République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : EDP et Applications.

Thème

Équation de Laplace dans un domaine non régulier

Présenté par :

- Guerdouh Safa.
- Fenineche Nadra.

Devant le jury :

Président	: Kecis Ilyas	Maître de Conférences B	Université de Jijel
Encadreur	: Chikouche Wided	Maître de Conférences A	Université de Jijel
Examinateur	: Lounis Sabrina	Maître de Conférences A	Université de Jijel

Promotion **2018/2019**

Remerciements

Ces quelques lignes ne pourront jamais exprimer la reconnaissance que nous éprouvons envers tous ceux qui, de près ou du loin, ont contribué, par leurs conseils, leurs encouragements ou leurs amitiés à l'aboutissement de ce travail.

Nos vifs remerciements accompagnés de toute notre gratitude vont tout d'abord à notre encadreur **W. CHIKOUCHE**, maître de conférences à l'université de Jijel, pour nous avoir proposé ce sujet intéressant, pour ses conseils et orientations. Nous la remercions surtout pour nous avoir fait confiance durant toute cette année.

Nos plus sincères remerciements s'adressent aux membres de jury

I. KECIS et **S. LOUNIS**

de nous avoir honorées par leur évaluation de ce travail en tant qu'examinateurs.

A tous les enseignants de notre parcours d'étude, nous exprimons notre gratitude et nos remerciements.

Enfin, nous remercions infiniment nos familles pour leurs sacrifices et encouragements.

Notations

$\|\cdot\|$ la norme euclidienne de l'espace $\mathbb{R}^N$.

Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$.

X et Y deux espaces de Banach.

$\mathcal{L}(X;Y)$ l'espace des fonctions linéaires continues de X à valeur dans Y muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{L}(X;Y)} = \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X}.$$

$B(\Omega;X)$ l'espace des fonctions bornées sur Ω à valeur dans X muni de la norme

$$\|f\|_{B(\Omega;X)} = \sup_{x \in \Omega} \|f(x)\|_X .$$

$C_b(\Omega;X)$ le sous espace de $B(\Omega;X)$ formé des fonctions continues sur Ω.

$BUC(\Omega;X)$ le sous espace de $B(\Omega;X)$ formé des fonctions uniformément continues sur Ω.

$C_b^k(\Omega;X)$ l'espace des fonctions k fois continûment différentiables et bornées sur Ω à valeur dans X.

$BUC^k(\Omega;X)$ l'espace des fonctions à valeurs vectorielles $f : \Omega \to X$ dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre k sont bornées uniformément continues.

$C^\infty(\Omega;X)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω à valeur dans X.

$C^\sigma(\Omega;X)$ l'espace des fonctions σ-hölderiennes muni de la norme $\|\cdot\|_{C^\sigma(\Omega;X)}$.(Définition 1.29)

$h^\sigma(\Omega;X)$ le sous espace de $C^\sigma(\Omega;X)$ formé des fonctions σ-petits hölderiennes.(Définition1.30)

$L^\infty([0,+\infty[;X)$ l'espace des fonctions fortement mesurables $f : \Omega \to X$ bornées presque partout muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty([0,+\infty[;X)} = \sup_{0<t<+\infty} ess \, \|f(t)\|_X .$$

$A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur fermé. $D(A)$ le s.e.v de X appelé domaine de définition de A.

$\|\cdot\|_{D(A)}$ la norme du graphe définie sur $D(A)$ par

$$\|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_X.$$

$(X,Y)_{\theta,+\infty}$ l'espace d'interpolation.(Définition 1.34) $D_A(\theta,+\infty) =' = (D(A),X)_{1-\theta,+\infty}$: espace d'interpolation entre $D(A)$ et X muni de la norme $\|\cdot\|_{D_A(\theta,+\infty)}$.(Théorème 1.37) $D_A(\theta)$ l'adhérence de $D(A)$ dans $D_A(\theta,+\infty)$.

Table des matières

Résumé

Le travail accompli dans ce mémoire a pour objectif d'étudier la régularité de la solution de l'équation de Laplace

$$\Delta u = h \quad \text{dans } \Omega,$$

où Ω est un domaine à point cuspide. On suppose que la frontière de Ω est divisée en deux parties disjointes. On impose des conditions de Dirichlet homogènes sur l'une et des conditions de Dirichlet non homogènes sur l'autre. On prend le second membre h dans le petit espace de Hölder $h^{2\sigma}(\overline{\Omega})$ avec $\sigma \in]0, 1/2[$. Notre approche est basée essentiellement sur l'étude d'une équation différentielle abstraite du second ordre de type elliptique. Les techniques utilisées ici reposent sur la théorie des semi-groupes analytiques généralisés, les espaces d'interpolation réelle et le calcul fonctionnel de Dunford.

Introduction

Les problèmes aux limites elliptiques dans des domaines polygonaux ou polyédraux on été abondamment étudiés. Les résultats maintenant établis pour des domaines réguliers ont été adaptés. Ceci répondait à des nécessites pratiques.
Cependant, on n'a pas ainsi épuisé tout les types de domaines rencontrés en pratique. Dans les problèmes de lubrification, on rencontre en particulier des domaines avec points de rebroussement. On peut citer par exemples une situation typique dans les roulements à billes, ou plutôt à rouleaux : un cylindre métallique roule sur un plan ou sur l'intérieur d'un autre cylindre. L'écoulement du lubrifiant est représenté par les équations de Navier-Stokes dans un domaine présentant un segment de points de rebroussement constitué par la ligne de contact entre les deux cylindres. Ce travail est une contribution dans cette direction. On y étudiera le problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = h(x,y), & \text{dans } \Omega_{x_0}, \\ u(x,y) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \\ u(x_0,y) = u_0(y), & \text{sur } \Gamma_3, \end{cases} \tag{1}$$

où Ω_{x_0} est le domaine plan modèle présentant un point de rebroussement défini par

$$\Omega_{x_0} = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < x_0,\ -\psi(x) < y < \psi(x) \Big\},$$

avec $\psi(x) = x^\alpha$ avec $1 < \alpha \leq 2$, x_0 étant un point donné près du point cuspide $(0,0)$, et $\partial\Omega_{x_0} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ est la frontière de Ω_{x_0} (voir Figure 2.1). Le second membre h est supposé dans l'espace de Hölder $h^{2\sigma}(\overline{\Omega}_{x_0})$ ($\sigma \in]0, 1/2[$) vérifiant l'hypothèse

$$h(x,y) = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2. \tag{2}$$

Plusieurs travaux ont traité le problème (1) posé dans ce type de domaines dans le cadre $L^p (1 < p < +\infty)$. On peut citer les travaux de Belahdji [2] et Grisvard [13]. Ces auteurs ont utilisé la théorie des sommes d'opérateurs fermés de Dore et Venni [10] qui prend en compte le caractère UMD des espaces L^p. Le même problème mais avec des conditions aux limites de Neumann a été étudié par Acosta et al. [1] en utilisant la méthode variationnelle.

L'objectif de ce mémoire est de détailler un article de Chaouchi, Labbas et Boubaker [9] intitulé : **Laplace Equation on a Domain With a Cuspidal Point in Little Hölder Spaces**. Le but principal des auteurs de cet article est d'établir des résultats de régularité dans le cadre des petits espaces de Hölder. L'approche utilisée est basée sur l'étude d'une équation différentielle abstraite de second ordre de type elliptique.

Ce mémoire se présente comme suit :
Dans **le premier chapitre** on donne des rappels sur quelques notions de base d'analyse fonctionnelle utilisées dans ce travail. En particulier, le calcul fonctionnel de Dunford, la théorie des semi-groupes et les espaces d'interpolation réelle.
Le deuxième chapitre est composé de deux parties. **La première** est consacrée à effectuer le même changement de variable déjà utilisé par Grisvard [13], qui réduit le problème à une perturbation du problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace suivant

$$\begin{cases} \Delta v(\xi,\eta) = f(\xi,\eta), & (\xi,\eta) \in Q_{\xi_0}, \\ v(\xi_0,\eta) = \varphi(\eta),\ v(+\infty,\eta) = 0 & -1 < \eta < 1, \\ v(\xi,\pm 1) = 0, & \xi > \xi_0, \end{cases} \tag{3}$$

où Q_{ξ_0} est la demi-bande infinie $]\xi_0,+\infty[\times]-1,1[$.

Dans **la seconde partie** de ce chapitre, en choisissant un espace de Banach complexe approprié E, le problème concret (3) est écrit sous la forme d'un problème opérationnel

$$\begin{cases} v''(\xi) + Av(\xi) = f(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^+, \\ v(0) = \varphi, \quad v(+\infty) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

A étant un opérateur linéaire non borné à domaine non dense dans E, et v et f sont des fonctions à valeurs vectorielles de $[0,+\infty[$ dans E.
Prenant en compte que dans notre cas les espaces d'interpolation $D_A(\sigma)$ sont explicitement définis via les petits espaces de Hölder et la décomposition

$$h^{2\sigma}(\overline{Q}) = L^\infty(]0,+\infty[;h^{2\sigma}([-1,1])) \cap h^{2\sigma}([0,+\infty[;C([-1,1])), \tag{5}$$

l'étude sera développée dans les deux cas suivants :

1. $f \in h^{2\sigma}([0, +\infty[; C([-1, 1]))$,
2. $f \in L^{\infty}(]0, +\infty[; D_A(\sigma))$.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude du problème opérationnel (4). Les techniques de démonstration repose essentiellement sur la représentation explicite de la solution. On analyse alors avec prudence, toutes les composantes de la solution, dans les deux cas, en utilisant la théorie des semi-groupes analytiques généralisés et les espaces d'interpolation $D_A(\sigma)$ développés par Lunardi [18] et Sinestrari [25]. Ces espaces nous permettent d'obtenir des résultats de régularité maximale pour le problème opérationnel. Finalement, au **dernier chapitre** on donne l'étude du problème transformé en utilisant les résultats obtenus précédemment. Ensuite, par le changement de variables inverse, on obtient le résultat principal qui décrit la régularité de la solution du problème (1) près du point cuspide. On montre que, grâce à l'hypothèse (2) et quelques conditions de compatibilité sur la donnée u_0, la régularité optimale de l'unique solution u est obtenue. Il est important de noter que cette régularité dépend de la géométrie du domaine Ω_{x_0}, tandis que dans les espaces L^p $(1 < p < +\infty)$, la régularité optimale est gérée sans la condition (2) et prend également en compte la géométrie du domaine.

Dans un article plus récent, des résultats de régularité ont été établis dans [7] pour une fonction plus générale ψ vérifiant les hypothèses suivantes :

1. $\psi \in C^2([0, x_0]) \cap C^{\infty}(]0, x_0])$,
2. $\psi < 0$ sur $]0, x_0]$,
3. $\int_0 \frac{dt}{\psi(t)}$ diverges,
4. $\psi(0) = \psi'(0) = 0$,
5. $\psi(0)\psi''(0) = 0$,
6. ψ peut être étendu à $[x_0, +\infty[$, alors que $\frac{1}{\psi}$ reste dans $L^1(]x_0, +\infty[)$.

Le cas d'un domaine à point cuspide particulier en dimension 3 a été aussi traité par Chaouchi dans [8].

Le mémoire se termine par **une bibliographie** relative à l'ensemble des travaux présentés ici.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on va introduire les notions de base et rappeler certains résultats classiques d'analyse fonctionnelle qui nous serviront pour réaliser ce travail. Les démonstrations ne sont pas données, on réfère à [5] concernant les opérateurs linéaires, [23] et [19] pour les semi groupes et [18] pour les espaces de Hölder et les espaces d'interpolation.

On note par $(X; \|\cdot\|_X)$ et $(Y; \|\cdot\|_Y)$ deux espaces de Banach complexes.
Dans tout le mémoire, $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de l'espace $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$. La notation $a \lesssim b$ signifie l'existence d'une constante positive C indépendante des quantités a, b (et éventuellement de la variable ξ) telle que $a \leq Cb$.

1.1 Opérateurs bornés, non bornés, fermés, sectoriels

Définition 1.1. *Un opérateur linéaire non borné de X dans Y est une application linéaire $A : D(A) \to Y$ définie sur un sous espace vectoriel $D(A) \subset X$ à valeurs dans Y. L'ensemble $D(A)$ est appelé domaine de A.*
L'opérateur A est dit borné (ou continu) si $D(A) = X$ et s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\|Au\|_Y \leq C\|u\|_X \qquad \forall u \in X. \tag{1.1}$$

On note par $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace vectoriel des opérateurs bornés de X dans Y. Si $X = Y$, l'espace $\mathcal{L}(X, Y)$ est simplement noté $\mathcal{L}(X)$.

Si $A : X \to Y$ est un opérateur borné, alors la norme de A est définie par

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X}.$$

Muni de cette norme, $\mathcal{L}(X,Y)$ est un espace de Banach.

Proposition 1.2. *Soit $A \in \mathcal{L}(X)$. Si $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$, alors $(I - A)$ est inversible dans $\mathcal{L}(X)$.*

Théorème 1.3. ***(Théorème du graphe fermé)*** *Soit $A : X \to Y$ une application linéaire. Alors le graphe de A défini par*

$$G(A) = \Big\{(u, Au),\ u \in X\Big\},$$

est fermé dans $X \times Y$ si et seulement si A est continue.

1.1.1 Opérateurs fermés

Définition 1.4. *Soit $A : D(A) \subset X \to Y$ un opérateur linéaire. L'opérateur A est dit fermé si son graphe $G(A)$ est fermé dans $X \times Y$. Autrement dit, A est fermé si pour toute suite (u_n) de $D(A)$ telle que*

$$u_n \to u \quad \text{dans } X \quad \text{et} \quad Au_n \to v \quad \text{dans } Y,$$

on a

$$u \in D(A) \text{ et } v = Au.$$

Proposition 1.5. *A est fermé si et seulement si $D(A)$ muni de la norme du graphe*

$$\|u\|_{D(A)} = \|u\|_X + \|Au\|_Y,$$

est un espace de Banach.

Proposition 1.6. *Si $A : D(A) \subset X \to Y$ est un opérateur fermé et bijectif de $D(A)$ sur Y, alors A^{-1} est également fermé.*

Corollaire 1.7. *Soit $A : D(A) \subset X \to Y$ un opérateur fermé et bijectif de $D(A)$ sur Y, alors A^{-1} est borné de Y dans X.*

1.1.2 Spectre et ensemble résolvant

Définition 1.8. *Soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur fermé.*

1. *On appelle ensemble résolvant de A l'ensemble*
$$\rho(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C};\ \lambda I - A \text{ est inversible} \right\}.$$
2. *Si $\lambda \in \rho(A)$, l'opérateur $R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}$ est appelé résolvante de A au point λ.*
3. *Le spectre $\sigma(A)$ de A est l'ensemble $\sigma(A) := \mathbb{C}/\rho(A)$.*

Proposition 1.9. *Soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire. Si $\rho(A) \neq \emptyset$ alors A est fermé.*

1.1.3 Opérateurs sectoriels

Il est important de préciser qu'il existe de nombreuses définitions équivalentes pour les opérateurs sectoriels. On utilisera ici celle donnée ci-dessous.

Définition 1.10. *Un opérateur linéaire fermé A sur X est dit **sectoriel** d'angle ϕ s'il existe des constantes $\omega \in \mathbb{R}, \phi \in]\pi/2, \pi[$ et $M > 0$ vérifiant*

i) $\rho(A) \supset S_{\phi,\omega} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq \omega,\ |arg(\lambda - \omega)| < \phi \right\},$

ii) $\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{M}{|\lambda - \omega|}, \quad \lambda \in S_{\phi,\omega}.$

1.2 Calcul fonctionnel

1.2.1 Puissances fractionnaires d'opérateurs

On utilisera dans ce travail les puissances fractionnaires d'opérateurs sectoriels, en particulier les puissances 1/2. On désigne par A l'opérateur linéaire défini de $D(A) \subset X$ à valeurs dans X et $\alpha \in \mathbb{C}$ un nombre complexe tel que $\Re\,\alpha > 0$.

