République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahai - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatiques
Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....
№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques Appliquées.

Option : EDP et applications.

Thème

Les Semi-groupes linéaires et l'équation de la chaleur

Présenté par :

- Moussaoui Souha
- Khellouf Boutaina

Devant le jury :

Président : H. Benhassine	MCB Université de Jijel
Encadreur : H. Zerroug	MAA Université de Jijel
Examinateur : O. Yakhlef	MAB Université de Jijel

Promotion **2018/2019**

Table des matières

Introduction

Le présent travail porte sur l'étude de l'un des outils mathématiques les plus importants dans la résolution des problèmes "bien posées" dans la théorie des équations d'évolution et la théorie des processus stochastiques, à savoir les semi-groupes d'opérateurs linéaires et ses applications à la théories des équations aux dérivées partielles.

Un semi-groupe linéaire sur un espace de Banach X est une famille d'opérateurs linéaire bornés $T : [0, +\infty[\longrightarrow B(X)$ vérifiant

$$T(t+s) = T(t)T(s),\ \forall t, s \geqslant 0,$$

et $T(0) = I$. Cette nomination est d'origine algébrique, en effet, en algèbre abstraite, un semi groupe est un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, ce qui est bien le cas avec la famille $\{T(t), t \geqslant 0\}$ muni de composition .

La théorie des semi-groupes trouve sa source dans une question posée par Augustin Louis Cauchy (1789-1857), en 1821. la question était la suivante :

"Déterminer toutes les fonctions complexes continues non nulles vérifiant :

$$f(t+s) = f(t)f(s),\ \forall t, s \geqslant 0.$$

Le fait que ces fonctions sont de la forme $f(t) = exp(at)$ qui est un résultat prouvé après par Nieles Henrik Abel (1802-1829), est le fait que f est complètement déterminée par le nombre $a = f'(0)$ motive l'association d'un opérateur linéaire $A : D(A) \longrightarrow X$ au semi-groupe $(T(t))$ défini par :

$$Ax = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \left.\frac{dT(t)x}{dt}\right|_{t=0}, \forall\ x \in \mathcal{D}(A)$$

appelé le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t \geqslant 0}$.

Ce qui a donné la naissance effective de la théorie des semi-groupes dans la première moitié de ce siècle avec Jacques Hadamard (1865-1963). Ainsi la théorie a trouvé sa place en 1948 avec le fameux théorème dû à Einar Hille (1894-1980) et Kosaku Yosida (1909-1990) qui ont caractérisé les générateurs infinitésimaux des semi-groupes fortement continues.

Dans les années (1970-1980) et grâce aux efforts de plusieurs écoles, la théorie à atteint un certain degré de perfection. Aujourd'hui les semi-groupes sont présents dans la majorité des disciplines mathématique on trouve plusieurs applications de cette théorie non seulement au domaines classiques comme la théorie des EDP ou la théorie des processus stochastiques mais elles deviennent un outil très puissant dans la résolution des équation intégro-différentielles et des équations différentielles fonctionnelles issues de la mécanique quantique et aussi dans la théorie du contrôle en dimension infinie. Plusieurs phénomènes dans la nature peuvent être reformulé et modélisés sous forme d'une équation différentielle (ordinaire ou aux dérivées partielles, inclus les conditions au bord). On peut écrire ces équations sous forme du problème abstrait homogène de Cauchy suivant :

$$(PHC)\begin{cases} u'(t) &= Au(t), t \geqslant 0 \\ u(0) &= x. \end{cases} \tag{1}$$

D'abord, il faut donner un sens à $u'(t) = \lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{u(t+h) - u(t)}{h}$. La fonction u prend ses valeurs dans un ensemble X. pour donner un sens à $\frac{u(t+h)-u(t)}{h}$, X est considéré comme un espace vectoriel, et pour que cette limite reste dans X, X est considéré comme un espace de Banach. Dans le cas où A est borné , la solution du problème (PHC) est donnée par l'exponentielle $u(t) = e^{tA}x$. Dans la majorité des cas, l'opérateur linéaire A est un opérateur différentiel non borné, mais il est souvent fermé à domaine dense.
C'est pour cela qu'on utilise quelques critères de la théorie des semi-groupes comme le théorème de Hille-Yosida , pour voir si A génère un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t \geqslant 0}$ ou non . Dans le cas affirmatif on sait résoudre (PHC) et la solution est donnée par :

$$u(t) = T(t)x, \ \forall t \geqslant 0, \ \forall x \in D(A).$$

Ce mémoire est composé de trois chapitres précédés d'une introduction détaillée.
Dans le premier chapitre, nous donnons quelques résultats préliminaires : définitions, lemmes et théorèmes que nous utiliserons dans toute la suite du mémoire.
En suite, le deuxième chapitre présente une introduction à la théorie des semi-groupes linéaires et deux classes importantes des semi-groupes, à s'avoir les semi-groupes différentiables et les semi-groupes analytiques.
Enfin, le troisième chapitre c'est le résultat principal de ce mémoire, nous allons étudier le problème homogène, ainsi que nous donnons un exemple d'application illustrative à l'équation aux dérivées partielles c'est l'équation de la chaleur.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre est consacré aux rappel de quelques définitions et résultats qui seront utilisés dans la suite.

1.1 Théorème de Hahn-Banach et ses conséquences

Définition 1.1.1. *Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. X est dit espace vectoriel normé s'il est muni d'une fonction $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie les axiomes suivantes :*
(i) $\|x\| \geqslant 0$ et $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$;
(ii) $\|\alpha x\| =| \alpha | \, \|x\|$, $\forall x \in X, \alpha \in \mathbb{R}$;
(iii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$.

Définition 1.1.2. *L'espace vectoriel normé $(X, \|.\|)$ est dit complet si toute suite de Cauchy dans X est convergente.*

Définition 1.1.3. *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.*

Définition 1.1.4. *Soit $p : E \mapsto \mathbb{R}$ une application :*
(i) p est dite sous-additive si $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in E$.
(ii) p est dite positivement homogène si $p(\lambda x) = \lambda p(x)$,$\forall \lambda > 0, \forall x \in E$.
(iii) p est dite sous-norme si elle est sous-additive et positivement homogène.

Théorème 1.1.1 (Hahn-Banach, forme analytique)**.** *Soit $p : E \mapsto \mathbb{R}$ une sous-norme et soit g une forme linéaire définie sur un sous-espace vectoriel F de E telle que $g(x) \leq p(x)$, $\forall x \in F$. Alors il existe une forme linéaire f définie sur E qui prolonge g, i.e ;*

$$g(x) = f(x), \ \forall x \in F,$$

et telle que

$$f(x) \leq p(x), \ \forall x \in E.$$

Indiquons maintenant quelques applications simples du théorème (1.1.1) *lorsque E est un espace vectoriel normé de norme $\|.\|$.*

***Notation** : On désigne par E' le dual (topologique) de E ,i.e. l'espace des formes linéaires continues sur E ; E' est muni de la norme duale*

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|\leqslant 1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|\leqslant 1}} f(x).$$

Lorsque $f \in E'$ et $x \in E$ on notera généralement $< f, x >$ au lieu de $f(x)$.

Corollaire 1.1.5. *Soit F un sous-espace vectoriel de E et soit $g : F \mapsto \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors il existe $f \in E'$ qui prolonge g et telle que*

$$\|f\|_{E'} = \|g\|_{F'}.$$

Corollaire 1.1.6.
Pour tout $x_0 \in E$ il existe $f_0 \in E'$ tel que :

$$\|f_0\| = \|x_0\| \text{ et } < f_0, x_0 >= \|x_0\|^2.$$

Lemme 1.1.1. *Si $(\mathcal{H}, <,>)$ est un espace de Hilbert alors pour tout $x \in \mathcal{H}$,*

$$\mathcal{F}(x) = \{a \in \mathcal{H} :< a, x >= \|x\|^2 = \|a\|^2\}.$$

Dans ce cas on a $\mathcal{F}(x) = \{x\}$.

Démonstration Par définition de $\mathcal{F}(x)$ on a $x \in \mathcal{F}(x)$.
Réciproquement, soit $a \in \mathcal{F}(x)$. Alors $\|a-x\|^2 = \|a\|^2 - 2\mathcal{R}e < a, x > + \|x\|^2 = 0$. Donc $a = x$, ce qui donne le résultat. ⊠

Lemme 1.1.2. *Soit E un espace vectoriel normé et soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $\overline{F} \neq E$. Alors il existe $f \in E'$, $f \neq 0$ tell que $< f, x >= 0$, $\forall x \in F$.*

1.2 Opérateurs linéaires

Soit X un espace de Banach.

1.2.1 Domaine, graphe et fermeture

Définition 1.2.1. *Un opérateur linéaire sur X est une application linéaire A définie sur un sous-espace vectoriel $\mathcal{D}(A) \subset X$ à valeur dans X. $\mathcal{D}(A)$ est appelé le domaine de l'opérateur A.*

Notation : On note un tel opérateur par$(A, \mathcal{D}(A))$.

Définition 1.2.2. *On dit qu'un opérateur $(A, \mathcal{D}(A))$ est borné si $\mathcal{D}(A) = X$ et $A : X \longrightarrow X$ est continue.*

Définition 1.2.3.

(i) Le graphe d'un opérateur linéaire $(A, \mathcal{D}(A))$ est le sous-espace de $X \times X$ donné par

$$G(A) = \{(x, Ax) : x \in \mathcal{D}(A)\} \subset X \times X.$$

(ii) On dit que $(A, \mathcal{D}(A))$ est fermé si son graphe $G(A)$ est un fermé de $X \times X$.

(iii) On dit que $(B, \mathcal{D}(B))$ est une extension de $(A, \mathcal{D}(A))$ si $G(A) \subset G(B)$, c-à-d $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ et $Ax = Bx$ pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$.

