq \gamma \mid t - s \mid \quad \forall t, s \in [T_0, T], \forall x \in H.$$

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(SP) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) & p.p.t \in [T_0, T], \\ u(T_0) = a \in C(T_0). \end{cases}$$

Soit $0 < \theta < \frac{\rho}{3\gamma}$ *et* $\lambda > 0$*, l'équation différentielle régularisée sur* $[T_0, T] \times B(a, \frac{\rho}{3})$ *est donnée par :*

$$(SP_\lambda) \begin{cases} \dot{u}_\lambda(t) = -\frac{1}{2\lambda} \nabla d^2_{C(t)}(u_\lambda(t)) & p.p \ t \in [T_0, T], \\ u_\lambda(T_0) = a. \end{cases}$$

ce système régularisé est bien défini et a une solution unique u_λ *sur* $[T_0, T_0 + \theta]$ *et la famille* $(u_\lambda)_\lambda$ *converge uniformément sur* $[T_0, T_0 + \theta]$ *lorsque* $\lambda \to 0$ *vers la solution du problème (SP).*

Preuve du théorème

3.1 Existence

La preuve de l'existence peut être divisée en plusieurs étapes :

Étape 01. $d_{C(t)}(u_\lambda(t)) \leq \lambda\gamma, \forall t \in [T_0, T], \forall \lambda > 0$

Lemme 3.4. *Soit* $z : [T_0, T] \to H$ *une fonction localement absolument continue et* $g(t) := d_{C(t)}(z(t))$ *pour tout* $t \in [T_0, T]$.
On pose :

$$d_{C(t)}(z(t)) < \rho, \forall t \in [T_0, T],$$

alors

$$\dot{g}(t)g(t) \leq \langle \dot{z}(t), z(t) - proj_{C(t)}(z(t)) \rangle + \gamma g(t), \ \ p.p.t \in [T_0, T].$$

Preuve. On pose

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{2} d^2_{C(t)}(x), \ \forall x \in H \ \forall t \in [T_0, T],$$

d'après (3.6) g est absolument continue c-à-d :

$$\begin{aligned} \mid g(t)-g(s) \mid &= \mid d_{C(t)}(z(t)) - d_{C(s)}(z(s)) \mid \\ &\leq \|z(t)-z(s)\| + \gamma \mid t-s \mid, \forall t,s \in [T_0,T]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

On fixe $t \in int(J) =]t_0, t_1[\subset [T_0, T]$ telle que g et z sont dérivable en t, d'après (3.5) et (3.2) la fonction $\varphi(t,\cdot)$ est continue et différentiable autour de $z(t)$ et :

$$\nabla\varphi(t,z(t)) = z(t) - proj_{C(t)}(z(t)).$$

Pour $s \in]0, t_1 - t[$ on a :

$$\begin{aligned} \dot{g}(t)g(t) &= \dot{g}(t)\frac{2g(t)}{2} \\ &= \lim_{s\to 0}\frac{g(t+s)-g(t)}{s}\lim_{s\to 0}\frac{g(t+s)+g(t)}{2} \\ &= \lim_{s\to 0}\frac{(g(t+s)-g(t))(g(t+s)+g(t))}{2s} \\ &= \lim_{s\to 0}\frac{g(t+s)^2-g(t)^2}{2s}. \end{aligned}$$

Calculons $\frac{1}{2s}(g(t+s)^2 - g(t)^2)$, telle que $g(t) = d_{C(t)}(z(t))$, $\forall t \in]t_0, t_1[$ et $s \in]0, t_1 - t[$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2s}(g(t+s)^2-g(t)^2) &= \frac{1}{s}(\frac{1}{2}d^2_{C(t+s)}(z(t+s)) - \frac{1}{2}d^2_{C(t)}(z(t))) \\ &= \frac{1}{s}(\varphi(t+s,z(t+s)) - \varphi(t,z(t))) \\ &= \frac{1}{s}(\varphi(t+s,z(t+s)) - \varphi(t,z(t+s))) + \frac{1}{s}(\varphi(t,z(t+s)) - \varphi(t,z(t))) \\ &= \frac{1}{s}(\frac{1}{2}d^2_{C(t+s)}(z(t+s)) - \frac{1}{2}d^2_{C(t)}(z(t+s))) + \frac{1}{s}(\varphi(t,z(t+s)) - \varphi(t,z(t))) \\ &= \frac{1}{2s}(d_{C(t+s)}(z(t+s)) - d_{C(t)}(z(t+s)))(d_{C(t+s)}(z(t+s)) + d_{C(t)}(z(t+s))) \\ &+ \frac{1}{s}(\varphi(t,z(t+s)) - \varphi(t,z(t))), \end{aligned}$$

d'après (3.7)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2s}(g(t+s)^2-g(t)^2) &\leq \frac{1}{2s}\|z(t+s)-z(t+s)\| + \gamma \mid t+s-t \mid (d_{C(t+s)}(z(t+s)) + d_{C(t)}(z(t+s))) \\ &+ \frac{1}{s}(\varphi(t,z(t+s)) - \varphi((t),z(t))) \\ &\leq \frac{\gamma}{2}(d_{C(t+s)}(z(t+s)) + d_{C(t)}(z(t+s))) \\ &+ \frac{1}{s}(\varphi(t,z(t+s)) - \varphi(t,z(t))). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Puisque z est dérivable à t, il existe $\varepsilon(s) \to 0$ quand $s \to 0$ où utiliser le développement au limite de z au voisinage de s, on a :

$$z(t+s) = z(t) + s\dot{z}(t) + s\varepsilon(s),$$

et cela donne :

$$\frac{1}{s}(\varphi(t, z(t+s)) - \varphi(t, z(t))) = \frac{1}{s}(\varphi(t, z(t) + s\dot{z}(t) + s\varepsilon(s)) - \varphi(t, z(t)))$$