Définition 1.11. *On dit que A est **non-négatif** si $]-\infty, 0[$ est inclue dans l'ensemble résolvant $\rho(A)$ et*
$$\sup_{\lambda > 0} \|\lambda(\lambda I + A)^{-1}\| < +\infty.$$

On suppose dans la suite de cette section que A est un opérateur non-négatif.

Définition 1.12. ***(Opérateur Balakrishnan)*** *On définit l'opérateur Balakrishnan J^α par :*

i) Si $0 < \Re\alpha < 1$ alors $D(J^\alpha) = D(A)$ et

$$J^\alpha\phi = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^{+\infty}\lambda^{\alpha-1}(\lambda I + A)^{-1}A\phi\, d\lambda, \quad \forall\phi \in D(A).$$

ii) Si $\Re\alpha = 1$ alors $D(J^\alpha) = D(A^2)$ et

$$J^\alpha\phi = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^{+\infty}\lambda^{\alpha-1}\left[(\lambda I + A)^{-1} - \frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right]A\phi\, d\lambda + \sin\frac{\alpha\pi}{2}A\phi, \quad \forall\phi \in D(A^2).$$

iii) Si $n < \Re\alpha < n+1$, $n \in \mathbb{N}^*$ alors $D(J^\alpha) = D(A^{n+1})$ et

$$J^\alpha\phi = J^{\alpha-n}A^n\phi, \quad \forall\phi \in D(A^{n+1}).$$

iv) Si $\Re\alpha = n+1$, $n \in \mathbb{N}^*$ alors $D(J^\alpha) = D(A^{n+2})$ et

$$J^\alpha\phi = J^{\alpha-n}A^n\phi, \quad \forall\phi \in D(A^{n+2}).$$

Définition 1.13. *Si A est borné sur X, on définit*

$$A^\alpha = J^\alpha,$$

où J^α est l'opérateur Balakrishnan. De plus, $A^\alpha = J^\alpha$ est borné.

Définition 1.14. *Si A est non borné et $0 \in \rho(A)$,on définit*

$$A^\alpha = [(A^{-1})^\alpha]^{-1}.$$

On peut aussi définir A^α comme étant le prolongement de J^α.
De plus, A^α est fermé car $(A^{-1})^\alpha$ est borné.

Théorème 1.15. ***(Additivité)*** *Si A est non borné avec $0 \in \rho(A)$ et si $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $\Re\beta > 0$, alors*

$$A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}.$$

Théorème 1.16. *Soient A un opérateur sectoriel d'angle ϕ et $\omega \in [0, \pi]$ tels que*

$$\{z \in \mathbb{C}^* : \omega \leq |\arg z| \leq \pi\} \subset \rho(A),$$

et l'ensemble des opérateurs

$$\{z(A - zI)^{-1} : z \in \mathbb{C}^*, \omega \leq |\arg z| \leq \pi\},$$

est borné dans $\mathcal{L}(X)$. *Soit* $\alpha > 0$ *tel que* $\alpha\phi \leq \pi$. *Alors*

$$\{z \in \mathbb{C}^* : \alpha\omega \leq |\arg z| \leq \pi\} \subset \rho(A^\alpha),$$

et l'ensemble des opérateurs

$$\{z(A^\alpha - zI)^{-1} : z \in \mathbb{C}^*, \alpha\omega \leq |\arg z| \leq \pi\},$$

est borné dans $\mathcal{L}(X)$. *De plus, l'angle sectoriel de* A^α *est inférieur ou égal à* $\alpha\phi$.

Corollaire 1.17. *Sous les mêmes hypothèses du Théorème 1.16, si* $\alpha\omega < \pi/2$, *alors* $-A^\alpha$ *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique d'angle supérieur ou égal à* $\pi/2 - \alpha\omega$.

Proposition 1.18. *Soit* A *un opérateur sectoriel d'angle* ϕ. *Si* $0 \in \rho(A)$, *alors*

$$(A^{-\alpha}) = (A^{-1})^\alpha \in \mathcal{L}(X).$$

Intégrale de Dunford

Formule de Cauchy

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, K un compact de U de bord Γ orienté positivement. On note $H(U)$ l'espace des fonctions holomorphes de U dans $\mathbb{C}$. Pour $f \in H(U)$, soit z_0 un point intérieur de K, la formule de Cauchy est donnée par :

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda - z_0} d\lambda.$$

Intégrale de Dunford-Riesz

Le calcul fonctionnel classique de Dunford-Riesz s'appuie sur la formule précédente pour construire $f(A)$ où A est un opérateur linéaire fermé et f est holomorphe.
Plus précisément, si f est holomorphe sur un voisinage ouvert U de $\sigma(A)$, alors on définit l'intégrale de Dunford-Riesz par

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda I - A)^{-1} d\lambda,$$

où Γ est le bord orienté positivement d'un compact K contenant $\sigma(A)$ et contenu dans U.

L'intégrale définie dépendant d'un paramètre

Proposition 1.19. *Soit X un espace de Banach et $f : J \times [a,b] \to X$ (J un intervalle de $\mathbb{R}$), une application continue, admettant une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à la première variable, continue sur $J \times [a,b]$. Soit α, β deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et à valeurs dans $[a,b]$. Alors l'application*

$$\begin{aligned} g : J &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,s)ds, \end{aligned}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et pour tout $x \in J$, on a

$$g'(x) = \beta'(x)f(x,\beta(x)) - \alpha'(x)f(x,\alpha(x)) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,s)ds. \tag{1.2}$$

1.3 Semi-groupes

Dans ce mémoire, on utilisera la théorie des semi-groupes analytiques. On va donc commencer par définir ce qu'est un semi-groupe puis on étudiera les C_0 semi-groupes et leur générateur infinitésimal. Ceci est nécessaire puisque un semi-groupe analytique est un C_0 semi-groupe qui possède des propriétés supplémentaires. On trouve les démonstrations et d'autres propriétés dans Pazy [23].

Dans cette section, on considère $(G(t))_{t\geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires bornés définis sur X.

1.3.1 Semi-groupes fortement continus

Définition 1.20. *La famille $(G(t))_{t\geq 0}$ est dite* ***semi-groupe*** *dans X si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *$G(0) = I$, où I désigne l'opérateur identité.*

2. *$\forall s,t \in \mathbb{R}^+,\ G(t+s) = G(t)G(s)$.*

   Si de plus la condition suivante est satisfaite :

3. *Pour chaque $x \in X$, l'application $t \mapsto G(t)x$ de $\mathbb{R}^+$ dans X est continu, c'est-à-dire pour tout $x \in X$*

$$\lim_{t \to 0^+} \|G(t)x - x\|_X = 0,$$

   *alors $(G(t))_{t\geq 0}$ est dite semi-groupe **fortement continu** ou C_0 **semi-groupe**.*

Lorsque la famille $(G(t))$ est définie pour $t \in \mathbb{R}$ et vérifie les deux premières conditions, alors $(G(t))$ est dite groupe.

Générateur infinitésimal

À un C_0 semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$, on associe un opérateur appelé le générateur infinitésimal. Celui-ci peut être obtenu comme la dérivée à droite en 0 de la fonction $t \mapsto G(t)$. On sait que les fonctions $t \mapsto G(t)x$, pour tout $x \in X$ sont continues, mais ne sont pas nécessairement différentiables. On doit alors se restreindre, pour cette section, aux éléments de X pour lesquels la dérivée voulue existe. Ainsi on obtient le générateur infinitésimal qui n'est pas défini partout.

Définition 1.21. *On appelle générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$, l'opérateur linéaire A défini par*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{h \to 0^+} \frac{G(h)x - x}{h} \ \text{ existe} \right\},$$

et

$$Ax = \lim_{h \to 0^+} \frac{G(h)x - x}{h}, \quad x \in D(A).$$

D(A) est non vide $(0 \in D(A))$ et est bien un sous espace vectoriel de X.

Théorème 1.22. *Soit $(G(t))_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe sur X et soit A son générateur infinitésimal, alors*

1. *$\forall t \geq 0,\ \forall x \in X,\ \int_0^t G(s)x\, ds \in D(A)$ et*

$$A\Big(\int_0^t G(s)x\, ds \Big) = G(t)x - x.$$

2. *$\forall t,s \geq 0,\ \forall x \in X,\ \int_s^t AG(\tau)x\, d\tau = \int_s^t G(\tau)Ax\, d\tau = G(t)x - G(s)x.$*

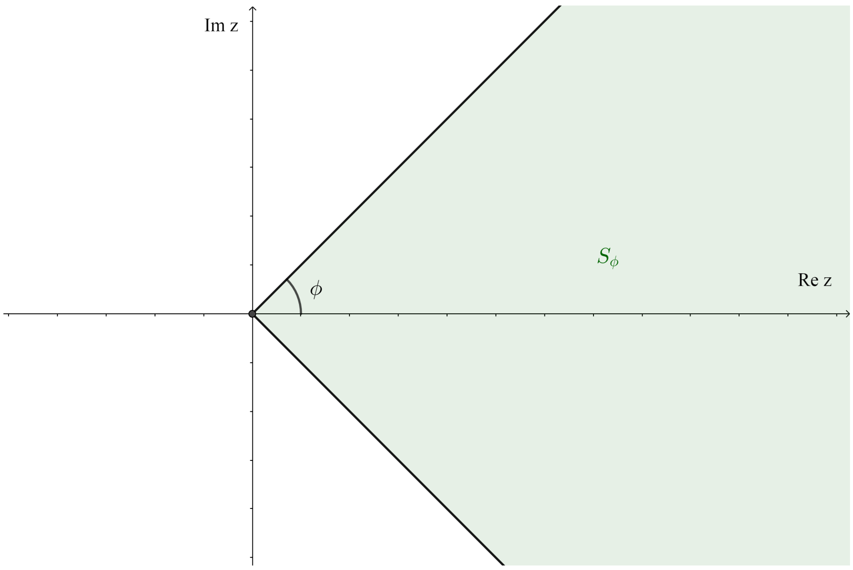

FIGURE 1.1 – Secteur S_ϕ

1.3.2 Semi-groupe analytique

Si on considère le secteur S_ϕ dans $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}_+$ défini pour tout $\phi \in]0, \pi/2]$ par

$$S_\phi = \{z \in \mathbb{C}^* : \ |\arg z| < \phi\},$$

alors il sera possible de généraliser la notion de C_0 semi-groupe à celle de semi-groupe analytique. Dans toute la suite arg désigne la détermination principale de la fonction argument caractérisée par :

$$\arg z = \varphi \ \text{ ssi } \ \mathrm{z} = \mathrm{re}^{\mathrm{i}\varphi}, \ \mathrm{r} > 0, \ \varphi \in [-\pi, \pi].$$

Définition 1.23. *Soit $\phi \in]0, \pi/2]$. Une famille $(G(t))_{t \in S_\phi}$ d'opérateurs linéaires bornés définis sur X forme un **semi-groupe analytique** si elle vérifie les conditions suivantes :*

1. *$\forall z_1, \ z_2 \in S_\phi$ tels que $z_1 + z_2 \in S_\phi$, $G(z_1 + z_2) = G(z_1)G(z_2)$ et $G(0) = I$.*
2. *$\forall x \in X, \ \lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z \in S_\phi}} \|G(z)x - x\|_X = 0$.*
3. *La fonction $z \mapsto G(z)$ est analytique sur S_ϕ.*

Si de plus $\sup\limits_{z \in S_\phi} \|G(z)\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty$, on dit que $(G(z))_{z \in S_\phi}$ est uniformément borné dans S_ϕ.

Remarque. *La restriction d'un semi-groupe analytique à l'axe des réels est un C_0 semi-groupe.*

1.3.3 Semi-groupe analytique généralisé

Définition 1.24. *Soit $0 < \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Un semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ est un* ***semi-groupe analytique généralisé d'angle*** *ϕ dans X si*

1. *$G(.)$ est la restriction d'une fonction holomorphe $G : S_\phi \to \mathcal{L}(X)$,*
2. *$\forall z_1, z_2 \in S_\phi$ tels que $z_1 + z_2 \in S_\phi$, $G(z_1 + z_2) = G(z_1)G(z_2)$.*

Remarque. *Un semi-groupe analytique est donc un semi-groupe analytique généralisé qui est de plus fortement continu en 0.*

Dans Sinestrari [25], on trouve de nombreuses propriétés sur les semi-groupes analytiques dont les deux propositions suivantes. Tout d'abord, on a une représentation sous forme d'une intégrale de Dunford.

Proposition 1.25. *Soit A un opérateur linéaire fermé sur X de domaine $D(A)$ vérifiant*

$$\begin{cases} S_{\phi+\pi/2} \subset \rho(A), \\ \exists M > 0, \forall \lambda \in \rho(A), \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{M}{|\lambda|}, \end{cases} \tag{1.3}$$

avec $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$.
Pour tout $t > 0$, on peut définir $e^{tA} \in \mathcal{L}(X)$ par une intégrale de Dunford

$$e^{tA} = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma e^{\lambda t}(A - \lambda I)^{-1} d\lambda,$$

où $\Gamma \subset \rho(A)$ est un contour non borné dans $S_{\phi+\pi/2}$ allant de $+\infty e^{-i(\pi/2+\phi)}$ à $+\infty e^{i(\pi/2+\phi)}$.
On pose de plus $e^{0A} = I$. Alors on a les propriétés suivantes :

1. *$\forall t, s \geq 0$, $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$.*
2. *$\forall t > 0$, $\forall x \in X$, $\forall k \in \mathbb{C} \setminus 0$, $e^{tA}x \in D(A^k)$.*
3. *$\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists C_k, \forall t > 0$, $\left\|t^k A^k e^{tA}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_k$.*
4. *$\forall k \in \mathbb{N}^*, \dfrac{d^k e^{tA}}{dt^k} = A^k e^{tA} \in \mathcal{L}(X)$ et $t \mapsto e^{tA}$ peut s'étendre analytiquement dans un secteur $S_\phi, 0 < \phi \leq \dfrac{\pi}{2}$, contenant le demi-axe réel positif.*
5. *$\forall t > 0$, $\forall x \in D(A)$, $Ae^{tA}x = e^{tA}Ax$.*
6. *$\forall t > 0$, $\forall \lambda \in \rho(A), (A - \lambda I)^{-1}e^{tA} = e^{tA}(A - \lambda I)^{-1}$.*

Le fait que $D(A)$ n'est pas nécessairement dense dans X influence le comportement de $t \mapsto e^{tA}$ au voisinage de 0 comme le montre la proposition suivante.

Proposition 1.26. *Soit A un opérateur linéaire fermé sur X de domaine $D(A)$ vérifiant* (1.3).
Si $x \in \overline{D(A)}$, alors $\lim_{t \to 0} e^{tA}x = x$. Inversement si $\lim_{t \to 0} e^{tA}x = y$, alors $x \in \overline{D(A)}$ et $y = x$.

Proposition 1.27. *On dira que $(e^{tA})_{t \geq 0}$ est un semi-groupe analytique généralisé si A est un opérateur linéaire dans X, à domaine non dense et vérifiant :*

$$\begin{cases} \rho(A) \supset S_{\omega,\delta} = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \omega \ / \ |\arg(\lambda - \omega)| < \dfrac{\pi}{2} + \delta\} \quad \textit{et} \\ \sup\limits_{\lambda \in S_{\omega,\delta}} \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty, \end{cases}$$

où $\omega \in \mathbb{R}$ et $\delta \in]0, \frac{\pi}{2}]$.
Dans ce cas $(e^{tA})_{t \geq 0}$ n'est pas supposé être un semi-groupe fortement continu (voir Sinestrari [25], Lunardi [18]).