La caractérisation des fermés par les suites donne la proposition suivante :

Proposition 1.2.1. *Un opérateur $(A, \mathcal{D}(A))$ est fermé, si seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments de D(A) telle que $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x \in X$ et $Ax_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} y \in X$, on a alors $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$.*

Lemme 1.2.1. *Soit X un espace de Banach et $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est fermé.*
2. *$\mathcal{D}(A)$ muni de la norme graphe, notée $|.|_G$ définie par $|x|_G = |(x, Ax)|_G = \|x\| + \|Ax\|$, est un espace de Banach qu'on note $[\mathcal{D}(A)]$.*

Démonstration
Le lemme découle du fait que l'application$[\mathcal{D}(A)] \ni x \longrightarrow (x, Ax) \in (G(A), |\ .\ |_G)$ est un homéomorphisme, où $G(A)$ est le graphe de A. ⊠

Lemme 1.2.2. *Soit X un espace de Banach. Soient $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire fermé et $B \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur linéaire borné sur X. Alors $AB : \mathcal{D}(AB) \subseteq X \longrightarrow X$ est un opérateur fermé.*

Lemme 1.2.3. *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur linéaire fermé. Alors A est borné si et seulement si $\mathcal{D}(A) = X$.*

Lemme 1.2.4. *Soit $B : \mathcal{D}(B) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur fermé. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *B est continu,i.e., il existe $M \geqslant 0$ telle que $\| Bx \| \leqslant M \| x \|$, $\forall x \in \mathcal{D}(B)$.*
2. *$\mathcal{D}(B)$ est fermé dans X.*

Définition 1.2.4. *On dit qu'un opérateur linéaire $(A, \mathcal{D}(A))$ est fermable s'il possède une extension fermé.*

Proposition 1.2.2. *Tout opérateur fermable $(A, \mathcal{D}(A))$ admet une plus petite extension fermée notée $\bar{A}$ et appelée la fermeture de A. De plus on a*

$$G(\bar{A}) = \overline{G(A)}.$$

Définition 1.2.5 (Adjoint)**.** *L'adjoint d'un opérateur $(A, \mathcal{D}(A))$, à domaine $\mathcal{D}(A) \subset X$ dense, est l'unique opérateur A^* ayant pour domaine*

$$\mathcal{D}(A^*) = \{f \in X' : \exists \varphi \in X', \forall x \in X < Ax, f >=< x, \varphi >\}.$$

Si la condition précédente est réalisée, on définit : $A^* f = \varphi$.

Théorème 1.2.1. ***(Théorème du graphe fermé)*** *Soient X et Y deux espace de Banach. Soit T un opérateur linéaire de X dans Y. On suppose que le graphe de T, $G(T)$ est fermé dans $X \times Y$. Alors T est continu.*

1.2.2 Ensemble résolvant, spectre et résolvante

Définition 1.2.6. *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire.*
1. On appelle ensemble résolvant de A, qu'on note $\rho(A)$, l'ensemble :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda I - A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow X \ est \ bejectif \ et \ (\lambda I - A)^{-1} : X \longrightarrow \mathcal{D}(A) \ est \ borne \ \}.$$

Si A est fermé alors d'après le théorème du graphe fermé on a :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda I - A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow X est \ bijectif\}.$$

2. On appelle spectre de A, l'ensemble $\sigma(A) = \mathbb{C}/\rho(A)$.
3. Pour $\lambda \in \rho(A)$, l'opérateur linéaire borné $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est appelé la résolvante de A au point λ.

Proposition 1.2.3. ***(Équation de la résolvante)*** *Si $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ est un opérateur linéaire, alors pour touts $\lambda, \mu \in \rho(A)$, on a*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A)$$

Démonstration On sait que $(\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1} = I$. De la définition de la résolvante on a :

$$[(\lambda I - A)(R(\lambda, A))] R(\mu, A) = R(\mu, A)$$

$$[\lambda R(\lambda, A) - A R(\lambda, A)] R(\mu, A) = R(\mu, A).$$

De même manière

$$[\mu R(\mu, A) - AR(\mu, A)]R(\lambda, A) = R(\lambda, A).$$

On faisant la déférence des deux égalités et compte tenu du fait que $R(\lambda, A)$ et $R(\mu, A)$ commutent, on obtient :

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A). \quad \boxtimes$$

Lemme 1.2.5. *Si $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow X$ est un opérateur linéaire injectif et fermé alors :*

$$A^{-1} : Im(A) \longrightarrow \mathcal{D}(A)$$

est fermé.

Lemme 1.2.6. *Si $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow X$ est un opérateur linéaire tel que $\rho(A) \neq \emptyset$, alors A est fermé.*

Démonstration Soit $\lambda \in \rho(A)$. On a $(\lambda I - A)^{-1}$ est borné sur X et donc fermé. Par suite $\lambda I - A$ est fermé, ce qui entraîne que A est fermé. $\boxtimes$

Lemme 1.2.7. *Soit X un espace de Banach et $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire à domaine $\mathcal{D}(A)$ dense dans X tel que $\rho(A) \neq \emptyset$. Alors $\mathcal{D}(A^2)$ est dense dans X.*

Démonstration Soit $\lambda \in \rho(A)$. Montrons que $\mathcal{D}(A^2)$ est dense dans $ImR(\lambda, A) = \mathcal{D}(A)$. Soit $y \in X$. Comme $\mathcal{D}(A)$ dense dans X il existe $(x_n) \subset \mathcal{D}(A)$ telle que $y = \lim_{n \longrightarrow \infty} x_n$.
Posons

$$y_n = R(\lambda, A)x_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(y_n) \in \mathcal{D}(A)$ et $Ay_n = AR(\lambda, A)x_n = \lambda R(\lambda, A)x_n - x_n \in \mathcal{D}(A)$.
Donc

$$(y_n) \subset \mathcal{D}(A^2) \textit{ et } R(\lambda, A)y = \lim_{n \longrightarrow \infty} y_n.$$

Par suite $\mathcal{D}(A^2)$ est dense dans $\mathcal{D}(A)$. Comme $\mathcal{D}(A)$ dense dans X, alors $\mathcal{D}(A^2)$ est dense dans X. $\boxtimes$

Lemme 1.2.8. *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire. Alors :*

1. *L'ensemble $\rho(A)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, de plus pour tout $\mu \in \rho(A)$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tell que $|\mu - \lambda| < \dfrac{1}{\| R(\mu, A) \|}$, on ait $\lambda \in \rho(A)$ et*

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, A)^{n+1}. \tag{1.1}$$

2. L'application $\lambda \longmapsto (R\lambda, A)$ est localement analytique et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1}. \tag{1.2}$$

Démonstration
1. Si $\rho(A) = \emptyset$, alors $\rho(A)$ est ouvert. Si $\rho(A) \neq \emptyset$, alors A est fermé. Soient alors $\mu \in \rho(A)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que

$$|\mu - \lambda| < \frac{1}{\| R(\mu, A) \|}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \lambda I - A &= \mu I - A + (\lambda - \mu) I \\ &= [I - (\lambda - \mu) R(\mu, A)](\mu I - A). \end{aligned}$$

Comme $|\mu - \lambda| < \frac{1}{\| R(\mu, A) \|}$, l'opérateur $[I - (\lambda - \mu) R(\mu, A)]$ est inversible d'inverse $\sum_{n=0}^{+\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, A)^n$. Il en résulte alors que $\lambda I - A$ est bijectif. Donc $B\left(\mu, \frac{1}{\|R(\mu, A)\|}\right) \subseteq \rho(A)$, d'où $\rho(A)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.
De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $|\mu - \lambda| < \frac{1}{\| R(\mu, A) \|}$, on a

$$\begin{aligned} R(\lambda, A) &= \mu I - A + (\lambda - \mu) I \\ &= (\mu I - A)^{-1} [I - (\mu - \lambda) R(\mu, A)]^{-1} \\ &= R(\mu, A) \sum_{n=0}^{+\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, A)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, A)^{n+1}. \quad \boxtimes \end{aligned}$$

1.3 Quelques théorèmes d'analyse fonctionnelle

Théorème 1.3.1. ***[Banach-Steinhaus]*** *Soient X et Y deux espaces de Banach. Soit $(Ti)_{i \in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires continus de X dans Y. On suppose que :*

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty, \ \forall x \in X.$$

Alors

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty.$$

Théorème 1.3.2. ***(Prolongement)*** *Soient X un espace de Banach et F un sous-espace vectoriel de X. Pour toute application linéaire $u : F \mapsto X$ telle que u est continu sur F, il existe une unique application linéaire $\tilde{u} : \bar{F} \mapsto X$ continue qui prolonge u à $\bar{F}$, de plus on a*

$$\| \tilde{u} \| = \| u \| .$$

Proposition 1.3.1. *Soit X un espace de Banach et $u \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur linéaire continu , avec $\mathcal{B}(X)$ est l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires continus sur X. Si $\| u \| < 1$ alors $I - u$ est inversible dans $\mathcal{B}(X)$ d'inverse $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n$.*

1.4 Transformation de Fourier

Définition 1.4.1. *Considérons la transformation de Fourier*

$$(Fu)(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\sigma x} u(x) dx, \ \sigma \in \mathbb{R},$$

et l'inverse de la transformation de Fourier

$$(F^{-1}u)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\sigma x} u(\sigma) d\sigma, \ \sigma \in \mathbb{R}.$$

La transformation de Fourier a un certain nombre de propriétés remarquables. D'un d'eux est le suivant :

$$(Fu^{(k)})(\sigma) = (i\sigma)^k (Fu)(\sigma), \ k \in \mathbb{N}.$$

Chapitre 2

Les Semi-groupes linéaires

Dans ce chapitre on donne les définitions des semi-groupes uniformément continus et leurs propriétés élémentaires, puis le théorème de Hille-Yosida et quelques classes des semi-groupes.

2.1 Semi-groupes uniformément continus

Définition 2.1.1. *Soit X est un espace de Banach. Une famille à un paramètre $(T(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés de X dans X est dite un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X si :*

1. *$T(0) = I$ (où I est l'opérateur identité de X).*
2. *$T(t+s)$=$T(t)T(s)$, $\forall t, s \geq 0$.*

Définition 2.1.2. *Un semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X est dit uniformément continu sur X si :*

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0. \tag{2.1}$$

Définition 2.1.3. *L'opérateur linéaire A défini par :*

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in X, \, lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \ existe \ dans X\},$$

et

$$Ax = \lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \left.\frac{dT(t)x}{dt}\right|_{t=0}, \ \forall x \in \mathcal{D}(A), \tag{2.2}$$

est appelé le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ et $\mathcal{D}(A)$

est appelé le domaine de A.