et comme $\varphi(t, \cdot)$ est différentiable alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s}(\varphi(t, z(t+s)) - \varphi(t, z(t))) &= \frac{1}{s}(\varphi(t, z(t) + s\dot{z}(t) + s\varepsilon(s)) - \varphi(t, z(t))) \\
&= \frac{1}{s}(\varphi(t, z(t) + s\dot{z}(t)) + s\|\varepsilon(s)\|\nabla\varphi(t, z(t) + s\dot{z}(t)) - \varphi(t, z(t))) \\
&= \frac{1}{s}(\varphi(t, z(t) + s\dot{z}(t)) - \varphi(t, z(t))) + \|\varepsilon(s)\|\nabla\varphi(t, z(t) + s\dot{z}(t)) \\
&= \frac{1}{s}(\varphi(t, z(t) + s\dot{z}(t)) - \varphi(t, z(t))) \\
&+ \|\varepsilon(s)\|\lim_{s\to 0}\frac{\varphi(t, z(t) + s\dot{z}(t) + s\varepsilon(s)) - \varphi(t, z(t) + s\dot{z}(t))}{s\varepsilon(s)} \\
&= \frac{1}{s}(\varphi(t, z(t) + s\dot{z}(t)) - \varphi(t, z(t))) \\
&+ \frac{\|\varepsilon(s)\|}{2}\lim_{s\to 0}\frac{d^2_{C(t)}(z(t) + s\dot{z}(t) + s\varepsilon(s)) - d^2_{C(t)}(z(t) + s\dot{z}(t))}{s\varepsilon(s)} \\
&= \frac{1}{s}(\varphi(t, z(t) + s\dot{z}(t)) - \varphi(t, z(t))) \\
&+ \frac{\|\varepsilon(s)\|}{2}\lim_{s\to 0}\frac{(d_{C(t)}(z(t) + s\dot{z}(t) + s\varepsilon(s)) - d_{C(t)}(z(t) + s\dot{z}(t)))}{s\varepsilon(s)} \\
&(d_{C(t)}(z(t) + s\dot{z}(t) + s\varepsilon(s)) + d_{C(t)}(z(t) + s\dot{z}(t))) \\
&= \frac{1}{s}(\varphi(t, z(t) + s\dot{z}(t)) - \varphi(t, z(t))) \\
&+ \frac{\|\varepsilon(s)\|}{2}\lim_{s\to 0}\frac{(d_{C(t)}(z(t) + s\dot{z}(t)) + d_{C(t)}(s\varepsilon(s)) - d_{C(t)}(z(t) + s\dot{z}(t)))}{s\varepsilon(s)} \\
&(d_{C(t)}(z(t) + s\dot{z}(t) + s\varepsilon(s)) + d_{C(t)}(z(t) + s\dot{z}(t))) \\
&= \frac{1}{s}(\varphi(t, z(t) + s\dot{z}(t)) - \varphi(t, z(t))) \\
&+ \frac{\|\varepsilon(s)\|}{2}\lim_{s\to 0}(d_{C(t)}(z(t) + s\dot{z}(t) + s\varepsilon(s)) + d_{C(t)}(z(t) + s\dot{z}(t))) \\
&\leq \frac{1}{s}(\varphi(t, z(t) + s\dot{z}(t)) - \varphi(t, z(t))) \\
&+ \frac{\|\varepsilon(s)\|}{2}(d_{C(t)}(z(t) + s\dot{z}(t) + s\varepsilon(s)) + d_{C(t)}(z(t) + s\dot{z}(t))).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Nous remplaçons (3.9) dans (3.8) on obtient

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2s}(g(t+s)^2 - g(t)^2) \leq\ & \frac{\gamma}{2}(d_{C(t+s)}(z(t+s)) + d_{C(t)}(z(t+s))) + \frac{1}{s}(\varphi(t, z(t)+s\dot{z}(t)) - \varphi(t, z(t))) \\
& + \frac{\|\varepsilon(s)\|}{2}(d_{C(t)}(z(t)+s\dot{z}(t)+s\varepsilon(s)) + d_{C(t)}(z(t)+s\dot{z}(t))) \\
& = \frac{\gamma}{2}(d_{C(t+s)}(z(t+s)) + d_{C(t)}(z(t+s))) + \frac{1}{s}(\varphi(t, z(t)+s\dot{z}(t)) - \varphi(t, z(t))) \\
& + \eta(s),
\end{aligned}
$$

telle que

$$
\eta(s) = \frac{\|\varepsilon(s)\|}{2}(d_{C(t)}(z(t)+s\dot{z}(t)+s\varepsilon(s)) + d_{C(t)}(z(t)+s\dot{z}(t))).
$$

Passant à la limite lorsque $s \to 0$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\dot{g}(t)g(t) \leq\ & \frac{\gamma}{2}\lim_{s\to 0}(d_{C(t+s)}(z(t+s)) + d_{C(t)}(z(t+s))) \\
& + \dot{z}(t)\lim_{s\to 0}\frac{\varphi(t, z(t)+s\dot{z}(t)) - \varphi(t, z(t))}{s\dot{z}(t)} + \lim_{s\to 0}\eta(s) \\
& = \frac{\gamma}{2}2d_{C(t)}(z(t)) + \langle \dot{z}(t), \nabla\varphi(t, z(t))\rangle \\
& = \gamma g(t) + \langle \dot{z}(t), \nabla\varphi(t, z(t))\rangle.
\end{aligned}
$$

D'après (3.2)

$$
\dot{g}(t)g(t) \leq \gamma g(t) + \langle \dot{z}(t), z(t) - proj_{C(t)}(z(t))\rangle.
$$

■

Lemme 3.5. *On fixe un nombre réel positif satisfaisant* $\theta < \frac{\rho}{3\gamma}$ *et soit* $g_\lambda(t) = d_{C(t)}(u_\lambda(t)), \forall t \in [T_0, T_\lambda[\subset [T_0, T_0+\theta]$, $\lambda > 0$ *alors* g_λ *est absolument continue sur* $[T_0, T_\lambda[$ *et*

$$
\dot{g}_\lambda(t) \leq \gamma - \frac{1}{\lambda}g_\lambda(t) \quad p.p.t \in [T_0, T_\lambda[,
$$

en plus $\forall t \in [T_0, T_\lambda[$:

$$
g_\lambda(t) \leq \lambda\gamma.
$$

Preuve. Soit $t \in]T_0, T_\lambda[$ telle que $\dot{g}_\lambda(t)$ et $\dot{u}_\lambda(t)$ existe et satisfait (SP_λ) puisque $u_\lambda(t) \in B(a, \frac{\rho}{3})$.