1.4 Quelques espaces fonctionnels

1.4.1 Espaces de Hölder

Comme il a été énoncé dans l'introduction, nous allons travailler dans le cadre des espaces de Hölder. On va donc définir les espaces de Hölder ainsi que les petits espaces de Hölder et énoncer quelques propriétés importantes de ces espaces. On ne donne pas ici de démonstrations.
Dans la suite, on désigne par Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N$, $\sigma \in]0, 1[$ un nombre réel fixé, k un entier naturel et $\beta \in \mathbb{N}^N$ est un multi-indice.

Définition 1.28. *On désigne par*

- *$B(\Omega; X)$ l'espace des fonctions bornées $f : \Omega \to X$, muni de la norme*

$$\|f\|_{B(\Omega;X)} = \sup_{x \in \Omega} \|f(x)\|_X \, .$$

- *$C_b(\Omega, X)$(respectivement, $BUC(\Omega; X)$) le sous espace de $B(\Omega; X)$ constitué des fonctions continues (respectivement, des fonctions uniformément continues).*
- *$C_b^k(\Omega, X)$(respectivement, $BUC^k(\Omega; X)$) l'espace des fonctions à valeurs vectorielles $f : \Omega \to X$ dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre k sont bornées et continues*

(respectivement, uniformément continues), muni de la norme

$$\|f\|_{C_b^k(\Omega;X)} = \sum_{|\beta|\leq k} \left\|\partial^\beta f(x)\right\|_{B(\Omega;X)}.$$

- $C^\infty(\Omega;X)$ *l'espace des fonctions indéfiniment différentiables* $f:\Omega\to X$.

Définition 1.29. ***Les espaces de Hölder*** *des fonctions bornées* $C^\sigma(\Omega;X)$ *et* $C^{k+\sigma}(\Omega;X)$ *sont définis par*

$$C^\sigma(\Omega;X) = \left\{ f\in B(\Omega;X) : [f]_{C^\sigma(\Omega;X)} = \sup_{x,y\in\Omega} \frac{\|f(x)-f(y)\|_X}{\|x-y\|^\sigma} < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^\sigma(\Omega;X)} = \|f\|_{B(\Omega;X)} + [f]_{C^\sigma(\Omega;X)},$$

et

$$C^{k+\sigma}(\Omega;X) = \left\{ f\in C_b^k(\Omega,X) : \partial^\beta f(x)\in C^\sigma(\Omega;X), \quad |\beta| = k \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^{k+\sigma}(\Omega;X)} = \|f\|_{C_b^k(\Omega;X)} + \sum_{|\beta|=k} [\partial^\beta f]_{C^\sigma(\Omega;X)}.$$

Définition 1.30. ***Les petits espaces de Hölder*** *des fonctions continues* $h^\sigma(\Omega;X)$ *sont définis par*

$$h^\sigma(\Omega;X) = \left\{ f\in C^\sigma(\Omega;X) : \lim_{\delta\to 0} \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ 0<\|x-y\|\leq\delta}} \frac{\|f(x)-f(y)\|_X}{\|x-y\|^\sigma} = 0 \right\},$$

on le munit de la norme induite par celle de $C^\sigma(\Omega;X)$.
On définit aussi $h^{k+\sigma}(\Omega;X)$ *par*

$$h^{k+\sigma}(\Omega;X) = \left\{ f\in h^\sigma(\Omega;X) : \partial^\beta f\in h^\sigma(\Omega;X), \quad |\beta|\leq k \right\},$$

on le munit de la norme induite par celle de $C^{k+\sigma}(\Omega;X)$.

On peut trouver plusieurs propriétés de ces espaces dans Sinestrari [25] ou Lunardi [18]. On a notamment les propositions suivantes.

Proposition 1.31.

1. $\left(C^\sigma(\Omega;X), \|.\|_{C^\sigma(\Omega;X)}\right)$ *et* $\left(h^\sigma(\Omega;X), \|.\|_{C^\sigma(\Omega;X)}\right)$ *sont des espaces de Banach.*

2. *Si* $\beta > \sigma$ *alors* $C^{\beta}(\Omega; X) \subset C^{\sigma}(\Omega; X)$ *avec injection continue. De plus on a* $C^{\beta}(\Omega; X) \subset h^{\sigma}(\Omega; X)$.
3. *Les espaces de Hölder et les petits espaces de Hölder sont intermédiaires entre* $B^1(\overline{\Omega}; X)$ *et* $B(\overline{\Omega}; X)$:

$$B^1(\overline{\Omega}; X) \subset h^{\sigma}(\overline{\Omega}; X) \subset C^{\sigma}(\overline{\Omega}; X) \subset B(\overline{\Omega}; X).$$

$\Big($ *pour* $k \in \mathbb{N}$, $B^k(\overline{\Omega}; X)$ *est le sous espace vectoriel de* $C^k(\overline{\Omega}; X)$ *dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre* k *sont bornées sur* $\Omega\Big)$.
4. *Les fonctions de* $C^{\sigma}(\overline{\Omega}; X)$ *sont uniformément continues sur* Ω.
5. *Dans la définition de* $C^{\sigma}(\overline{\Omega}; X)$, *il suffit de supposer que* $\|x - y\|^{\sigma} \leq \delta$, *avec* δ *un nombre positif très petit.*

Proposition 1.32. *Toute fonction* f *de* $h^{\sigma}(\Omega; X)$ *se prolonge en une fonction* $\widetilde{f}$ *de* $h^{\sigma}(\overline{\Omega}; X)$. *On écrira* $h^{\sigma}(\Omega; X) = h^{\sigma}(\overline{\Omega}; X)$.

Remarque. *Dans le cas où* $X = \mathbb{R}$, *on note simplement* $B(\Omega), C^{\sigma}(\Omega)$ *et* $h^{\sigma}(\Omega)$ *au lieu de* $B(\Omega; X), C^{\sigma}(\Omega; X)$ *et* $h^{\sigma}(\Omega; X)$.

1.4.2 Espaces d'interpolation réelle

On rappelle ici les définitions et certaines caractérisations des espaces d'interpolation réelle.
Il est nécessaire d'introduire les espaces suivants.

Définition 1.33. *On désigne par* $L^p_*([0, +\infty[; X)$ *avec* $p \in [1, +\infty[$, *l'espace de Banach des fonctions* f *fortement mesurables définies pour presque tout* $t \in [0, +\infty[$ *et telles que*

$$\left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|_X^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} = \|f(t)\|_{L^p_*([0,+\infty[;X)} < +\infty.$$

Si $p = +\infty$, *on désigne par* $L^{\infty}_*([0, +\infty[; X)$ *l'espace de Banach des fonctions* f *fortement mesurables définies pour presque tout* $t \in [0, +\infty[$ *et telles que*

$$\sup_{0<t<+\infty} ess \|f(t)\|_X < +\infty.$$

Définition 1.34. *Soient $\left(X_0, \|\cdot\|_{X_0}\right)$ et $\left(X_1, \|\cdot\|_{X_1}\right)$ deux espaces de Banach s'injectant continûment dans un même espace topologique séparé Z.*
*Soient $p \in [1,+\infty]$ et $\theta \in]0,1[$, on appelle **espace d'interpolation** (ou **espace de moyenne**) entre X_0 et X_1, l'espace $(X_0,X_1)_{\theta,p}$ défini par*

$$x \in (X_0,X_1)_{\theta,p} \Leftrightarrow \begin{cases} i) \quad \forall t>0,\ \exists u_0(t)\ \in X_0,\ \exists u_1(t)\ \in X_1\ ;\ x = u_0(t)+u_1(t) \\ ii) \quad t^{1-\theta}u_0 \in L^p_*([0,+\infty[;X_0),\ t^{1-\theta}u_1 \in L^p_*([0,+\infty[;X_1). \end{cases}$$

Pour la définition suivante, on se place dans le cas où $X_0 = D(A)$ et $X_1 = X$.

Définition 1.35. *Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset X$ muni de la norme du graphe $\|\cdot\|_{D(A)}$.*
On pose, en suivant les notations de Grisvard

$$D_A(\theta,p) = (D(A),X)_{1-\theta,p},$$

où $p \in [1,+\infty]$ et $\theta \in]0,1[$.

Quand l'opérateur A vérifie certaines hypothèses supplémentaires, il est alors possible de donner des caractérisations explicites de $D_A(\theta,p)$.

Définition 1.36. *Pour $0<\theta<1$, l'espace $D_A(\theta)$ est défini comme l'adhérence de $D(A)$ dans $D_A(\theta,+\infty)$.*

Théorème 1.37. *Soient $p \in [1,+\infty[$ et $\theta \in]0,1[$, et soit A un opérateur fermé.*

1. *Supposons que $\mathbb{R}_+^* \subset \rho(A)$ et il existe une constante $C>0$ telle que*

$$\forall \lambda > 0, \quad \left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{\lambda},$$

alors

$$D_A(\theta,p) = \left\{ x \in X \ : t^\theta A(A-tI)^{-1}x \in L^p_*([0,+\infty[;X) \right\},$$

muni de la norme

$$\|x\|_{D_A(\theta,p)} = \|x\|_X + \left\|t^\theta A(A-tI)^{-1}x\right\|_{L^p_*([0,+\infty[;X)},$$

et

$$D_A(\theta,+\infty) = \left\{ x \in X \ : \sup_{t>0} \left\|t^\theta A(A-tI)^{-1}x\right\|_X < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|x\|_{D_A(\theta,+\infty)} = \|x\|_X + \sup_{t>0} \left\| t^\theta A(A-tI)^{-1}x \right\|_X ,$$

et le sous espace

$$D_A(\theta) = \left\{ x \in X \ : \lim_{t\to+\infty} \left\| t^\theta A(A-tI)^{-1}x \right\|_X \ = 0 \right\}.$$

2. *Si maintenant A génère un semi-groupe analytique borné dans X, alors*

$$D_A(\theta,p) = \left\{ x \in X \ : t^{1-\theta} A e^{tA} x \in L^p_*([0,+\infty[;X) \right\},$$

et

$$D_A(\theta,+\infty) = \left\{ x \in X \ : \sup_{t>0} \left\| t^{1-\theta} A e^{tA} x \right\|_X < +\infty \right\},$$

et le sous espace

$$D_A(\theta) = \left\{ x \in X \ : \lim_{t\to+\infty} \left\| t^{1-\theta} A e^{tA} x \right\|_X \ = 0 \right\}.$$

Remarque. *Les espaces $D_A(\theta,+\infty)$ et $D_A(\theta)$ munis de la norme $\|.\|_{D_A(\theta,+\infty)}$ sont des espaces de Banach.*

Proposition 1.38. ***(Propriété de réitération)***
Soient $p \in [1,+\infty]$, $\theta \in]0,1[$, $k \in \mathbb{N}$ tels que $k\theta \notin \mathbb{N}$ et A un opérateur linéaire fermé sur X de domaine $D(A)$, alors on a

$$D_{A^k}(\theta,p) = D_A(k\theta,p).$$

Proposition 1.39. *Pour tout $\theta \in]0,1[$ on a*

$$D(A) \subset D_A(\theta) \subset D_A(\theta,+\infty) \subset \overline{D(A)}.$$

Chapitre 2

Changement de variables et formulation abstraite du problème

2.1 Position du problème

Soit $\Omega_{x_0} \subset \mathbb{R}^2$ le domaine cuspide défini par :

$$\Omega_{x_0} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < x_0,\ -\psi(x) < y < \psi(x) \right\},$$

où $\psi(x) = x^\alpha$ avec $1 < \alpha \leq 2$, x_0 un point donné près du point cuspide $(0, 0)$ et

$$\partial\Omega_{x_0} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3,$$

est la frontière de Ω_{x_0} (voir Figure 2.1), telle que

$$\Gamma_1 = \left\{ (x, y) \in \partial\Omega_{x_0} : y = \psi(x) \right\},$$
$$\Gamma_2 = \left\{ (x, y) \in \partial\Omega_{x_0} : y = -\psi(x) \right\},$$

et

$$\Gamma_3 = \left\{ (x_0, y) : -\psi(x_0) < y < \psi(x_0) \right\}.$$

Notons que Ω_{x_0} est un domaine höldérien, plus précisément $\partial\Omega_{x_0}$ est de classe $\mathcal{C}^{\frac{1}{\alpha}}$.
Nous allons considérer l'équation de Laplace :

$$\Delta u(x, y) = h(x, y),\ \text{dans } \Omega_{x_0} \tag{2.1}$$

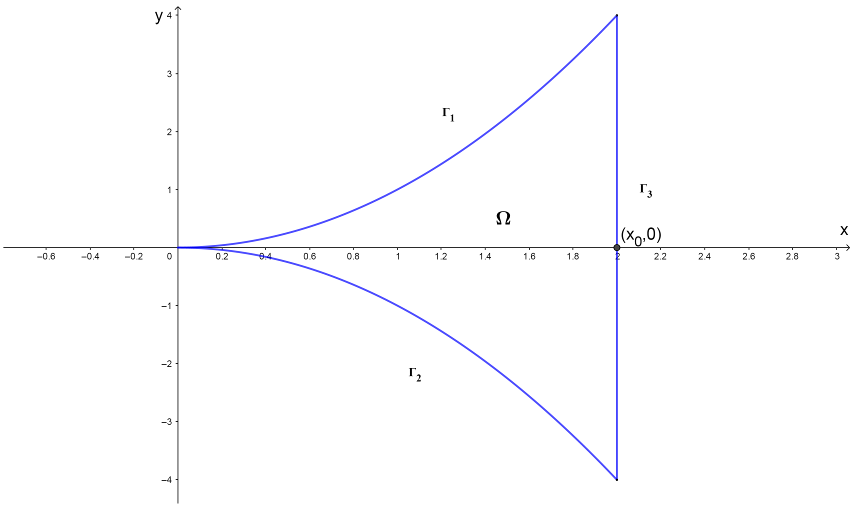

FIGURE 2.1 – Domaine à point cuspide

avec les conditions de Dirichlet non homogènes suivantes

$$u(x,y) = 0, \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \tag{2.2}$$

$$u(x_0,y) = u_0(y), \text{ sur } \Gamma_3, \tag{2.3}$$

où le second membre $h \in h^{2\sigma}(\overline{\Omega}_{x_0})$ $(\sigma \in]0,1/2[)$ vérifiant l'hypothèse

$$h(x,y) = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2. \tag{2.4}$$

2.2 Changement de variables

On considère le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} \Pi : \Omega_{x_0} &\to Q_{\xi_0} \\ (x,y) &\mapsto (\xi,\eta) = \left(\frac{x^{1-\alpha}}{\alpha-1}, \frac{y}{x^\alpha}\right), \end{aligned}$$

où Q_{ξ_0} est la semi-bande définie par

$$Q_{\xi_0} = \Big\{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 : \ \xi > \xi_0, \ -1 < \eta < 1\Big\},$$