Lemme 2.1.1. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow X$ une fonction continue, alors :*

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s)ds = f(a). \tag{2.3}$$

Démonstration Pour tout $t \neq 0$ on a

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s)ds - f(a) \right\| &= \left\| \frac{1}{t} \int_a^{a+t} (f(s) - f(a))ds \right\| \\
&\leq \frac{1}{t} \sup_{s \in [a,a+t]} \left\| f(s) - f(a) \right\| \times t \\
&= \sup_{s \in [a,a+t]} \left\| f(s) - f(a) \right\|.
\end{aligned}$$

La continuité de f nous permet de conclure. ⊠

Théorème 2.1.1. *Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimale d'un semi-groupe uniformément continu sur X si et seulement si A est un opérateur linéaire borné sur X.*

Démonstration

$\Longleftarrow$) Soit A un opérateur linéaire borné sur X. Posons pour tout $t \geq 0$,

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

Cette série, ainsi définie, converge en norme et définit un opérateur linéaire borné $T(t)$ pour tout $t \geq 0$.

Il est clair que $T(0) = I$, et par un calcul simple, on a pour tous $t, s \geq 0$,

$$T(t+s) = e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA} = T(t)T(s).$$

Par ailleurs, pour tout $t \geq 0$ on a

$$\begin{aligned}
\left\| T(t) - I \right\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} - I \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{\|A\|^n}{n!} \\
&= e^{t\|A\|} - 1 \underset{t \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

d'où $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \| T(t) - I \| = 0$.
D'autre part, pour tout $t > 0$ on a

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{T(t)-I}{t} - A \right\| &= \left\| \frac{e^{tA}-I}{t} - A \right\| \\
&= \left\| \frac{e^{tA}-I-tA}{t} \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{t} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \\
&\leq \frac{1}{t} \sum_{n=2}^{+\infty} t^n \frac{\|A\|^n}{n!} \\
&= \frac{1}{t}(e^{t\|A\|} - 1 - t\|A\|) \underset{t \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \dfrac{T(t)-I}{t} = A$.
Ainsi $(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur X de générateur infinitésimal A .
$\Longrightarrow$) Réciproquement, soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur X, de générateur infinitésimal A. L'application

$$T : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{B}(X)$$

$$t \longmapsto T(t)$$

est continue, donc $\int\limits_0^t T(s)ds \in \mathcal{B}(X), \ \forall t \geq 0$.
D'après lemme (2.1.1) on a

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)ds = T(0) = I.$$

Il existe alors $\rho > 0$ tel que $\left\| \dfrac{1}{\rho} \int\limits_0^\rho T(s)ds - I \right\| < 1$, ce qui implique que $\dfrac{1}{\rho} \int\limits_0^\rho T(s)ds$ est inversible, et donc $\int\limits_0^\rho T(s)ds$ est aussi inversible.
Pour tout $h > 0$ on a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{T(h)-I}{h} \right) \left(\int_0^\rho T(s)ds \right) &= \frac{1}{h} \left(\int_0^\rho (T(h+s)ds - T(s))ds \right) \\
&= \frac{1}{h} \left(\int_h^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^\rho T(s)ds \right) \\
&= \frac{1}{h} \left(\int_\rho^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds \right).
\end{aligned}$$

Donc
$$\frac{T(h)-I}{h}=\Big(\frac{1}{h}\int_{\rho}^{\rho+h}T(s)ds-\frac{1}{h}\int_{0}^{h}T(s)ds\Big)\Big(\int_{0}^{\rho}T(s)ds\Big)^{-1}.$$
Compte tenu du lemme (2.1.1), on obtient $\lim_{h\longrightarrow 0^+}\dfrac{T(h)-I}{h}=(T(\rho)-I)\Big(\int_0^{\rho}T(s)ds\Big)^{-1}$.

Ainsi, le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est l'opérateur linéaire borné
$$A=(T(\rho)-I)\Big(\int_{0}^{\rho}T(s)ds\Big)^{-1}. \quad \boxtimes$$

Remarque : De la définition (2.1.1) , on voit bien qu'un semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ admet un unique générateur infinitésimal. Si $(T(t))_{t\geq 0}$ est uniformément continu alors son générateur infinitésimal est un opérateur linéaire borné. D'autre part, tout opérateur linéaire borné est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu. Ce semi-groupe est t-il unique ? La réponse affirmative est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.1.2. *Soient $(T(t))_{t\geq 0}$ et $(S(t))_{t\geq 0}$ deux semi-groupes uniformément continus.*

Si :
$$\lim_{t\longrightarrow 0^+}\frac{T(t)-I}{t}=A=\lim_{t\longrightarrow 0^+}\frac{S(t)-I}{t}, \tag{2.4}$$

alors
$$T(t)=S(t),\forall t\geq 0.$$

Démonstration

Montrons que pour tout $a>0$, $T(t)=S(t)$ pour tout $t\in[0,a]$.

Soit $a>0$ fixé. Comme $(T(t))_{t\geq 0}$ et $(S(t))_{t\geq 0}$ sont des semi-groupes uniformément continu, alors les applications $t\longmapsto\parallel T(t)\parallel$ et $t\longmapsto\parallel S(t)\parallel$ sont continues. Il existe alors une constante $C_a>0$ telle que $\parallel T(t)\parallel\parallel S(t)\parallel\leq C_a,\forall t,s\in[0,a]$

Pour tout $h>0$, on a
$$\Big\|\frac{T(h)-S(h)}{h}\Big\|=\Big\|\Big(\frac{T(h)-I}{h}-A\Big)-\Big(\frac{S(h)-I}{h}-A\Big)\Big\|.$$
Soit $\varepsilon>0$. l'égalité (2.4) implique qu'il existe $\delta>0$ tel que pour $0<h\leqslant\delta$, on ait
$$\Big\|\frac{T(h)-I}{h}-A\Big\|\leq\frac{\varepsilon}{2aC_a}\ et\ \Big\|\frac{S(h)-I}{h}-A\Big\|\leq\frac{\varepsilon}{2aC_a}.$$

Ce qui entraine alors que pour $0 < h \leq \delta$, on a

$$\left\|\frac{T(h)-S(h)}{h}\right\| \leqslant \left\|\frac{T(h)-I}{h}-A\right\| + \left\|\frac{S(h)-I}{h}-A\right\| \leq \frac{\varepsilon}{aC_a}.$$

Soient $t \in [0,a]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tells que $\dfrac{t}{n} < \delta$. De la définition (2.1.1) et de l'inégalité précédente il vient que :

$$\begin{aligned}
\|T(t)-S(t)\| &= \left\|\sum_{k=0}^{n-1}\left[T\Big((n-k)\frac{t}{n}\Big)S\Big(k\frac{t}{n}\Big) - T\Big((n-k-1)\frac{t}{n}\Big)S\Big((k+1)\frac{t}{n}\Big)\right]\right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left\|T\Big((n-k)\frac{t}{n}\Big)S\Big(k\frac{t}{n}\Big) - S\Big(\frac{t}{n}\Big)S\Big((k+1)\frac{t}{n}\Big)\right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left\|T\Big((n-k-1)\frac{t}{n}\Big)T\Big(\frac{t}{n}\Big)S\Big(k\frac{t}{n}\Big) - T\Big((n-k-1)\frac{t}{n}\Big)S\Big(k\frac{t}{n}\Big)S\Big(\frac{t}{n}\Big)\right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left\|T\Big((n-k-1)\frac{t}{n}\Big)\right\|\left\|S\Big(k\frac{t}{n}\Big)\right\|\left\|T\Big(\frac{t}{n}\Big) - S\Big(\frac{t}{n}\Big)\right\| \\
&\leq C_a\frac{t}{n}\frac{\varepsilon}{aC_a}\sum_{k=0}^{n-1}1 \\
&= \varepsilon\frac{t}{a} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, alors $T(t) = S(t)$, $\forall t \in [0,a]$. Mais puisque $a > 0$ est aussi arbitraire, il s'ensuite que $T(t) = S(t)$, $\forall t \geq 0$.⊠

Corollaire 2.1.4. *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaire bornés. Alors :*

1) Il existe une constante $\omega \geqslant 0$ telle que

$$\|T(t)\| \leqslant e^{\omega t}, \forall t \geqslant 0.$$

2) Il existe un opérateur linéaire borné A tel que $T(t) = e^{tA}, \forall t \geqslant 0$.

3) L'opérateur A de l'assertion 2) est le générateur infinitésimal du semi-groupe $T(t)_{t\geqslant 0}$.

4) L'application $t \longmapsto T(t)$ est différentiable et on a

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A. \tag{2.5}$$

Démonstration toutes les assertions ci-dessus découlent de l'assertion 2). Pour montrer 2) notons que puisque $(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu son générateur infinitésimal A est un opérateur linéaire borné et est aussi le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu$(e^{tA})_{t\geq 0}$, et par le théorème (2.1.2) on obtient

$$T(t) = e^{tA}, \forall t \geq 0.⊠$$

2.2 C_0-semi-groupes linéaires

Définition 2.2.1. *Un semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X est dit fortement continu si :*

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} \| T(t)x - x \| = 0, \forall x \in X. \tag{2.6}$$

Un semi-groupe fortement continu sur X et aussi appelé C_0-semi-groupes sur X.

Exemple($B(\mathbb{R})$-semi-groupe de translation)
On considère l'espace de Banach $X = C_0(\mathbb{R})$ des fonctions bornées uniformément continues de muni de la norme

$$\| f \|_\infty = \sup_{x\in[0,\infty[} | f(x) |,$$

Soit $T(t)_{t\geqslant 0}$ la famille d'opérateurs définis sur X par

$$(T(t)f)(x) = f(t + x), \forall t \geqslant 0, \forall f \in X, \forall x \in [0, \infty[.$$

• $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est un C_0-semi-groupe sur X appelé C_0-semi-groupe de translation à droite. Son générateur infinitésimal est donné par :

$$\mathcal{D}(A) = \{f \in X : f' existe \ et \ f' \in X\},$$

et

$$Af = f', \ \forall f \in \mathcal{D}(A).$$

Théorème 2.2.1. *Soit $(T(t))_{t\geqslant 0}$ un C_0-semi-groupe d'opérateurs linéaire bornés. Alors :*
1. Il existe $\tau > 0$ et $M \geqslant 1$ tel que $\| T(t) \| \leqslant M$, $\forall t \in [0, \tau]$;
2. Il existe $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geqslant 1$ tel que $\| T(t) \| \leqslant Me^{wt}$, $\forall t \geqslant 0$.