On pose $z(t) = u_\lambda(t)$ dans le lemme (3.4) on obtient :

$$
\dot{g}_\lambda(t)g_\lambda(t) \leq \gamma g_\lambda(t) + \langle \dot{u}_\lambda(t), u_\lambda(t) - proj_{C(t)}(u_\lambda(t))\rangle,
$$

on a

$$\dot{u}_\lambda(t) = -\frac{1}{2\lambda}\nabla d^2_{C(t)}(u_\lambda(t)) = -\frac{1}{\lambda}(u_\lambda(t) - proj_{C(t)}(u_\lambda(t))),$$

alors

$$\begin{aligned}\dot{g}_\lambda(t)g_\lambda(t) &\leq \gamma g_\lambda(t) - \frac{1}{\lambda}\langle u_\lambda(t) - proj_{C(t)}(u_\lambda(t)), u_\lambda(t) - proj_{C(t)}(u_\lambda(t))\rangle \\ &\leq \gamma g_\lambda(t) - \frac{1}{\lambda}\|u_\lambda(t) - proj_{C(t)}(u_\lambda(t))\|^2,\end{aligned}$$

et comme $g_\lambda(t) = d_{C(t)}(z(t)) = \|u_\lambda(t) - proj_{C(t)}(z(t))\|$ alors

$$\dot{g}_\lambda(t)g_\lambda(t) \leq \gamma g_\lambda(t) - \frac{1}{\lambda}g_\lambda(t)^2$$

$\Longrightarrow$

$$\dot{g}_\lambda(t) \leq \gamma - \frac{1}{\lambda}g_\lambda(t) \quad si\ g_\lambda(t) > 0.$$

Si $g_\lambda(t) = 0$: pour tout s soit petit on a

$$\frac{1}{s}(g_\lambda(t+s) - g_\lambda(t)) = \frac{1}{s}d_{C(t)}(u_\lambda(t+s),$$

et puisque $\dot{g}_\lambda(t)$ existe, on obtient que :

$$\dot{g}_\lambda(t) = \lim_{\substack{> \\ s\longrightarrow 0}}\frac{1}{s}d_{C(t)}(u_\lambda(t+s)) \geq 0,$$

et

$$\dot{g}_\lambda(t) = \lim_{\substack{< \\ s\longrightarrow 0}}\frac{1}{s}d_{C(t)}(u_\lambda(t+s)) \leq 0.$$

Donc $\dot{g}_\lambda(t) = 0$, alors pour tout $t \in [T_0, T_\lambda[$: $\dot{g}(t) \leq \gamma - \frac{1}{\lambda}g_\lambda(t)$.

En utilisant le Lemme de Gronwall (lemme 3.2) telle que $b(\cdot) = \gamma$ et $c(\cdot) = -\frac{1}{\lambda}$ on obtient $\forall t \in [T_0, T_\lambda]$

$$\begin{aligned}g_\lambda(t) &\leq g_\lambda(T_0)\exp\left(\int_{T_0}^t -\frac{1}{\lambda}d\tau\right) + \int_{T_0}^t \gamma\exp\left(\int_s^t -\frac{1}{\lambda}d\tau\right)ds \\ &\leq g_\lambda(T_0)\exp\left(-\frac{t-T_0}{\lambda}\right) + \int_{T_0}^t \gamma\exp\left(-\frac{t-s}{\lambda}\right)ds,\end{aligned}$$

et puisque

$$\begin{aligned} g_\lambda(T_0) &= d_{C(T_0)}(u_\lambda(T_0)) \\ &= d_{C(T_0)}(a) \\ &= 0, \end{aligned}$$

car $u_{T_0} \in C(T_0)$, on a

$$\begin{aligned} g_\lambda(t) &\leq \gamma \int_{T_0}^{t} \exp\left(-\frac{t-s}{\lambda}\right) ds \\ &= \gamma \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) \int_{T_0}^{t} \exp(\frac{s}{\lambda}) ds \\ &= \gamma\lambda \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) \left(\exp\left(\frac{t}{\lambda}\right) - \exp\left(\frac{T_0}{\lambda}\right)\right) \\ &= \lambda\gamma \left(1 - \exp\left(-\frac{t-T_0}{\lambda}\right)\right) \\ &\leq \lambda\gamma. \end{aligned}$$

■

Étape 02. u_λ est γ - Lipschitz continue avec $\|\dot{u}_\lambda(t)\| \leq \gamma,\ p.p\ t \in [T_0, T]$

Lemme 3.6. *La dérivée de la solution $u_\lambda(\cdot)$ du problème (SP_λ) est borné, c-à-d : $u_\lambda : [T_0, T] \longrightarrow H$ est γ-lipschitzienne continue telle que :*

$$\|\dot{u}_\lambda(t)\| \leq \gamma.$$

Preuve. Comme u_λ est solution de (SP_λ) on a :

$$\dot{u}_\lambda(t) = -\frac{1}{\lambda}(u_\lambda(t) - proj_{C(t)}(u_\lambda(t))),$$

c-à-d

$$\|\dot{u}_\lambda(t)\| = \frac{1}{\lambda}\|u_\lambda(t) - proj_{C(t)}(u_\lambda)\|,$$

et comme

$$g_\lambda(t) = d_{C(t)}(u_\lambda(t)) = \|u_\lambda(t) - proj_{C(t)}(u_\lambda(t))\|,$$

alors

$$\|\dot{u}_\lambda(t)\| = \frac{1}{\lambda} g_\lambda(t),$$

d'après le lemme 3.5, on trouve :

$$\|\dot{u}_\lambda(t)\| \leq \frac{1}{\lambda}(\lambda\gamma) = \gamma. \tag{3.10}$$

■

Étape 03. $(u_\lambda)_{\lambda>0}$ est une suite de Cauchy dans $C([T_0,T],H)$

Lemme 3.7. *Soit $u : [T_0,T] \longrightarrow H$ telle que $u \in C^1([T_0,T],H)$ alors :*

$$\frac{d}{dt} \parallel u_\lambda(t) - u_\mu(t) \parallel^2 = 2\langle \dot{u}_\lambda(t) - \dot{u}_\mu(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t)\rangle, \ \forall \lambda,\mu > 0.$$

Preuve. $\forall \lambda,\mu > 0, t \in [T_0,T]$;

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2 &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\|u_\lambda(t+h) - u_\mu(t+h)\|^2 - \|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\langle u_\lambda(t+h) - u_\mu(t+h), u_\lambda(t+h) - u_\mu(t+h)\rangle - \|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\langle u_\lambda(t+h) - u_\mu(t+h) - (u_\lambda(t) - u_\mu(t)) + (u_\lambda(t) - u_\mu(t)), \\
&u_\lambda(t+h) - u_\mu(t+h) - (u_\lambda(t) - u_\mu(t)) + (u_\lambda(t) - u_\mu(t))\rangle - \|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\langle u_\lambda(t+h) - u_\mu(t+h) - (u_\lambda(t) - u_\mu(t)), \\
&u_\lambda(t+h) - u_\mu(t+h) - (u_\lambda(t) - u_\mu(t))\rangle \\
&+ \langle u_\lambda(t+h) - u_\mu(t+h) - (u_\lambda(t) - u_\mu(t)), u_\lambda(t) - u_\mu(t)\rangle \\
&+ \langle u_\lambda(t) - u_\mu(t), u_\lambda(t+h) - u_\mu(t+h) - (u_\lambda(t) - u_\mu(t))\rangle \\
&+ \langle u_\lambda(t) - u_\mu(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t)\rangle - \|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\langle u_\lambda(t+h) - u_\mu(t+h) - (u_\lambda(t) - u_\mu(t)), \\
&u_\lambda(t+h) - u_\mu(t+h) - (u_\lambda(t) - u_\mu(t))\rangle \\
&+ 2\langle u_\lambda(t+h) - u_\mu(t+h) - (u_\lambda(t) - u_\mu(t)), u_\lambda(t) - u_\mu(t)\rangle \\
&+ \|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2 - \|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2) \\
&= \lim_{h\to 0}\langle \frac{u_\lambda(t+h) - u_\mu(t+h) - (u_\lambda(t) - u_\mu(t))}{h}, \\
&u_\lambda(t+h) - u_\mu(t+h) - (u_\lambda(t) - u_\mu(t))\rangle \\
&+ 2\lim_{h\to 0}\langle \frac{u_\lambda(t+h) - u_\mu(t+h) - (u_\lambda(t) - u_\mu(t))}{h}, u_\lambda(t) - u_\mu(t)\rangle \\
&= \langle \dot{u}_\lambda(t) - \dot{u}_\mu(t), 0\rangle + 2\langle \dot{u}_\lambda(t) - \dot{u}_\mu(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t)\rangle \\
&= 2\langle \dot{u}_\lambda(t) - \dot{u}_\mu(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t)\rangle
\end{aligned}$$