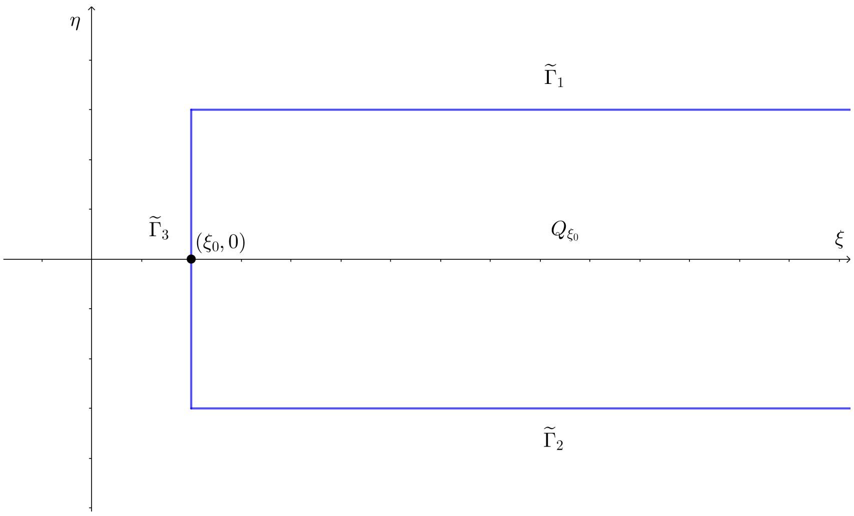

FIGURE 2.2 – Semi-bande

et $\xi_0 = \dfrac{1}{\alpha-1}x_0^{1-\alpha} > 0$.
L'image des parties Γ_1, Γ_2 et Γ_3 de $\partial\Omega_{x_0}$ par la transformation Π sont les ensembles

$$\widetilde{\Gamma}_1 = \Big\{(\xi,\eta); \xi \geq \xi_0 \quad \eta = 1\Big\},$$
$$\widetilde{\Gamma}_2 = \Big\{(\xi,\eta); \xi \geq \xi_0 \quad \eta = -1\Big\},$$

et

$$\widetilde{\Gamma}_3 = \Big\{(\xi_0,\eta); -1 < \eta < 1\Big\},$$

respectivement(voir Figure 2.2).
On a par définition $\xi = \dfrac{x^{1-\alpha}}{\alpha-1}$ et $\eta = \dfrac{y}{x^\alpha}$. Cela implique que $x = ((\alpha-1)\xi)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ et par conséquent $y = \eta((\alpha-1)\xi)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$.
En résumant, on obtient le changement de variables inverse

$$\begin{aligned} \Pi^{-1} \ &: Q_{\xi_0} \to \Omega_{x_0} \\ &(\xi,\eta) \mapsto (x,y) = (\theta^{-1/\alpha}\xi^{-\beta/\alpha}, \theta^{-1}\eta\xi^{-\beta}), \end{aligned}$$

avec $\beta = \alpha/(\alpha-1)$ et $\theta = (\alpha-1)^\beta$. On pose naturellement $u(x,y) = v(\xi,\eta)$, $h(x,y) = g(\xi,\eta)$ et $u_0(y) = \varphi(\eta)$. On a donc :

$$\begin{cases} u(x,y) = v\left(\dfrac{x^{1-\alpha}}{\alpha-1}, \dfrac{y}{x^\alpha}\right), \\ \dfrac{\partial\xi}{\partial x} = -x^{-\alpha}, \dfrac{\partial\eta}{\partial x} = -\alpha x^{-\alpha-1}y, \\ \dfrac{\partial\xi}{\partial y} = 0, \dfrac{\partial\eta}{\partial y} = \dfrac{1}{x^\alpha}. \end{cases}$$

Il vient que :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}(\xi,\eta) + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}(\xi,\eta)\\ &= -x^{-\alpha}\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,\eta) + -\alpha x^{-\alpha-1} y \frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi,\eta),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) &= \alpha x^{-\alpha-1}\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,\eta) - x^{-\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,\eta)\right)\\
&\quad + \alpha(\alpha+1)x^{-\alpha-2}y\frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi,\eta) - \alpha x^{-\alpha-1}y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi,\eta)\right)\\
&= \alpha x^{-\alpha-1}\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,\eta) - x^{-\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,\eta)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,\eta)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]\\
&\quad + \alpha(\alpha+1)x^{-\alpha-2}y\frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi,\eta) - \alpha x^{-\alpha-1}y\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi,\eta)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi,\eta)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]\\
&= \alpha x^{-\alpha-1}\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,\eta) + x^{-2\alpha}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}(\xi,\eta) + \alpha x^{-2\alpha-1}y\frac{\partial^2 v}{\partial \eta\partial \xi}(\xi,\eta)\\
&\quad + \alpha(\alpha+1)x^{-\alpha-2}y\frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi,\eta) + \alpha x^{-2\alpha-1}y\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta}(\xi,\eta) + \alpha^2 x^{-2\alpha-2}y^2\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}(\xi,\eta)\\
&= x^{-2\alpha}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}(\xi,\eta) + \alpha^2 x^{-2\alpha-2+2\alpha}y^2\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}(\xi,\eta) + 2\alpha x^{-2\alpha-1+2\alpha}y\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta}(\xi,\eta)\right.\\
&\quad \left. + \alpha x^{-\alpha-1+2\alpha}\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,\eta) + \alpha(\alpha+1)x^{-\alpha-2+2\alpha}y\frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi,\eta)\right]\\
&= x^{-2\alpha}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}(\xi,\eta) + \alpha^2 x^{2\alpha-2}(\frac{y}{x^\alpha})^2\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}(\xi,\eta) + 2\alpha x^{\alpha-1}(\frac{y}{x^\alpha})\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta}(\xi,\eta)\right.\\
&\quad \left. + \alpha x^{\alpha-1}\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,\eta) + \alpha(\alpha+1)x^{2\alpha-2}(\frac{y}{x^\alpha})\frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi,\eta)\right]\\
&= \theta^2\xi^{2\beta}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}(\xi,\eta) + 2\alpha\theta^{-1/\beta}\frac{\eta}{\xi}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta}(\xi,\eta) + \alpha^2\theta^{-2/\beta}(\frac{\eta}{\xi})^2\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}(\xi,\eta)\right.\\
&\quad \left. + \alpha\theta^{-1/\beta}\frac{1}{\xi}\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,\eta) + \alpha(\alpha+1)\theta^{-2/\beta}\frac{\eta}{\xi^2}\frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi,\eta)\right],\end{aligned}$$

puisque $x^{-2\alpha} = \theta^2\xi^{2\beta}$, $x^{\alpha-1} = \dfrac{\theta^{-1/\beta}}{\xi}$ et $x^{2\alpha-2} = \dfrac{\theta^{-2/\beta}}{\xi^2}$. De manière similaire, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \theta\xi^\beta\frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi,\eta),\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \theta^2\xi^{2\beta}\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}(\xi,\eta).$$

Au total, l'équation $\Delta u = h$ devient

$$\begin{aligned}\theta^2\xi^{2\beta}\Big\{\Delta v &+ \alpha^2\theta^{-2/\beta}\frac{\eta^2}{\xi^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + 2\alpha\theta^{-1/\beta}\frac{\eta}{\xi}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta}\\ &+\alpha\theta^{-1/\beta}\frac{1}{\xi}\frac{\partial v}{\partial \xi} + \alpha(\alpha+1)\theta^{-2/\beta}\frac{\eta}{\xi^2}\frac{\partial v}{\partial \eta}\Big\} = g.\end{aligned}$$

Autrement dit, on a montré l'existence d'un opérateur différentiel linéaire du second ordre L à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ bornés sur Q_{ξ_0} tel que :

$$\Delta v(\xi,\eta) + \frac{1}{\xi}[Lv](\xi,\eta) = f(\xi,\eta),$$

où

$$\begin{aligned}[Lv](\xi,\eta) &= \alpha^2\theta^{-2/\beta}\frac{\eta^2}{\xi}\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}(\xi,\eta) + 2\alpha\theta^{-1/\beta}\eta\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}(\xi,\eta)\\ &\quad + \alpha\theta^{-1/\beta}\frac{\partial v}{\partial\xi}(\xi,\eta) + \alpha(\alpha+1)\theta^{-2/\beta}\frac{\eta}{\xi}\frac{\partial v}{\partial\eta}(\xi,\eta),\end{aligned}$$

et

$$f(\xi,\eta) = \theta^{-2}\xi^{-2\beta}g(\xi,\eta). \tag{2.5}$$

Sachant que $u(x,y) = v(\xi,\eta)$, la condition aux limites (2.2) devient alors

$$v(\xi,-1) = v(\xi,1) = 0 \text{ pour tout } \xi \in]\xi_0,+\infty[.$$

D'autre part, la condition aux limites (2.3) devient $v(\xi_0,\eta) = \varphi(\eta)$ pour tout $\eta \in]-1,1[$. Par conséquent le problème (2.1)-(2.3) est réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \Delta v(\xi,\eta) + \dfrac{1}{\xi}[Lv](\xi,\eta) = f(\xi,\eta), & (\xi,\eta)\in Q_{\xi_0},\\ v(\xi_0,\eta) = \varphi(\eta),\ v(+\infty,\eta) = 0, & -1<\eta<1,\\ v(\xi,\pm1) = 0, & \xi>\xi_0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Dans la suite, nous allons se concentrer sur l'étude du problème concret

$$\begin{cases} \Delta v(\xi,\eta) = f(\xi,\eta), & (\xi,\eta)\in Q_{\xi_0},\\ v(\xi_0,\eta) = \varphi(\eta),\ v(+\infty,\eta) = 0, & -1<\eta<1,\\ v(\xi,\pm1) = 0, & \xi>\xi_0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Il convient également d'étudier l'effet du même changement de variables sur les espaces fonctionnels. On a le résultat suivant.

Proposition 2.1. *Soit $\sigma \in]0,\frac{1}{2}[$, alors*

$$h \in h^{2\sigma}(\overline{\Omega}_{x_0}) \textit{ implique que } f \in h^{2\sigma}(\overline{Q}_{\xi_0}).$$

Démonstration. On commence par montrer que $f \in h^{2\sigma}(Q_{\xi_0})$. De (2.5), on a pour $(\xi,\eta)\in Q_{\xi_0}$

$$\begin{aligned}|f(\xi,\eta)| &= |\theta^{-2}\xi^{-2\beta}h\circ\Pi^{-1}(\xi,\eta)|\\ &\le \theta^{-2}\xi_0^{-2\beta}\sup_{(x,y)\in\Omega_{x_0}}|h(x,y)|.\end{aligned}$$

D'où

$$\sup_{(\xi,\eta)\in Q_{\xi_0}} |f(\xi,\eta)| \leq \|h\|_{B(\Omega_{x_0})} < +\infty,$$

donc $f \in B(Q_{\xi_0})$.

Fixons maintenant $\delta > 0$. Soient $(\xi,\eta),(\xi',\eta') \in Q_{\xi_0}$ tels que

$$\|(\xi',\eta') - (\xi,\eta)\| \leq \delta.$$

On a

$$\begin{aligned} f(\xi',\eta') - f(\xi,\eta) &= \theta^{-2}\left((\xi')^{-2\beta} g(\xi',\eta') - (\xi)^{-2\beta} g(\xi,\eta)\right) \\ &= \theta^{-2} g(\xi',\eta')(\xi'^{-2\beta} - \xi^{-2\beta}) + \theta^{-2}\xi^{-2\beta}(g(\xi',\eta') - g(\xi,\eta)) \\ &= H_1 + H_2, \end{aligned}$$

avec $\beta = \alpha/(\alpha-1) > 1$. La fonction $\xi \longmapsto \xi^{-a}$ avec $a > 0$, étant localement lipschitzienne sur tout intervalle $[b,+\infty[$ $(b > 0)$, il existe une constante C_l telle que

$$|\xi'^{-a} - \xi^{-a}| \leq C_l|\xi' - \xi|, \ \forall \xi,\xi' \in [b,+\infty[.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} |H_1| &\leq C_l\theta^{-2} \sup_{(\xi',\eta')\in Q_{\xi_0}} |g(\xi',\eta')||\xi - \xi'| \\ &\leq C_l\theta^{-2} \sup_{(x,y)\in\Omega_{x_0}} |h(x,y)||\xi - \xi'|. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $|\xi' - \xi| \leq \|(\xi' - \xi, \eta' - \eta)\| \leq \delta$ et $0 < 1 - 2\sigma < 1$, on a

$$\begin{aligned} \frac{|H_1|}{\|(\xi' - \xi, \eta' - \eta)\|^{2\sigma}} &\leq \frac{|H_1|}{|\xi' - \xi|^{2\sigma}} \\ &\leq C_l\theta^{-2} \sup_{(x,y)\in\Omega_{x_0}} |h(x,y)||\xi - \xi'|^{1-2\sigma} \\ &\leq C_l\theta^{-2}\delta^{1-2\sigma}\|h\|_{B(\Omega_{x_0})}. \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{0<\|(\xi'-\xi,\eta'-\eta)\|\leq\delta} \frac{|H_1|}{\|(\xi' - \xi, \eta' - \eta)\|^{2\sigma}} \leq \lim_{\delta\to 0} \sup_{0<|\xi'-\xi|\leq\delta} \frac{H_1}{|\xi' - \xi|^{2\sigma}} = 0.$$

Maintenant, pour H_2 on a

$$\begin{aligned} \frac{|H_2|}{\|(\xi' - \xi, \eta' - \eta)\|^{2\sigma}} &\leq \frac{\theta^{-2}\xi_0^{-2\beta}|g(\xi',\eta') - g(\xi,\eta)|}{\|(\xi' - \xi, \eta' - \eta)\|^{2\sigma}} \\ &= \theta^{-2}\xi_0^{-2\beta}\frac{|h\circ\Pi^{-1}(\xi',\eta') - h\circ\Pi^{-1}(\xi,\eta)|}{\|(\xi' - \xi, \eta' - \eta)\|^{2\sigma}}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{|H_2|}{\|(\xi'-\xi,\eta'-\eta)\|^{2\sigma}} \leq \theta^{-2}\xi_0^{-2\beta}\frac{|h\circ\Pi^{-1}(\xi',\eta')-h\circ\Pi^{-1}(\xi,\eta)|}{\|\Pi^{-1}(\xi',\eta')-\Pi^{-1}(\xi,\eta)\|^{2\sigma}}\frac{\|\Pi^{-1}(\xi',\eta')-\Pi^{-1}(\xi,\eta)\|^{2\sigma}}{\|(\xi'-\xi,\eta'-\eta)\|^{2\sigma}}.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
&\|\Pi^{-1}(\xi',\eta')-\Pi^{-1}(\xi,\eta)\|^2\\
&\quad= \|\left(\theta^{-1/\alpha}\xi'^{-\beta/\alpha}-\theta^{-1/\alpha}\xi^{-\beta/\alpha},\theta^{-1}\eta'\xi'^{-\beta}-\theta^{-1}\eta\xi^{-\beta}\right)\|^2\\
&\quad= \|\left(\theta^{-1/\alpha}\left(\xi'^{-\beta/\alpha}-\xi^{-\beta/\alpha}\right),\theta^{-1}\eta'(\xi'^{-\beta}-\xi^{-\beta})+\theta^{-1}\xi^{-\beta}(\eta'-\eta)\right)\|^2\\
&\quad= \left|\theta^{-1/\alpha}\left(\xi'^{-\beta/\alpha}-\xi^{-\beta/\alpha}\right)\right|^2+\left|\theta^{-1}\eta'(\xi'^{-\beta}-\xi^{-\beta})+\theta^{-1}\xi^{-\beta}(\eta'-\eta)\right|^2\\
&\quad\leq \theta^{-2/\alpha}C_l^2|\xi'-\xi|^2+2\theta^{-2}\left(C_l^2|\xi'-\xi|^2+\xi_0^{-2\beta}|\eta'-\eta|^2\right)\\
&\quad\lesssim \left(|\xi'-\xi|^2+|\eta'-\eta|^2\right),
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\|\Pi^{-1}(\xi',\eta')-\Pi^{-1}(\xi,\eta)\|^{2\sigma}\lesssim\|(\xi'-\xi,\eta'-\eta)\|^{2\sigma}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{|H_2|}{\|(\xi'-\xi,\eta'-\eta)\|^{2\sigma}} &\lesssim \theta^{-2}(\xi_0)^{-2\beta}\sup_{0<\|(\xi'-\xi,\eta'-\eta)\|\leq\delta}\frac{|h\circ\Pi^{-1}(\xi',\eta')-h\circ\Pi^{-1}(\xi,\eta)|}{\|\Pi^{-1}(\xi',\eta')-\Pi^{-1}(\xi,\eta)\|^{2\sigma}}\\
&\lesssim \sup_{0<\|(x'-x,y'-y)\|\lesssim\delta}\frac{|h(x',y')-h(x,y)|}{\|(x'-x,y'-y)\|^{2\sigma}}.
\end{aligned}$$

De l'höldérianité de h, on en déduit que

$$\lim_{\delta\to0}\sup_{0<\|(\xi'-\xi,\eta'-\eta)\|\leq\delta}\frac{H_2}{\|(\xi'-\xi,\eta'-\eta)\|^{2\sigma}}=0.$$

En résumant, il vient que

$$\lim_{\delta\to0}\sup_{0<\|(\xi'-\xi,\eta'-\eta)\|\leq\delta}\frac{|f(\xi',\eta')-f(\xi,\eta)|}{\|(\xi'-\xi,\eta'-\eta)\|^{2\sigma}}=0.$$

En tenant compte de la Proposition 1.31, on conclut que $f\in h^{2\sigma}(Q_{\xi_0})$ et par conséquent $f\in h^{2\sigma}(\overline{Q}_{\xi_0})$ de la Proposition 1.32. ■

2.3 Formulation opérationnelle du problème principal

On pose dans tout ce qui suit $E=C([-1,1])$.

