RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : EDP et applications.

Thème

Estimation a posteriori pour l'équation de la chaleur

Présenté par :

Imene Ziar

Khouloud Alioua

Devant le jury composé de

Y. Daikh	Maître de conférences A	Université de Jijel	Président
S. Maarouf	Maître de conférences B	Université de Jijel	Encadreur
H. Zerroug	Maître-assistante A	Université de Jijel	Examinateur

Promotion **2018/2019**

Remerciements

$\mathcal{N}$ous remercions tout d'abord ***ALLAH****, le tout puissant et maître de l'univers qui nous a donné la capacité nécessaire, la forte volonté et la patience afin d'accomplir ce travail, et qui nous a toujours guidé vers le bon chemin.*

$\mathcal{N}$ous tenons à exprimer notre gratitude à ***S.Maarouf*** *maître de conférences B à l'université de Jijel, qui a encadré ce mémoire et nous a guidé tout au Long de ce travail avec patience et beaucoup d'intérêt. Merci de nous avoir montré le bon exemple.*

$\mathcal{N}$ous remercions également les membres du jury :
Mesdames Y. Daikh *et* ***H. Zerroug****,*
pour nous avoir honoré par leur évaluation du travail en tant qu'examinateurs.

Enfin, nous n'oublions pas tous nos enseignants au département de mathématiques de l'université de Jijel, nos amis et nos collègues.

Dédicace

Avec un énorme plaisir, un coeur ouvres et une immense joie, je dédie ce mémoire

*A mes très chers parents ★ **Rachide** ★ et ★ **Latifa** ★*

Qui m'ont guidé durant les moments les plus pénibles de ce long chemin.

A mes frères et mes soeurs.

A mes amis de ma promotion.

Ainsi à toute la famille ★Alioua★ .

A tous mes enseignants.

♣ *Khouloud* ♣

Dédicace

Avec un énorme plaisir, un coeur ouvres et une immense joie, je dédie ce mémoire

*A ma très chers parents ★**Youcef** ★ et ★ **Zyneb** ★*

Qui m'ont guidé durant les moments les plus pénibles de ce long chemin

A mon frère ★ Tito ★ et mes soeurs.

A mes amis de ma promotion.

Ainsi à toute la famille★ Ziar ★.

A tous mes enseignants.

Imene

Table des matières

Introduction

L'adaptation de maillage est maintenant utilisée dans la plupart des discrétisations par éléments finis, puisqu'elle permet de retrouver la même précision à moindre coût grâce au choix d'une triangulation appropriée. la construction de cette triangulation repose le plus souvent sur des estimations a posteriori, plus exactement sur leur forme locale : les indicateurs d'erreur. Un premier calcul sur un maillage grossier permet en effet d'associer à chaque élément de la triangulation un "indicateur" que l'on peut calculer exactement à partir des données et de la première solution discrète. Le raffinement s'effectue alors localement en fonction de la taille de ces indicateurs. Différents types d'indicateurs ont été proposés et étudiés. On s'intéresse ici plus particulièrement aux indicateurs dits "par résidu" initiées par Babuška et Rheinboldt (voir [2], [3]), et détaillées par Verfürth. En particulier, ces indicateurs sont optimaux pour un grand nombre d'équations, au sens précisé dans [9].

Le but de ce mémoire est d'indiquer les principales idées pour étendre aux équations paraboliques la construction et l'analyse numérique d'indicateurs d'erreur spatiale par résidu. Pour cela, nous traitons le cas modèle de l'équation de la chaleur avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes, discrétisée par éléments finis en espace et schéma d'Euler implicite en temps. Ce travail est inspiré des deux articles [27] et [4].

Il y a deux types d'estimer l'erreur due à la discrétisation en temps et en espace, estimation a priori ou estimation a posteriori :

Estimation a priori : Cette estimation permet de connaître l'ordre de convergence de la méthode, mais ne donne qu'un indice global de l'erreur.

Estimation a posteriori : C'est une estimation calculée à l'aide de la solution numérique obtenue par la méthode, elle permet d'obtenir des informations globales sur l'erreur mais aussi locales (sur les éléments du maillage).