■

Lemme 3.8. $\forall \lambda, \mu < \frac{\rho}{\gamma}$ *on a :*

$$\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2 \leq 2(\lambda+\mu)\gamma^2 \int_{T_0}^{t} \exp(18\frac{\gamma}{\rho}(t-s)ds)$$

$\forall t \in [T_0, T_0+\theta]$.

Preuve. Soit $proj_{C(t)} : U_\rho(C(t)) \longrightarrow H, \forall \delta < \rho$, de l'inégalité (3.1)

$$\| \, proj_{C(t)}(u_\lambda(t)) - proj_{C(t)}(u_\mu(t)) \, \| \leq \frac{\rho}{\rho - \delta} \, \| \, u_\lambda(t) - u_\mu(t) \, \|,$$

$\forall u_\lambda, u_\mu \in U_\rho(C(t))$.
$\forall x \in B(a, \frac{\rho}{3}), t \in [T_0, T_0+\theta]$ on a d'après (3.6) :

$$| \, d_{C(t)}(x) - d_{C(T_0)}(a) \, | \leq \gamma \, | \, t - T_0 \, | + \| \, x - a \, \|,$$

$$\Longrightarrow d_{C(t)}(x) \leq \gamma \, | \, t - T_0 \, | + \| \, x - a \, \| + d_{C(T_0)}(a).$$

Soit $t \in [T_0, T_0+\theta]$ et $0 < \theta < \frac{\rho}{3\gamma}$:

$$\gamma \, | \, t - T_0 \, | \leq \gamma \, | \, T_0 + \theta - T_0 \, | = \gamma\theta < \frac{\gamma\rho}{3\gamma} = \frac{\rho}{3}.$$

De plus $d_{C(T_0)}(a) = 0$ car $a \in C(T_0)$ et $\|x - a\| < \frac{\rho}{3}$ alors $d_{C(t)}(x) < \frac{2\rho}{3} < \rho$,
c-à- d :$\forall u_\lambda, u_\mu \in B(a, \frac{\rho}{3})$ *et* $\delta = \frac{2}{3}\rho$:

$$\| \, proj_{C(t)}(u_\lambda(t)) - proj_{C(t)}(u_\mu(t)) \, \| \leq 3 \, \| \, u_\lambda(t) - u_\mu(t) \, \| \, . \tag{3.11}$$

Et comme $-\frac{\rho}{\gamma}\dot{u}_i(t) \in N_{C(t)}(proj_{C(t)}(u_i(t))), \ \forall \ proj_{C(t)}(u_i(t)) \in C(t), \ i = \lambda, \mu$,
et d'après (3.10)

$$\| \, \frac{\rho}{\gamma}\dot{u}_i(t) \, \| \leq \frac{\rho}{\gamma}\gamma = \rho, \ i = \lambda, \mu,$$

alors

$$\langle -\dot{u}_\lambda(t) - (-\dot{u}_\mu(t)), proj_{C(t)}(u_\lambda(t)) - proj_{C(t)}(u_\mu(t)) \rangle \geq -\frac{\gamma}{\rho} \, \| \, proj_{C(t)}(u_\lambda(t)) - proj_{C(t)}(u_\mu(t)) \, \|^2 \, .$$

D'après (3.11)

$$\langle -\dot{u}_\lambda(t) - (-\dot{u}_\mu(t)), proj_{C(t)}(u_\lambda(t)) - proj_{C(t)}(u_\mu(t))\rangle \geq -9\frac{\gamma}{\rho} \parallel u_\lambda(t) - u_\mu(t) \parallel^2 . \quad (3.12)$$

Et on a : $\nabla\frac{1}{2}d^2_{C(t)}(u_\lambda(t)) = u_\lambda(t) - proj_{C(t)}(u_\lambda(t))$ et $-\dot{u}_\lambda(t) = \nabla\frac{1}{2\lambda}d^2_{C(t)}(u_\lambda(t))$, alors $-\lambda\dot{u}_\lambda(t) = u_\lambda(t) - proj_{C(t)}(u_\lambda(t)) \Longrightarrow proj_{C(t)}(u_\lambda(t)) = u_\lambda(t) + \lambda\dot{u}_\lambda(t)$. Donc :

$$\begin{aligned}\langle -\dot{u}_\lambda(t) - (-\dot{u}_\mu(t)), proj_{C(t)}(u_\lambda(t)) - proj_{C(t)}(u_\mu(t))\rangle &= \langle -\dot{u}_\lambda(t) + \dot{u}_\mu(t), \\ &\quad u_\lambda(t) + \lambda\dot{u}_\lambda(t) - (u_\mu(t) + \mu\dot{u}_\mu(t))\rangle \\ &= \langle -\dot{u}_\lambda(t), \lambda\dot{u}_\lambda(t)\rangle + \langle \dot{u}_\mu(t), -\mu\dot{u}_\mu(t)\rangle \\ &\quad + \langle -\dot{u}_\lambda(t), -\mu\dot{u}_\mu(t) + u_\lambda(t) - u_\mu(t)\rangle \\ &\quad + \langle \dot{u}_\mu(t), \lambda\dot{u}_\lambda(t) + u_\lambda(t) - u_\mu(t)\rangle \\ &= -\lambda \parallel \dot{u}_\lambda(t) \parallel^2 - \mu \parallel \dot{u}_\mu(t) \parallel^2 \\ &\quad + (\lambda + \mu)\langle \dot{u}_\lambda(t), \dot{u}_\mu(t)\rangle \\ &\quad + \langle \dot{u}_\mu(t) - \dot{u}_\lambda(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t)\rangle.\end{aligned} \quad (3.13)$$