En faisant une translation à l'origine par rapport à la variable ξ ($\xi=\xi-\xi_0$) et en notant

$Q =]0, +\infty[\times] - 1, 1[$, le problème (2.7) s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \Delta v(\xi,\eta) = f(\xi,\eta), & (\xi,\eta) \in Q, \\ v(0,\eta) = \varphi(\eta),\ v(+\infty,\eta) = 0, & -1 < \eta < 1, \\ v(\xi,\pm 1) = 0, & \xi > 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

En prenant en compte (2.4) et (2.5), le second membre f satisfait

$$f(\xi, \pm 1) = 0,\ \forall \xi \geq 0.$$

On remarque également que notre changement de variables conduit à la propriété suivante sur le comportement de f à $+\infty$. Pour tout $\eta \in]-1, 1[$.

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \to +\infty} f(\xi,\eta) &= \theta^{-2} \lim_{\xi \to +\infty} \xi^{-2\beta} h(\theta^{-1/\alpha} \xi^{-\beta/\alpha}, \theta^{-1} \eta \xi^{-\beta}) \\ &= \theta^{-2} h(0,0) \lim_{\xi \to +\infty} \xi^{-2\beta} = 0, \end{aligned}$$

puisque h est continue sur $\overline{\Omega}_{x_0}$.

Introduisons les fonctions :

$$\begin{aligned} v &: [0, +\infty] \to E; \quad \xi \longrightarrow v(\xi) : \quad v(\xi)(\eta) = v(\xi, \eta), \\ f &: [0, +\infty] \to E; \quad \xi \longrightarrow f(\xi) : \quad f(\xi)(\eta) = f(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Le problème (2.8) peut être écrit sous la forme abstraite

$$v''(\xi) + Av(\xi) = f(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^+, \tag{2.9}$$

avec les conditions de Dirichlet non homogènes

$$v(0) = \varphi, \quad v(+\infty) = 0. \tag{2.10}$$

où A est l'opérateur linéaire fermé à domaine non dense défini par

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ w \in C^2([-1,1]) : \quad w(-1) = w(1) = 0 \right\}, \\ (Aw)(\eta) = \dfrac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}(\eta). \end{cases}$$

Cet opérateur vérifie la propriété d'ellipticité suivante (voir [4] et [18])

$$\mathbb{R}^+ \subset \rho(A) \ \text{ et } \ \exists\, C > 0 \quad : \forall \lambda \geq 0 \quad \left\| (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{C}{1 + \lambda}, \tag{2.11}$$

qui reste vraie dans un secteur de la forme

$$S(\omega_0, \epsilon_0) = \{ z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \omega_0 \} \cup B(0, \epsilon_0),$$

avec $\epsilon_0 > 0$ et $\omega_0 \in]0, \pi/2[$ assez petits.

La propriété (2.11) n'implique pas que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique, mais cela nous permet de définir l'opérateur linéaire fermé $B = -(-A^{1/2})$ par

$$B\varphi = \frac{\sin \pi/2}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{-1/2} A(\lambda I - A)^{-1} \varphi \, d\lambda, \quad \forall \varphi \in D(A).$$

Plus précisément, B est un opérateur sectoriel qui génère un semi-groupe analytique généralisé $(e^{\xi B})_{\xi \geq 0}$. De plus, il existe un secteur

$$\Pi_{\delta, r_0} = \{z \in \mathbb{C}^* : |argz| \leq \delta + \pi/2\} \cup \overline{B(0, r_0)},$$

où $\delta > 0$ et $r_0 > 0$ petits, et une constante C tels que :

$$\rho(B) \supset \Pi_{\delta, r_0} \quad et \quad \forall z \in \Pi_{\delta, r_0} \setminus 0 : \quad \left\| (B - zI)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{C}{|z|}.$$

Pour tout $\xi > 0$, on peut définir $e^{\xi B}$ par l'intégrale de Dunford :

$$e^{B\xi} \varphi = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma e^{z\xi} (B - zI)^{-1} \varphi dz, \quad \forall \varphi \in E,$$

où $\gamma = \partial \Pi_{\delta, r_0}$ est la frontière sectorielle courbe de Π_{δ, r_0} orientée de $\infty e^{i(\delta + \pi/2)}$ à $\infty e^{-i(\delta + \pi/2)}$.

Dans la suite, on aura souvent besoin d'utiliser la proposition suivante.

Proposition 2.2. ***(Résultats auxiliaires)***

1. *$\forall \ k \in \mathbb{N}, \ \exists \ m_k \geq 1, \ \omega > 0, \ \forall \ \xi > 0 : \left\| \xi^k B^k e^{B\xi} \right\|_{\mathcal{L}(E)} \leq m_k e^{-\omega \xi}$.*
2. *$\lim\limits_{\xi \to 0} e^{\xi B} \varphi = \varphi$ si et seulement si $\varphi \in \overline{D(B)}$.*
3. *$\overline{D(A)} = \overline{D(B)}$. Dans notre cas*

$$\overline{D(A)} = \Big\{ \psi \in C([-1, 1]) : \psi(-1) = \psi(1) = 0 \Big\}.$$

Démonstration. Voir Pazy [23] pour la première assertion, Sinestrari [25] pour la deuxième et Haase [14] pour la dernière assertion. ■

Maintenant, on peut introduire les familles d'espaces d'interpolation de Banach entre $D(A)$ et E, à savoir les espaces $D_A(\sigma, +\infty)$ et $D_A(\sigma)$ (voir Définition 1.34), et grâce à la propriété d'ellipticité (2.11), il est possible d'utiliser la caractérisation de ces espaces donnée dans le Théorème 1.37.

Remarque.

1. *L'espace $D_A(\sigma)$ est appelé espace d'interpolation continu.*
2. *Une conséquence du propriété de réitération des espaces d'interpolation est*

$$D_B(2\sigma) = D_A(\sigma),$$

   pour plus de détails voir [17].

3. *Dans notre cas et d'après [18], pour $2\sigma \in]0,1[$ on a*

$$D_B(2\sigma) = \left\{\psi \in h^{2\sigma}([-1,1]) : \psi(-1) = \psi(1) = 0\right\}.$$

Observant que la mesurabilité forte d'une fonction à valeurs dans l'espace de Hölder n'est pas évident et doit être traité avec soin (voir [11]), et tenant en compte la décomposition

$$h^{2\sigma}(\overline{Q}) = L^\infty(]0,+\infty[; h^{2\sigma}([-1,1])) \cap h^{2\sigma}([0,+\infty[; C([-1,1])).$$

et la remarque précédente, nous allons prendre

$$f \in L^\infty(]0,+\infty[; D_B(2\sigma)) \cap h^{2\sigma}([0,+\infty[; C([-1,1])).$$

Cela nous permet d'étudier le problème opérationnel dans les deux cas

1. $f \in h^{2\sigma}([0,+\infty[; C([-1,1]))$,
2. $f \in L^\infty(]0,+\infty[; D_B(2\sigma))$.

Chapitre 3

Résultats de régularité pour le problème opérationnel

La solution v du problème (2.9)-(2.10) est donné formellement par

$$v(\xi) = e^{B\xi}\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{B(s+\xi)}B^{-1}f(s)\ ds - \frac{1}{2}\int_0^{\xi} e^{B(\xi-s)}B^{-1}f(s)ds - \frac{1}{2}\int_{\xi}^{+\infty} e^{B(s-\xi)}B^{-1}f(s)ds. \tag{3.1}$$

En effet, on utilise la formule (1.2), on trouve

$$v'(\xi) = Be^{B\xi}\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{\xi} e^{B(\xi-s)}(I-e^{2Bs})f(s)ds + \frac{1}{2}\int_{\xi}^{+\infty} e^{B(s-\xi)}f(s)ds + \frac{1}{2}\int_{\xi}^{+\infty} e^{B(s+\xi)}f(s)ds, \tag{3.2}$$

et

$$\begin{aligned} v''(\xi) = B^2e^{B\xi}\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{\xi} Be^{B(\xi-s)}(I-e^{2Bs})f(s)ds - \frac{1}{2}\int_{\xi}^{+\infty} Be^{B(s-\xi)}f(s)ds \\ + \frac{1}{2}\int_{\xi}^{+\infty} Be^{B(s+\xi)}f(s)ds + f(\xi). \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} Av(\xi) = -B^2v(\xi) = -B^2e^{B\xi}\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{\xi} Be^{B(\xi-s)}(I-e^{2Bs})f(s)ds \\ + \frac{1}{2}\int_{\xi}^{+\infty} Be^{B(s-\xi)}(I-e^{2B\xi})f(s)ds. \end{aligned}$$

Il est clair que $v''(\xi) = -Av(\xi) + f(\xi)$. Donc v satisfait l'équation (2.9).
De plus, il est à noter que toutes les intégrales parues dans la formule (3.1) sont convergentes grâce aux propriétés des semi-groupes.

3.1 Résultats de régularité dans le premier cas

Dans cette section, on prend $f \in h^{2\sigma}([0, +\infty[; E)$. Commençons par donner quelques résultats qui nous seront utiles pour montrer la proposition principale de cette section.

Proposition 3.1. *Soit* $\varphi \in D(B^2)$ *et* $f \in h^{2\sigma}([0, +\infty[; E)$, $\sigma \in]0, \frac{1}{2}[$, *vérifiant* $f(+\infty, .) = 0$, $f(., \pm 1) = 0$. *Alors, pour tout* $\xi \geq 0$, $v(\xi) \in D(B^2)$.

Démonstration. Vérifions tout d'abord que $v(\xi) \in E$ pour tout $\xi > 0$. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\|v(\xi)\|_E &\leq m_0\|\varphi\|_E + m_0\|B^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \Bigg[\int_0^{\xi} e^{-\omega(\xi-s)} ds + \int_0^{+\infty} e^{-\omega(\xi+s)} ds \\
&\quad + \int_{\xi}^{+\infty} e^{-\omega(s-\xi)} ds \Bigg] \|f\|_{B(]0,+\infty[;E)} \\
&= m_0\|\varphi\|_E + \frac{2m_0}{\omega}\|B^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \left(1 - e^{-\omega\xi}\right) \|f\|_{B(]0,+\infty[;E)} \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

Ensuite, écrivons la solution v donnée par (3.1) sous la forme

$$\begin{aligned}
v(\xi) &= e^{B\xi}\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{B(s+\xi)} B^{-1} f(s)\, ds - \frac{1}{2}\int_0^{\xi} e^{B(\xi-s)} B^{-1} f(s) ds - \frac{1}{2}\int_{\xi}^{+\infty} e^{B(s-\xi)} B^{-1} f(s) ds \\
&= v_1(\xi) + v_2(\xi) + v_3(\xi) + v_4(\xi).
\end{aligned}$$

Le résultat est trivial pour $\xi = 0$ puisque $v(0) = \varphi$ par le deuxième résultat auxiliaire (Proposition 2.2).
Soit $\xi > 0$. Comme $\varphi \in D(B^2)$, on a du premier résultat auxiliaire

$$\begin{aligned}
\left\|B^2 v_1(\xi)\right\|_E = \left\|e^{B\xi} B^2\varphi\right\|_E &\leq \left\|e^{B\xi}\right\|_{\mathcal{L}(E)} \left\|B^2\varphi\right\|_E \\
&\leq m_0 e^{-\omega\xi} \left\|\varphi\right\|_{D(B^2)} \\
&\leq m_0 \left\|\varphi\right\|_{D(B^2)},
\end{aligned}$$

alors $v_1(\xi) \in D(B^2)$.

Concernant $v_2(\xi)$, on a

$$v_2(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{B(\xi+s)} B^{-1} f(s) ds \ \in D(B).$$

Par composition de l'opérateur B, on obtient

$$\begin{aligned}
Bv_2(\xi) &= \frac{1}{2} B \int_0^{+\infty} e^{B(\xi+s)} B^{-1} f(s) ds \\
&= \frac{1}{2} e^{B\xi} \int_0^{+\infty} e^{Bs}(f(s) - f(0)) ds - \frac{1}{2} B^{-1} e^{B\xi} f(0).
\end{aligned}$$

En composant encore une fois l'opérateur B, on trouve

$$B^2 v_2(\xi) = \frac{1}{2} e^{B\xi} \int_0^{+\infty} B e^{Bs}(f(s) - f(0)) ds - \frac{1}{2} e^{B\xi} f(0).$$

Par application de la Proposition 2.2 pour $k = 0$ puis pour $k = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\| B^2 v_2(\xi) \right\|_E &\leq m_0 m_1 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\omega s}}{s} \left\| f(s) - f(0) \right\|_E ds + m_0 \| f(0) \|_E \\
&\leq m_0 m_1 \int_0^{+\infty} e^{-\omega s} s^{2\sigma - 1} \frac{\| (f(s) - f(0)) \|_E}{s^{2\sigma}} ds + m_0 \| f \|_{B([0,+\infty[;E)} \\
&\leq \left(m_0 m_1 \int_0^{+\infty} e^{-\omega s} s^{2\sigma - 1} ds + m_0 \right) \| f \|_{C^{2\sigma}([0,+\infty[;E)} \\
&\leq \left(m_0 m_1 \Gamma(2\sigma) + m_0 \right) \| f \|_{C^{2\sigma}([0,+\infty[;E)},
\end{aligned}$$

avec Γ la fonction d'Euler définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} w^{z-1} e^{-w} dw, \quad Re z > 0.$$

Ceci implique que $v_2(\xi) \in D(B^2)$. Concernant $v_3(\xi)$, on a $v_3(\xi) \in D(B)$ et

$$\begin{aligned}
Bv_3(\xi) &= -\frac{1}{2} B \int_0^{\xi} e^{B(\xi - s)} B^{-1} f(s) ds \\
&= -\frac{1}{2} B \int_0^{\xi} e^{B(\xi - s)} B^{-1} (f(s) - f(\xi)) ds - \frac{1}{2} B \int_0^{\xi} e^{B(\xi - s)} B^{-1} f(\xi) ds \\
&= -\frac{1}{2} B \int_0^{\xi} e^{B(\xi - s)} B^{-1} (f(s) - f(\xi)) ds - \frac{B^{-1}}{2} e^{B\xi} f(\xi) + \frac{B^{-1}}{2} f(\xi),
\end{aligned}$$

du fait que B est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(e^{\xi B})_{\xi \geq 0}$.