Démonstration

1. Supposons que pour tout $\tau > 0$ et $M > 1$, il existe $t \in [0, \tau]$ tel que $\| T(t) \| > M$, donc pour tout $\tau = \dfrac{1}{n}$ et $M = n \in \mathbb{N}^*$, il existe $t_n \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right]$ tel que $\| T(t_n) \| > n$. D'où, la suite $(\| T(t_n) \|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est non bornée, alors d'après le théorème de Banach-Steinhaus, il existe $x_0 \in X$ tel que $(\|T(t_n)x_0\|)_{n>0}$ soit non bornée, ce qui contredit le fait que $\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x, \forall x \in X$.Ainsi, $\|T(t)\| \leqslant M, \forall t \in [0, \tau]$.
2. On montre q'il existe $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $\| T(t) \| \leq Me^{\omega t}$, pour tout $t \geq 0$.

* Pour $t \leq \tau$ l'énoncé vérifié d'après (1) avec $\omega = 0 \in \mathbb{R}$.

* Pour $t > \tau$, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\delta \in [0, \tau]$ tels que $t = n\tau + \delta$. On a

$$\begin{aligned} T(t) &= T(n\tau + \delta) \\ &= T(n\tau)T(\delta) \\ &= T(\tau + \tau + \tau + ...\tau)T(\delta) \\ &= [T(\tau)]^n T(\delta), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \| T(t) \| &= \| [T(\tau)]^n T(\delta) \| \\ &\leq \| T(\tau) \|^n \| T(\delta) \| \\ &\leq M^n M \\ &= M e^{n \ln M} \\ &\leq M e^{\frac{t}{\tau} \ln M} \\ &= M e^{t\omega}, \end{aligned}$$

tel que $\omega = \dfrac{\ln(M)}{\tau}$. Donc, il existe $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tel que

$$\| T(t) \| \leq M e^{t\omega}, \ \forall t \geq 0. \quad \boxtimes$$

Corollaire 2.2.2. *Soit $(T(t))_{t \geqslant 0}$ un C_0-semi-groupe sur X. Alors pour tout $x \in X$, la fonction $t \longrightarrow T(t)x$ est continue de $\mathbb{R}^+$ dans X*

Démonstration Soit $x \in X$ et soient $t, h > 0$ la continuité de $t \longrightarrow T(t)x$ découle des inégalités

$$\begin{aligned} \| T(t+h)x - T(t)x \| &= \| T(t)(T(h)x - x) \| \\ &\leqslant \| T(t) \| \| T(h)x - x \| \\ &\leqslant M e^{\omega t} \| T(h)x - x \| \underset{h \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

et pour $t \geqslant h \geqslant 0$ on a

$$\begin{aligned} \| T(t-h)x - T(t)x \| &= \| T(t-h)(x - T(h)x) \| \\ &\leqslant \| T(t-h) \| \| x - T(h)x \| \\ &\leqslant M e^{w(t-h)} \| x - T(h)x \| \\ &\leqslant M e^{wt} \| x - T(h)x \| \underset{h \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0. \quad \boxtimes \end{aligned}$$

Théorème 2.2.2. *Soit $(T(t))_{t \geqslant 0}$ un C_0-semi-groupe sur X de générateur infinitésimal A. Alors :*

1. On a

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x, \forall t \geqslant 0, \forall x \in X. \tag{2.7}$$

2. Pour tout $t \geqslant 0$ et tout $x \in X$,

$$\int_0^t T(s)xds \in \mathcal{D}(A).$$

et on a

$$A\Big(\int_0^t T(s)xds\Big) = T(t)x - x. \tag{2.8}$$

3. Pour tout $t \geqslant 0$ et tout $x \in \mathcal{D}(A), T(t)x \in \mathcal{D}(A)$, et on a

$$\frac{dT(t)x}{dt} = AT(t)x = T(t)Ax. \tag{2.9}$$

Démonstration

1. On a

$$\Big\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds - T(t)x\Big\| = \Big\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x - T(s)xds\Big\| \leqslant \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\Big\|T(t)x - T(s)x\Big\|ds.$$

On sait que l'application $t \longmapsto T(t)x$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, d'où pour tout $\epsilon > 0$ on a

$$\|T(t) - T(s)\| < \epsilon, pour \mid s - t \mid < \eta.$$

$$\Big\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds - T(t)x\Big\| < \epsilon,$$

ce qui achève la démonstration.

2. Pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, on a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)\left(\int_0^t T(s)xds\right) &= \frac{1}{h}\left(\int_0^t (T(h+s)x - T(s)x)ds\right)\\
&= \frac{1}{h}\left(\int_h^{t+h} (T(s)xds - \int_0^t T(s)xds\right)\\
&= \frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h} (T(s)xds - \int_0^h T(s)xds\right)\\
&\underset{h\longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} T(t)x - x.
\end{aligned}$$

3. Pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{T(h)-I}{h}T(t)x &= \lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{T(h+t)x - T(t)x}{h}\\
&= \lim_{h\longrightarrow 0^+} T(t)\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)x\\
&= \lim_{h\longrightarrow 0^+} \left(\frac{T(h)-I}{h}\right)T(t)x\\
&= T(t)Ax = AT(t)x.
\end{aligned}$$

Ce qui implique aussi que $\dfrac{dT(t)x}{dt} = AT(t)x = T(t)Ax.$ ⊠

Remarque : En intégrant la formule (2.9) entre 0 et t, on obtient pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$:

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Axds = \int_0^t AT(s)xds. \tag{2.10}$$

Corollaire 2.2.3. *Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ sur X, alors :*

1. Le domaine $\mathcal{D}(A)$ est dense dans X, c'est-à-dire $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.

2. A est un opérateur linéaire fermé.

Démonstration

1. Soit $x \in X$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$x_n = \frac{1}{\frac{1}{n}}\int_0^{\frac{1}{n}} T(s)xds.$$

D'après l'assertion 2) du théorème (2.2.2) on a $x_n \in \mathcal{D}(A)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et par l'assertion 1) du même théorème on a,

$$\lim_{n\longrightarrow +\infty} x_n = \lim_{n\longrightarrow +\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}}\int_0^{\frac{1}{n}} T(s)xds = x.$$

Ainsi, $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.

3. D'abord A est un opérateur linéaire. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}(A)$ telle que $x_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} x$ et $Ax_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} y$. Montrons que $x \in \mathcal{D}(A)$ et que $Ax = y$.
Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathcal{D}(A)$, alors d'après la formule (2.10) on a

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall t \geqslant 0. \tag{2.11}$$

Soit $t > 0$. Alors pour tout $s \in [0,t]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} \|T(s)Ax_n - T(s)y\| &= \|T(s)(Ax_n - y)\| \\ &\leqslant \|T(s)\|\|Ax_n - y\| \\ &\leqslant Me^{wt}\|Ax_n - y\| \end{aligned}$$

Donc $(T(s)Ax_n)_{n\geqslant 0}$ converge quand $n \longrightarrow +\infty$ vers $T(s)y$ uniformément en s sur $[0,t]$. Il vient alors de l'égalité (2.11) et du théorème d'interversion de la limite et l'intégrale que : $T(t)x - x = \int_0^t T(s)yds$.
Donc

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)yds \underset{t\longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} y \,.$$

Ainsi $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$. ⊠

Théorème 2.2.3. *Soient $(T(t))_{t\geqslant 0}$ et $(S(t))_{t\geqslant 0}$ deux C_0-semi-groupe sur X, de générateurs infinitésimaux, respectivement A et B. Si $A = B$, alors $T(t) = S(t)$, $\forall t \geqslant 0$.*

Démonstration
Soit $t > 0$ et soit $x \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$.
Il vient de l'assertion 3) du théorème (2.2.2) que la fonction $[0,t] \ni s \longmapsto U(s)x := T(t-s)S(s)x \in \mathcal{D}(A)$ est différentiable et que :

$$\begin{aligned} \frac{dU(s)}{ds} &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)AS(s)x, \quad (A = B) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui entraîne alors que pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, la fonctions $s \longmapsto U(s)x := T(t-s)S(s)x$ est constante, et en particulier ses valeurs aux points $s = 0$ et $s = t$ coïcident.
D'où $T(t)x = S(t)x$, $\forall t \geqslant 0, \forall x \in \mathcal{D}(A)$.
Comme $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ et $T(t)$, $S(t)$ sont des opérateurs bornés sur X, pour tout $t \geqslant 0$, alors $T(t) = S(t)$, $\forall t \geqslant 0$.

On définit par récurrence l'opérateur A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\mathcal{D}(A^n) = \{x \in \mathcal{D}(A^{n-1}) : A^{n-1}x \in \mathcal{D}(A)\}$$

et

$$A^n x = AA^{n-1}x, \forall x \in \mathcal{D}(A^n). \quad \boxtimes$$

Théorème 2.2.4. *Soit $(T(t))_{t\geqslant 0}$ un C_0-semi-groupe sur X de générateur infinitésimal A. Alors :*

1. $\overline{\mathcal{D}(A^n) = X}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. $\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} \mathcal{D}(A^n) = X$.

Démonstration

1. Compte tenu du corollaire(2.2.3), le résultat est vrai pour $n = 1$.

Posons

$$\mathcal{D} = \{\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}), \varphi \ \ \textit{support compacte inclus dans } [0,\infty[\}.$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$ et tout $x \in X$, on pose

$$x_\varphi = \int\limits_0^\infty \varphi(s)T(s)xds.$$

Considérons l'ensemble $Y = \{\ x_\varphi,\ \varphi \in \mathcal{D} \ et \ x \in X\}$ qui est un s-e-v de X.