On remplaçons (3.12) dans (3.13) on obtient :

$$\begin{aligned}&-\lambda \parallel \dot{u}_\lambda(t) \parallel^2 - \mu \parallel \dot{u}_\mu(t) \parallel^2 + (\lambda + \mu)\langle \dot{u}_\lambda(t), \dot{u}_\mu(t)\rangle + \langle \dot{u}_\mu(t) - \dot{u}_\lambda(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t)\rangle \\ &\geq -9\frac{\gamma}{\rho} \parallel u_\lambda(t) - u_\mu(t) \parallel^2,\end{aligned}$$

qui est équivalent a :

$$\begin{aligned}&\langle \dot{u}_\lambda(t) - \dot{u}_\mu(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t)\rangle \leq 9\frac{\gamma}{\rho} \parallel u_\lambda(t) - u_\mu(t) \parallel^2 - \lambda \parallel \dot{u}_\lambda(t) \parallel^2 - \mu \parallel \dot{u}_\mu(t) \parallel^2 \\ &+ (\lambda + \mu) < \dot{u}_\lambda(t), \dot{u}_\mu(t) >,\end{aligned}$$

d'après le lemme (3.7) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}dt \parallel u_\lambda(t) - u_\mu(t) \parallel^2 &\leq 9\frac{\gamma}{\rho} \parallel u_\lambda(t) - u_\mu(t) \parallel^2 - \lambda \parallel \dot{u}_\lambda(t) \parallel^2 - \mu \parallel \dot{u}_\mu(t) \parallel^2 \\ &\quad + (\lambda + \mu)\langle \dot{u}_\lambda(t), \dot{u}_\mu(t)\rangle \\ &\leq (\lambda + \mu)\langle \dot{u}_\lambda(t), \dot{u}_\mu(t)\rangle + 9\frac{\gamma}{\rho} \parallel u_\lambda(t) - u_\mu(t) \parallel^2,\end{aligned}$$

de (3.10)

$$\frac{d}{dt} \parallel u_\lambda(t) - u_\mu(t) \parallel^2 \leq 2(\lambda+\mu)\gamma^2 + 18\frac{\gamma}{\rho} \parallel u_\lambda(t) - u_\mu(t) \parallel^2 .$$

En utiliser le lemme de Gronwall (lemme 3.2) avec $b(t) = 2(\lambda+\mu)\gamma^2$ et $c(t) = 18\frac{\gamma}{\rho}$ on trouve :

$\parallel u_\lambda(t) - u_\mu(t) \parallel^2 \leq \parallel u_\lambda(T_0) - u_\mu(T_0) \parallel \exp\left(\int_{T_0}^t 18\frac{\gamma}{\rho} d\tau\right) + \int_{T_0}^t 2(\lambda+\mu)\gamma^2 \exp\left(\int_s^t 18\frac{\gamma}{\rho} d\tau\right) ds,$
$u_\lambda(T_0) - u_\mu(T_0) = a - a = 0$, alors

$$\parallel u_\lambda(t) - u_\mu(t) \parallel^2 \leq 2(\lambda+\mu)\gamma^2 \int_{T_0}^t \exp(18\frac{\gamma}{\rho}(t-s))ds.$$

■

Étape 04. $u(t) \in C(t), \ \forall t \in [T_0, T]$

Le lemme ci-dessus fournit un critère de Cauchy pour la famille $u_\lambda(\cdot)$ sur $[T_0, T_0+\theta]$ lorsque $\lambda \to 0$, par conséquence $u_\lambda(\cdot)$ converge uniformément vers une application continue $u(\cdot) \in C([T_0, T_0+\theta], H)$ lorsque $\lambda \to 0$.

D'autre part, de lemme 3.5 $d_{C(t)}(u_\lambda(t)) \leq \lambda\gamma$ et on a :

$$\begin{aligned} d_{C(t)}(u(t)) &= \lim_{\lambda\to 0} d_C(t)(u_\lambda(t)) \\ &\leq \lim_{\lambda\to 0} \lambda\gamma \\ &= 0. \end{aligned}$$

Alors $d_{C(t)}(u(t)) = 0$ c'est à dire :

$$u(t) \in C(t) \textit{ pour tout } t \in [T_0, T_0+\theta].$$

Étape 05. Passer à la limite

Lemme 3.9. *La famille $(u_\lambda)_{0<\lambda<\frac{\rho}{\gamma}}$ converge uniformément sur $[T_0, T_0+\theta]$ vers une solution absolument continue u de l'inclusion différentiel :*

$$(SP) \begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(t)}(u(t)), \\ u(T_0) = a. \end{cases}$$

sur l'intervalle $[T_0, T_0+\theta]$ et $u([T_0, T_0+\theta]) \subset B(a, \frac{\rho}{3})$.
En plus, $\|\dot{u}(t)\| < \gamma$, pour p.p $t \in [T_0, T_0+\theta]$, alors $u(\cdot)$ est lipschitzien avec γ est la constante de Lipschitz.

Preuve. On a d'après (3.10), $\|\dot{u}_\lambda(t)\| \leq \gamma$ donc la suite $(\dot{u}_\lambda)_\lambda$ est borné, alors on peut extraire une sous suite $\dot{u}_{\lambda_n}(\cdot)$ qui converge faiblement vers un application
$h(\cdot) \in L^2([T_0, T_0+\theta], H)$, quand $\lambda_n \to 0$ (car $L^2([T_0, T_0+\theta], H)$ est de Hilbert) c-à-d $\exists h : [T_0, T_0+\theta] \longrightarrow H$ tel que :

$$h \in L^2([T_0, T_0+\theta], H),$$

et

$$\dot{u}_{\lambda_n} \longrightarrow h \ \text{ faiblement dans } \ L^2([T_0, T_0+\theta], H).$$

Et on a : $\|h(t)\| \leq \gamma$ puisque l'ensemble : $\{v \in L^2([T_0, T_0+\theta], H) : \|v(t)\| \leq \gamma\}$ est convexe fermé dans $L^2([T_0, T_0+\theta], H)$, donc pour tout $t \in [T_0, T_0+\theta]$:

$$\int_{T_0}^{t} \dot{u}_{\lambda_n}(s)ds \longrightarrow \int_{T_0}^{t} h(s)ds \ faiblement\ dans\ H.$$

