République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahai - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatiques

Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....

№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : EDP et Applications.

Thème

Inégalité Variationnelle avec Contrainte Non Convexe

Présenté par :

- Samah Asma.
- Mokhbi Nour El Houda .

Devant le jury :

Président	: Lounis Sabrina	MCA	Université de Jijel
Encadreur	: Haddad Touma	MCB	Université de Jijel
Examinateur	: Kecis Ilyas	MCB	Université de Jijel

Promotion **2018/2019**

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions **Allah**, le tout puissant, de nous avoir donnés la santé, la volonté et la patience pour mener à terme notre formation de Master.

Nous remercions Madame **Haddad Touma** qui a fourni le sujet de ce mémoire a guidé de ses précieux conseil et suggestions, et la confiance qu'elle a témoigné tout au long de travail.

A messieurs les membres du jury

Nous remercions :

Madame **Lounis Sabrina** qui nous fait l'honneur de bien vouloir accepter la présidence de ce mémoire, qu'il veuille bien trouver ici l'expression de noter déférence et de notre profonde gratitude.

Monsieur **Kecis Ilyas** pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant d'examiner ce travail.

Nous remercions nos parents qui ont soutenue, encouragées et motivées tout au long de nos études .

Enfin, nous ne pourrions pas terminer ces remerciements sans référence à l'ensemble de nos enseignants qui sont à l'origine de tout notre savoir .

$\mathcal{M}$erci á tous et á toutes.

Table des matières

Introduction générale **2**

1 Concepts de base et résultats préliminaires **5**

1.1 Notations 5

1.2 Ensembles convexes 6

1.3 Fonctions convexes 6

1.4 Projection sur un convexe fermé 7

1.5 Sous différentiel et cône normal 9

1.6 Multifonction et propriétés 13

1.7 Propriétés des ensembles uniformément prox-réguliers 15

2 Existence de solutions pour une inégalité variationnelle avec contrainte non convexe **21**

2.1 Introduction 21

2.2 Résultats auxiliaires 22

2.3 Résultats principaux 25

3 Problèmes Quasi-Variationnels **34**

3.1 Résultats auxiliaires 34

3.2 Résultats principaux 37

Conclusion **43**

Bibliographie **45**

Introduction générale

La théorie des inégalités variationnelles est aujourd'hui bien connue. Son champ d'application s'est considérablement développé dans de nombreux domaines comme l'économie mathématique, les sciences de l'ingénieurs, l'industrie, physique , etc... plus récemment, elle est devenue une des méthodes importantes pour l'étude des problèmes variationnels non convexe (Voir par exemple[1, 12, 13]).

L'inégalité variationnelle sous la forme

$$(IV)\begin{cases} \text{Trouver } x^* \in C \text{ et } y^* \in F(x^*); \\ \langle y^*, x - x^* \rangle \geq 0, \text{ pour tout } x \in C, \end{cases}$$

où C est un sous ensemble de l'espace de Hilbert H et $F : H \rightrightarrows H$ est une multifonction, a été étudié dans le cas où C est convexe par plusieurs auteurs (voir [13, 14]).

Dans [3], les auteurs ont obtenu un résultat d'existence pour (IV) quand l'ensemble C est non convexe.

On va surmonter les diffécultés de la non convexité de l'ensemble de contrainte C par l'utilisation de quelques techniques d'analyse non lisse.

Cette classe d'ensembles est appelée la classe des ensembles uniformément prox réguliers ou r-prox réguliers.

Le concept de prox-régularité uniforme a été introduit par H. Federer dans [11] en dimension finie sous le nom d'ensemble "positively reached". Puis les ensembles prox-réguliers dans un espace de Hilbert ont été considérés par A. Canino dans [8] sous le nom d'ensembles "p-convexes", et aussi par F. H. Clarke, R. J. Stern et P.R. Wolenski dans [9] en tant qu'ensembles "proximally smooth". La notion de prox-régularité locale ainsi que la dénomination de prox-régularité pour les ensembles dans un espace de Hilbert ont été introduites par R.A. Poliquin, R.T. Rockafellar and L. Thibault dans [15].

Ce mémoire est consacré à une étude d'existence de solutions pour une nouvelle classe de probèmes variationnels dans le cas où l'ensemble des contraintes C est non convexe via une technique de discrétisation développée dans [4].

Pour pouvoir exploiter les outils et les techniques de l'analyse non lisse, les auteurs de [4], ont suivi l'idée qui consiste à reformuler l'inégalité variationnelle (IV) et la réécrire en terme du cône normal, le problème variationnel (PV) suivant

$$(PV)\begin{cases} \text{Trouver } x^* \in C; \\ F(x^*) \cap -N_C(x^*) \neq \emptyset, \end{cases}$$

où $N_C(x)$ dénotes le cône normal, au sens d'analyse convexe, à C au point x.

Dans le cas où l'ensemble de contrainte C est r-prox régulier, les auteurs de [4] ont proposé un algorithme de projection qui converge vers la solution d'inégalité variationnelle non convexe suivante

$$(IVN)\begin{cases} \text{Trouver } x^* \in C \text{ et } y^* \in F(x^*); \\ \langle y^*, x - x^* \rangle + \dfrac{\| y^* \|}{2r} \| x - x^* \|^2 \geq 0, \text{ pour tout } x \in C. \end{cases}$$

ou

$$(PVN)\begin{cases} \text{Trouver } x^* \in C; \\ F(x^*) \cap -N_C^P(x^*) \neq \emptyset, \end{cases}$$

où $N_C^P(x)$ dénotes le cône normal proximal à C en x et sous la monotonie forte de la multifonction F.

Les auteurs de [4] ont modifié le problème (PVN) pour englober plus de cas particulier. Ils ont supposé que l'ensemble de contrainte C est une multifonction définie de H dans

H. Le problème (PVN) devient

$$(PQVN)\begin{cases} \text{Trouver } x^* \in C(x^*) \text{ tel que} \\ F(x^*) \cap -N^P_{C(x^*)}(x^*) \neq \emptyset. \end{cases}$$

Ce problème est appelé *Problème Quasi-Variationnel non convexe* (PQVN).

Le mémoire est organisé comme suit. Dans le chapitre 1, on rappelle les principaux concepts et résultats préliminaires que nous avons utilisé tout au long de ce travail ainsi que quelques propriétés des ensembles uniformément prox réguliers ou r-prox réguliers. Ensuite on énonce le chapitre 2, on donne dans la deuxième section quelques résultats auxiliaires utilisés dans la suite. L'objective de la section 3, est l'étude de l'existence de solutions pour l'inégalité variationnelle (IVN) dans [4].

Dans le chapitre 3, nous rappelons quelques résultats fondamentaux concernant le cône normal proximal dont nous aurons besoin dans la suite. Nous allons montrer que les résultats obtenus dans le chapitre 2 peut être étendu au cas où l'ensemble de contrainte C est une multifonction définie de H dans H.

Les auteurs de [4] ont proposé différents algorithmes pour résoudre une nouvelle classe de problèmes variationnels non convexes plus précisément dans le cas uniformément prox réguliers.

Chapitre 1

Concepts de base et résultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous résumons les notations et les concepts de base du cône et de prox-régularité uniforme liés à l'étude d'inégalié variationnelle, ainsi que les résultats que nous avons utilisé dans ce mémoire.

1.1 Notations

Soit H un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et de la norme associée $\|\cdot\|$.

On note par

- $\overline{\mathbb{B}}$ ou $\overline{\mathbb{B}}(0,1)$ la boule unité fermée de H.

- $co(A)$ l'enveloppe convexe de A.

- $d_C(\cdot)$ la fonction distance au sous ensemble C.

- d_H la distance de Hausdorff.

- $\delta(\cdot, C)$ la fonction indicatrice de C.

- $\delta^*(\cdot, C)$ la fonction support de C.

- s.c.i semi-continue inférieurement.

- ∂f le sous différentiel de f.

- $N_C(x)$ dénotes le cône normal, au sens d'analyse convexe, à C au point x.

- $N_C^P(x)$ le cône normal proximal à C en x.

1.2 Ensembles convexes

Définition 1.1 *Une partie C de H est convexe si*

$$\forall x, y \in C \ \forall \lambda \in [0,1] : \ \lambda x + (1-\lambda) y \in C.$$

Définition 1.2 *L'enveloppe convexe d'un sous ensemble $C \subset H$ est le plus petit convexe qui contient C. Elle est noté $co(C)$.*

Définition 1.3 *L'enveloppe convexe fermé de $C \subset H$ qu'on note $\overline{co}(C)$ est le plus petit convexe fermé de H contenant C. Donc c'est l'intersection de tous les sous ensembles convexes fermés de H contenant C.*

1.3 Fonctions convexes

Définition 1.4 *Soient H un espace de Hilbert et une fonction $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On appelle domaine effectif de f l'ensemble défini par*

$$dom f = \{x \in H : f(x) < +\infty\}.$$

Définition 1.5 *La fonction f est dite propre si $dom f \neq \emptyset$, et $f(x) \neq -\infty, \ \forall x \in H$*

Définition 1.6 *On dit qu'une fonction $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe si pour tous $x, y \in dom f$ et pour tout $t \in [0,1]$ on a*

$$f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y).$$

Définition 1.7 *Soit C un sous ensemble non vide de H. La fonction indicatrice de C, définie par*

$$\delta(x, C) = \begin{cases} 0 & si \ x \in C \\ +\infty & si \ x \notin C. \end{cases}$$

Définition 1.8 *La fonction polaire de $\delta(\cdot, A)$ appelée aussi fonction support de A, est la fonction $\delta^*(\cdot, A)$, définie sur H par*

$$\delta^*(\xi, A) = \sup_{x \in A} \langle \xi, x \rangle, \quad \forall \xi \in H.$$

1.4 Projection sur un convexe fermé

Théorème 1.1 *[2] Soit x un élément d'un espace de Hilbert H et C un sous-ensemble convexe fermé non vide de H. Il existe un unique point $y \in C$ tel que*

$$d_C(x) = \|y - x\| = \inf_{z \in C} \|z - x\|.$$

Ce point y est appelé la projection de x sur C et noté $Proj_C(x)$.
Il est caractérisé par l'inégalité variationnelle suivante

$$\langle y - x, y - z \rangle \leq 0 \ \ \forall z \in C.$$

Preuve.