Pour tout $x \in X$, $\varphi \in \mathcal{D}$ et $h > 0$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}x_\varphi &= \frac{1}{h}\int\limits_0^\infty \varphi(s)T(h+s)xds - \frac{1}{h}\int\limits_0^\infty \varphi(s)T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int\limits_h^\infty \varphi(s-h)T(s)xds - \frac{1}{h}\int\limits_0^\infty \varphi(s)T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int\limits_h^\infty (\varphi(s-h)-\varphi(s))T(s)xds - \frac{1}{h}\int\limits_0^h \varphi(s)T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int\limits_h^\infty \varphi(s-h)-\varphi(s))T(s)xds + \frac{1}{h}\int\limits_0^h (\varphi(s-h)-\varphi(s))T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int\limits_h^\infty (\varphi(s-h)-\varphi(s))T(s)xds, \quad (car supp(\varphi) \subset [0,\infty[).
\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{1}{h}(\varphi(s-h)-\varphi(s))T(s)x$ converge uniformément vers $-\varphi'(s)T(s)x$ sur $[0,\infty[$ quand $h \longrightarrow 0^+$, alors en faisant tendre $h \longrightarrow 0^+$ dans la dernière formule, il vient que $x_\varphi \in \mathcal{D}(A)$ et que

$$Ax_\varphi = -\int_0^\infty \varphi'(s)T(s)xds.$$

Il en résulte que $Y \subset \mathcal{D}(A)$, et par récurrence on montre que $Y \subset \mathcal{D}(A^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que :

$$A^n x_\varphi = (-1)^n \int_0^\infty \varphi^{(n)}(s)T(s)xds, \quad \forall x_\varphi \in Y.$$

Maintenant, montrons que Y est dense dans X.
Supposons par l'absurde que $\overline{Y} \neq X$, alors d'après lemme(1.1.2), il existe $f \in X', f \neq 0$ telle que $< x_\varphi, f >= 0$, $\forall x_\varphi \in Y$.
Donc

$$\int_0^\infty \varphi(s) < T(s)x, f > ds = \left\langle \int_0^\infty \varphi(s)T(s)xds, f \right\rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \forall x \in X.$$

Par conséquent, pour tout $x \in X$ on a $< T(s)x, f >= 0$, $\forall s \in [0, +\infty[$.
En particulier pour $s = 0$ on obtient $< x, f >= 0, \forall x \in X$, ce qui contredit le fait que $f \neq 0$.
Comme $Y \in \mathcal{D}(A^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\overline{Y} = X$, il en résulte que $\overline{\mathcal{D}(A)^n} = X$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. $\boxtimes$

2.3 Théorème de Hille-Yosida

Dans ce paragraphe, nous présentons l'un des résultats les plus importants concernant les C_0-semi-groupe. Il s'agit du théorème de Hille-Yosida qui permet de caractérisation les opérateur qui sont générateur de C_0-semi- groupes. Nous allons commencer tout d'abord par introduire quelques notions et résultats intermédiaires.

Lemme 2.3.1. *Soit $(T(t))_{t\geqslant 0}$ un C_0-semi-groupe sur X de générateur infinitésimal A et soit V un opérateur linéaire borné sur X,i.e., $V \in \mathcal{B}(X)$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1. $T(t)V = VT(t)$, $\forall t \geqslant 0$.
2. $V\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A)$ et $AVx = VAx$, $\forall x \in \mathcal{D}(A)$.

Démonstration
1) $\Longrightarrow$ 2). Soit $V \in \mathcal{B}(X)$ tel que $T(t)V = VT(t)$, $\forall t \geqslant 0$.
Soit $x \in \mathcal{D}(A)$, alors on a

$$\begin{aligned}\lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{T(t)Vx - Vx}{t} &= \lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{VT(t)x - Vx}{t} \\ &= \lim_{t\longrightarrow 0^+} V\left(\frac{T(t)x - x}{t}\right) = VAx.\end{aligned}$$

Donc $Vx \in \mathcal{D}(A)$ et $AVx = VAx$.
2) $\Longrightarrow$ 1). Soit $V \in \mathcal{B}(X)$ tel que $V\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A)$ et $AVx = VAx, \forall x \in \mathcal{D}(A)$.
Pour touts $t \geqslant 0$ et $x \in \mathcal{D}(A)$ définissons la fonction $s \ni [0,t] \longmapsto W(s) = T(t-s)VT(s)x \in \mathcal{D}(A)$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{dW(s)}{ds} &= -AT(t-s)VT(s)x + T(t-s)VAT(s)x \\ &= -T(t-s)AVT(s)x + T(t-s)VAT(s)x \\ &= -T(t-s)VAT(s)x + T(t-s)VAT(s)x = 0.\end{aligned}$$

Donc W est constante, et par conséquent $W(0) = W(t)$.
D'où $T(t)Vx = VT(t)x, \ \forall x \in \mathcal{D}(A)$.
Comme $\overline{\mathcal{D}(A)}=X$ et $T(t)V$ et $VT(t)$ sont continues alors

$$T(t)V = VT(t), \forall t \geqslant 0. \ \boxtimes$$

Théorème 2.3.1. *Soit $(T(t))_{t\geqslant 0}$ un C_0-semi-groupe sur X de générateur infinitésimal A, et soient $w \geqslant 0$ et $M \geqslant 1$ tels que $\| T(t) \| \leqslant Me^{wt}, \forall t \geqslant 0$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $Re\lambda > w$, alors :*
1. L'application

$$\begin{aligned}R_\lambda :& X \longrightarrow X \\ & x \longmapsto R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)x ds,\end{aligned}$$

définit un opérateur linéaire borné sur X et on a

$$\| R_\lambda \| \leqslant \frac{M}{Re\lambda - \omega}.$$

2. $\lambda \in \rho(A)$ et $R(\lambda, A)x = R_\lambda x, \quad \forall x \in X$.

Démonstration
1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $Re\lambda > \omega$. R_λ est un opérateur linéaire. De plus, pour tout $s \geqslant 0$ et tout $x \in X$, on a

$$\begin{aligned}\| e^{-\lambda s}T(s)x \| &\leqslant e^{-Re\lambda s} \| T(s) \| \| x \| \\ &\leqslant e^{-Re\lambda s}Me^{\omega s} \| x \| \\ &= Me^{(-Re\lambda - \omega)s} \| x \|\end{aligned}$$

Ce qui entraîne alors que :

$$\begin{aligned}\|R_\lambda x\| &\leqslant \int_0^\infty \left\| e^{-\lambda s} T(s)x \right\| ds \\ &\leqslant M\|x\| \int_0^\infty e^{(-Re\lambda-\omega)s} ds \\ &= \frac{M}{Re\lambda - \omega}\|x\|.\end{aligned}$$

Il s'ensuit alors que R_λ est un opérateur linéaire borné sur X et que $\| R_\lambda \| \leqslant \dfrac{M}{Re\lambda - \omega}$.

2.

$$\begin{aligned}\frac{T(h)R_\lambda x - R_\lambda x}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(h+s)xds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h}\Big(\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds - \int_0^h e^{-\lambda s}T(s)xds\Big) - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds \\ &= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda s}T(t)xds \\ &\underset{h\longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} \lambda R_\lambda x - x.\end{aligned}$$

Donc $R_\lambda x \in \mathcal{D}(A)$ et que $AR_\lambda x = \lambda R_\lambda x - x, \forall x \in X$, c-à-d $(\lambda I - A)R_\lambda x = x$, $\forall x \in X$. Comme R_λ commute avec $T(t)$, il vient du lemme (2.3.1) que R_λ commute avec A sur $\mathcal{D}(A)$.
D'où

$$R_\lambda(\lambda I - A)x = x, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A),$$

et $R(\lambda, A) = R_\lambda$. ⊠

Corollaire 2.3.1. *Soit $(T(t))_t \geqslant 0$ est un c_0-semi-groupe sur X de générateur infinitésimal A, et soient $\omega \geqslant 0$ et $M \geqslant 1$ tell que $\| T(t) \| \leqslant Me^{\omega t}$, $\forall t \geqslant 0$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re\lambda > \omega$ et pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ on a*

$$AR(\lambda, A)x = R(\lambda, A)Ax.$$

Démonstration

Il résulte du lemme 2.3.1 et du fait que $R(\lambda, A) = R_\lambda$. ⊠

Définition 2.3.2. *Soit $(T(t))_t \geqslant 0$ un C_0-semi-groupe sur X .*

1. $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est dit uniformément borné sur X s'il existe $M \geqslant 1$ telle que $\| T(t) \| \leqslant M, \ \forall t \geqslant 0$.

2. $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est dit un C_0-semi-groupe de contraction si $\| T(t) \| \leqslant 1, \ \forall t \geqslant 0$.

Lemme 2.3.2. *Soit A un opérateur linéaire sur X vérifiant :*
1) $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ et A est un opérateur fermé.
2) $]0, +\infty[\subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda > 0$ on a $\|R(\lambda, A)\| \leqslant \frac{1}{\lambda}$.
Alors :

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \quad \forall x \in X.$$

Démonstration Soit$x \in \mathcal{D}(A)$. Alors pour tout $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} \| \lambda R(\lambda, A)x - x) \| &= \| AR(\lambda, A)x \| \\ &= \| R(\lambda, A)Ax \| \\ &\leqslant \| R(\lambda, A) \| \| Ax \| \\ &\leqslant \frac{\| Ax \|}{\lambda} \underset{\lambda \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)$.