Comme u_{λ_n} est continue et $\dot{u}_{\lambda_n} \in L^2([T_0, T_0+\theta], H)$ alors :

$$u_{\lambda_n}(t) = u_{\lambda_n}(T_0) + \int_{T_0}^{t} \dot{u}_{\lambda_n}(s)ds$$

$$\Rightarrow u_{\lambda_n}(t) - u_{\lambda_n}(T_0) = \int_{T_0}^{t} \dot{u}_{\lambda_n}(s)ds,$$

on a :$\forall y \in H$

$$\begin{aligned}\langle u_{\lambda_n}(t) - u_{\lambda_n}(T_0), y\rangle &= \langle \int_{T_0}^{t} \dot{u}_{\lambda_n}(s)ds, y\rangle \\ &= \int_{T_0}^{T_0+\theta} \langle \dot{u}_{\lambda_n}(s), y1_{[T_0,t]}\rangle ds.\end{aligned}$$

En passant à la limite :

$$\begin{aligned}&\lim_{\lambda_n \longrightarrow 0} \langle u_{\lambda_n}(t) - u_{\lambda_n}(T_0), y\rangle = \lim_{\lambda_n \longrightarrow 0} \int_{T_0}^{T_0+\theta} \langle \dot{u}_{\lambda_n}(s), y1_{[T_0,t]}\rangle ds \\ &\Rightarrow \langle u(t) - u(T_0), y\rangle = \int_{T_0}^{T_0+\theta} \langle h(s), y1_{[T_0,t]}\rangle ds \\ &\Rightarrow u(t) - u(T_0) = \int_{T_0}^{T_0+\theta} 1_{[T_0,t]} h(s)ds \\ &\Rightarrow u(t) - u(T_0) = \int_{T_0}^{t} h(s)ds.\end{aligned}$$

Comme $(u_{\lambda_n}(t))_n$ converge fortement dans H vers $u(.)$ alors :

$$u_{\lambda_n}(T_0) = u(T_0) = a,$$

c-à-d

$$u_{\lambda_n}(t) = a + \int_{T_0}^{t} \dot{u}_{\lambda_n}(s)ds,$$

et

$$u(t) = a + \int_{T_0}^{t} h(s)ds, \tag{3.14}$$

par conséquence $u(.)$ est absolument continu avec $\dot{u}(t) = h(t)$ c-à- d

$$u(t) = a + \int_{T_0}^{t} \dot{u}(s)ds \ p.p\ t,$$

donc

$$\dot{u}_{\lambda_n}(.) \longrightarrow \dot{u}(.) \ faiblement\ dans\ L^2([T_0, T_0+\theta], H). \tag{3.15}$$

Et par(3.10) et (3.14) pour p.p $t \in [T_0, T_0+\theta]$ on obtient que :

$$\begin{aligned} u(t) = a + \int_{T_0}^{t} \dot{u}(s)ds \Rightarrow \|u(t) - a\| &= \|\int_{T_0}^{t} \dot{u}(s)ds\| \\ &\leq \int_{T_0}^{t} \|\dot{u}(s)\|ds \\ &\leq \int_{T_0}^{t} \gamma ds \\ &= \gamma(t - T_0) \\ &< \frac{\rho}{3}, \end{aligned}$$

alors $u([T_0, T_0+\theta]) \subset B(a, \frac{\rho}{3})$.

On applique le lemme de Mazur (lemme 1.27), à travers (3.15) $\forall n \in N$, il existe $r(n) > n$ et des nombres réels $S_{k,n} \geq 0$ avec $\sum\limits_{k=n}^{r(n)} S_{k,n} = 1$ telle que $\sum\limits_{k=n}^{r(n)} S_{k,n}(-\dot{u}_{\lambda_k}(\cdot))$ converge fortement vers $\dot{u}(.)$ dans $L^2([T_0, T_0+\theta], H)$.

On suppose que, pour un nombre négligeable $N \subset [T_0, T_0+\theta]$, les dérivées $\dot{u}(t)$ et $\dot{u}_{\lambda_n}(t)$ existent $\forall t \in [T_0, T_0+\theta] \backslash N$ et que

$$\sum_{k=n}^{r(n)} S_{k,n}(-\dot{u}_{\lambda_k}(t)) \longrightarrow \dot{u}(t), \ \forall t \in [T_0, T_0+\theta] \backslash N. \tag{3.16}$$

On peut aussi supposer que $\|\dot{u}_{\lambda_{k}(t)}\| \leq \gamma$ est valable pour tout $t \in [T_0, T_0+\theta] \backslash N$ et $\forall \lambda_n$,

$n \in N$.

$\forall t \in [T_0, T_0 + \theta] \backslash N$ nous avons l'estimation de l'inégalité de Schwartz et la proposition (3.10) :

$$\begin{aligned}
|\sum_{k=n}^{r(n)} S_{k,n} \langle -\dot{u}_{\lambda_k}(t), u(t) - proj_{C(t)}(u_{\lambda_k}(t)) \rangle| &\leq \sum_{k=n}^{r(n)} S_{k,n} \|\dot{u}_{\lambda_k}(t)\| \sum_{k=n}^{r(n)} S_{k,n} \|u(t) - proj_{C(t)}(u_{\lambda_k}(t))\| \\
&\leq \gamma \sum_{k=n}^{r(n)} S_{k,n} \sum_{k=n}^{r(n)} S_{k,n} \|u(t) - proj_{C(t)}(u_{\lambda_k}(t))\| \\
&= \gamma \sum_{k=n}^{r(n)} S_{k,n} \|u(t) - proj_{C(t)}(u_{\lambda_k}(t))\|. \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

De plus, de la continuité du $proj_{C(t)}(.)$ sur $B(a, \frac{\varrho}{3})$ et comme $u(t) \in C(t)$ on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n \longrightarrow \infty} proj_{C(t)}(u_{\lambda_n}(t)) - u(t) &= proj_{C(t)}(\lim_{n \longrightarrow \infty} u_{\lambda_n}(t)) - u(t) \\
&= proj_{C(t)}(u(t)) - u(t) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donc par (3.17) :

$$\sum_{k=n}^{r(n)} S_{k,n} \langle -\dot{u}_{\lambda_k}(t), u(t) - proj_{C(t)}(u_{\lambda_k}(t)) \rangle \longrightarrow 0 \ lorsque \ n \longrightarrow \infty. \qquad (3.18)$$

On a pour tout $x' \in H$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{r(n)} S_{k,n} \langle -\dot{u}_{\lambda_k}(t), x' - proj_{C(t)}(u_{\lambda_k}(t)) \rangle &= \langle \sum_{k=n}^{r(n)} S_{k,n} (-\dot{u}_{\lambda_k}(t)), x' - u(t) \rangle \\
&+ \langle \sum_{k=n}^{r(n)} S_{k,n} (-\dot{u}_{\lambda_k}(t)), u(t) - proj_{C(t)}(u_{\lambda_k}(t)) \rangle \\
&= \langle \sum_{k=n}^{r(n)} S_{k,n} (-\dot{u}_{\lambda_k}(t)), x' - u(t) \rangle.
\end{aligned}$$