1. **Existence de la projection :**

   On pose

   $$d = \inf_{z \in C} \|z - x\| \Longrightarrow d^2 = \inf_{z \in C} \|z - x\|^2.$$

   Par la définition de la borne inférieur on a

   $$\forall \varepsilon > 0, \ \exists z \in C : \ \ \|z - x\|^2 \leq d^2 + \varepsilon,$$

   en prend $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ donc

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \exists z_n \in C : \ \ \|z_n - x\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}.$$

   Maintenant nous allons montrer que la suite (z_n) est une suite de Cauchy. Par l'identité du Parallélogramme : $\|y-x\|^2+\|y+x\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$.

$$\begin{aligned}
\textit{Soit } p>0: \qquad \|z_n-z_p\|^2 &= \|z_n-x+x-z_p\|^2 \\
&= 2\|z_n-x\|^2+2\|z_p-x\|^2-\|z_n+z_p-2x\|^2 \\
&= 2\|z_n-x\|^2+2\|z_p-x\|^2-4\left\|\frac{z_n+z_p}{2}-x\right\|^2 \\
&\leq \left(2d^2+\frac{2}{n}\right)+\left(2d^2+\frac{2}{p}\right)-4d^2 \\
&\leq \frac{2}{n}+\frac{2}{p} \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

On déduit que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy. Puisque H est complet, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et on note sa limite $y\in C$ (car C est fermé), par continuité de la norme on a alors

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\|z_n-x\|^2=\|y-x\|^2,$$

donc

$$\|y-x\|\leq d,$$

et par la définition de d on a $\|y-x\|\geq d$, on aura

$$\|y-x\|=d.$$

2. **Unicité de la projection :**

Supposons que y_1 et y_2 deux projections de x sur C, la caractérisation de la projection donne

$$\langle x-y_1,z-y_1\rangle\leq 0 \ ,\forall z\in C,$$

$$\langle x-y_2,z-y_2\rangle\leq 0 \ ,\forall z\in C.$$

Par l'addition on trouve

$$-\langle x-y_1,y_1-y_2\rangle+\langle x-y_2,y_1-y_2\rangle\leq 0,$$

ce qui donne

$$\langle y_1 - y_2, y_1 - y_2 \rangle \leq 0,$$

par conséquent

$$\|y_1 - y_2\|^2 \leq 0,$$

ce qui donne $y_1 = y_2$ d'ou l'unicité de la projection.

$\square$

1.5 Sous différentiel et cône normal

Donnons dans ce qui suit quelques définitions (Voir [9, 10, 15, 17]).

Soit $f : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction semi-continue inférieurement (s.c.i), et soit x un point de H où f est finie.

- Le sous différentiel de f au sens d'analyse convexe au point x est défini par

$$\partial f(x) = \{\xi \in H : \langle \xi, h - x \rangle \leq f(h) - f(x), \forall h \in H\}.$$

- Le sous différentiel de Clarke de f au point x est défini par

$$\partial^C f(x) = \{\xi \in H : \langle \xi, h \rangle \leq f^{\uparrow}(x; h), \forall h \in H\},$$

où $f^{\uparrow}(x; h)$ est la dérivée directionelle généralisé de Clarke donnée par

$$f^{\uparrow}(x; h) := \limsup_{\substack{\acute{x} \to_f x \\ t \downarrow 0}} \inf_{\acute{h} \to h} \frac{f(\acute{x} + t\acute{h}) - f(\acute{x})}{t},$$

où $\acute{x} \to^f x$ veut dire $\acute{x} \to x$ et $f(\acute{x}) \to f(x)$.

- Le sous différentiel proximal $\partial^P f(x)$ est l'ensemble de tous les points $\xi \in H$ pour lesquels il existe $\rho > 0, \beta \geq 0$ tels que

$$\langle \xi, \acute{x} - x \rangle \leq f(\acute{x}) - f(x) + \beta \|\acute{x} - x\|^2, \forall \acute{x} \in x + \rho\overline{\mathbb{B}}.$$

Remarquons que nous avons toujours

$$\partial^P f(x) \subset \partial^C f(x).$$

Par convention on pose

$$\partial^P f(x) = \partial^C f(x) = \varnothing,$$

quand $f(x)$ est infinie.

Notons aussi que $\partial^C f(x)$ est un convexe fermé par contre $\partial^P f(x)$ est un convexe pas nécessairement fermé.

Si de plus f est convexe, alors tous les sous différentiels coincident, i.e.,

$$\partial^P f(x) = \partial^C f(x) = \partial f(x).$$

- $N_A(y)$, le cône normal à A au point y (il s'agit du cône des normales sortantes), définie par

$$\xi \in N_A(y) \Leftrightarrow y \in A \text{ et } \langle \xi, y \rangle = \delta^*(\xi, A) \Leftrightarrow y \in A \text{ et } \xi \in \partial\delta(y, A),$$

et nous avons

$$y = Proj_A(x) \Leftrightarrow x - y \in N_A(y).$$

Précisons la relation utile par la suite entre le sous-différentiel et le cône normal du même nom.

- Soit $x \in S$. On appelle cône normal de Clarke (resp. cône normal proximal) à S au point x le sous ensemble $N_S^C(x)$ (resp.$N_S^P(x)$) défini par

$$N_S^C(x) = \partial^C \delta(x, S) \text{ (resp. } N_S^P(x) = \partial^P \delta(x, S)).$$

Notons que le cône normal proximal est aussi donné par

$$N_S^P(x) := \{\xi \in H \ / \ \exists \alpha > 0 \ , \ x \in Proj_S(x + \alpha\xi)\},$$

où

$$Proj_S(u) := \{y \in S / d_S(u) := \|u - y\|\}.$$

Remarque 1.1 *Soit $x \in S$. Si S est convexe alors*

$$N_S^P(x) = N_S(y) = N_S^C(x).$$

Dans [10], les auteurs ont prouvé une caractérisation du cône normal proximal N_S^P vérifiée globalement pour tout $x' \in S$. Nous la citons dans la proposition suivante :

Proposition 1.1 *Soit S un sous ensemble non vide fermé de H, pour tout $x \in S$ alors*

$$N_S^P(x) = \{\xi \in H, \exists \sigma > 0 : \langle \xi, x' - x \rangle \leq \sigma \parallel x' - x \parallel^2 \quad \textit{pour tout} \ \ x' \in S\}$$

La relation entre le cône normal proximal et le sous différentiel proximal de la fonction distance est donnée par la proposition suivante due à [6].

Proposition 1.2 *Soit S un sous ensemble non vide fermé de H et $x \in S$. Alors*

$$\partial^P d_S\,(x) = N_S^P\,(x) \cap \overline{\mathbb{B}}.$$

Définition 1.9 *On appelle cône normal limitant à S en x l'ensemble*

$$N_S^L(x) = \{\xi \in H, \exists\,(x_n) \subset C^{\mathbb{N}}, \exists\,(\xi_n) \subset \left(N_S^P(x)\right)^{\mathbb{N}}, x_n \to x, \xi_n \rightharpoonup \xi\}.$$

Remarque 1.2 *Si $x \in int\,S$, alors $N_S^P(x) = N_S^L(x) = \{0\}$.*

Définition 1.10 *On appelle cône normale de Clarke à S au point x l'ensemble noté*

$$N_S^C(x) = \overline{co}[N_S^P(x)]$$

Définition 1.11 *On appelle cône normal d'un ensemble convexe S de H au point $x \in S$, l'ensemble définie par*

$$N_S\,(x) := \{\xi \in H; \langle \xi, x' - x \rangle \leqslant 0, \forall x' \in S\}.$$

c-à-d un vecteur ξ est un vecteur normal de S à x si ξ ne fait pas un angle aigu avec chaque segment de ligne en S à partir de x.

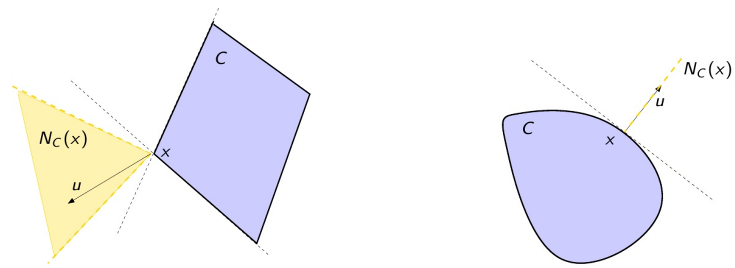

FIG. 1.1 – Exemples de Cônes normaux.

Remarque 1.3

i) *On a clairement*

$$N_S^P(x) \subset N_S^L(x) \qquad et \qquad N_S^P(x) \subset N_S^C(x).$$

ii) *Notons aussi que $N_S^C(x)$ est un convexe fermé par contre $N_S^P(x)$ est un convexe pas nécessairement fermé.*

iii) *Si S est convexe alors*

$$N_S^P(x) = N_S(x) = N_S^C(x).$$

Théorème 1.2 *Soit E un espace vectoriel normé, $C \subset E$ un sous ensemble convexe tel que $int(C) \neq \emptyset$. Alors si $x \in int(C)$, alors $N_C(x) = \{0\}$.*

Preuve.