Par composition de l'opérateur B, on obtient

$$B^2 v_3(\xi) = -\frac{1}{2} B \int_0^{\xi} e^{B(\xi - s)}(f(s) - f(\xi))ds - \frac{1}{2} e^{B\xi} f(\xi) + \frac{1}{2} f(\xi).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\left\|B^2 v_3(\xi)\right\|_E &\leq m_1 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\omega(\xi - s)}}{\xi - s} \|f(s) - f(\xi)\|_E \, ds + m_0 \|f(\xi)\|_E + \|f(\xi)\|_E \\ &\leq \max(m_1 \Gamma(2\sigma), m_0 + 1) \|f\|_{C^{2\sigma}([0,+\infty[;E)},\end{aligned}$$

d'où $v_3(\xi) \in D(B^2)$.

On procède de même pour $v_4(\xi)$, on a

$$\begin{aligned} B v_4(\xi) &= -\frac{1}{2} B \int_{\xi}^{+\infty} e^{B(s-\xi)} B^{-1} f(s) ds \\ &= -\frac{1}{2} B \int_{\xi}^{+\infty} e^{B(s-\xi)} B^{-1}(f(s) - f(\xi))ds - \frac{1}{2} B \int_{\xi}^{+\infty} e^{B(\xi - s)} B^{-1} f(\xi) ds \\ &= -\frac{1}{2} B \int_{\xi}^{+\infty} e^{B(s-\xi)} B^{-1}(f(s) - f(\xi))ds + \frac{B^{-1}}{2} f(\xi). \end{aligned}$$

Ainsi

$$B^2 v_4(\xi) = -\frac{1}{2} \int_{\xi}^{+\infty} B e^{B(s-\xi)}(f(s) - f(\xi))ds + \frac{1}{2} f(\xi),$$

et on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \left\|B^2 v_4(\xi)\right\|_E &= \left\| -\frac{1}{2} \int_{\xi}^{+\infty} B e^{B(s-\xi)}(f(s) - f(\xi))ds + \frac{1}{2} f(\xi) \right\|_E \\ &\leq m_1 \int_{\xi}^{+\infty} \frac{e^{-\omega(s-\xi)}}{s - \xi} \|f(s) - f(\xi)\|_E \, ds + \|f(\xi)\|_E \\ &\lesssim \|f\|_{C^{2\sigma}([0,+\infty[;E)}, \end{aligned}$$

ce qui montre que $v_4(\xi) \in D(B^2)$, d'où le résultat désiré. ∎

Proposition 3.2. *Soit* $\varphi \in D(A)$ *et* $f \in h^{2\sigma}([0, +\infty[; E)$ *satisfaisant :*

$$f(+\infty, .) = 0, \quad f(., \pm 1) = 0, \quad \textit{avec } \sigma \in]0, \frac{1}{2}[.$$

Alors

1. *v et $v' \in BUC([0,+\infty[;E)$.*
2. *$Av(.) \in BUC([0,+\infty[;E)$ si et seulement si $A\varphi \in \overline{D(A)}$.*
3. *$Av(.) \in h^{2\sigma}([0,+\infty[;E)$ si et seulement si $A\varphi \in D_A(\sigma)$.*

Démonstration. (voir [12] et [25]). ■

On arrive maintenant au résultat principal de cette section où on montre une régularité maximale de la solution du problème (2.9)-(2.10).

Proposition 3.3. *Soit $\varphi \in D(A)$ telle que $A\varphi \in \overline{D(A)}$ et $f \in h^{2\sigma}([0,+\infty[;E)$ satisfaisant*

$$f(+\infty,.) = 0, \quad f(.,\pm 1) = 0, \quad \textit{avec } \sigma \in]0,\frac{1}{2}[.$$

Alors

1. *Le problème* (2.9)-(2.10) *admet une solution unique*

$$v \in BUC^2([0,+\infty[;E) \cap BUC([0,+\infty[;D(A)).$$

2. *Si de plus $A\varphi \in D_A(\sigma)$, la solution v vérifie la propriété de régularité maximale suivante*

$$v''(.),\ Av(.) \in h^{2\sigma}([0,+\infty[;E).$$

Démonstration.

1. On commence par vérifier que $v \in BUC^2([0,+\infty[;E)$ i.e.

$$v, v' \textit{ et } v'' \in BUC([0,+\infty[;E).$$

En effet, du fait que $\varphi \in D(A)$ et $A\varphi \in \overline{D(A)}$ la Proposition 3.2 implique que

$$v, v' \text{ et } Av(.) \in BUC([0,+\infty[;E).$$

Sachant que $v''(.) = f(.) - Av(.)$, on voit immédiatement que $v'' \in BUC([0,+\infty[;E)$. Il vient également que $v \in BUC([0,+\infty[;D(A))$ suivant la Définition 1.28 du fait que v, $Av(.) \in BUC([0,+\infty[;E)$ et $v(\xi) \in D(A)$ pour tout $\xi \geq 0$ par la Proposition 3.1.

Reste à montrer que la solution (3.1) satisfait les conditions aux limites (2.10).

Pour simplifier, on écrit

$$\begin{aligned} v(\xi) &= e^{B\xi}\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{\xi} e^{B(\xi-s)}(I-e^{2Bs})B^{-1}f(s)ds - \frac{1}{2}\int_{\xi}^{+\infty} e^{B(s-\xi)}(I-e^{2B\xi})B^{-1}f(s)ds \\ &= v_1(\xi)+v_2(\xi)+v_3(\xi). \end{aligned}$$

De (3.1) et prenant en compte la deuxième assertion du Proposition 2.2, il vient que $v(0)=\varphi$.

D'autre part, le premier résultat auxiliaire assure l'existence de $\omega>0$ et $m_0\geq 1$ tels que

$$\|v_1(\xi)\|_E \leq m_0 e^{-\omega\xi}\|\varphi\|_E,$$

dont on déduit que $\lim\limits_{\xi\to+\infty}\|v_1(\xi)\|_E=0$.

Pour $v_2(\xi)$, on peut écrire comme dans [12]

$$\begin{aligned} v_2(\xi) &= \int_0^{\xi/2} e^{B(\xi-s)}(I-e^{2Bs})B^{-1}f(s)ds + \int_{\xi/2}^{\xi} e^{B(\xi-s)}(I-e^{2Bs})B^{-1}f(s)ds \\ &= v_{21}(\xi)+v_{22}(\xi). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \|v_{21}(\xi)\|_E &\leq \int_0^{\xi/2} \left\|e^{B(\xi-s)}\right\|_{\mathcal{L}(E)} \left\|(I-e^{2Bs})B^{-1}f(s)\right\|_E ds \\ &\leq m_0(m_0^2+1)\left\|B^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(E)}\left(\int_0^{\xi/2} e^{-\omega(\xi-s)}ds\right)\|f\|_{C^{2\sigma}([0,+\infty[;E)} \\ &\lesssim \left(e^{-\omega\xi/2}-e^{-\omega\xi}\right)\|f\|_{C^{2\sigma}([0,+\infty[;E)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\lim\limits_{\xi\to+\infty} v_{21}(\xi) = 0$.

Pour $v_{22}(\xi)$, vérifions d'abord que

$$\lim_{\xi\to+\infty}\sup_{\frac{\xi}{2}\leq s\leq\xi}\|f(s)\|_E=0. \tag{3.3}$$

En effet, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\xi_0>0$ tel que

$$s>\xi_0 \implies \|f(s)\|_E<\varepsilon,$$

puisque $f(+\infty) = 0$. Alors pour $\xi > 2\xi_0$, on a

$$\sup_{\frac{\xi}{2} \leq s \leq \xi} \|f(s)\|_E < \varepsilon,$$

d'où (3.3). D'autre part, on montre facilement comme pour $\|v_{21}(\xi)\|_E$ que

$$\|v_{22}(\xi)\|_E \lesssim \left(1 - e^{-\omega\xi/2}\right) \sup_{\frac{\xi}{2} \leq s \leq \xi} \|f(s)\|_E ,$$

ce qui donne $\lim\limits_{\xi \to +\infty} \|v_{22}(\xi)\|_E = 0$ grâce à (3.3). Par conséquent $\lim\limits_{\xi \to +\infty} v_2(\xi) = 0$.
De manière similaire, on écrit $v_3(\xi)$ comme suit

$$\begin{aligned} v_3(\xi) &= \int_{\xi}^{2\xi} e^{B(s-\xi)}(I - e^{2Bs})B^{-1}f(s)ds + \int_{2\xi}^{+\infty} e^{B(s-\xi)}(I - e^{2Bs})B^{-1}f(s)ds \\ &= v_{31}(\xi) + v_{32}(\xi). \end{aligned}$$

Il vient que

$$\|v_{31}(\xi)\|_E \lesssim \left(1 - e^{-\omega\xi}\right) \sup_{\xi \leq s \leq 2\xi} \|f(s)\|_E .$$

Par conséquent $\lim\limits_{\xi \to +\infty} v_{31}(\xi) = 0$ par (3.3).
Il vient également que

$$\lim_{\xi \to +\infty} \|v_{32}(\xi)\|_E \lesssim \lim_{\xi \to +\infty} e^{-\omega\xi} \|f\|_{B([0,+\infty[;E)} = 0.$$

Donc, $\lim\limits_{\xi \to +\infty} \|v_3(\xi)\|_E = 0$. On conclut que $\lim\limits_{\xi \to +\infty} v(\xi) = 0$.
En résumé, la fonction v donnée par (3.1) est bien solution du problème (2.9)-(2.10).

2. La régularité maximale découle directement en utilisant la troisième assertion de la Proposition 3.2.

■

3.2 Résultats de régularité dans le deuxième cas

Dans cette section, nous allons étudier la régularité de la solution v donnée par (3.1) dans le cas où $f \in L^\infty(]0, +\infty[; D_A(\sigma)) \cap BUC([0, +\infty[; E)$.
On aura besoin du lemme technique suivant qui donne des définitions équivalentes des espaces d'interpolations (voir [25]).

Lemme 3.4. *On a pour $\psi \in E$ les propriétés suivantes :*

1. $\psi \in D_B(2\sigma, +\infty)$ *si et seulement si* $\sup_{\xi>0} \|\xi^{1-2\sigma} B e^{\xi B} \psi\|_E < \infty$,
2. $\psi \in D_B(2\sigma)$ *si et seulement si* $\lim_{\xi\to 0} \|\xi^{1-2\sigma} B e^{\xi B} \psi\|_E = 0$,
3. $\psi \in D_B(2\sigma, +\infty)$ *si et seulement si* $\sup_{\xi>0} \|\xi^{2(1-\sigma)} B^2 e^{\xi B} \psi\|_E < \infty$,
4. $\psi \in D_B(2\sigma)$ *si et seulement si* $\lim_{\xi\to 0} \|\xi^{2(1-\sigma)} B^2 e^{\xi B} \psi\|_E = 0$.

Remarque. *Les applications*

$$\psi \mapsto \|\psi\|_E + \sup_{\xi>0} \|\xi^{1-2\sigma} B e^{\xi B} \psi\|_E,$$

et

$$\psi \mapsto \|\psi\|_E + \sup_{\xi>0} \|\xi^{2(1-\sigma)} B^2 e^{\xi B} \psi\|_E,$$

sont des normes sur l'espace $D_B(2\sigma, +\infty)$ *équivalentes à la norme* $\|\cdot\|_{D_B(2\sigma,+\infty)}$.

Commençons par montrer le résultat important suivant.

Proposition 3.5. *Soit* $f \in L^\infty(]0, +\infty[; D_B(2\sigma))$ *et* $\varphi \in D(B^2)$ *tel que* $B^2\varphi \in D_B(2\sigma)$ *avec* $\sigma \in]0, 1/2[$. *Alors,* $B^2 v(.)$ *et* $v''(.) \in L^\infty(]0, +\infty[; D_B(2\sigma))$.

Démonstration. Soient $f \in L^\infty(]0, +\infty[; D_B(2\sigma))$ et $B^2\varphi \in D_B(2\sigma)$. Cela implique que

$$\sup_{\xi>0} ess \|f(\xi)\|_{D_B(2\sigma,+\infty)} < +\infty,$$

et de 2. du Lemme 3.4

$$\lim_{t\to 0} \|t^{1-2\sigma} B e^{tB} f(\xi)\|_E = 0, \quad \text{p.p. } \xi \in]0, +\infty[,$$

et

$$\lim_{t\to 0} \left\|t^{1-2\sigma} B e^{tB} B^2 \varphi\right\|_E = 0.$$

Maintenant, soit $\xi > 0$. Rappelons que $v(\xi) = v_1(\xi) + v_2(\xi) + v_3(\xi)$ où $v_1(\xi)$, $v_2(\xi)$ et $v_3(\xi)$ sont définis dans la démonstration de la Proposition 3.3.

Concernant $v_1(\xi)$, on sait déjà que $v_1(\xi) \in D(B^2)$ pour tout $\xi > 0$ si $\varphi \in D(B^2)$ (preuve de la Proposition 3.1), donc $B^2 v_1(\xi) \in E$ pour tout $\xi > 0$, avec

$$\left\|B^2 v_1(\xi)\right\|_E \leq m_0 \|B^2\varphi\|_E. \tag{3.4}$$

De plus, on a pour $\xi \in]0,+\infty[$ p.p.

$$\begin{aligned}
\|t^{1-2\sigma}Be^{tB}(B^2v_1(\xi))\|_E &= \|t^{1-2\sigma}Be^{tB}(e^{\xi B}B^2\varphi)\|_E \\
&= \|e^{\xi B}[t^{1-2\sigma}Be^{tB}(B^2\varphi)]\|_E \\
&\leq m_0\|t^{1-2\sigma}Be^{tB}(B^2\varphi)\|_E. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Comme $B^2\varphi \in D_B(2\sigma) \subset D_B(2\sigma,+\infty)$, on conclut des assertions 1. et 2. du Lemme 3.4 que $B^2v_1(\xi) \in D_B(2\sigma,+\infty)$ et $B^2v_1(\xi) \in D_B(2\sigma)$ respectivement.