On déduit de (3.16) et (3.18) :

$$\begin{aligned}
\lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=n}^{r(n)} S_{k,n} \langle -\dot{u}_{\lambda_k}(t), x' - proj_{C(t)}(u_{\lambda_k}(t)) \rangle &= \lim_{n \to \infty} \langle \sum_{k=n}^{r(n)} S_{k,n} (-\dot{u}_{\lambda_k}(t)), x' - u(t) \rangle \\
&= \langle \dot{u}(t), x' - u(t) \rangle, \forall x' \in H. \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

D'autre part, notant de (3.4) et (3.10)

$$-\dot{u}_\lambda(t) \in proj_{C(t)}(u_\lambda(t)),$$

de (3.3) $\forall x' \in C(t)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{r(n)} S_{k,n}\langle -\dot{u}_{\lambda_k}(t), x' - proj_{C(t)}(u_{\lambda_k}(t))\rangle &\leq \frac{\|\dot{u}_{\lambda_k}(t)\|}{2\rho}\sum_{k=n}^{r(n)} S_{k,n}\|x' - proj_{C(t)}(u_{\lambda_k}(t))\|^2 \\ &\leq \frac{\gamma}{2\rho}\sum_{k=n}^{r(n)} S_{k,n}\|x' - proj_{C(t)}(u_{\lambda_k}(t))\|^2,\end{aligned}$$

et comme $proj_{C(t)}(u_{\lambda_k}(t)) \longrightarrow u(t)$ si $n \longrightarrow +\infty$ et de (3.19) :

$$\langle -\dot{u}(t), x' - u(t)\rangle \leq \frac{\gamma}{2\rho}\|x' - u(t)\|^2, \forall x' \in C(t),$$

ce qui implique :

$$-\dot{u}(t) \in N^F_{C(t)}(u(t)) = N_{C(t)}(u(t)).$$

L'inclusion étant vraie pour tous $t \in [T_0, T_0 + \theta] \setminus N$. ■

3.2 Unicité

Soit $u_i : [T_0, T] \longrightarrow H,\ i = 1, 2$ deux solution de l'inclusion différentielle (SP), c-à-d :

$$\begin{cases} -\dot{u}_i(t) \in N_{C(t)}(u_i(t)) & p.p\ t\ \in [T_0, T], \\ u_i(t) \in C(t) & pour\ tout\ t \in [T_0, T], \\ u_i(T_0) = u_{T_0} \in C(T_0). \end{cases}$$

Alors d'après la propriété de ρ-hypomonotonicité (proposition (3.1)) du cône normal de $C(t)$:

$$\langle -\dot{u}_1(t), u_2 - u_1\rangle \leq \frac{\|\dot{u}_1(t)\|}{2\rho}\|u_2(t) - u_1(t)\|^2, \forall u_2(t) \in C(t), \tag{3.20}$$

et

$$\langle -\dot{u}_2(t), u_1 - u_2\rangle \leq \frac{\|\dot{u}_2(t)\|}{2\rho}\|u_1(t) - u_2(t)\|^2,\ \forall u_1(t) \in C(t)$$

$$\Longleftrightarrow \langle \dot{u}_2(t), u_2 - u_1 \rangle \leq \frac{\|\dot{u}_2(t)\|}{2\rho}\|u_1(t) - u_2(t)\|^2, \ \forall u_1(t) \in C(t). \tag{3.21}$$

Par l'addition de (3.20) et (3.21) on obtient :

$$\langle \dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t), u_2(t) - u_1(t) \rangle \leq \frac{\|\dot{u}_2(t)\| + \|\dot{u}_1(t)\|}{2\rho}\|u_2(t) + u_1(t)\|^2, \ \forall u_i(t) \in C(t), \ i = 1, 2.$$

On pose :

$$\alpha(t) = \frac{\|\dot{u}_2(t)\| + \|\dot{u}_1(t)\|}{2\rho},$$

on obtient :

$$\langle \dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t), u_2(t) - u_1(t) \rangle \leq \alpha(t)\|u_2(t) + u_1(t)\|^2, \ \forall u_i(t) \in C(t), \ i = 1, 2.$$

Du lemme 3.7 on trouve :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_2(t) - u_1(t)\|^2 \leq \alpha(t)\|u_2(t) - u_1(t)\|^2.$$

D'après le Lemme de Gronwall (lemme 3.2),

$$\|u_2(t) - u_1(t)\|^2 \leq \|u_2(T_0) - u_1(T_0)\|^2 \exp\left(\int_{T_0}^{t} 2\alpha(\tau)d\tau\right) = 0,$$

car $u_1(T_0) = u_2(T_0) = u_{T_0}$.

Alors

$$\begin{aligned} \|u_2(t) - u_1(t)\|^2 = 0 &\Longrightarrow u_2(t) - u_1(t) = 0 \\ &\Longrightarrow u_2(t) = u_1(t). \end{aligned}$$

Donc la solution de l'inclusion (SP) est unique.

3.3 Exemple

Soit le problème

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) & p.p \ t \geq 0, \\ u(t) \in C(t) & \forall \ t \geq 0, \\ u(0) = u_0 = 0. \end{cases}$$

tel que

$$C(t) = \begin{cases} [0,2] & si\ t < 1, \\ [1,2] & si\ t \geq 1. \end{cases}$$

On a le système régularisé

$$\begin{aligned} \dot{u}_\lambda(t) &= -\frac{1}{2\lambda}\nabla d^2_{C(t)}(u_\lambda(t)) \\ &= -\frac{1}{\lambda}(u_\lambda(t) - proj_{C(t)}(u_\lambda(t))). \end{aligned}$$

Si $t < 1$, $u_\lambda(t) \in C(t)$ alors $proj_{C(t)}(u_\lambda(t)) = u_\lambda(t)$, donc

$$\begin{aligned} \dot{u}_\lambda(t) &= -\frac{1}{\lambda}(u_\lambda(t) - u_\lambda(t)) \\ &= 0 \\ &\Rightarrow u_\lambda(t) \text{est constant.} \end{aligned}$$

Pour t=0, $u_\lambda(0) = constant = 0$ alors $u_\lambda(t) = 0$.
Si $t \geq 1$:

$$\dot{u}_\lambda(t) = -\frac{1}{\lambda}(u_\lambda(t) - proj_{C(t)}(u_\lambda(t))), \tag{3.22}$$