Soit $v \in N_C(x) \Longrightarrow v = 0$?

$$x \in int(C) \Longrightarrow \exists \delta > 0, \quad x + \delta B(x_0, r) \subset C,$$

$$\langle v, x + \delta e - x \rangle \leq 0 \qquad , \forall e \in B(x_0, r),$$

$$\langle v, \delta e \rangle \leq 0 \qquad , \forall e \in B(x_0, r),$$

$$\langle v, e \rangle \leq 0 \qquad , \forall e \in B(x_0, r).$$

Soit $r > 0$ suffisamment petit telle que $rv \in B(x_0, r)$

$$\langle v, rv \rangle \leq 0 \Longrightarrow r \|v\|^2 \leq 0,$$

$$\Longrightarrow \|v\| = 0 \Longrightarrow v = 0.$$

$\square$

Exemple 1.1

- $x_3 \in intC \Rightarrow N_C(x_3) = \{0\}$.
- $x_4 \notin C \Rightarrow N_C(x_4) = \emptyset$.
- *Soit* $H = \mathbb{R}^2$; $C = [0,1] \times [0,1]$, *si on prend* $x \in int(C)$, *alors* $N_C(x) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

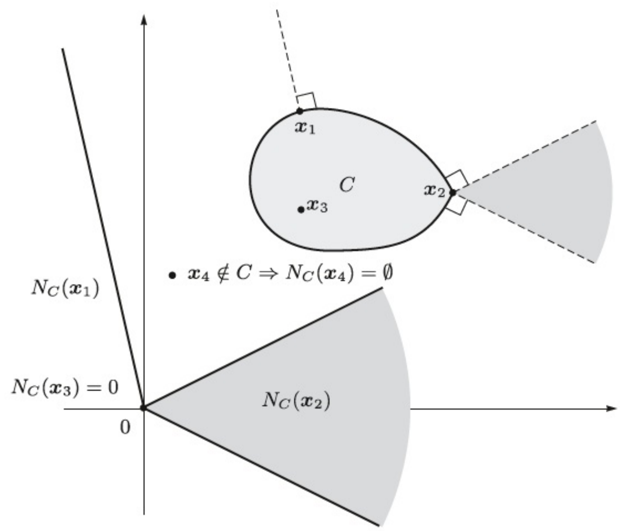

FIG. 1.2 – Cône normal aux différents points d'un convexe

1.6 Multifonction et propriétés

Définition 1.12 *Soient* A, B *deux sous ensembles d'un espace métrique* (X, d), *l'écart entre* A *et* B *est défini par*

$$e(A,B) = \sup_{a \in A} d(a,B),$$

avec

$$e(B,A) = \inf_{b \in B} d(A,b),$$

et la distance de Hausdorff entre A *et* B *est définie par*

$$d_H(A,B) = \max\{e(A,B), e(B,A)\}.$$

Remarque 1.4

$$d_H(A,B) \leq \alpha \Leftrightarrow A \subset B + \overline{B}_\alpha(0) \text{ et } B \subset A + \overline{B}_\alpha(0).$$

Définition 1.13 *Soient X et Y deux ensembles non vides. Une multifonction (ou multi-application) F définie sur X à valeurs dans Y est une fonction qui à chaque élément $x \in X$ associe un sous ensemble $F(x)$ de Y, on note $F : X \rightrightarrows Y$ ou $F : X \to P(Y)$, ($P(Y)$ est l'ensemble des parties de Y).*

Le domaine, le graphe et l'image de la multifonction $F : X \rightrightarrows Y$ sont donnés par

$$D(F) := Dom(F) = \{x \in X/F(x) \neq \varnothing\},$$

$$gph(F) = \{(x, y) \in X \times Y/\ x \in D(F), y \in F(x)\},$$

$$Im(F) = \underset{x \in D(F)}{\cup} F(x).$$

Définition 1.14 *Soient X, Y deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$. On dit que F est continue si pour tout $x \in X$ nous avons*

$$\lim_{\acute{x} \to x} d_H(F(x), F(\acute{x})) = 0.$$

d_H est la distance de Hausdorff.

Définition 1.15 *On dit que $F : X \rightrightarrows Y$ est lipschitzienne de rapport $\lambda > 0$, si pour tous $x, \acute{x} \in X$ nous avons*

$$d_H(F(x), F(\acute{x})) \leq \lambda d_X(x, \acute{x}).$$

d_X la distance métrique de X.

Après avoir donné la définition et les propriétés d'une multifonction, nous remarquons que, pour une fonction $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ propre, convexe et s.c.i, la correspondance :

$$\begin{aligned} \partial\varphi :\ & H \rightrightarrows H \\ & u \longmapsto \partial\varphi\,(u) \end{aligned}$$

est une multifonction qui vérifie la définition 1.13. Par suite nous obtenons que le domaine de $\partial\varphi$ est donné par :

$$D(\partial\varphi) = \{u \in H/\partial\varphi(u) \neq \emptyset\}.$$

D'autre part, l'image de $\partial\varphi$ est défini par :

$$Im(\partial\varphi) = \bigcup_{u \in H} \partial\varphi(u).$$

De plus, nous avons $D(\partial\varphi) \subset dom(\varphi)$.

1.7 Propriétés des ensembles uniformément prox-réguliers

Introduction

Dans cette section, on présente une propriété d'ensemble plus faible que la convexité, autrement dit, ensemble uniformément prox-régulier ou r-prox réguliers.

De tels ensembles sont aussi dits positivement atteints, p-convexes, O(2)-convexes et proximalement lisses dans [11], [18], [8] ,[16], et [9] respectivement.

La notion de prox-régularité locale ainsi que la dénomination de prox-régularité pour les ensembles dans un espace de Hilbert ont été introduites par R.A. Poliquin, R.T. Rockafellar and L. Thibault dans [15], les auteurs ont montré que le cône normal d'un ensemble et la distance associée à cet ensemble ont une étroite connexion avec la prox-régularité de cet ensemble.

Dans ce travail nous sommes intéressés par la nouvelle classe d'ensembles non convexes appelée la classe des ensembles uniformément prox-réguliers . L'une des importantes propriétés de cette classe est la coïncidence de tous les cônes normaux contenus dans le cône normal de Clarke, c-à-d, $N_C^P(\cdot) = N_C^F(\cdot) = \cdots = N_C^C(\cdot)$. D'où la coïncidence de tous les problèmes associés aux ensembles uniformément prox-réguliers.

Définition 1.16 *Un ensemble C est dit uniformément prox-régulier, $r \in]0, +\infty[$ si la projection métrique $Proj_C(\cdot)$ sur C est unique et continue sur le tube $U_r(C)$ défini par $U_r(C) = \{x \in H : d_C(x) < r\}$. Si $dimH < +\infty$ alors C est dit uniformément prox-régulier si $Proj_C(\cdot)$ est unique sur $U_r(C)$.*

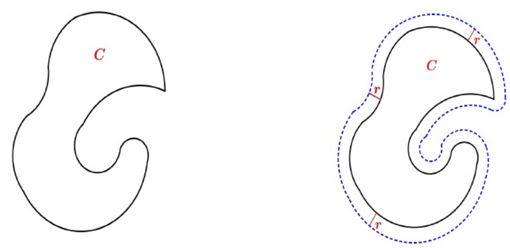

FIG. 1.3 – Ensemble uniformément prox-régulier

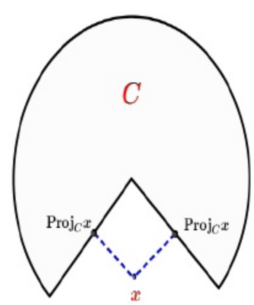

FIG. 1.4 – Ensemble non uniformément prox-régulier

Une première caractérisation en terme de cône normal (voir [15]) est que pour tout vecteur non nul $\xi \in N_C(x)$, on a

$$x \in Proj_C(x + \frac{r}{\|\xi\|}\xi).$$

En utilisant ceci et le fait que pour $x^{'} \in C$,

$$\|x - (x + \frac{r}{\|\xi\|}\xi)\|^2 \leq \|x + \frac{r}{\|\xi\|}\xi - x'\|^2,$$

on a d'une manière équivalente la caractérisation suivante (voir [9, 15]) :

Proposition 1.3 *Soit $r \in]0, +\infty]$, un sous ensemble C est r-prox régulier si et seulement si, pour tout $x' \in C$ et tout $\xi \in N^P_C(x') \backslash \{0\}$,*

$$\mathbb{B}\Big(x' + r\frac{\xi}{\| \xi \|}, r\Big) \cap C = \emptyset,$$

autrement dit, si et seulement si, pour tout $x' \in C$ et tout $\xi \in N^P_C(x')$,

$$\left\langle \frac{\xi}{\| \xi \|}, x - x' \right\rangle \leq \frac{1}{2r} \| x - x' \|^2, \quad \textit{pour tout } x' \in C.$$

Dans le cas particulier où $r = +\infty$, on trouve que la r-prox-régularité de l'ensemble C avec $r = +\infty$ correspond à sa convexité.

Proposition 1.4 *[7] Si C est r-prox-régulier, alors pour tout $y \in H$, tel que $d_C(y) < r$, la projection de y sur C est bien définie, au sens ou l'ensemble $Proj_C(y)$ est un singleton.*

Propriété 1.1 *L'union de deux ensembles r-prox-réguliers est r-prox-régulier .*

Preuve.

Soient S_1 et S_2 deux ensembles r-prox-réguliers, soit $S = S_1 \cup S_2$.

Montrons que S est r-prox-régulier.

Soit $z_0 \in S = S_1 \cup S_2$, d'après la caractérisation de l'ensemble r-prox-régulier proposition1.3

pour tout $z_0 \in S_1, \forall z' \in N^P(z_0), z' \neq 0$ on a

$$\left\langle \frac{z'}{\| z' \|}, y - z_0 \right\rangle \leq \frac{1}{2r} \| y - z_0 \|^2, \forall y \in S_1 \subset S, \tag{1.1}$$

pour tout $z_0 \in S_2, \forall z' \in N^P(z_0), z' \neq 0$ on a

$$\left\langle \frac{z'}{\| z' \|}, y - z_0 \right\rangle \leq \frac{1}{2r} \| y - z_0 \|^2, \forall y \in S_2 \subset S. \tag{1.2}$$

D'après (1.1) et (1.2) on obtient

$$\left\langle \frac{z'}{\| z' \|}, y - z_0 \right\rangle \leq \frac{1}{2r} \| y - z_0 \|^2, \forall y \in S_1 \textit{ ou } y \in S_2.$$

Par consèquent

$$\left\langle \frac{z'}{\| z' \|}, y - z_0 \right\rangle \leq \frac{1}{2r} \| y - z_0 \|^2, \forall y \in S_1 \cup S_2 = S$$

D'où S est r-prox-régulier.

$\square$

Quelques propriétés importantes de ces ensembles sont résumées dans la proposition suivante (voir [4, 7, 8, 9, 15]).