Comme $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ et $(\lambda R(\lambda, A))_{\lambda > 0}$ est uniformément bornée car $\| \lambda R(\lambda, A) \| \leqslant 1$, alors :

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \forall x \in X. \quad \boxtimes$$

Définition 2.3.3. *Pour $\lambda > 0$, on appelle approximation de Yosida de l'opérateur linéaire A, l'opérateur*

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I.$$

Lemme 2.3.3. *Soit A un opérateur linéaire satisfaisant les conditions* 1) *et* 2) *du lemme* (2.3.2) *Alors :*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} A_\lambda x = Ax, \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Démonstration Soit $x \in \mathcal{D}(A)$. D'après le lemme 2.3.3, on a $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow +\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax = Ax$, et du corollaire 2.3.1 on déduit que

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax = Ax. \quad \boxtimes$$

Lemme 2.3.4. *Soit A un opérateur linéaire satisfaisant les conditions* 1) *et* 2) *du lemme* (2.3.2). *Alors A_λ est le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu de contractions $(e^{tA_\lambda})_{t \geqslant 0}$ $\forall x \in X, \lambda, \mu > 0$ nous avons :*

$$\| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x \| \leqslant t \| A_\lambda x - A_\mu x \| .$$

Démonstration Puisque $A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I$ et $R(\lambda, A)$ est borné alors A_λ est un opérateur linéaire borné sur X, donc d'après le théorème 2.1.1, A_λ est le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu $(e^{tA_\lambda})_{t \geqslant 0}$.

De plus pour tout $t \geqslant 0$ on a

$$\begin{aligned}\|e^{tA_\lambda}\| &= \|e^{t\lambda^2 R(\lambda,A)}e^{-t\lambda I}\| \\ &\leqslant e^{-t\lambda}\|e^{t\lambda^2 R(\lambda,A)}\| \\ &\leqslant e^{-t\lambda}e^{t\lambda^2\|R(\lambda,A)\|} \\ &\leqslant e^{-t\lambda}e^{t\lambda} = 1,\ car\|R(\lambda,A)\| \leqslant \frac{1}{\lambda}.\end{aligned}$$

Il en résulte que $(e^{tA_\lambda})_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe uniformément continu de contractions sur X.
Il est facile de voir à partir de la définition que pour tout $\lambda, \mu > 0, A_\lambda, A_\mu, e^{tA_\lambda}$ et e^{tA_μ} commutent entre eux. Il en résulte alors que pour tout $x \in X$:

$$\begin{aligned}\left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\right\| &= \left\|\int_0^1 \frac{d}{ds}(e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu})xds\right\| \\ &\leqslant \int_0^1 \left\|\frac{d}{ds}(e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu})x\right\|ds \\ &\leqslant \int_0^1 t\|e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}(A_\lambda x - A_\mu x)\|ds \\ &\leqslant t\|A_\lambda x - A_\mu x\|,\ car\|e^{tsA_\lambda}\| \leqslant 1\ \ et\ \|e^{t(1-s)A_\mu}\| \leqslant 1. \qquad \boxtimes\end{aligned}$$

Théorème 2.3.2 (Hille-Yosida). *Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contractions $(T(t))_t \geqslant 0$ sur X si et seulement si*
1) $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ et A est un opérateur fermé.
2) $]0, +\infty[\subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda > 0$ on a $\|R(\lambda, A)\| \leqslant \frac{1}{\lambda}$.

Démonstration (condition nécessaire) La condition nécessaire résulte du corollaire (2.2.2) et du théorème (2.3.1) pour $\omega = 0$. Pour montrer que les conditions 1) et 2) du théorème (2.3.2) sont suffisantes pour que A soit le générateur d'un C_0-semi-groupe de contractions $T(t)_{t\geqslant 0}$ on utilise les lemmes précédentes.
(Condition suffisante) Soit $x \in \mathcal{D}(A)$. Pour tous $\lambda, \mu > 0$, on a

$$\begin{aligned}\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| &\leqslant t\|A_\lambda x - A_\mu x\| \\ &\leqslant t\|A_\lambda x - Ax\| + t\|A_\mu x - Ax\|.\end{aligned}$$

Il vient du lemme 2.3.3 que pour tout $x \in \mathcal{D}(A), e^{tA_\lambda}x$ converge quand $\lambda \longrightarrow +\infty$, et la convergence est uniforme sur les intervalles bornés. Posons alors

$$T(t)x = \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} e^{tA_\lambda}x,\ \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Comme $\mathcal{D}(A)$ est dense dans X et $(e^{tA_\lambda})_{t\geqslant 0}$ est uniformément borné, alors :

$$T(t)x = \lim_{\lambda\longrightarrow+\infty} e^{tA_\lambda}x,\ \forall x\in X.$$

Et la limite est uniforme sur les intervalles bornés.
De la formule (2.3.1) on voit que

$$T(0)=I, T(t+s)=T(t)T(s),\ \forall t,s\geqslant 0,\ et\ \|T(t)\|\leqslant 1,\ \forall t\geqslant 0.$$

De plus $t\longmapsto T(t)x$ est continue pour tout$x\in X$ comme limite uniforme d'une famille de fonctions continues. Ainsi $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est un C_0-semi-groupe de contractions sur X.
Pour conclure, il reste à montrer que A est le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geqslant 0}$.
Soit B le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geqslant 0}$.
Soit $x\in\mathcal{D}(A)$, en utilisant la formule (2.3.1) et le théorème 2.2.2 et compte tenu de la convergence uniforme de $e^{tA_\lambda}A_\lambda x$ vers $T(t)Ax$ sur les intervalles bornés, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{T(t)x-x}{t} &= \frac{1}{t}\lim_{\lambda\longrightarrow+\infty}(e^{tA_\lambda}x-x)\\
&= \frac{1}{t}\lim_{\lambda\longrightarrow+\infty}\int_0^t \frac{d}{ds}(e^{sA_\lambda}x)ds\\
&= \frac{1}{t}\lim_{\lambda\longrightarrow+\infty}\int_0^t e^{sA_\lambda}A_\lambda x ds\\
&= \frac{1}{t}\int_0^t \lim_{\lambda\longrightarrow+\infty} e^{sA_\lambda}A_\lambda x ds\\
&= \frac{1}{t}\int_0^t T(s)Axds \underset{t\longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} Ax.
\end{aligned}$$

Donc $x\in\mathcal{D}(B)$ et $Bx=Ax$, ce qui entraîne que $\mathcal{D}(A)\subseteq\mathcal{D}(B)$ et $Ax=Bx, \forall x\in\mathcal{D}(A)$.
Comme B est le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geqslant 0}$ qui est de contractions, alors d'après la condition 2) du théorème 2.3.2 on a $1\in\rho(B)$. D'autre part, puisque A vérifie la condition 2) du théorème 2.3.2 alors $1\in\rho(A)$. Mais puisque $\mathcal{D}(A)\subseteq\mathcal{D}(B)$ et $Ax=Bx$, $\forall x\in\mathcal{D}(A)$, on a $(I-B)\mathcal{D}(B)=(I-A)\mathcal{D}(A)=X$, ce qui entraîne alors que $\mathcal{D}(B)=(I-B)^{-1}X=\mathcal{D}(A)$.
D'où $A=B$. ⊠
Comme conséquence du théorème 2.3.2 de Hille-Yosida, on obtient :

Corollaire 2.3.4. *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction $(T(t))_{t\geqslant 0}$. Alors :*

$$T(t)x = \lim_{\lambda\longrightarrow+\infty} e^{tA_\lambda}x,\ \forall x\in X.$$

Corollaire 2.3.5. *Soit $\omega\geqslant 0$. Un opérateur A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ vérifiant $\| T(t)\|\leqslant e^{wt}$, $\forall t\geqslant 0$, si et seulement si :*

1. $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ *et* A *un opérateur fermé.*
2. $]\omega, +\infty[\subset \rho(A)$ *et pour tout* $\lambda > \omega$ *on a* $\| R(\lambda, A) \| \leqslant \dfrac{1}{\lambda - \omega}$.

Démonstration
$\Longrightarrow$) Découle du corollaire 2.2.2 et du théorème 2.3.1.
$\Longleftarrow$) Le théorème 2.3.2 de Hille-Yosida appliqué à l'opérateur $B = A - \omega I$ pour $\lambda - \omega > 0$ implique qu'il génère un C_0-semi-groupe de contractions $(S(t))_{t\geqslant 0}$. Le C_0-semi-groupe défini par

$$T(t) = e^{\omega t} S(t), \forall t \geqslant 0,$$

donne le résultat.⊠

Théorème 2.3.3. *Si* A *est le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *sur* X *vérifiant :*

$$\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t}, \forall t \geqslant 0, \text{ avec } \omega \geqslant 0, M \geqslant 1$$

Alors :
1. $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ *et* A *un opérateur fermé.*
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $Re\lambda > \omega$ *on a* $\lambda \in \rho(A)$ *et*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leqslant \frac{M}{(\mathcal{R}e\lambda - \omega)^n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Démonstration
1) Déjà vu dans le corollaire 2.2.2.
2) D'après le théorème 2.3.1, comme $Re\lambda > \omega$, alors $\lambda \in \rho(A)$ et pour tout $x \in X$, on a

$$R(\lambda, A)x = R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x ds, \text{ et } \|R(\lambda, A)\| \leqslant \frac{M}{\mathcal{R}e\lambda - \omega}.$$

Il est facile de voir que

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A)x = -\int_0^\infty s e^{-\lambda s} T(s)x ds, \ \forall x \in X,$$

et par récurrence on obtient pour tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbb{N}$, que :

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A)x = (-1)^n \int_0^\infty s^n e^{-\lambda s} T(s)x ds.$$

Par ailleurs, par le lemme 1.2.8, on a $\dfrac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1}$.
Il en résulte alors que :

$$R(\lambda, A)^{n+1} x = \frac{1}{n!} \int_0^\infty s^n e^{-\lambda s} T(s)x ds, \forall x \in X,$$

D'où
$$R(\lambda, A)^n x = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty s^{n-1}e^{-\lambda s}T(s)xds, \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}^*$$
Il vient alors que pour tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\begin{aligned}\|R(\lambda, A)^n x\| &= \frac{1}{(n-1)!}\left\|\int_0^\infty s^{n-1}e^{-\lambda s}T(s)xds\right\| \\ &\leqslant \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty s^{n-1}\left\|e^{-\lambda s}T(s)x\right\|ds \\ &\leqslant \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty s^{n-1}e^{-\mathcal{R}e\lambda s}Me^{\omega s}\|x\|ds \\ &\leqslant \frac{M}{(\mathcal{R}e\lambda - \omega)^n}\|x\| \ (Intgration\ par\ parties\ (n-1)fois).\end{aligned}$$
D'où $\|R(\lambda, A)^n\| \leqslant \dfrac{M}{(\mathcal{R}e\lambda - \omega)^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}.\boxtimes$