En estimation a posteriori, le but n'est pas de trouver une estimation de l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée mais de déterminer une estimation d'une mesure de l'erreur. Elle est à la base des éléments finis adaptatifs pour un grand nombre de problèmes. Jusqu'à présent, peu d'estimation d'erreur a posteriori ont été calculé pour des problèmes paraboliques dans plus d'un espace.

Ce mémoire est structuré de la façon suivante :
Dans le premier chapitre, nous rassemblons les notions et les résultats que nous utilisons fréquemment tout au long de ce manuscrit. Nous donnons des brèves définitions de quelques espaces fonctionnels, notamment, les espaces de Sobolev. Ensuite, on rappelle le Lemme de Lax-Milgram et le théorème de Cauchy-Lipschitz. Puis, nous donnons des brèves descriptions de la méthode des éléments finis. Dans la dernière section de ce chapitre, nous présentons les propriétés de l'analyse a posteriori résiduel, notamment, la fiabilité et l'efficacité. Puis, nous regroupons les outils de l'analyse, c'est à dire, les fonctions bulles et les inégalités inverses locales qu'on utilise pour montrer l'efficacité de l'analyse.

Au deuxième chapitre, nous commençons par la présentation de l'équation de la chaleur. Nous nous intéressons à l'écriture de la formulation variationnelle et nous montrons que le problème variationnel est bien posé. Dans la deuxième partie, nous proposons une semi-discrétisation en temps, par un schéma d'Euler implicite d'ordre un, c'est une méthode numérique pour résoudre par approximation des équations différentielles du premier ordre avec une condition initiale. Puis nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution du problème semi-discret obtenu et nous établissons des estimations de stabilité de la solution. On finit ce chapitre par étudier le problème discrétisé en espace par la méthode des éléments finis, nous prouvons que le problème discret est bien posé et que la solution discrète est stable.

Dans le dernier chapitre, nous soignons l'analyse d'erreur a priori et a posteriori de l'équation de la chaleur. D'abord, on commence par montrer des estimations d'erreur a priori entre la solution exacte et la solution semi-discrète puis entre la solution semi-discrète et la solution discrète. On en déduit par une relation triangulaire l'erreur entre la solution exacte et discrète qui est optimale en temps et en espace. La section II comporte l'analyse d'erreur a posteriori. Nous écrivons les équations du résidu pour l'erreur dues à la discrétisation en temps puis en espace. Nous décrivons les indicateurs d'erreur et nous prouvons leurs propriétés optimales.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on rappelle les notions de base utilisées tout au long du mémoire. En particulier les définitions et les propriétés fondamentales des espaces de Sobolev classiques et les outils de la méthode des éléments finis. Nous présentons aussi quelques concepts utilisés.

1.1 Espaces Fonctionnels

Les notations utilisées dans ce mémoire pour les espaces de Sobolev sont classiques. Les démonstrations des propriétés indiquées figurent en particulier dans les ouvrages de références suivants : Adams [1], Dautray et Lions [16], Grisvard [17] et Lions et Magenes [20].

Dans ce qui suit, d est un entier positif représentant la dimension de l'espace dans lequel on se place. Le symbole ∂ suivi d'un nom d'ouvert, désigne sa frontière. La définition suivante est nécessaire pour caractériser la géométrie des ouverts que l'on considère.

Définition 1.1.1. *En dimension $d \geq 2$, un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^d$ est dit lipschitzien ou à frontière lipschitzienne si pour tout point $\boldsymbol{x}$ de $\partial\Omega$, il existe un système de coordonnées orthogonales $(y_1, ..., y_d)$, un hypercube $U^{\boldsymbol{x}} = \prod_{i=1}^{d}]-a_i, a_i[$ et une application lipschitzienne $\Phi^{\boldsymbol{x}}$ de $\prod_{i=1}^{d-1}]-a_i, a_i[$ dans $]-\frac{a_d}{2}, \frac{a_d}{2}[$ tels que :*

$$\Omega \cap U^{\boldsymbol{x}} = \{(y_1, ..., y_d) \in U^{\boldsymbol{x}};\ y_d > \Phi^{\boldsymbol{x}}(y_1, ..., y_{d-1})\},$$
$$\partial\Omega \cap U^{\boldsymbol{x}} = \{(y_1, ..., y_d) \in U^{\boldsymbol{x}};\ y_d = \Phi^{\boldsymbol{x}}(y_1, ..., y_{d-1})\}.$$

Cette propriété signifie que la frontière coïncide localement avec le graphe d'une fonction lipschitzienne. Elle sera satisfaite par tous les ouverts considérés dans ce mémoire. Tout ouvert borné convexe de $\mathbb{R}^d$ est également à frontière lipschitzienne (voir Grisvard [17, Corollaire 1.2.2.3]).