Proposition 1.5 *Soient $r \in]0, +\infty]$ et C un sous-ensemble non vide fermé uniformément prox régulier de H. Alors on a*

a) *Pour tout $x \in H$ avec $d_C(x) < r$, on a $Proj_C(x) \neq \emptyset$, c-à-d, la projection $Proj_C(x)$ existe et elle est unique.*

b) *L'application $Proj_C$ est bien définie sur $U_r(C)$ et, pour tout réel positif $r' < r$, l'application $Proj_C$ est lipschitzienne sur U_r avec $\frac{r}{r-r'}$ comme constante de Lipschitz, i.e., pour tous $x, x' \in U_r(C)$*

$$\| Proj_C(x) - Proj_C(x') \| \leq \frac{r}{r - r'} \| x - x' \| .$$

c) *Le cône normal proximal est fermé sur C.*

Remarque 1.5 *Comme une conséquence directe, pour les ensembles uniformément prox réguliers, le cône normal proximal à C coïncide avec tous les cônes normaux contenus dans le cône normal de Clarke en tout point $x \in C$, c'est-à-dire,*

$$N_C^P(x) = N_C^C(x), \text{ pour tout } x \in C.$$

Dans la suite, on note $N_C(x) = N_C^P(x) = N_C^C(x)$, pour tout $x \in C$.

Exemples 1.1 *[3, 7]*

1. *Tout les ensembles convexe sont des ensembles r-prox régulier avec $r = +\infty$, dans ce cas tout les cônes normaux coincident avec $N_C^{con}(x)$.*
2. *L'union de deux intervalles disjoints $[a, b]$ et $[c, d]$ avec $c > b$ n'est pas convexe mais elle est r-prox régulière avec $r = \frac{c-b}{2}$.*
3. *L'ensemble*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x - 1|, |y - 2|\} \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 4| + |y - 2| \leq 1\}$$

est non convexe mais r- prox régulier avec $0 < r < \frac{1}{2}$.

4. *L'union finie des intervalles disjoints est toujours r-prox régulier.*
5. *L'union de deux ensembles convexes disjoints n'est pas convexe mais elle est r-prox régulière avec r égale à la moitié de la distance entre les deux ensembles.*

Enonçons à présent une caractérisation trés utile des ensembles uniformément prox-réguliers obtenue dans [7].

Proposition 1.6 *Soient* $r \in]0, +\infty]$ *et* C *un sous-ensemble non vide fermé* r*-prox-régulier de* H*. Alors pour tout* $x \in C$ *et* $0 \neq \xi \in N_C^P(x)$ *on a*

$$\left\langle \frac{\xi}{\| \xi \|}, x' - x \right\rangle \leq \frac{2}{r} \| x' - x \|^2 + d_C(x');$$

pour tout $x' \in H$*, avec* $d_C(x') < r$.

Preuve.

D'après la proposition 1.3 de la prox-régularité on a

$$\left\langle \frac{\xi}{\| \xi \|}, x' - x \right\rangle \leq \frac{2}{r} \| x' - x \|, \forall x \in C.$$

Fixons $x \in H$ tel que d'après la proposition 1.5 **a)** : $d_C(x) < r$, puisque C est r-prox régulier.

Soit y l'unique point de C tel que :

$$d_C(x) = \| x' - y \|$$

pour tout $x' \in H$

$$\begin{aligned}
\| x - y \| &= \| x - x' + x' - y \| \\
&\leq \| x - x' \| + \| x' - y \| \\
&= \| x - x' \| + d_C(x) \\
&\leq \| x - x' \| + \| x - x' \| \\
&= 2 \| x - x' \| .
\end{aligned}$$

Or

$$\| x - y \| \leq 2 \| x - x' \|,$$

et donc par la caractérisation de l'ensemble r-prox régulier, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\xi}{\| \xi \|}, x' - x \right\rangle &= \left\langle \frac{\xi}{\| \xi \|}, x' - y \right\rangle + \left\langle \frac{\xi}{\| \xi \|}, y - x \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\xi}{\| \xi \|}, y - x \right\rangle + \left\langle \frac{\xi}{\| \xi \|}, x' - y \right\rangle \\
&\leq \frac{1}{2r} \| y - x \|^2 + \left\langle \frac{\xi}{\| \xi \|}, x' - y \right\rangle \\
&\leq \frac{1}{2r} \| y - x \|^2 + \frac{\| \xi \|}{\| \xi \|} \| x' - y \| \\
&\leq \frac{1}{2r}(2 \| x' - x \|)^2 + \| x' - y \| \\
&= \frac{1}{2r}(4 \| x' - x \|^2) + d_C(x) \\
&= \frac{2}{r} \| x' - x \|^2 + d_C(x).
\end{aligned}$$

$\square$

Chapitre 2

Existence de solutions pour une inégalité variationnelle avec contrainte non convexe

2.1 Introduction

Les outils de l'analyse non lisse (non différentiable) interviennent dans de nombreuses applications de l'analyse variationnelle, notamment l'étude des inégalités variationnelles.

D'autres concepts de cône normal pour des ensembles non convexes ont été introduits et étudiés par plusieurs auteurs, nous citons entre autres le cône normal de Clarke, le cône normal de Fréchet et le cône normal de Mordukhovich, ect. Dans ce chapitre, les auteurs de [4] ont utilisé le cône normal proximal car d'une part la classe d'ensembles avec laquelle nous allons travailler a été caractérisée en terme du cône normal proximal et aussi parce que tous les cône normaux contenus dans le cône normal de Clarke coïncide, c-à-d, $N_C^P(\cdot) = N_C^F(\cdot) = \cdots = N_C^C(\cdot)$. Cette classe d'ensembles non convexes appelée la classe des ensembles uniformément prox-réguliers .

Dans [4], les auteurs ont considéré et montré la convergence d'un algorithme vers une solution de (IVN) sous certaines conditions et hypothèses sur l'ensemble de contrainte

C et F, et avec la non convexité de C. Toutes les démonstrations faites dans [4] sont fortement basées sur les propriétés de la projection sur les ensembles convexes et quelques techniques d'analyse non lisse. D'où la généralisation directe du problème (IVN)

$$(IVN)\begin{cases} \text{Trouver } x^* \in C \text{ et } y^* \in F(x^*); \\ \langle y^*, x - x^*\rangle + \dfrac{\| y^* \|}{2r} \| x - x^* \|^2 \geq 0, \text{ pour tout } x \in C. \end{cases}$$

et en particulier les propriétés des cônes normaux, pour proposer et analyser des algorithmes pour (PVN)

$$(PVN)\begin{cases} \text{Trouver } x^* \in C; \\ F(x^*) \cap -N_C^P(x^*) \neq \emptyset, \end{cases}$$

où $N_C^P(x)$ dénotes le cône normal proximal à C en x et sous la monotonie forte de F.

2.2 Résultats auxiliaires

On donne dans cette section quelques Propositions qui nous seront utiles dans la suite. (Voir [4]).

Proposition 2.1 *Supposons que C est un sous-ensemble convexe fermé non vide de H, et $F : H \rightrightarrows H$, est une multifonction alors (IV) est équivalent au problème variationnel (PV), c-à-d,*

$$(IV)\begin{cases} \textit{Trouver } x^* \in C \textit{ et } y^* \in F(x^*) \textit{ tels que }; \\ \langle y^*, x - x^*\rangle \geq 0, \textit{ pour tout } x \in C, \end{cases} \iff (PV)\begin{cases} \textit{Trouver } x^* \in C \textit{ tel que }; \\ F(x^*) \cap -N_C(x^*) \neq \emptyset, \end{cases}$$

Preuve. Le résultat découle directement de la définition du cône convexe au sens d'analyse convexe. En effet

$$
\begin{aligned}
N_C^{con}(x) &= \{y \in H, \langle y, x^* - x\rangle \leq 0, \forall x^* \in C\}. \\
&= \{y \in F(x^*), \langle y, x^* - x\rangle \leq 0, \forall x^* \in C\} \\
&= \{y \in F(x^*), -\langle y, x^* - x\rangle \geq 0, \forall x^* \in C\} \\
&= \{y \in F(x^*), \langle y, x - x^*\rangle \geq 0, \forall x^* \in C\}
\end{aligned}
$$

Comme C est convexe on a

$$N_C^{con}(x) = N_C(x)$$

ce qui donne $y \in N_C(x)$ et donc

$$x^* \in C : F(x^*) \cap -N_{C(x^*)}(x^*) \neq 0.$$

$\square$

Dans la proposition suivante nous écrivons le problème (PV) associé au cône normal proximal, que l'on note (PVN) sous forme d'inégalité variationnelle.

Proposition 2.2 *Soit C un sous-ensemble r-prox régulier non vide de H, alors (PVN) est équivalent à l'inégalité variationnelle (IVN), c-à-d,*

$$
(IVN)\begin{cases} \text{Trouver } x^* \in C \text{ et } y^* \in F(x^*) \text{ tels que ;} \\ \langle y^*, x - x^*\rangle + \dfrac{\| y^* \|}{2r} \| x - x^* \|^2 \geq 0, \text{ pour tout } x \in C. \end{cases}
$$

$$\Updownarrow$$

$$
(PVN)\begin{cases} \text{Trouver } x^* \in C \text{ tel que ;} \\ F(x^*) \cap -N_C^P(x^*) \neq \emptyset, \end{cases}
$$

Preuve. ($\Longrightarrow$) soit $x^* \in C$ une solution de (IVN), c-à-d, il existe $y^* \in F(x^*)$ telle que

$$\langle y^*, x - x^* \rangle + \frac{\| y^* \|}{2r} \| x - x^* \|^2 \geq 0, \forall x \in C,$$

-si $y^* = 0$ on vérifie aisément que le vecteur nul appartient toujours au cône normal.