De plus, les estimations (3.4) et (3.5) impliquent que

$$\|B^2v_1(.)\|_{L^\infty(]0,\infty[;D_B(2\sigma))} \leq m_0\|B^2\varphi\|_{D_B(2\sigma,+\infty)}.$$

Revenons maintenant à $v_2(\xi)$. On a

$$\begin{aligned}
B^2v_2(\xi) &= -\frac{1}{2}B\int_0^\xi e^{(\xi-s)/2B}e^{(\xi-s)/2B}(I-e^{2sB})f(s)ds \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^\xi e^{((\xi-s)/2)B}(\xi-s)^{1-2\sigma}(\xi-s)^{2\sigma-1}Be^{((\xi-s)/2)B}(I-e^{2sB})f(s)ds.
\end{aligned}$$

Alors

$$\|B^2v_2(\xi)\|_E \leq m_0(m_0+1)\int_0^\xi (\xi-s)^{2\sigma-1}e^{-\omega(\xi-s)/2}\left(\|(\xi-s)^{1-2\sigma}Be^{((\xi-s)/2)B}f(s)\|_E\right)ds.$$

Cela implique que

$$\|B^2v_2(\xi)\|_E \leq 2^{1-2\sigma}m_0(m_0+1)\int_0^\xi (\xi-s)^{2\sigma-1}e^{-\omega(\xi-s)/2}\left(\sup_{\tau>0}\|\tau^{1-2\sigma}Be^{\tau B}f(s)\|_E\right)ds.$$

Posant $z=\omega(\xi-s)/2$, on obtient pour tout $\xi \in]0,+\infty[$ p.p.

$$\begin{aligned}
\|B^2v_2(\xi)\|_E &\leq 2m_0(m_0+1)\left(\frac{1}{\omega}\right)^{2\sigma}\int_0^{+\infty} z^{2\sigma-1}e^{-z}dz\ \|f\|_{L^\infty(]0,+\infty[;D_B(2\sigma,+\infty))} \\
&= 2m_0(m_0+1)\left(\frac{1}{\omega}\right)^{2\sigma}\Gamma(2\sigma)\ \|f\|_{L^\infty(]0,+\infty[;D_B(2\sigma,+\infty))}. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Ceci établit que :

$$B^2v_2(.) \in L^\infty(]0,+\infty[;E).$$

Il reste à montrer que $B^2v_2(.) \in L^\infty(]0,+\infty[;D_B(2\sigma))$.

On commence par estimer $\sup\limits_{t>0}\|t^{1-2\sigma}Be^{tB}(B^2v_2(\xi))\|_E$, pour $\xi \in]0,+\infty[$ p.p.

Soit $\xi \in]0, +\infty[$ p.p, on a

$$\begin{aligned} Be^{tB}[B^2 v_2(\xi)] &= \int_0^{\xi} (I - e^{2sB}) B^2 e^{(\xi - s + t)B} f(s) ds, \\ &= \int_0^{\xi} (I - e^{2sB}) B^2 (\xi - s + t)^{2\sigma - 2} \times (\xi - s + t)^{2 - 2\sigma} e^{(\xi - s + t)B} f(s) ds, \end{aligned}$$

alors

$$\|t^{1-2\sigma} Be^{tB} \ [B^2 v_2(\xi)]\|_E \leq (m_0 + 1) t^{1-2\sigma} \int_0^{\xi} (\xi - s + t)^{2\sigma - 2} \sup_{\tau > 0} \|\tau^{2-2\sigma} B^2 e^{\tau B} f(s)\|_E ds.$$

En utilisant la troisième assertion du Lemme 3.4, on obtient

$$\begin{aligned} \|t^{1-2\sigma} Be^{tB} \ [B^2 v_2(\xi)]\|_E &\leq (m_0 + 1) t^{1-2\sigma} \left(\int_0^{\xi} \frac{ds}{(\xi - s + t)^{2-2\sigma}} \right) \sup_{s > 0} ess \|f\|_{D_B(2\sigma, +\infty)} \\ &= (m_0 + 1) t^{1-2\sigma} \left(\int_t^{t+\xi} z^{2\sigma - 2} dz \right) \sup_{s > 0} ess \|f\|_{D_B(2\sigma, +\infty)} \\ &= \frac{m_0 + 1}{1 - 2\sigma} \left(1 - \left(\frac{t}{t + \xi} \right)^{1-2\sigma} \right) \|f\|_{L^\infty(]0, +\infty[; D_B(2\sigma, +\infty))} \\ &\leq \frac{m_0 + 1}{1 - 2\sigma} \|f\|_{L^\infty(]0, +\infty[; D_B(2\sigma, +\infty))}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Par conséquent, $\sup\limits_{t > 0} \|t^{1-2\sigma} Be^{tB} \ (B^2 v_2(\xi))\|_E < +\infty, \ \forall \ \xi \in]0, +\infty[$ p.p.

Maintenant, montrons que $B^2 v_2(\xi) \in D_B(2\sigma)$. Observons d'abord que pour tous $\psi \in E$ et $t > 0$

$$Be^{tB}\psi = Be^{B}\psi + \int_1^t B^2 e^{\mu B} \psi d\mu.$$

En effet, D'après la Proposition 1.25

$$\frac{d}{d\mu} Be^{\mu B} \psi = B^2 e^{\mu B} \psi.$$

En intégrant entre 1 et t, on obtient

$$\int_1^t \frac{d}{d\mu} Be^{\mu B} \psi d\mu = \int_1^t B^2 e^{\mu B} \psi d\mu.$$

D'où

$$Be^{tB}\psi - Be^{B}\psi = \int_1^t B^2 e^{\mu B} \psi d\mu.$$

Donc, pour tout $\xi \in]0,+\infty[$ p.p, on peut écrire

$$\begin{aligned} t^{1-2\sigma} B e^{tB} \left[B^2 v_2(\xi)\right] &= t^{1-2\sigma} B e^{B} \left(\int_0^{\xi} (I - e^{2sB}) B e^{(\xi-s)B} f(s) ds \right) \\ &\quad + t^{1-2\sigma} \int_1^t B^2 e^{\mu B} \left(\int_0^{\xi} (I - e^{2sB}) B e^{(\xi-s)B} f(s) ds \right) d\mu \\ &= t^{1-2\sigma} s_1(\xi) + t^{1-2\sigma} s_2(\xi, t). \end{aligned}$$

Il est clair que

$$\lim_{t \to 0} t^{1-2\sigma} \|s_1(\xi)\|_E = 0. \tag{3.8}$$

Pour $s_2(\xi, t)$, on écrit

$$s_2(\xi, t) = \int_0^{\xi} (I - e^{2sB}) B e^{(\xi-s)/2B} Q_\xi(t, s) ds,$$

avec

$$Q_\xi(t, s) = \int_1^t ((\xi - s)/2 + \mu)^{2\sigma-2} ((\xi - s)/2 + \mu)^{2-2\sigma} \times B^2 e^{((\xi-s)/2+\mu)B} f(s) d\mu.$$

Puisque $f(s) \in D_B(2\sigma)$, on a

$$\begin{aligned} \|Q_\xi(t, s)\|_E &\leq \int_1^t ((\xi - s)/2 + \mu)^{2\sigma-2} \times \sup_{\xi, \xi - s > 0} \left\| ((\xi - s)/2 + \mu)^{2-2\sigma} B^2 e^{((\xi-s)/2+\mu)B} f(s) \right\|_E d\mu \\ &\leq \left(\sup_{\tau > 0} \left\| \tau^{2-2\sigma} B^2 e^{\tau B} f(s) \right\|_E \right) \int_1^t ((\xi - s)/2 + \mu)^{2\sigma-2} d\mu \\ &\leq \|f(s)\|_{D_B(2\sigma,+\infty)} \int_1^t ((\xi - s)/2 + \mu)^{2\sigma-2} d\mu. \end{aligned}$$

donc

$$\|Q_\xi(t, s)\|_E \leq \frac{1}{2\sigma - 1} \left[((\xi - s)/2 + t)^{2\sigma-1} - ((\xi - s)/2 + 1)^{2\sigma-1} \right] \|f(s)\|_{D_B(2\sigma,+\infty)}.$$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned} \|s_2(\xi, t)\|_E &\lesssim \int_0^{\xi} \frac{e^{-\omega(\xi-s)/2}}{(\xi - s)/2} ((\xi - s)/2 + t)^{2\sigma-1} ds \\ &\quad + \int_0^{\xi} \frac{e^{-\omega(\xi-s)/2}}{(\xi - s)/2} ((\xi - s)/2 + 1)^{2\sigma-1} ds. \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $z = \dfrac{\omega(\xi - s)}{2}$, il vient que

$$\|s_2(\xi,t)\|_E \lesssim \int_0^{+\infty} \frac{e^{-z}}{z}(z+t\omega)^{2\sigma-1}dz + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-z}}{z}(z+\omega)^{2\sigma-1}dz$$

Le deuxième terme

$$\lim_{t\to 0} t^{1-2\sigma} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-z}}{z}(z+\omega)^{2\sigma-1}dz = 0, \quad \forall\, \xi \in]0,+\infty[,$$

puisque

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-z}}{z}(z+\omega t)^{2\sigma-1}dz \leq \ C\ \Gamma(2\sigma).$$

Cela implique que

$$\lim_{t\to 0} t^{1-2\sigma} \left\|s_2(\xi,t)\right\|_E = 0 \qquad \forall\, \xi \in]0,+\infty[\text{ p.p.} \tag{3.9}$$

De (3.8) et (3.9), on trouve :

$$\lim_{t\to 0} t^{1-2\sigma} B e^{tB}[B^2 v_2(\xi)] = 0 \qquad \forall\, \xi \in]0,+\infty[\text{ p.p.}$$

Cela veut dire que $B^2 v_2(\xi) \in D_B(2\sigma)$ pour presque tout $\xi \in]0,+\infty[$. Cela implique grâce aux inégalités (3.6) et (3.7) (les constantes apparaissant dans ces inégalités ne dépendent pas de ξ) que $B^2 v_2(.) \in L^\infty(]0,+\infty[; D_B(2\sigma))$. En utilisant les même techniques que ci-dessus, on arrive à démontrer que $B^2 v_3(.) \in L^\infty(]0,+\infty[; D_B(2\sigma))$.
Ceci permet de conclure que $B^2 v(.) \in L^\infty(]0,+\infty[; D_B(2\sigma))$. Par conséquent, il s'en suit facilement de l'équation (2.9) que

$$v''(.) \in L^\infty(]0,+\infty[; D_B(2\sigma)).$$

■

Arrivons maintenant au résultat principal de cette section où on montre la régularité de la solution du problème (2.9)-(2.10).

Proposition 3.6. *Soient $\varphi \in D(A)$ et $f \in L^\infty(]0,+\infty[; D_A(\sigma)) \cap BUC(]0,+\infty; E)$ ($\sigma \in]0,1/2[$) satisfaisant $f(+\infty,.) \ = 0$.*
Supposons que $A\varphi \in \overline{D(A)}$. Alors le problème (2.9)-(2.10) admet une unique solution

$$v \in W^{2,\infty}(]0,+\infty[; E) \cap L^\infty(]0,+\infty[; D(A)).$$

De plus, si $A\varphi \in D_A(\sigma)$ alors la solution unique v satisfait la propriété de régularité maximale suivante $v''(.)$ et $Av(.) \in L^\infty(]0,+\infty[; D_A(\sigma))$.

Démonstration. Vérifions tout d'abord que $v \in L^\infty(]0,+\infty[; D(A))$.
Soit $\xi \in]0,+\infty[$, on a
$$\|v(\xi)\|_{D(A)} = \|v(\xi)\|_E + \|Av(\xi)\|_E.$$
Pour le premier terme du membre droit de l'égalité, on a déjà vérifié dans la preuve de la Proposition 3.1 que
$$\|v(\xi)\|_E \leq C,$$
où C est une constante qui ne dépend pas de ξ.
Pour le deuxième terme, observons qu'on a $\|B^2 v_1(\xi)\|_E \leq m_0 \|\varphi\|_{D(B^2)} < +\infty$.
De plus, de la preuve de la proposition précédente, on a
$$B^2 v_2(.) \quad et \quad B^2 v_3(.) \in L^\infty(]0,+\infty[; E).$$
Ceci établit que $v \in L^\infty(]0,+\infty[; D(A))$.
Maintenant, il reste a montrer que $v \in W^{2,\infty}(]0,+\infty[; E)$, i.e. v, v' et $v'' \in L^\infty(]0,+\infty[; E)$.
On a déjà vérifié que $v \in L^\infty(]0,+\infty[; E)$.
D'autre parte, en utilisant le premier résultat auxiliaire dans l'expression (3.2), on obtient pour tout $\xi \in]0,+\infty[$
$$\|v'(\xi)\|_E \leq m_0 \|B\varphi\|_E + 2m_0 \|f\|_{B(]0,+\infty[; E)}.$$
Ce qui signifie que $v' \in L^\infty(]0,+\infty[; E)$.
Concernant v'', on part de $f \in L^\infty(]0,+\infty[; D_A(\sigma))$. On a donc $f \in L^\infty(]0,+\infty[; E)$.
En écrivant $v''(.) = f(.) - Av(.)$, on en déduit sans peine que $v'' \in L^\infty(]0,+\infty[; E)$.
La régularité maximale n'est autre que le résultat de la Proposition 3.5. Ce qui complète la démonstration.

■

Terminons ce chapitre en résumant les résultats qu'on a montré dans la proposition suivante.

Proposition 3.7. *Soient $\varphi \in D(A)$ et $f \in h^{2\sigma}(\overline{Q})(\sigma \in]0,1/2[)$ satisfaisant*
$f(+\infty,.) = 0, f(\xi,\pm 1) = 0 \ \forall \xi \in [0,+\infty[$.
Supposons que $A\varphi \in \overline{D(A)}$. Alors le problème (2.8) admet une unique solution $v \in h^{2\sigma}(\overline{Q})$. De plus, si $A\varphi \in D_A(\sigma)$ alors la solution unique v satisfait la propriété de régularité maximale suivante
$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}, \ \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \in h^{2\sigma}(\overline{Q}).$$

Démonstration. On a $h^{2\sigma}(\overline{Q}) = L^\infty(]0,+\infty[; h^{2\sigma}([-1,1])) \cap h^{2\sigma}([0,+\infty[; E)$.
D'après la proposition précédente $v \in L^\infty(]0,+\infty[; D(A)) \subset L^\infty(]0,+\infty[; h^{2\sigma}([-1,1]))$.
D'autre part, on a de la Proposition 3.3, $v \in BUC^2([0,+\infty[; E)$, et tenant en compte la troisième assertion de la Proposition 1.31, il vient que $v \in h^{2\sigma}([0,+\infty[; E)$.
La régularité maximale découle des Propositions 3.3 et 3.5. ■

Remarque. *Sachant que les espaces fonctionnels sont invariants par translation et sous les mêmes hypothèses de la proposition précédente, le problème* (2.7) *admet une solution unique noté encore* $v \in L^\infty(]\xi_0,+\infty[; h^{2\sigma}([-1,1])) \cap h^{2\sigma}([\xi_0,+\infty[; E) = h^{2\sigma}(\overline{Q}_{\xi_0})$ *et vérifie la régularité maximale*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2},\ \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \in h^{2\sigma}(\overline{Q}_{\xi_0}).$$

Chapitre 4

Résultats de régularité pour le problème de départ

4.1 Résultats de régularité pour le problème transformé

Théorème 4.1. *Soit* $f \in h^{2\sigma}(\overline{Q}_{\xi_0})$, $\sigma \in]0, 1/2[$, *satisfaisant* $f(+\infty, .) = 0$, $f(\xi, \pm 1) = 0$ *pour tout* $\xi \in [0, +\infty[$. *Supposons que*

$$\begin{cases} \varphi \in C^2([-1,1]) : \varphi(-1) = \varphi(1) = 0, \\ \varphi''(.) \in h^{2\sigma}([-1,1]) \text{ et } \varphi''(-1) = \varphi''(1) = 0. \end{cases}$$

Alors le problème (2.7) *admet une unique solution* $v \in h^{2+2\sigma}(\overline{Q}_{\xi_0})$.

Démonstration. La preuve repose sur le travail de Sinestrari [25] et le résultat de régularité de Lunardi [18]. ■

Concernant le problème transformé, on a le résultat suivant.

Théorème 4.2. *Soit* $f \in h^{2\sigma}(\overline{Q}_{\xi_0})$ $(\sigma \in]0, 1/2[)$ *satisfaisant* $f(+\infty, .) = 0, f(\xi, \pm 1) = 0$ *pour tout* $\xi \in [0, +\infty[$. *On suppose que*

$$\begin{cases} \varphi \in C^2([-1,1]) : \varphi(-1) = \varphi(1) = 0, \\ \varphi''(.) \in h^{2\sigma}([-1,1]) \text{ et } \varphi''(-1) = \varphi''(1) = 0. \end{cases}$$

Alors pour ξ_0 *assez grand, le problème* (2.6) *admet une solution unique* $v \in h^{2+2\sigma}(\overline{Q}_{\xi_0})$.