2.4 Théorème de Hille-Yosida dans le cas général

Dans ce paragraphe on va démontrer le théorème de Hille-Yosida dans le cas général d'un C_0-semi-groupe sur X. Tout d'abord on va commencer par démontrer le lemme suivant :

Lemme 2.4.1. *Soit$A$: $\mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire tel que $]0, \infty[\subset \rho(A)$ et vérifiant :*
$$\|\lambda^n R(\lambda, A)^n\| \leqslant M, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall \lambda > 0.$$
Alors il existe une norme $\|.\|_1$ sur X équivalente à la norme d'origine $\|.\|$ vérifiant :
1. $\|x\| \leqslant \|x\|_1 \leqslant M\|x\|, \ \forall x \in X.$
2. $\|\lambda R(\lambda, A)x\|_1 \leqslant \|x\|_1, \ \forall x \in X.$

Démonstration Soit $\mu > 0$. Posons :
$$\|x\|_\mu = \sup_{n\geqslant 0}\|\mu^n R(\mu, A)^n\|, \ \forall x \in X, \tag{2.12}$$
Ii est facile de voir que $\|.\|_\mu$ définit une norme sur X vérifiant :
$$\|x\| \leqslant \|x\|_\mu \leqslant M\|x\|, \ \forall x \in X, \tag{2.13}$$
et
$$\|\mu R(\mu, A)\|_\mu \leqslant 1, \tag{2.14}$$

Montrons alors que :

$$\|\lambda R(\lambda, A)\|_\mu \leqslant 1, \ pour \ 0 < \lambda \leqslant \mu. \tag{2.15}$$

Soit $x \in X$. Posons $y = R(\lambda, A)x$. Il vient alors de l'équation de la résolvante que :

$$y = R(\lambda, A)x = R(\mu, A)(x + (\mu - \lambda)y).$$

Et par l'inégalité triangulaire et l'inégalité (2.14) on obtient :

$$\begin{aligned}
\|y\|_\mu &= \|R(\mu, A)x + (\mu - \lambda)R(\mu, A)y\|_\mu \\
&\leqslant \|R(\mu, A)x\|_\mu + (\mu - \lambda)\|R(\mu, A)y\|_\mu \\
&\leqslant \frac{1}{\mu}\|x\|_\mu + \frac{\mu - \lambda}{\mu}\|y\|_\mu
\end{aligned}$$

Ce qui entraîne $\|y\|_\mu(1 - \frac{\mu-\lambda}{\mu}) \leqslant \frac{1}{\mu}\|x\|_\mu$, et par suite $\lambda\|y\|_\mu \leqslant \|x\|_\mu, \ \forall x \in X$.
D'où $\|\lambda R(\lambda, A)\|_\mu \leqslant 1$, pour $0 < \lambda \leqslant \mu$.
Des inégalités (2.13) et (2.15), on voit facilement que :

$$\|\lambda^n R(\lambda, A)^n x\| \leqslant \|\lambda^n R(\lambda, A)^n x\|_\mu \leqslant \|x\|_\mu, pour 0 < \lambda \leqslant \mu. \tag{2.16}$$

D'où $\|x\|_\lambda \leqslant \|x\|_\mu$ pour $0 < \lambda \leqslant \mu$. Posons alors

$$\|x\|_1 = \lim_{\mu \longrightarrow +\infty} \|x\|_\mu, \forall x \in X.$$

En faisant tendre $\mu \longrightarrow +\infty$ dans l'inégalité (2.13) on obtient :

$$\|x\| \leqslant \|x\|_1 \leqslant M\|x\|, \forall x \in X.$$

En prenant $n = 1$ dans l'inégalité (2.16), il vient que :

$$\|\lambda R(\lambda, A)x\|_\mu \leqslant \|x\|_\mu, \forall x \in X.$$

En faisant tendre $\mu \longrightarrow +\infty$ on obtient $\|\lambda R(\lambda, A)\|_1 \leqslant \|x\|_1 \ \forall x \in X$. D'où$\|\lambda R(\lambda, A)x\|_1 \leqslant 1$.⊠

Théorème 2.4.1. ***(Théorème de Hille-Yosida, cas général)***
Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ sur X vérifiant $\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$, $t \geqslant 0$, avec $\omega \geqslant 0$, $M \geqslant 1$, si et seulement si :
1. $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ *et A est un opérateur fermé.*
2. *Pour tout $\lambda \in C$ tel que $Re\lambda > \omega$, on a $\lambda \in \rho(A)$ et*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leqslant \frac{M}{(\mathcal{R}e\lambda - \omega)^n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Démonstration

$\Longrightarrow$) Découle du théorème 2.3.3.

$\Longleftarrow$) Supposons que A vérifie les assertions 1) et 2) du théorème 2.3.4, alors sans perte de généralité et quitte à considérer le C_0-semi-groupe $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$, $\forall t \geqslant 0$, on peut supposer que $\omega = 0$.

L'assertion 2) implique dans ce cas que $\|\lambda^n R(\lambda, A^n)\| \leqslant M, \forall n \in \mathbb{N}, \forall \lambda > 0$. Soit $\| \,.\, \|_1$ la norme équivalente à $\| \,.\, \|$, définie dans le lemme (2.3.5) et vérifiant :

$$\|x\| \leqslant \|x\|_1 \leqslant M\|x\|, \forall x \in X, \ et \ \|\lambda R(\lambda, A)\|_1 \leqslant 1, \forall \lambda > 0. \tag{2.17}$$

Il vient alors du théorème (2.3.2) de Hile-Yosida pour les C_0-semi-groupes de contractions que A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t \geqslant 0}$ de $\| \,.\, \|_1$ contractions sur X, et en utilisant l'inégalité (2.17), on obtient pour tout $t \geqslant 0$ et tout $x \in X$,

$$\begin{aligned}
\|T(t)x\| &\leqslant \|T(t)x\|_1 \\
&\leqslant \|T(t)\|_1 \|x\|_1 \\
&\leqslant \|x\|_1 \\
&\leqslant M\|x\|.
\end{aligned}$$

D'où$\|T(t)\| \leqslant M, \forall t \geqslant 0.$⊠

2.5 Quelques classes spéciales de c_0-semi groupes

2.5.1 C_0-semi groupe différentiables

Définition 2.5.1.

On dit que l'application $t \longmapsto T(t)x$ est différentiables si :

$$\lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - T(s)x}{t - s} \ \text{existe}$$

Où

$$\lim_{h \to 0} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} \ \text{existe}$$

Définition 2.5.2.

On dit qu'un semi-groupe fortement continu $\{T(t)\}_{t \geqslant 0}$ est différentiables si l'application $[0, \infty[\ni t \longmapsto T(t)\ x \in E$, est différentiable.

2.5.2 C_0-semi groupe analytique

Définition 2.5.3.
Désignons par Δ l'ensemble

$$\{Z \in \mathbb{C} : ReZ > 0 \text{ et } \phi_1 < argZ < \phi_2 \text{ tel que } \phi_1 < 0 < \phi_2\}.$$

On appelle Semi-groupe analytique une famille $\{T(Z)\}_{Z\in\Delta} \subset \mathcal{L}(X)$ vérifiant les propriétés suivantes

1. $T(0) = I$;
2. $T(Z_1 + Z_2) = T(Z_1)T(Z_2),\ \forall Z_1, Z_2 \in \Delta$;
3. $\lim\limits_{Z\to 0} T(Z)x = x,\ \forall x \in E,\ \forall Z \in \Delta$;
4. *L'application* $Z \in \Delta \longmapsto T(Z) \in \mathcal{L}(X)$ *est analytique dans l'ensemble* Δ.

Chapitre 3

Application sur l'équation de la chaleur

3.1 Problème homogène à valeur initiale

On s'intéresse à l'étude du problème homogène abstrait de la forme :

$$(PHC)\begin{cases} u'(t) &= Au(t), t \geqslant 0 \\ u(0) &= x. \end{cases}$$

où t est la variable temps, u est une fonction à valeurs dans l'espace de Banach X. avec $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow X$ est un opérateur linéaire et $x \in X$ est la valeur initiale.

Définition 3.1.1.
1. Le problème à valeur initiale

$$(PHC)\begin{cases} u'(t) &= Au(t), t \geqslant 0 \\ u(0) &= x, \end{cases} \tag{3.1}$$

est dit le problème homogène abstrait de Cauchy associé à $(A, \mathcal{D}(A))$ et de valeur initiale $x \in X$.
2. Une fonction $u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow X$ est dite solution (classique) du problème (PHC), si u est continue pour $t \geqslant 0$, continûment différentiable et $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ pour $t > 0$, et u vérifie (PHC). Notons que puisque $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ pour $t > 0$ et u est continue en $t = 0$, ne peut pas avoi

Théorème 3.1.1. *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ sur X. Alors pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, la fonction $u : t \longmapsto u(t) := T(t)x$ est l'unique solution classique du problème (PHC) à valeur initiale x.*

Démonstration Soit $x \in \mathcal{D}(A)$, alors il vient de l'assertion 3) du théorème (2.2.2) que $u(t) = T(t)x$ est une solution Classique du problème (PHC).