-si $y^* \neq 0$, alors, pour tout $x \in C$, on a

$$\left\langle \frac{-y^*}{\| y^* \|}, x - x^* \right\rangle \leq \frac{1}{2r} \| x - x^* \|^2 .$$

D'après le Lemme 1.1

$$\frac{-y^*}{\| y^* \|} \in N_C(x^*),$$

et donc

$$-y^* \in N_C(x^*).$$

($\Longleftarrow$) Supposons que $F(x^*) \cap -N_C(x^*) \neq \emptyset$

alors il existe $y^* \in F(x^*) \cap -N_C(x^*) \Leftrightarrow y^* \in F(x^*)$ et $y^* \in -N_C(x^*)$

Comme $y^* \in -N_C(x^*)$ et, donc par la caractérisation de la prox régularité Proposition1.3, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{-y^*}{\| y^* \|}, x - x^* \right\rangle \leq \frac{1}{2r} \| x - x^* \|^2, \forall x \in C \\
&\Longleftrightarrow \frac{-1}{\| y^* \|} \langle y^*, x - x^* \rangle \leq \frac{1}{2r} \| x - x^* \|^2 \\
&\Longleftrightarrow -\langle y^*, x - x^* \rangle \leq \frac{\| y^* \|}{2r} \| x - x^* \|^2 \\
&\Longleftrightarrow \langle y^*, x - x^* \rangle + \frac{\| y^* \|}{2r} \| x - x^* \|^2 \geq 0, \forall x \in C.
\end{aligned}$$

$\square$

2.3 Résultats principaux

Le but principal de cette section et de donner une démonstration pour l'existence de solutions d'inégalité variationnelle (IVN) avec contrainte non convexe, autrement dit, sous une condition de prox-régularité sur l'ensemble C dans un espace de Hilbert H, donné dans [4].

La preuve consiste sur la proposition des différents algorithmes de projection pour résoudre une nouvelle classe de problèmes variationnels non convexe (PVN).

Dans toute la suite de cette section, nous supposons que C est un sous-ensemble r'-prox régulier, avec $r' > 0$ et $r \in]0, r'[$. Nous notons $\zeta := \frac{r'}{r'-r}$.

F est fortement monotone

Nous proposons l'algorithme suivant pour résoudre le problème (PVN).

Algorithme 1. On définit par induction

- $x^0 \in C$, $y^0 \in F(x^0)$, et $\rho > 0$
- Pour $n \geq 0$, $z^{n+1} = x^n - \rho y^n$, et $x^{n+1} \in Proj_C(z^{n+1})$, $y^{n+1} \in F(x^{n+1})$.

Pour analyser et étudier la convergence de cet algorithme, nous aurons besoin des hypothèses suivantes :

Hypothèses $(\mathcal{A}_1)$

$(\mathcal{H}_1)$ $F : H \rightrightarrows H$ est fortement monotone dans C pour un certain $\alpha > 0$, c-à-d, il existe $\alpha > 0$ tel que ; pour tous $x, x' \in C$ nous avons

$$\langle y - y', x - x' \rangle \geq \alpha \parallel x - x' \parallel^2, \forall y \in F(x), y' \in F(x').$$

$(\mathcal{H}_2)$ $F : H \rightrightarrows H$ est à valeurs non vides compactes et lipschitzienne au sens de Hausdorff s'il existe une constante $\beta > 0$, tel que

$$d_H\big(F(x), F(x')\big) \leq \beta \parallel x - x' \parallel; \quad \text{pour tous } x, x' \in C.$$

$(\mathcal{H}_3)$ Les constantes α et β vérifient l'inégalité suivante

$$\alpha\zeta > \beta\sqrt{\zeta^2 - 1}.$$

Théorème 2.1 *Supposons que toutes les hypothèses $(\mathcal{A}_1)$ sont satisfaites et que le paramètre ρ vérifie l'inégalité*

$$\frac{\alpha}{\beta^2} - \epsilon < \rho < \min\left\{\frac{\alpha}{\beta^2} + \epsilon, \frac{r}{\| y^n \| + 1}\right\},$$

où

$$\epsilon = \frac{\sqrt{(\alpha\zeta)^2 - \beta^2(\zeta^2 - 1)}}{\zeta\beta^2}.$$

Alors les suites $\{z^n\}_n, \{x^n\}_n$ et $\{y^n\}_n$ engendrées par l'algorithme 1 sont fortement convergentes vers des éléments z^*, x^* et y^* dans H respectivement, avec x^* une solution de (PVN)

Preuve.

La démonstration se fait en trois étapes.

Etape 1. *Construction des suites approximantes*

D'après la proposition 1.4, pour tout $x \in H$ avec $d_C(x) < r$, la projection $Proj_C(x)$ existe et elle est unique, et donc l'algorithme est bien défini.

Maintenant, pour $n \geq 0$, nous avons par l'Algorithme 1

$$\begin{aligned} \| z^{n+1} - z^n \| &= \| (x^n - \rho y^n) - (x^{n-1} - \rho y^{n-1}) \| \\ &= \| x^n - x^{n-1} - \rho(y^n - y^{n-1}) \| . \end{aligned}$$

C'est clair par construction que les suite $\{x^n\}_n \in C$. Nous utilisons la monotonie fort et le caractère Lipschitz au sens de Hausdorff de F sur C, nous avons

$$\left\langle y^n - y^{n-1}, x^n - x^{n-1} \right\rangle \geq \alpha \| x^n - x^{n-1} \|^2, \tag{2.1}$$

de plus

$$\| y^n - y^{n-1} \| \leq d_H\big(F(x^n), F(x^{n-1})\big)$$

Alors $(\mathcal{H}_2)$ donne

$$\| y^n - y^{n-1} \| \leq d_H\big(F(x^n), F(x^{n-1})\big) \leq \beta \| x^n - x^{n-1} \|, \tag{2.2}$$

Il résulte

$$\begin{aligned}
\| z^{n+1} - z^n \|^2 &= \| x^n - x^{n-1} - \rho(y^n - y^{n-1}) \|^2 \\
&= \left\langle x^n - x^{n-1} - \rho(y^n - y^{n-1}), x^n - x^{n-1} - \rho(y^n - y^{n-1}) \right\rangle \\
&= \left\langle x^n - x^{n-1}, x^n - x^{n-1} \right\rangle - \rho \left\langle x^n - x^{n-1}, y^n - y^{n-1} \right\rangle - \rho \left\langle y^n - y^{n-1}, x^n - x^{n-1} \right\rangle \\
&+ \left\langle y^n - y^{n-1}, y^n - y^{n-1} \right\rangle \\
&= \| x^n - x^{n-1} \|^2 - 2\rho \left\langle y^n - y^{n-1}, x^n - x^{n-1} \right\rangle + \rho^2 \| y^n - y^{n-1} \|^2 .
\end{aligned}$$

Alors, en vertu de (2.1) et (2.2)

$$\begin{aligned}
\| z^{n+1} - z^n \|^2 &= \| x^n - x^{n-1} \|^2 - 2\rho \left\langle y^n - y^{n-1}, x^n - x^{n-1} \right\rangle + \rho^2 \| y^n - y^{n-1} \|^2 \\
&\leq \| x^n - x^{n-1} \|^2 - 2\rho\alpha \| x^n - x^{n-1} \|^2 + \rho^2\beta^2 \| x^n - x^{n-1} \|^2 \\
&\leq \left(1 - 2\rho\alpha + \rho^2\beta^2\right) \| x^n - x^{n-1} \|^2 .
\end{aligned}$$

Ainsi on obtient

$$\begin{aligned}
\| z^{n+1} - z^n \| &= \| x^n - x^{n-1} - \rho(y^n - y^{n-1}) \| \\
&\leq \sqrt{1 - 2\rho\alpha + \rho^2\beta^2} \| x^n - x^{n-1} \| .
\end{aligned}$$

Par conséquent, on conclut que

$$\| z^{n+1} - z^n \| \leq \sqrt{1 - 2\rho\alpha + \rho^2\beta^2} \| x^n - x^{n-1} \| .$$

Etape 2. *Convergence des suites*

Selon le choix de $\rho < \frac{r}{\|y^n\|+1}$, il est clair que la suite $\{z^n\}_n \subset C_r := \{x \in H : d_C(x) < r\}$.

Le comportement lipschitzien de la Projection sur C_r et la Proposition 1.5 donnent

$$\begin{aligned} \| x^{n+1} - x^n \| &= \| Proj_C(z^{n+1}) - Proj_C(z^n) \| \\ &\leq \zeta \| z^{n+1} - z^n \| \\ &\leq \zeta \sqrt{1 - 2\rho\alpha + \rho^2\beta^2} \| x^n - x^{n-1} \| \end{aligned}$$

Soit $\xi = \zeta \sqrt{1 - 2\rho\alpha + \rho^2\beta^2}$.

En vertu de $(\mathcal{H}_3)$ la constante ξ est toujours strictement inférieure à 1.

Pafortement vers un élément x^* dans H.

Par construction des suites $\{x^n\}_n, \{y^n\}_n$ et $\{z^n\}_n$ et en utilisant la propriéte de Lipschitz au sens de Hausdorff de F on obtient la convergence de ces suites vers des éléments x^*, y^* et z^* respectivement, avec

$$x^* \in C, y^* \in F(x^*).$$

r conséquent, la suite $\{x^n\}_n$ est alors de Cauchy donc, elle converge Il suit de l'algorithme 1, de la convergence des suites $\{x^n\}_n, \{y^n\}_n$ et $\{z^n\}_n$, et de la continuité de F, que la suite $\{z^n\}_n$ est convergente vers un élément $z^* \in H$ vérifiant

$$z^* = x^* - \rho y^*.$$

Etape 3. *Existence de solutions*

Maintenant, on doit montrer que x^* est une solution de

$$(PVN) \begin{cases} \text{Trouver } x^* \in C; \\ F(x^*) \cap -N_C^P(x^*) \neq \emptyset, \end{cases}$$

Par construction, pour tout $n \geq 0$, nous avons

$$x^{n+1} \in Proj_C(z^{n+1}) = Proj_C(x^n - \rho y^n),$$

et donc par la caractérisation du cône normal proximal, on obtient, pour tout $n \geq 0$

$$x^{n+1} \in Proj_C(z^{n+1}) = Proj_C\big(x^n - \rho y^n\big)$$
$$\Longrightarrow x^{n+1} \in Proj_C\big(x^{n+1} + (x^n - \rho y^n - x^{n+1})\big)$$
$$\Longrightarrow x^n - \rho y^n - x^{n+1} \in N_C^P(x^{n+1})$$
$$\Longrightarrow (x^n - x^{n+1}) - \rho y^n \in N_C^P(x^{n+1}).$$

Selon la Proposition 1.5 **c)**, la fermeture du cône normal proximal assure que

$$\rho y^* \in -N_C(x^*).$$

Comme $y^* \in F(x^*)$, on conclut que

$$-N_C(x^*) \cap F(x^*) \neq \emptyset, \text{ avec } x^* \in C,$$

ce qui assure que x^* est une solution de (PVN).