Démonstration. Posons

$$X_d = \{v \in h^{2+2\sigma}(\overline{Q}_{\xi_0}) : \ v = \varphi \text{ sur } \widetilde{\Gamma}_3 \text{ et } v = 0 \text{ sur } \widetilde{\Gamma}_1 \cup \widetilde{\Gamma}_2\},$$

et

$$X_a = \{f \in h^{2\sigma}(\overline{Q}_{\xi_0}) : f(.,\pm 1) = 0 \text{ et } f(+\infty, .) = 0\}.$$

On montre d'abord que Δ est un isomorphisme de X_d sur X_a.
En effet, le Théorème 4.1 assure que Δ est bijectif de X_d sur X_a. De plus, par des calculs simples, on obtient l'estimation suivante :

$$\|\Delta v\|_{C^{2\sigma}(\overline{Q}_{\xi_0})} \leq \|v\|_{C^{2+2\sigma}(\overline{Q}_{\xi_0})}, \quad \forall v \in X_d.$$

Il en résulte que Δ est un isomorphisme de X_d sur X_a pour tout ξ_0, et la norme de Δ^{-1} est indépendante de ξ_0.
Pour ξ_0 assez grand, l'opérateur $\dfrac{1}{\xi}L$ a une norme inférieure strictement à l'inverse de celle de Δ^{-1}. En d'autres termes $\dfrac{1}{\xi}L\Delta^{-1}$ est une contraction stricte. II en résulte que $\Delta + \dfrac{1}{\xi}L$ est un isomorphisme grâce à la Proposition 1.2, ce qui termine la démonstration. ■

4.2 Résultat de régularité pour problème initial

Revenons au problème de départ

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = h(x,y), & \text{dans } \Omega_{x_0}, \\ u(x,y) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \\ u(x_0,y) = u_0(y), & \text{sur } \Gamma_3, \end{cases}$$

en utilisant le changement de variables inverse Π^{-1}. On commence par un résultat qui illustre l'effet du changement de variables inverse sur les espaces fonctionnels.

Lemme 4.3. *Soit* $\sigma \in]0, \frac{1}{2}[$,

$$g \in h^{2\sigma}(\overline{Q}_{\xi_0}) \Rightarrow x^{2\alpha\sigma} h \in h^{2\sigma}(\overline{\Omega}_{x_0}).$$

Démonstration. Pour simplifier, on note $l(x,y) := x^{2\alpha\sigma}h(x,y)$.

On commence par montrer que $l \in h^{2\sigma}(\Omega_{x_0})$.

On rappelle que $g(\xi,\eta) = h(x,y)$. Il est facile de vérifier que

$$\sup_{(x,y)\in\Omega_{x_0}} |l(x,y)| < +\infty.$$

On fixe $\delta > 0$, soient $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \Omega_{x_0}$ telle que

$$\|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\| \leq \delta.$$

On peut écrire

$$\begin{aligned}
l(x_2,y_2) - l(x_1,y_1) &= x_2^{2\alpha\sigma}h(x_2,y_2) - x_1^{2\alpha\sigma}h(x_1,y_1) \\
&= (x_2^{2\alpha\sigma} - x_1^{2\alpha\sigma})h(x_2,y_2) + x_1^{2\alpha\sigma}(h(x_2,y_2) - h(x_1,y_1)) \\
&= P_1 + P_2.
\end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
\frac{|P_1|}{\|(x_1-x_2,y_1-y_2)\|^{2\sigma}} &\leq C_l \|(x_1-x_2,y_1-y_2)\|^{1-2\sigma} \sup_{(x,y)\in\Omega_{x_0}} |h(x,y)| \\
&\leq C_l \delta^{1-2\sigma}\|h\|_{B(\Omega_{x_0})}.
\end{aligned}$$

Il en découle que

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{0<\|(x_1-x_2,y_1-y_2)\|\leq\delta} \frac{|P_1|}{\|(x_1-x_2,y_1-y_2)\|^{2\sigma}} = 0.$$

Pour le deuxième terme, on a

$$\frac{|P_2|}{\|(x_1-x_2,y_1-y_2)\|^{2\sigma}} \leq x_0^{2\alpha\sigma} \frac{|g\circ\Pi(x_2,y_2) - g\circ\Pi(x_1,y_1)|}{\|\Pi(x_2,y_2) - \Pi(x_1,y_1)\|^{2\sigma}} \frac{\|\Pi(x_2,y_2) - \Pi(x_1,y_1)\|^{2\sigma}}{\|(x_1-x_2,y_1-y_2)\|^{2\sigma}}.$$

Estimons $\|\Pi(x_1,y_1) - \Pi(x_2,y_2)\|^{2\sigma}$, on trouve que

$$\begin{aligned}
\|\Pi(x_1,y_1) - \Pi(x_2,y_2)\|^2 &= \left\| \left(\frac{x_1^{1-\alpha}}{\alpha-1}, y_1x_1^{-\alpha}\right) - \left(\frac{x_2^{1-\alpha}}{\alpha-1}, y_2x_2^{-\alpha}\right) \right\|^2 \\
&= \frac{1}{(\alpha-1)^2}|x_1^{1-\alpha} - x_2^{1-\alpha}|^2 + |y_1x_1^{-\alpha} - y_2x_1^{-\alpha} + y_2x_1^{-\alpha} - y_2x_2^{-\alpha}|^2 \\
&\leq \frac{1}{(\alpha-1)^2}|x_1^{1-\alpha} - x_2^{1-\alpha}|^2 + 2x_0^{-2\alpha}|y_1-y_2|^2 + 2x_0^{2\alpha}|x_1^{-\alpha} - x_2^{-\alpha}|^2 \\
&\lesssim \|(x_1-x_2,y_1-y_2)\|^2.
\end{aligned}$$

D'où, il vient que

$$\|\Pi(x_1,y_1) - \Pi(x_2,y_2)\|^{2\sigma} \lesssim \|(x_1-x_2,y_1-y_2)\|^{2\sigma},$$

et

$$\|\Pi(x_1, y_1) - \Pi(x_2, y_2)\| \lesssim \delta.$$

Et comme $g \in h^{2\sigma}(Q_{\xi_0})$, alors

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{\|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\| \leq \delta} \frac{|P_2|}{\|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\|^{2\sigma}} = 0.$$

En résumant, on obtient que $l \in h^{2\sigma}(\Omega_{x_0})$ et par conséquent $l \in h^{2\sigma}(\overline{\Omega}_{x_0})$ de la Proposition 1.32. ■

On aura aussi besoin du lemme suivant.

Lemme 4.4. *Soit* $\sigma \in]0, \frac{1}{2}[$,

$$h \in h^{2\sigma}(\overline{\Omega}_{x_0}) \Rightarrow x^{2\alpha(\sigma+1)} h \in h^{2\sigma}(\overline{\Omega}_{x_0}).$$

Démonstration. Il est facile de vérifier que

$$\sup_{(x,y) \in \Omega_{x_0}} |x^{2\alpha(\sigma+1)} h(x, y)| < +\infty.$$

On fixe $\delta > 0$, soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Omega_{x_0}$ tels que

$$\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| \leq \delta.$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} &x_2^{2\alpha(\sigma+1)} h(x_2, y_2) - x_1^{2\alpha(\sigma+1)} h(x_1, y_1) \\ &\qquad = (x_2^{2\alpha(\sigma+1)} - x_1^{2\alpha(\sigma+1)}) h(x_2, y_2) + x_1^{2\alpha(\sigma+1)} (h(x_2, y_2) - h(x_1, y_1)). \end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned} \frac{|(x_2^{2\alpha(\sigma+1)} - x_1^{2\alpha(\sigma+1)}) h(x_2, y_2)|}{\|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\|^{2\sigma}} &\lesssim \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\|^{1-2\sigma} \sup_{(x,y) \in \Omega_{x_0}} |h(x, y)| \\ &\lesssim \delta^{1-2\sigma} \|h\|_{B(\Omega_{x_0})}. \end{aligned}$$

Il en découle que

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{0 < \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\| \leq \delta} \frac{|(x_2^{2\alpha(\sigma+1)} - x_1^{2\alpha(\sigma+1)}) h(x_2, y_2)|}{\|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\|^{2\sigma}} = 0.$$

Pour le deuxième terme, on a

$$\begin{aligned} \frac{|x_1^{2\alpha(\sigma+1)} (h(x_2, y_2) - h(x_1, y_1))|}{\|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\|^{2\sigma}} &\leq x_0^{2\alpha(\sigma+1)} \frac{|h(x_2, y_2) - h(x_1, y_1)|}{\|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\|^{2\sigma}} \\ &\leq x_0^{2\alpha(\sigma+1)} \|h\|_{C^{2\sigma}(\Omega_{x_0})}. \end{aligned}$$

Et comme $h \in h^{2\sigma}(Q_{\xi_0})$, alors

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{\|(x_1-x_2,y_1-y_2)\| \leq \delta} \frac{|x_1^{2\alpha(\sigma+1)}(h(x_2,y_2)-h(x_1,y_1))|}{\|(x_1-x_2,y_1-y_2)\|^{2\sigma}} = 0.$$

Par conséquent $x^{2\alpha(\sigma+1)}h \in h^{2\sigma}(\overline{\Omega}_{x_0})$. ∎

Théorème 4.5. *Soit $h \in h^{2\sigma}(\overline{\Omega}_{x_0})$ $(\sigma \in]0,1/2[)$ vérifiant* (2.4). *Supposant que*

$$\begin{cases} u_0 \in C^2(\overline{\Gamma}_3), \\ u_0 = 0, \ \textit{sur } \overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_3, \\ u_0 = 0, \ \textit{sur } \overline{\Gamma}_2 \cap \overline{\Gamma}_3, \end{cases} \quad \textit{et} \quad \begin{cases} u_0'' \in h^{2\sigma}(\overline{\Gamma}_3), \\ u_0'' = 0, \ \textit{sur } \overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_3, \\ u_0'' = 0, \ \textit{sur } \overline{\Gamma}_2 \cap \overline{\Gamma}_3. \end{cases}$$

Alors, pour x_0 assez petit le problème (2.1)-(2.3) *admet une solution stricte unique satisfaisant*

$$x^{2\alpha(\sigma+1)}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \ \textit{et} \ x^{2\alpha(\sigma+1)}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in h^{2\sigma}(\overline{\Omega}_{x_0}).$$

Démonstration. On a par définition $v(\xi,\eta) = u(\theta^{-1/\alpha}\xi^{-\beta/\alpha}, \theta^{-1}\eta\xi^{-\beta})$, d'où

$$\frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi,\eta) = \theta^{-1}\xi^{-\beta}\frac{\partial u}{\partial y}(x,y),$$

puis

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}(\xi,\eta) = \theta^{-2}\xi^{-2\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\theta^{-1/\alpha}\xi^{-\beta/\alpha}, \theta^{-1}\eta\xi^{-\beta}) = x^{2\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y).$$

Du fait que $x^{2\alpha}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \in h^{2\sigma}(\overline{Q}_{\xi_0})$, le Lemme 4.3 implique que

$$x^{2\alpha(\sigma+1)}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \in h^{2\sigma}(\overline{\Omega}_{x_0}).$$

D'autre part, écrivant que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, on voit immédiatement par le Lemme 4.4 que $x^{2\alpha(\sigma+1)}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in h^{2\sigma}(\overline{\Omega}_{x_0})$. ∎

Bibliographie

[1] G. Acosta, M. Armantano, R. Duràn & A. Lumbardi, *Nonhomogeneous Neumann problem for the Poisson equation in domains with external cusp,* J. Math. Anal. Appl. **310** (2005), 397-411.

[2] K. Belahdji, *La régularité L^p de la solution du problème de Dirichlet dans un domaine à points de rebroussement,* C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I **322** (1996), 5-8.

[3] O. Belhamiti, *Étude dans les espaces de Hölder de problèmes aux limites et de transmission dans un domaine avec couche mince,* Thèse de doctorat, Université du Havre, 2008.

[4] T. Berroug, R. Labbas & B. K. Sadallah, *Resolution in Hölder spaces of an elliptic problem in an unbounded domain,* J. Aust. Math. Soc. **8** (1) (2006), 387–404.

[5] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris 1983.

[6] D. L. Burkholder, *A geometrical characterisation of Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional,* Ann. Probab. **9** (1981), 997-1011.

[7] B. Chaouchi, *Semigroup's approach to the study of the Hölder continuous regularity for Laplace equation in nonsmooth domaine,* Mediterr. J. M. S. **2** (2014), 30-50.

[8] B. Chaouchi, *Solvability of second-order boundary-value problems on nonsmooth cylindrical domains,* Eectronic. J. D. E. **199** (2013), 1–7.

[9] B. Chaouchi, R. Labbas, & B. K. Sadallah, *Laplace equation on a domain with a cuspidal point in Little Hölder spaces,* Mediterr. J. Math. **10** (2013), 157–175.

[10] G. Dore & A. Venni, *On the closedness of the sum of two closed operators,* Z. Math. **196** (1987), 270-286.

[11] A. Dutrifoy, *Construction d'une solution f continue de* $[0,1]$ *dans un certain espace de Banach et non mesurable de* $[0,1]$ *dans un autre de topologie légèrement plus forte,* Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **7** (2000), 211-214.

[12] A. Eltaif, *Équation différentielle opérationnelle complète du second ordre de type elliptique sur les espaces UMD et les espaces de Banach,* Thèse de doctorat, Université du Havre, 2011.

[13] P. Grisvard, *Problèmes aux limites dans des domaines avec points de rebroussement, partial differential equations and functional analysis,* Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse **2** (3) (1996), 561-578.

[14] M. Haase, *The functional calculus for sectorial operators,* Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2006.

[15] S. G. Krein, *Linear differential equations in Banach spaces,* Moscou, 1967.

[16] R. Labbas, *Condition d'ellipticité et résolution d'une équation différentielle abstraite complète du second ordre,* Bolletino. U.M.I. (7) 8-A. (1994), 413-424.

[17] J. L. Lions & J. Peetre, *Sur une classe d'espaces d'interpolation,* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **19** (1964), 5-86.

[18] A. Lunardi, *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems,* Birkhäuser, Basel, (1995).

[19] C. Martinez Carracedo & M. Sanz Alix, *The theory of fractional powers of operators,* North-Holland Mathematics Studies 187. New York, Elsevier Science, 2001.

[20] V. Maz'ya & A. Soloviev, *Boundary integral equations on contours with eaks,* Oper. Theory Adv. Appl. **196**, Birkhäuser, Boston (MA), (2010).

[21] M. Meisner, *Étude unifiée d'équations aux dérivées partielles de type elliptique régies par des équations différentielles à coefficients opérateurs dans un cadre non commutatif,* Thèse de doctorat, Université du Havre, 2012.

[22] M. Najmi, *Régularité-singularité dans les espaces de Hölder pour un problème elliptique et l'équation de la chaleur dans des domaines non réguliers,* Thèse d'état, Université de Nice, 1992.

[23] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations,* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1983.

[24] J. Prüss, *Maximal regularity for abstract parabolic problems with inhomogeneous boundary data in L^p spaces,* Math. Bohem. **2** (2002), 311–327.

[25] E. Sinestrari, *On the abstract Cauchy problem of parabolic type in spaces of continuous functions,* J. Math. Anal. Appl. **66** (1985), 16–66.