Soit v une autre solution classique de (PHC). Soit $t > 0$. Alors pour tout $s \in [0, t]$ on a :

$$\begin{aligned}\frac{d(T(t-s)v(s))}{ds} &= -T(t-s)Av(s) + T(t-s)v'(s)\\ &= -T(t-s)Av(s) + T(t-s)As(s)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ce qui entraîne alors que pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, la fonction $s \longrightarrow T(t-s)v(s)$ est constante, et en particulier ses valeurs aux points $s = t$ et $s = 0$ coïncident.
D'où

$$v(t) = T(t)x, \forall t \geqslant 0.\boxtimes$$

Théorème 3.1.2. *Soit A un opérateur linéaire à domaine $\mathcal{D}(A)$ dense dans X tel que $\rho(A) \neq \emptyset$. Alors le problème à valeur initiale (PHC) admet une solution unique, qui est continûment différentiable sur $[0, +\infty[$, pour toute donnée initiale $x \in \mathcal{D}(A)$ si et seulement si, A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t \geqslant 0}$.*

Démonstration Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t \geqslant 0}$, alors par le théorème (3.1.1) il s'ensuit que pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, la fonction $u : t \longrightarrow u(t) := T(t)x$ est l'unique solution du problème (PHC). De plus u est continûment différentiable sur $[0, +\infty[$.
Réciproquement, supposons que (PHC) admet une solution unique qui est continûment différentiable sur $[0, +\infty[$ pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, notée $u(t, x)$. Montrons que A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe.
Pour $x \in \mathcal{D}(A)$, on définit la norme graphe $|x|_G = ||x|| + ||Ax||$.
Puisque $\rho(A) \neq \emptyset$, alors A est fermé et par suite $D(A)$ muni de la norme graphe $|.|_G$ est un espace de Banach qu'on note $[\mathcal{D}(A)]$.
Soit $X_{t_0} = C([0, t_0], [\mathcal{D}(A)])$ l'espace de Banach des fonctions continues de $[0, t_0]$ dans $[\mathcal{D}(A)]$ muni de la norme supérieure.
Considérons l'application $S : [\mathcal{D}(A)] \longrightarrow X_{t_0}$ définie par $Sx = u(t, x)$ pour tout $0 \leqslant t \leqslant t_0$.
Par linéarité du problème (PHC) et l'unicité de la solution, il est clair que S est un opérateur linéaire défini sur $[\mathcal{D}(A)]$. De plus l'opérateur S est fermé, en effet, si $x_n \longrightarrow x$ dans $[\mathcal{D}(A)]$ et $Sx_n \longrightarrow v$ dans X_{t_0}, alors puisque A est fermé et $u(t, x_n) = x_n + \int_0^t Au(\tau, x_n)d\tau$, et en faisant tendre $n \longrightarrow \infty$, il s'ensuit que $v(t) = x + \int_0^t Av(\tau)d\tau$.
Ce qui entraîne que $v(t) = u(t, x)$ et par suite S est fermé.
Il vient du théorème du graphe fermé que S est borné et

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant t_0} \mid u(t, x) \mid_G \leqslant C \mid x \mid_G . \tag{3.2}$$

Maintenant, on définit l'application $T(t) : [\mathcal{D}(A)] \longrightarrow [D(A)]$ par $T(t)x = u(t,x)$.
Par unicité de la solution du problème (PHC) il vient que $(T(t))_{t\geqslant 0}$ vérifie la propriété des semi-groupes.
D'après (3.2) on a pour $0 \leqslant t \leqslant t_0$, $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est uniformément borné.
Cela implique que $T(t)$ est prolongeable par

$$T(t)x = T(t - nt_0)T(t_0)^n x, \text{ pour } nt_0 \leqslant t \leqslant (n+1)t_0,$$

en un semi-groupe sur $[\mathcal{D}(A)]$ vérifiant :

$$|T(t)x|_G \leqslant Me^{\omega t}|x|_G.$$

Montrons que :

$$T(t)Ay = AT(t)y, \forall y \in \mathcal{D}(A^2). \tag{3.3}$$

Posons :

$$v(t) = y + \int_0^t u(s, Ay)ds, \tag{3.4}$$

on a

$$\begin{aligned} v'(t) &= u(t, Ay) = Ay + \int_0^t \frac{d}{ds}u(s, Ay)ds \\ &= A\left(y + \int_0^t u(s, Ay)ds\right) = Av(t), \end{aligned} \tag{3.5}$$

puisque $v(0) = y$, d'après l'unicité de la solution du (PHC), $v(t) = u(t, y)$ ce qui entraîne que $Au(t, y) = v'(t) = u(t, Ay)$. D'où l'égalité (3.3).
Maintenant, puisque $D(A)$ est dense dans$X$ et $\rho(A) \neq \emptyset$ alors $\mathcal{D}(A^2)$ est aussi dense dans X.
Soit $\lambda_0 \in p(A), \lambda_0 \neq 0$ fixé et soit $y \in D(A^2)$. Si $x = (\lambda_0 I - A)y$, alors par (3.3),

$$T(t)x = (\lambda_0 I - A)T(t)y,$$

et donc

$$\begin{aligned} \|T(t)x\| &= \|(\lambda_0 I - A)T(t)y\| \\ &\leqslant C_0|T(t)y|_G \leqslant C_1 e^{\omega t}|y|_G, \end{aligned} \tag{3.6}$$

D'autre part on a $|y|_G = \|y\| + \|Ay\| \leqslant C_2\|x\|$, ce qui entraîne que $\|T(t)x\| \leqslant C_2 e^{\omega t}\|x\|$.
Il s'ensuit alors que $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est prolongeable par continuité sur X tout entier, et donc $(T(t))_{t\geqslant 0}$. devient un C_0-semi-groupe sur X.
Il reste à montrer que A est le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geqslant 0}$ Soit B le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geqslant 0}$ et $x \in D(A)$.
par définition on a $T(t)x = u(t, x)$ et donc $\dfrac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x$ pour $t \geqslant 0$.

Ce qui implique $\left.\frac{dT(t)x}{dt}\right|_{t=0} = Ax$, d'où $D(A) \subset D(B)$ et $Ax = Bx, \forall x \in \mathcal{D}(A)$.
Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e\lambda > \omega$ et $y \in \mathcal{D}(A^2)$. Par l'égalité (3.3) et comme $Ax = Bx, \forall x \in \mathcal{D}(A)$, il vient que :

$$e^{-\lambda t} AT(t)y = e^{-\lambda t} T(t)Ay = e^{\lambda t} T(t)By. \tag{3.7}$$

En Intégration (3.7) entre 0 et $+\infty$ on obtient :

$$AR(\lambda, B)y = R(\lambda, B)By. \tag{3.8}$$

D'autre parte on a pour tout $y \in \mathcal{D}(A^2)$,

$$BR(\lambda, B)y = R(\lambda, B)By,$$

et donc

$$AR(\lambda, B)y = BR(\lambda, B)y.$$

Puisque a famille $(BR(\lambda, B))_{\lambda>0}$ est uniformément bornée, A est fermé et $\mathcal{D}(A^2)$ est dense dans X, il en résulte que

$$AR(\lambda, B)y = BR(\lambda, B)y \textit{ pour tout } y \in X.$$

Ce qui implique que $ImR(\lambda, B) = \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(A)$, et que $Ax = Bx, \forall x \in \mathcal{D}(B)$, D'où $A = B$.⊠

3.2 Exemple(L'équation de la Chaleur)

Considérons l'équation de la chaleur qui décrit les phénomènes de diffusion :

$$(EC) \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) & = & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \;\; x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) & = & f(x), \;\; x \in \mathbb{R}, \end{array} \right.$$

où f est une fonction continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On va utiliser la transformée de Fourier partielle par rapport à x pour trouver une solution (formelle) de (EC).
Rappelons que pour tout $u \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^\infty(\mathbb{R})$ la transformée de Fourier partielle par rapport à x de u est la fonction notée û définie par :

$$\hat{u}(\xi,t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(x,t)dx, \xi \in \mathbb{R}.$$
$$\left(\widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}\right)(\xi,t) = i\xi\hat{u}(\xi,t)$$
$$\left(\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}}\right)(\xi,t) = -\xi^2\hat{u}(\xi,t)$$
$$\left(\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}\right)(\xi,t) = \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}\right)(\xi,t).$$

En appliquant la transformée de Fourier à (EC) on trouve :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\xi,t) &= -\xi^2\hat{u}(\xi,t), t > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}. \\ \hat{u}(\xi,0) &= \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.9}$$

(3.9) est une équation différentielle ordinaire, où ξ joue le rôle d'un paramètre, et dont la solution est donnée par :

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{-t\xi^2}\hat{f}(\xi), t \geqslant 0, \xi \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver u on applique la transformée de Fourier inverse en utilisant le fait que $e^{-t\xi^2} = \widehat{\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{\frac{-\xi^2}{4t}}}$ pour $t > 0$ et que $\hat{u}\hat{v} = \widehat{u * v}$. Par suite on trouve que $u(.,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{\frac{-\xi^2}{4t}} * f$. D'où :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-(x-y)^2}{4t}} f(y)dy, \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.10}$$

Puisque f est continue bornée et en utilisant le théorème de dérivation sous le signe intégral, on montre que u est bien une solution de (EC).

Notons que la condition initiale de (EC) est vérifiée par u donnée par (3.10) dans le sens suivant :

$\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} u(x,t) = f(x)$ d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, et on note encore $u(x,0) = f(x)$.

Le résultat se reproduit dans le langage des semi-groupes de la façon suivante : pour toute fonction f est continue bornée et tout $t \geqslant 0$ on pose : $T(t)f = u(.,t)$, où u est l'unique solution classique de (EC) donnée par(3.10).

On définit ainsi le semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur l'espace des fonctions continues et bornés appelé le semi-groupe de Gauss-Weierstrass par :

$$(T(t)f)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-(x-y)^2}{4t}} f(y)dy, \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad et\ T(0) = I.$$

Le semi-groupe de Gauss-Weierstrass n'est pas un C_0-semi-groupe.

Il s'avère que $T(t)f \underset{t \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} f$ dans l'espace des foncions continues bornées si et seulement si f une fonction bornée uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Bibliographie

[1] A. Aibeche, Introduction aux semi-groupes linéaires Janvier 2004.

[2] J. Bernard Baillon Générateurs et semi-groupes dans les espaces de Banach uniformément Lisses, New-York, 1979.

[3] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et application, C.R.ACAQ Paris, 1999.

[4] S.Chorfi, Théorie des Semi-groupes : Problème Abstraite de Cauchy et équation d'évolution, 2017. [5] E. Hille, Functional Analysis and Semi-Groupes, Colloq. Publ. Amer.Math.Soc, 1948.

[6] R. J.L.Lions, Analyse mathématique et calcul numérique, évolution : semi-groupe, variationnel, volume 8, Paris, 1984.

[7] A. Pazy, Semi-groupes of linear operators and applications to partial equations springer verlag, New-York, Berlin, 1983.

[8] K.Yosida, On the differentiability and the representation of one-parameter semi-groupes of linear operators, I.Math.Soc.Japan 1 (1948), $14-21$.