□

F n'est pas n'ecessairement fortement monotone

Dans cette section, nous allons montrer que les résultats obtenus dans le Théorème2.1 peuvent être étendus au cas où $F = F_1 + F_2$ avec F_1 est lipschitzienne au sens de Hausdorff, fortement monotone sur C, et F_2 est seulement lipschitzienne au sens de Hausdorff dans H, mais n'est pas nécessairement monotone.

Nous proposons l'algorithme suivant pour résoudre le problème (PVN) associé à la multifonction $F = F_1 + F_2$:

Algorithme 2.

Etape 1. Fixer $\rho > 0$ et $x^0 \in C$ tels que

$$y^0 \in F_1(x^0), \ w^0 \in F_2(x^0).$$

Etape 2. Pour $n \geq 0$,

Calculer : $z^{n+1} = x^n - \rho\left(y^n + w^n\right).$

Choisir : $x^{n+1} \in Proj_C(z^{n+1}),\ y^{n+1} \in F_1(x^{n+1}),\ w^{n+1} \in F_2(x^{n+1}).$

Hypothèses ($\mathcal{A}_2$)

Nous aurons besoin des hypothèses suivantes sur F_1 et F_2 pour étudier la convergence de cet algorithme :

($\mathcal{H}_1$) F_1 est $\alpha-$fortement monotone sur C.

($\mathcal{H}_2$) F_1 et F_2 sont lipschitziennes au sens de Hausdorff avec des constantes $\beta > 0$ et $\eta > 0$ respectivement.

($\mathcal{H}_3$) Les constantes α, ζ, η, et β vérifie l'inégalité suivante

$$\alpha\zeta > \eta + \sqrt{(\beta^2 - \eta^2)(\zeta^2 - 1)}.$$

Théorème 2.2 *Supposons que toutes les hypothèses ($\mathcal{A}_2$) sont satisfaites et que le paramètre ρ vérifie l'inégalité*

$$\frac{\zeta\alpha - \eta}{\zeta(\beta^2 - \eta^2)} - \varepsilon < \rho < \min\left\{\frac{\zeta\alpha - \eta}{\zeta(\beta^2 - \eta^2)} + \varepsilon, \frac{1}{\eta\zeta}, \frac{r}{\| y^n + w^n \| + 1}\right\},$$

où

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{(\alpha\zeta - \eta)^2 - (\beta^2 - \eta^2)(\zeta^2 - 1)}}{\zeta(\beta^2 - \eta^2)}.$$

Alors les suites $\{z^n\}_n, \{x^n\}_n$ et $\{y^n\}_n$ engendrées par l'algorithme 2 sont fortement convergentes vers des éléments z^*, x^* et y^* dans H respectivement, avec x^* une solution de (PVN) associée à $F = F_1 + F_2$.

Preuve.

On suit la démonstration du théorème 2.1 avec des petites modifications.

$$\begin{aligned}
\| z^{n+1} - z^n \| &= \| [x^n - \rho(y^n - w^n)] - [x^{n-1} - \rho(y^{n-1} + w^{n-1})] \| \\
&= \| x^n - x^{n-1} - \rho(y^n - y^{n-1}) - \rho(w^n - w^{n-1}) \| \\
&\leq \| x^n - x^{n-1} - \rho(y^n - y^{n-1}) \| + \rho \| w^n - w^{n-1} \| .
\end{aligned}$$

D'autre part la forte monotonie de F_1, et la propriété de Lipschitz au sens de Hausdorff de F_1, donnent

$$\left\langle y^n - y^{n-1}, x^n - x^{n-1} \right\rangle \geq \alpha \parallel x^n - x^{n-1} \parallel^2,$$

de plus

$$\parallel y^n - y^{n-1} \parallel \leq \mathcal{H}(F_1(x^n), F_1(x^{n-1})) \leq \beta \parallel x^n - x^{n-1} \parallel,$$

De la même manière dans la preuve du théorème 2.1, on obtient

$$\begin{aligned}\parallel x^n - x^{n-1} - \rho(y^n - y^{n-1}) \parallel^2 &= \left\langle x^n - x^{n-1} - \rho(y^n - y^{n-1}), x^n - x^{n-1} - \rho(y^n - y^{n-1}) \right\rangle \\ &= \parallel x^n - x^{n-1} \parallel^2 - 2\rho \left\langle y^n - y^{n-1}, x^n - x^{n-1} \right\rangle + \rho^2 \parallel y^n - y^{n-1} \parallel^2,\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}\parallel x^n - x^{n-1} - \rho(y^n - y^{n-1}) \parallel^2 &\leq \parallel x^n - x^{n-1} \parallel^2 - 2\rho\alpha \parallel x^n - x^{n-1} \parallel^2 + \rho^2\beta^2 \parallel x^n - x^{n-1} \parallel^2 \\ &\leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2\beta^2) \parallel x^n - x^{n-1} \parallel^2,\end{aligned}$$

or

$$\parallel x^n - x^{n-1} - \rho(y^n - y^{n-1}) \parallel^2 \leq \sqrt{1 - 2\rho\alpha + \rho^2\beta^2} \parallel x^n - x^{n-1} \parallel^2 .$$

D'autre part, la propriété de Lipschitz au sens de Hausdorff de F_2, donne

$$\parallel w^n - w^{n-1} \parallel \leq \mathcal{H}(F_2(x^n), F_2(x^{n-1})) \leq \eta \parallel x^n - x^{n-1} \parallel,$$

or

$$\parallel w^n - w^{n-1} \parallel \leq \eta \parallel x^n - x^{n-1} \parallel .$$

Finalement on obtient

$$\parallel z^{n+1} - z^n \parallel \leq \left(\sqrt{1 - 2\rho\alpha + \rho^2\beta^2} + \rho\eta \right) \parallel x^n - x^{n-1} \parallel .$$

Par hypothèse on a

$$\rho < \frac{r}{\parallel y^n + w^n \parallel + 1},$$

d'où $d_C(z^{n+1}) < r$, ce qui assure, que la suite $\{z^{n+1}\}$ reste dans l'ensemble C_r.

Par conséquent, la Proposition 1.5 et l'uniforme prox-régularité de l'ensemble C assurent

$$\begin{aligned}\| x^{n+1} - x^n \| &= \| Proj_C(z^{n+1}) - Proj_C(z^n) \| \\ &\leq \zeta \| z^{n+1} - z^n \| \\ &\leq \zeta\Big(\sqrt{1 - 2\rho\alpha + \rho^2\beta^2} + \rho\eta\Big) \| x^n - x^{n-1} \| .\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$ dans $(\mathcal{A}_2)$, la constante $\xi = \zeta(\sqrt{1 - 2\rho\alpha + \rho^2\beta^2} + \rho\eta)$ est toujours strictement inférieure à 1.

Par conséquent, la suite $\{x^n\}_n$ est alors de Cauchy, donc elle converge fortement vers un élément $x^* \in H$

La construction des suites $\{x^n\}_n, \{y^n\}_n$ et $\{w^n\}_n$, avec la propriété de Lipschitz au sens de Hausdorff de F_1 et F_2 assurent la convergence de ces suites vers des éléments x^*, y^* et w^* respectivement, avec

$$x^* \in C, y^* \in F_1(x^*), w^* \in F_2(x^*).$$

Il suit donc de l'algorithme 2, de la convergence des suites $\{x^n\}_n, \{y^n\}_n$ et $\{w^n\}_n$ et de la continuité de F_1 et F_2, que la suite $\{z^n\}_n$ est aussi convergente vers l'élément

$$z^* = x^* - \rho(y^* + w^*).$$

Maintenant, on doit montrer que x^* est une solution de (PVN) associée à la multifonction $F_1 + F_2$. Par construction, on a

$$x^{n+1} \in Proj_C(z^{n+1}) = Proj_C\big(x^n - \rho(y^n + w^n)\big), \quad \forall n \geq 0,$$

et donc par la caractérisation du cône normal proximal, on obtient, pour tout $n \geq 0$

$$\begin{aligned} x^{n+1} \in Proj_C(z^{n+1}) &= Proj_C\big(x^n - \rho(y^n + w^n)\big) \\ &\Longrightarrow x^{n+1} \in Proj_C\big(x^{n+1} + (x^n - \rho(y^n + w^n) - x^{n+1})\big) \\ &\Longrightarrow x^n - \rho(y^n + w^n) - x^{n+1} \in N_C^P(x^{n+1}) \\ &\Longrightarrow (x^n - x^{n+1}) - \rho(y^n + w^n) \in N_C^P(x^{n+1}). \end{aligned}$$

Selon la Proposition 1.5 **c)**, la fermeture du cône normal proximal, on peut passer à la limite dans la dernière relation, et on obtient

$$\rho(y^* + w^*) \in -N_C(x^*),$$

et puisque $x^* \in C$, $y^* \in F_1(x^*)$ et $w^* \in F_2(x^*)$, on conclut que

$$-N_C(x^*) \cap \big(F_1(x^*) + F_2(x^*)\big) \neq \emptyset, \text{ avec } x^* \in C.$$

D'où, x^* est une solution de (PVN) associée à la multifonction $F = F_1 + F_2$.

□

Remarque 2.1 *Le résultat du Théorème 2.2 généralise le type d'inégalité variationnelle introduite, étudiée et analysée par Noor [14] du cas convexe au cas non convexe et plus précisément aux cas uniformément prox-régulier.*

Chapitre 3

Problèmes Quasi-Variationnels

Introduction

Dans cette section nous allons modifier le problème (PVN). Nous allons supposer que l'ensemble C est une multifonction définie de H dans H. Le problème (PVN) devient

$$(PQVN)\begin{cases} \text{Trouver } x^* \in C(x^*) \text{ tel que} \\ F(x^*) \cap -N^P_{C(x^*)}(x^*) \neq \emptyset. \end{cases}$$

Ce problème est appelé *Problème Quasi-Variationnel non convexe* (PQVN).