On multiplie (3.22) par $e^{\frac{t}{\lambda}}$:

$$\begin{aligned} e^{\frac{t}{\lambda}}\dot{u}_\lambda(t) &= -\frac{e^{\frac{t}{\lambda}}}{\lambda}(u_\lambda(t) - proj_{C(t)}(u_\lambda(t))) \\ &= -\frac{e^{\frac{t}{\lambda}}}{\lambda}u_\lambda(t) + \frac{e^{\frac{t}{\lambda}}}{\lambda}proj_{C(t)}(u_\lambda(t)), \end{aligned} \tag{3.23}$$

posons $v(t) = e^{\frac{t}{\lambda}}u_\lambda(t)$ l'équation (3.23) s'écrit comme

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= e^{\frac{t}{\lambda}}\dot{u}_\lambda(t) + \frac{e^{\frac{t}{\lambda}}}{\lambda}u_\lambda(t) \\ &= \frac{e^{\frac{t}{\lambda}}}{\lambda}proj_{C(t)}(u_\lambda(t)), \end{aligned}$$

on intègre par rapport à s :

$$\int_1^t \dot{v}(s)ds = \int_1^t \frac{e^{\frac{s}{\lambda}}}{\lambda}proj_{C(s)}(u_\lambda(s))ds,$$

alors

$$\begin{aligned} v(t) - v(1) &= \frac{1}{\lambda} \int_1^t e^{\frac{s}{\lambda}} proj_{C(s)}(u_\lambda(s))ds \\ \Longrightarrow v(t) &= v(1) + \frac{1}{\lambda} \int_1^t e^{\frac{s}{\lambda}} proj_{C(s)}(u_\lambda(s))ds. \end{aligned} \tag{3.24}$$

On multiplie (3.24) par $e^{-\frac{t}{\lambda}}$ on obtient

$$e^{-\frac{t}{\lambda}} v(t) = e^{-\frac{t}{\lambda}} v(1) + \frac{1}{\lambda} \int_1^t e^{\frac{s}{\lambda}} e^{-\frac{t}{\lambda}} proj_{C(s)}(u_\lambda(s))ds,$$

comme $u_\lambda(t) = e^{-\frac{t}{\lambda}} v(t)$ alors

$$u_\lambda(t) = e^{\frac{1-t}{\lambda}} u_\lambda(1) + \frac{1}{\lambda} \int_1^t e^{\frac{s-t}{\lambda}} proj_{C(s)}(u_\lambda(s))ds,$$

et on a pour t=1, $u_\lambda(1) = 0$ donc

$$u_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda} \int_1^t e^{\frac{s-t}{\lambda}} proj_{C(s)}(u_\lambda(s))ds.$$

Si $t > 1$: $proj_{C(t)}(u_\lambda(t)) = 1$ alors

$$\begin{aligned} u_\lambda(t) &= \frac{1}{\lambda} \int_1^t e^{\frac{s-t}{\lambda}} ds \\ &= \frac{\lambda}{\lambda}(e^{-\frac{t-t}{\lambda}} - e^{-\frac{t-1}{\lambda}}) \\ &= 1 - e^{-\frac{t-1}{\lambda}}. \end{aligned}$$

Donc

$$u_\lambda(t) = \begin{cases} 0 & si \ 0 \leq t \leq 1, \\ 1 - e^{-\frac{t-1}{\lambda}} & si \ 1 < t < 2. \end{cases}$$

En passant à la limite :

$$u(t) = \lim_{\lambda \longrightarrow 0} u_\lambda(t) = \begin{cases} 0 & si \ 0 \leq t \leq 1, \\ 1 & si \ 1 < t < 2. \end{cases}$$

Conclusion

Dans ce travail nous avons traité le processus de rafle (balayage) qui a été introduit par J.J.Moreau par la méthode de la régularisation du cône normal.

Le fameux lien entre régularisée de Yosida et enveloppe de Moreau conduit à examiner la famille d'équation différentielle ordinaire

$$-\dot{u}_\lambda(t) = \frac{1}{2\lambda}\nabla d^2_{C(t)}(u_\lambda(t)) \ et \ u(0) = u_0.$$

Bibliographie

[1] **S.Adly**, *A variational Approach to Nonsmooth Dynamics,* Springer Briefs in Mathematics, 2017.

[2] **S.Adly, T.Haddad and L.Thibault**, *convexe sweeping process in the francework of measure differential inclusion and evolution variational inégalities*, Mathematical programing (2014) P1-43.

[3] **J.P.Aubin and A.cellina,** *Differentail inclusions,* Set-valued Maps and Viability theory, Springer-verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1984.

[4] **H.H.Bauschke, P.L.Combettes**, *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011.

[5] **F.Bernard, L.Thibault and N.Zlateva,** *Characterization of prox-Regular Sets in Uniformly Convex Banach Space.* J. Convex Anal. 13 (2006), 525- 560.

[6] **H.Brezis**, *Opérateurs Maximaux Monotone*, et semi-groupes de constractions dans les espaces de Hilbert, 1973

[7] **H.Brezis,** *Analyse Fonctionnelle Théorie et Application*, Masson Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo, 1987.

[8] **F.H.Clarke et YU.S.Ledyaev et R.J.Stern et P.R.Wolenski**, *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Springer-Verlag New York Barlin Heidelberg, 1991.

[9] **D.Duvant and J.L.Lions**, *Inégalities in Mechanics and Physics*, Springer, (1979).

[10] **M.Mazade et L.Thibault**, *Regularisation of Differential variational Inegalities with locally prox-regular*, Springer -Verlag Berlin Heidelberg and Mathematical Optimisation Society, 2013.

[11] **M.P.P.Monteiro Marques**, *Differential inclusions in non Smooth Mechanical Problems*, Shocks and Dry Friction, Brikhauser 9(1993).

[12] **J.J.Moreau**, *Evolution Problem Associated with a Moving Convex Set in a Hilbert Space*, Journal of Differential Equations 26 (1977), 347-374.

[13] **L.Thibault**, *Sweeping Process with Regular and Non Regular Sets*, Journal of Differential Equations 193 (2003), 1-26.

[14] **L.Thibault**, *Regularization of nonconvex sweeping process in Hilbert space*, Set-Valued Anal. 16 (2008), 319–333.

Résumé

Dans ce travail , on a étudie l'existence et l'unicité de solution du processus de rafle

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)), p.p.t \in [T_0, T], \\ u(T_0) = a \in C(T_0). \end{cases}$$

ou C(t) est une ensemble ρ-prox-régulier fermé dans H et $N_{C(t)}$ désigne le cone normal, en utilisant la méthode de régularisation de Moreau.

Abstrat

I this work ,we studied the existence and the uniqueness of solution for the sweeping process

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)), p.p.t \in [T_0, T], \\ u(T_0) = a \in C(T_0). \end{cases}$$

where the set $C(t)$ is $\rho-$ prox-regular and closed in H, and $N_{C(t)}$ is the normal cone, we used the Moreau Yosida regularization.