Dans la suite, on note Ω un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^d$. On note $\boldsymbol{x}$ le point générique de Ω, et $(x_1, ..., x_d)$ ses coordonnées. Finalement, on utilise la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$, que l'on écrit soit $d\boldsymbol{x}$ soit $dx_1, ..., dx_d$.
On rappelle que $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω, et que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ désigne l'espaces des restrictions à $\overline{\Omega}$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans $\mathbb{R}^d$. Le dual $\mathcal{D}'(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω. On introduit également $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ l'espaces des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$. On note maintenant $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions v mesurables telles que

$$\int_\Omega v^2(\boldsymbol{x})\; d\boldsymbol{x} \; < +\infty.$$

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v) = \int_\Omega u(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x})\; d\boldsymbol{x}.$$

On note $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ la norme

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \Big(\int_\Omega v^2(\boldsymbol{x})\; d\boldsymbol{x} \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On sait que l'espace $L^2(\Omega)$ contient les deux espaces $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ comme sous-espaces denses, et que l'espace $L^2(\Omega)$ est contenu dans l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$. Le produit de dualité entre les espaces $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}'(\Omega)$ étant alors une extension du produit scalaire dans $L^2(\Omega)$. La théorie des distributions (voir Schwartz [23]) permet de définir, pour les fonctions de $L^2(\Omega)$, des dérivées d'ordre quelconque à valeurs dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Définition 1.1.2. *Pour tout entier $m \geq 0$, on définit l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ de la façon suivante :*

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega),\; \partial^\alpha v \in L^2(\Omega),\; \forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\; |\alpha| \leq m\},$$

muni de la norme

$$\|v\|_{H^m(\Omega)} = \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha v)^2(\boldsymbol{x})\; d\boldsymbol{x} \Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1}$$

Définition 1.1.3. *Soit m un entier positif. On note $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace $H^m(\Omega)$.*

L'espace $H_0^m(\Omega)$ est donc un sous-espace fermé de $H^m(\Omega)$. On rappelle maintenant un résultat de base, connu sous le nom d'inégalité de Poincaré-Friedrichs (voir Adams [1, Thm 6.28]).

Lemme 1.1.1. (***Inégalité de Poincaré-Friedrichs***) *Il existe une constante positive c ne dépendant que de la géométrie de Ω telle que toute fonction v de $H_0^1(\Omega)$ vérifie*

$$\|v\|_{0,\Omega} \leq c \left(\int_\Omega \sum_{j=1}^{d} (\frac{\partial v}{\partial x_j})^2(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2}$$

Cette inégalité permet de démontrer facilement le résultat suivant :

Corollaire 1.1.2. *La semi norme*

$$|v|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{j=1}^{d} (\frac{\partial v}{\partial x_j})^2(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.3}$$

est une norme sur l'espace $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme $\| \cdot \|_{H^1(\Omega)}$.

Notation 1.1.3. *Soit E un espace de Banach séparable de norme $\| \cdot \|_E$. On notera $L^2(\Omega, E)$ l'espace des fonctions définies de Ω dans E telles que la fonction : $v \mapsto \|v\|_E$ appartienne à $L^2(\Omega)$. Pour tout entier $m \leq 0$, on désigne par $H^m(\Omega, E)$ l'espace des fonctions de $L^2(\Omega, E)$ dont toutes les dérivées partielles d'ordre $\leq m$ sont dans $L^2(\Omega, E)$, on définit $H_0^m(\Omega, E)$ comme l'adhérence dans $H^m(\Omega, E)$ des fonctions indéfiniment différentiables de Ω dans E à support compact dans Ω, et $H^{-m}(\Omega, E)$ comme son dual. Les espaces $H^m(\Omega, E)$ sont munis de la norme*

$$\|v\|_{H^m(\Omega,E)} = \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} \|(\partial^\alpha v)(x)\|_E^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

et de la semi norme

$$|v|_{H^m(\Omega,E)} = \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha| = m} \|(\partial^\alpha v)(x)\|_E^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Corollaire 1.1.4. (***Formule de Green***) *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Pour toute fonction u de $H^2(\Omega)$ et toute fonction v de $H^1(\Omega)$, on a la formule de Green :*

$$-\int_\Omega \Delta u(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \nabla u(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla v(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x}) \, d\sigma. \tag{1.4}$$