3.1 Résultats auxiliaires

Nous rappelons la définition d'une multifonction lipschitzienne

Définition 3.1 *une multifonction $C : H \rightrightarrows H$ est dite lipschitzienne s'il existe une constante $k > 0$ satisfaisant*

$$|d_{C(x)}(y) - d_{C(x')}(y')| \leq \| y - y' \| + k \| x - x' \|,$$

pour tous $x, y, x', y' \in H$.

Remarque 3.1 *On dit aussi que C est lipschitzienne avec une constante k. Il est facile de vérifier que cette notion de Lipschitz est plus faible que la notion de Lipschitz au sens de Hausdorff donnée au chapitre 2.*

Cette proposition est utilisée pour montrer une propriété de fermeture du sous différentiel de la fonction distance associé à une multifonction à valeurs non vide fermées uniformément prox-régulières. Cette propriété de fermeture à été prouvée dans [5].

Proposition 3.1 *Soit $C : H \rightrightarrows H$ une multifonction Lipschitzienne telle que $C(x)$ soit uniformément prox-régulier pour tout $x \in H$. Pour toutes suites x^n, y^n, u^n dans H telles que $y^n \in C(x^n)$, $u^n \in N^P_{C(x^n)}(y^n)$, avec $x^n \longrightarrow x^*, y^n \longrightarrow y^*$ et $u^n \longrightarrow u^*$, on a :*

$$u^* \in N^P_{C(x^*)}(y^*). \tag{3.1}$$

Preuve

Soient $x^n \longrightarrow x^*,\ y^n \longrightarrow y^*$ avec $u^n \longrightarrow u^*$, et $y^n \in C(x^n),\ u^n \in N_{C(x^n)}(y^n)$.

Si $u^* = 0$, alors (3.1) est vérifiée. Supposons maintenant que $u^* \neq 0$ (donc $u^n \neq 0$, pour n suffisamment grand). Observons que $y^* \in C(x^*)$ parce que $C : H \rightrightarrows H$ est Lipschitzienne. la convergence de y^n vers y^* nous donne pour n suffisamment grand ,

$$y^n \in y^* + \frac{r}{2}\mathbb{B}.$$

Par conséquent l'uniform prox-régularité des ensemble $C(x^n)$ et la proposition 1.6 nous donnent

$$\left\langle \frac{u^n}{\| u^n \|}, z - y^n \right\rangle \leq \frac{2}{r} \| z - y^n \|^2 + d_{C(x^n)}(z).\ \forall z \in H,\ avec\ d_{C(x^n)}(z) < r.$$

Cette inégalité est vraie pour tout n suffisamment grand et pour tout $z \in y^* + \delta\mathbb{B}$ avec $0 < \delta < \frac{2}{r}$. En effet, pour tout $z \in y^* + \delta\mathbb{B}$ ona

$$d_{C(x^n)}(z) < \| z - y^* \| + \| y^* - y^n \| \leq \delta + \frac{2}{r} < r$$

Par conséquence, la continuité de la fonction distance $d_{C(\cdot)}(\cdot)$ par rapport aux deux variable (pare ce que C est Lipschitzienne) et la précédente inégalité donnent après passage à la limite, quand $n \longrightarrow \infty$

$$\left\langle \frac{u^*}{\| u^* \|}, z - y^n \right\rangle \leq \frac{2}{r} \| z - y^* \|^2 + d_{C(x^n)}(z),\ \forall z \in y^* + \delta\mathbb{B}.$$

D'où

$$\left\langle \frac{u^*}{\| u^* \|}, z - y^n \right\rangle \leq \frac{2}{r} \| z - y^* \|^2, \ \forall z \in (y^* + \delta \mathbb{B}) \cap C(x^*).$$

Ceci assure, d'après la définition du cône normal proximal que ,$\frac{u^*}{\|u^*\|} \in N^P_{C(x^*)}(y^*)$ ce qui donne $u^* \in N^P_{C(x^*)}(y^*)$. $\square$

3.2 Résultats principaux

Dans toute la suite de cette section, nous supposons que C à valeurs r'-prox réguliers, avec $r' > 0$ et $r \in]0, r'[$. Nous notons $\zeta := \frac{r'}{r'-r}$.

F est fortement monotone

Nous proposons l'algorithme suivant pour résoudre le problème (PQVN).

Algorithme 3.

Etape 1. Fixer $\rho > 0$ et $x^0 \in C(x^0)$ tels que : $\quad y^0 \in F(x^0)$.

Etape 2. Pour $n \geq 0$,

Calculer : $z^{n+1} = x^n - \rho y^n$.

Choisir : $x^{n+1} \in Proj_{C(x^n)}(z^{n+1})$, $y^{n+1} \in F(x^{n+1})$.

Pour analyser et étudier la convergence de cet algorithme, nous aurons besoin des hypothèses suivantes

Hypothèses $(\mathcal{A}_3)$

$(\mathcal{H}_1)$ Soit $F : H \rightrightarrows H$ à valeurs non vides compactes et fortement monotone avec une constante $\alpha > 0$.

$(\mathcal{H}_2)$ F est lipschitzienne au sens de Hausdorff avec une constante $\beta > 0$ et C est $k-$lipschitzienne avec $0 < k < 1$.

$(\mathcal{H}_3)$ La projection vérifie l'inégalité suivante

$$\| Proj_{C(x)}(z) - Proj_{C(y)}(z) \| \leq k \| x - y \|, \quad \forall x, y, z \in H, \text{ avec } 0 < k < 1.$$

$(\mathcal{H}_4)$ Soit λ vérifiant

$$0 < \lambda < \frac{r(1-k)}{1+3k}.$$

$(\mathcal{H}_5)$ Les constantes α, β, ζ et k vérifient l'inégalité suivante

$$\alpha\zeta > \beta\sqrt{\zeta^2 - (1-k)^2}.$$

Théorème 3.1 *Supposons que toutes les hypothèses ($\mathcal{A}_3$) sont satisfaites et que le paramètre ρ vérifie l'inégalité*

$$\frac{\alpha}{\beta^2} - \epsilon < \rho < \min\left\{\frac{\alpha}{\beta^2} + \epsilon, \frac{\lambda}{\| y_n \| + 1}\right\},$$

où

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{(\alpha\zeta)^2 - \beta^2[\zeta^2 - (1-k)^2]}}{\zeta\beta^2}.$$

Alors les suites $\{z^n\}_n, \{x^n\}_n$ et $\{y^n\}_n$ engendrées par l'algorithme 3 sont fortement convergentes vers des éléments z^*, x^* et y^* dans H respectivement, avec x^* une solution de (PQVN)

Nous commençons tout d'abord par prouver le lemme suivant qui est un point clé de la preuve du Théorème 3.1.

Lemme 3.1 *Sous les mêmes hypothèses du Théorème 3.1, les suites $\{x^n\}_n$, $\{z^n\}_n$, engendrées par l'algorithme 3 vérifient pour tout $n \geq 0$*

$$z^n \text{ et } z^{n+1} \in C_r(x^n) := \{y \in H : d_{C(x^n)}(y) < r\}, \forall n \geq 1.$$

Preuve.

Maintenant, de l'algorithme 4 on a

• Pour $n = 0$,

$$d_{C(x^0)}(z^1) = d_{C(x^0)}(x^0 - \rho y^0) \leq d_{C(x^0)}(x^0) + \rho \| y^0 \| \leq \lambda.$$

• Pour $n = 1$, d'après les hypothèses ($\mathcal{H}_2$), ($\mathcal{H}_3$) et ($\mathcal{H}_4$) dans ($\mathcal{A}_3$), on obtient

$$\begin{aligned} d_{C(x^1)}(z^2) &= d_{C(x^1)}(x^1 - \rho y^1) \\ &\leq d_{C(x^1)}(x^1) - d_{C(x^0)}(x^1) + \rho \| y^1 \| \\ &\leq k \| x^1 - x^0 \| + \lambda, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d_{C(x^1)}(z^1) &\leq d_{C(x^0)}(z^1) + k \parallel x^1 - x^0 \parallel \\ &= d_{C(x^0)}(x^0 - \rho y^0) + k \parallel x^1 - x^0 \parallel \\ &\leq \lambda + k \parallel x^1 - x^0 \parallel . \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \parallel x^1 - x^0 \parallel &= \parallel x^1 - z^1 + z^1 - x^0 \parallel \\ &\leq \parallel x^1 - z^1 \parallel + \parallel z^1 - x^0 \parallel \\ &= d_{C(x^0)}(z^1) + \parallel z^1 - x^0 \parallel \\ &= d_{C(x^0)}(x^0 - \rho y^0) + \rho \parallel y^0 \parallel \\ &< 2\lambda, \end{aligned}$$

ce qui assure que $d_{C(x^1)}(z^1)$ et $d_{C(x^1)}(z^2)$ sont inférieurs à r. Donc la propriété est vérifiée pour $n = 1$.

• Pour $n \geq 2$,

$$d_{C(x^n)}(z^{n+1}) \leq d_{C(x^n)}(x^n) + \rho \parallel y^n \parallel \leq k \parallel x^n - x^{n-1} \parallel + \lambda,$$

et

$$\begin{aligned} d_{C(x^n)}(z^n) &\leq d_{C(x^{n-1})}(z^n) + k \parallel x^n - x^{n-1} \parallel \\ &\leq k \parallel x^{n-1} - x^{n-2} \parallel + \lambda + k \parallel x^n - x^{n-1} \parallel . \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\| x^n - x^{n-1} \| &= \| x^n - z^n + z^n - x^{n-1} \| \\
&\leq \| x^n - z^n \| + \| z^n - x^{n-1} \| \\
&\leq d_{C(x^{n-1})}(z^n) + \lambda \\
&\leq d_{C(x^{n-1})}(x^{n-1}) - d_{C(x^{n-2})}(x^{n-1}) + 2\lambda \\
&\leq k \| x^n - x^{n-1} \| + 2\lambda,
\end{aligned}$$

puisque $\| x^1 - x^0 \| < 2\lambda$ on obtient

$$\| x^n - x^{n-1} \| \leq \frac{2\lambda(1-k^n)}{1-k}.$$

Par conséquent, des simples calculs donnent

$$\begin{aligned}
d_{C(x^n)}(z^{n+1}) &\leq \frac{2k\lambda(1-k^n)}{1-k} + \lambda \\
&\leq \lambda \frac{1+k-2k^{n+1}}{1-k} \\
&< \frac{\lambda(1+3k)}{1-k} < r,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
d_{C(x^n)}(z^n) &\leq k \| x^{n-1} - x^{n-2} \| + \lambda + k \| x^n - x^{n-1} \| \\
&\leq (k^2+k) \| x^{n-1} - x^{n-2} \| + 2\lambda k + \lambda \\
&\leq (k^2+k) \frac{2\lambda(1-k^{n-1})}{1-k} + 2\lambda k + \lambda \\
&\leq \frac{\lambda(1+3k)}{1-k} < r,
\end{aligned}$$

ce qui assure que z^{n+1} *et* $z^n \in C_r(x^n), \forall n \geq 0$.

$\square$

Revenons maintenant à la preuve du Théorème 3.1.

Preuve du Théorème 3.1.

De l'algorithme 3 on obtient

$$\| z^{n+1} - z^n \| \leq \sqrt{1 - 2\rho\alpha + \rho^2\beta^2} \| x^n - x^{n-1} \| .$$

D'après le lemme 3.1 on a z^n *et* $z^{n+1} \in C_r(x^n)$. Par conséquent la Proposition 1.5 et l'hypothèses $(\mathcal{H}_3)$ dans $(\mathcal{A}_3)$ assurent

$$\begin{aligned}
\| x^{n+1} - x^n \| &= \| Proj_{C(x^n)}(z^{n+1}) - Proj_{C(x^{n-1})}(z^n) \| \\
&= \| Proj_{C(x^n)}(z^{n+1}) - Proj_{C(x^{n-1})}(z^n) + Proj_{C(x^n)}(z^n) - Proj_{C(x^n)}(z^n) \| \\
&\leq \| Proj_{C(x^n)}(z^{n+1}) - Proj_{C(x^n)}(z^n) \| + \| Proj_{C(x^n)}(z^n) - Proj_{C(x^{n-1})}(z^n) \| \\
&\leq \zeta \| z^{n+1} - z^n \| + k \| x^n - x^{n-1} \| \\
&\leq [\zeta\sqrt{1 - 2\rho\alpha + \rho^2\beta^2} + k] \| x^n - x^{n-1} \| .
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse $(\mathcal{H}_4)$ et $(\mathcal{H}_5)$ dans $(\mathcal{A}_2)$, la constante $\xi = \zeta\sqrt{1 - 2\rho\alpha + \rho^2\beta^2} + k$ est toujours strictement inférieure à 1. D'où, la convergence forte des suites $\{x^n\}_n, \{y^n\}_n$ et $\{z^n\}_n$ vers des éléments x^*, y^* et z^* respectivement, avec $x^* \in C(x^*), y^* \in F(x^*)$.

Il suit de l'algorithme 3, de la convergence des suites $\{x^n\}_n, \{y^n\}_n$ et $\{z^n\}_n$, et de la continuité de F, que la suite $\{z^n\}_n$ est convergente vers un élément $z^* \in H$ vérifiant $z^* = x^* - \rho y^*$.

Maintenant, on doit montrer que x^* est une solution de (PQVN).

Par construction, on a $\forall n \geq 0$,

$$x^{n+1} \in Proj_{C(x^n)}(z^{n+1}) = Proj_{C(x^n)}(x^n - \rho y^n).$$

Donc, d'après la définition du cône normal proximal, on obtient, pour tout $n \geq 0$

$$(x^n - x^{n+1}) - \rho y^n \in N^P_{C(x^n)}(x^{n+1}).$$

Selon la Proposition 3.1, la propriété de fermeture du cône normal proximal, nous permet de passer à la limite dans la dernière relation, et on obtient

$$\rho y^* \in -N^P_{C(x^*)}(x^*).$$

Finalement, comme $y^* \in F(x^*)$, on conclut que

$$-N^P_{C(x^*)}(x^*) \cap F(x^*) \neq \emptyset, \text{ avec } x^* \in C(x^*),$$

ce qui assure que x^* est une solution de (PQVN).

□

F n'est pas n'ecessairement fortement monotone

Dans cette section, nous allons montrer que les résultats obtenus dans le Théorème3.1 peuvent être étendus au cas où $F = F_1 + F_2$ avec F_1 est lipschitzienne au sens de Hausdorff, fortement monotone sur C, et F_2 est seulement lipschitzienne au sens de Hausdorff dans H, mais n'est pas nécessairement monotone.

Nous proposons l'algorithme suivant pour résoudre le problème (PQVN) associé à la multifonction $F = F_1 + F_2$:

Algorithme

4.

Etape 1. Fixer $\rho > 0$ et $x^0 \in C$ tels que $y^0 \in F_1(x^0),\ w^0 \in F_2(x^0)$.

Etape 2. Pour $n \geq 0$,

Calculer : $z^{n+1} = x^n - \rho\left(y^n + w^n\right).$

Choisir : $x^{n+1} \in Proj_{C(x^n)}(z^{n+1}),\ y^{n+1} \in F_1(x^{n+1}),\ w^{n+1} \in F_2(x^{n+1}).$

Nous aurons besoin des hypothèses suivantes sur F_1 et F_2 pour étudier la convergence de cet algorithme :

Hypothèses ($\mathcal{A}_4$)

($\mathcal{H}_1$) Supposons que les hypothèses sur la multifonction C dans ($\mathcal{A}_3$) soient satisfaites.

($\mathcal{H}_2$) F_1 est $\alpha-$fortement monotone sur C.

($\mathcal{H}_3$) F_1 et F_2 à valeurs non vides compactes et sont lipschitziennes au sens de Hausdorff avec des constantes $\beta > 0$ et $\eta > 0$ respectivement.

($\mathcal{H}_4$) Les constantes $\alpha, \beta, \zeta, \eta$, et k vérifient l'inégalité suivante

$$\alpha\zeta > (1-k)\eta + \sqrt{(\beta^2 - \eta^2)[\zeta^2 - (1-k)^2]}.$$

Théorème 3.2 *Supposons que toutes les hypothèses ($\mathcal{A}_4$) sont satisfaites et que le paramètre ρ vérifie l'inégalité*

$$\frac{\alpha\zeta - (1-k)\eta}{\zeta(\beta^2 - \eta^2)} - \varepsilon < \rho < \min\left\{\frac{\alpha\zeta - (1-k)\eta}{\zeta(\beta^2 - \eta^2)} + \varepsilon, \frac{1-k}{\zeta\eta}, \frac{r}{\| y^n + w^n \| + 1}\right\},$$

où

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{[\alpha\zeta - (1-k)\eta]^2 - (\beta^2 - \eta^2)[\zeta^2 - (1-k)^2]}}{\zeta(\beta^2 - \eta^2)},$$

alors les suites $\{z^n\}_n, \{x^n\}_n$ et $\{y^n\}_n$ engendrées par l'algorithme 4 sont fortement convergentes vers des éléments z^*, x^* et y^* dans H respectivement, avec x^* une solution de (PQVN) associée à $F = F_1 + F_2$.

Preuve.

En adaptant la preuve du Théorème 3.2 d'une façon similaire à celle de la preuve du théorème 2.2 avec des petites modifications. □

Conclusion

Dans ce travail nous proposons différents algorithmes pour résoudre une nouvelle classe de problèmes variationels non convexes.

Malgré l'absence de la convexité, on a constaté que les algorithmes de projections restent valables pour résoudre les inégalités variationnelles avec contrainte r-prox régulières.

Bibliographie

[1] A. Bensoussan and J. L. Lions, *Application des Inéquations Variationelles en Control et en Stochastiques*, Dunod, Paris. (1978).

[2] H. Brézis, *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam, (1973).

[3] M. Bounkhel and A. Jofre, *Subdifferential stability of the distance function and its applications to nonconvex economies and equilibrium*, Journal of non Linear and Convex Analysis, V 5-3, 331-347, 231-259.

[4] M. Bounkhel, L. Tadj and A. Hamdi, *Iterative schemes to solve nonconvex variational problems*, JIPAM, V 4-1, (2003).

[5] M. Bounkhel and L. Thibault, *Further characterizations of regular sets in Hilbert spaces and their applications to nonconvex sweeping process*, Preprint, Centro de Modelamiento Matematico (CMM), Universidad de Chile (2000). Submitted to J. Nonlinear Convex Anal.

[6] M. Bounkhel and L. Thibault, *On various notions of regularity of sets in non smooth analysis*, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. 48 (2002) 223-246.

[7] M. Bounkhel and L. Thibault, *Nonconvex sweeping process and prox-regularity in Hilbert space*, J. Nonlinear Convex Anal, 6(2) (2005), 359-374.

[8] A. Canino , *p-Convex sets and geodesics*, J. Differential Equations 75 (1988), 118-157.

[9] F. H. Clarke, R. J. Stern and P. R. Wolenski , *Proximal smoothness and the lower C^2 property*, J. Convex Analysis, 2 (1995), 117-144.

[10] F. H. Clarke, Y.S. Ledyaev, R.J. Stern and P.R. Wolenski , *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Springer Verlag, New York, Inc (1998).

[11] H. Federer, *Curvature measures*, Trans. Amer. Math. Soc. 93 (1959), 418-491.

[12] R. Glowinski and P. Le Tallec, *Augmented Lagrangian and Operator-splitting Methods in Nonlinear Mechanics*, SIAM Stud. Appl. Math, (1989).

[13] P. T. Harker and J. S. Pand, *Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems*, A survey of theory, algorithm and applications, Math. Program., 48 (1990), 161-220.

[14] M. A. Noor, *Set-valued variational inequalities*, Optimization, 33 (1995), 133-142.

[15] R.A. Poliquin, R.T. Rockafellar and L. Thibault , *Local differentiability of distance functions*, M Trans. Amer. Math. Soc.Vol.352, (2000), N.11, 5231-5249.

[16] A. Shapiro, *Existence and differentiability of metric projection in Hilbert spaces*, SIAM J. Optim. 4 (1994), 130-141.

[17] J. Venel, *Modélisation mathématique et numérique de mouvement de foule*, Thèse de Doctorat en Sciences, univercité Paris XI, (2008).

[18] J. P. Vial, *Strong and weak convexity of sets and functions*, Math. Oper. Res. 8 (1983), 231-259.