Lemme 1.1.5. *Soit $v \in L^2(\Omega)$. Pour $1 \leq i \leq d$, on peut définir une forme linéaire continue $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ dans $H^{-1}(\Omega)$ par la formule*

$$< \frac{\partial v}{\partial x_i}, \phi >= -\int_\Omega v(\boldsymbol{x}) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x}, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.5}$$

1.2 Rappels sur le Lemme de Lax-Milgram

On écrit tout de suite l'énoncé de ce Lemme, dû à Lax-Milgram [19] qui est à la base de l'étude des équations aux dérivées partielles.

Lemme 1.2.1. *Soit V un espace de Hilbert réel de norme $\|\cdot\|_V$. On considère une forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ continue sur $V \times V$ i.e.*

$$\exists M > 0,\ \forall u, v \in V, \quad |a(u,v)| \leq M\ \|u\|_V \|v\|_V,$$

et on suppose qu'elle est elliptique sur V, c'est-à-dire qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall v \in V, \quad a(v,v) \geq \alpha\ \|v\|_V^2.$$

On considère ainsi, une forme linéaire continue $L(\cdot)$ sur V. Alors, le problème :

$$\begin{cases} Trouver\ u\ dans\ V\ tel\ que : \\ \forall v \in V, \quad a(u,v) = L(v), \end{cases}$$

admet une solution unique u dans V. De plus cette solution vérifie

$$\|u\|_V \leq \frac{\|L\|_{V'}}{\alpha}.$$

1.3 Rappels sur le théorème de Cauchy-Lipschitz

On réfère à [22, Thm 21.1], pour la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Théorème 1.3.1. *Supposons que $[t_1, t_2]$ est un intervalle compact d'intérieur non vide et que f est une application continue de $[t_1, t_2] \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui vérifie la propriété suivante, il existe une constante L telle que*

$$\forall t \in [t_1, t_2], \forall v, w \in \mathbb{R}^n, \quad |f(t,v) - f(t,w)| \leq L|v - w|.$$

Ici $|.|$ désigne une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$. Alors quel que soient t_0 dans $[t_1, t_2]$ et u_0 dans $\mathbb{R}^n$, il existe une unique fonction u continûment différentiable de $[t_1, t_2]$ dans $\mathbb{R}^n$ et qui vérifie

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = f(t, u(t)), \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

1.4 Méthode des éléments finis

Dans cette section, on présente les notions de base et les principaux outils de la méthode des éléments finis. On réfère à [7] pour plus de détail.

Définition 1.4.1. *Une triangulation de* Ω *est un ensemble fini* $\mathcal{T}_h$ *de sous-ensembles* K *de* $\overline{\Omega}$ *vérifiant les propriétés suivantes*

(i) On a

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K,$$

(ii) chaque élément K *de* $\mathcal{T}_h$ *est un polygone ou un polyèdre connexe fermé de* $\mathbb{R}^d$ *d'intérieur non vide à frontière lipschitzienne,*

(iii) l'intersection de deux éléments distincts de $\mathcal{T}_h$ *est soit vide soit un sommet, un côté ou une face entière de ces deux éléments.*

Dans la plupart des cas, les triangulations sont composées de triangles ou de quadrilatères convexes en dimension $d = 2$, de tétraèdres ou de parallélépipèdes rectangles en dimension $d = 3$.

Soit h_K le diamètre de K. Il est d'usage que l'indice h de $\mathcal{T}_h$ représente le maximum des h_K, $K \in \mathcal{T}_h$.

Définition 1.4.2. (***Triangulation conforme***) *On suppose que le bord* $\partial\Omega$ *est polygonal* ($si\ N = 2$) *ou polyédral* ($si\ N = 3$)*. On dit qu'une triangulation* $\mathcal{T}_h$ *sur* $\partial\Omega$ *est admissible ou conforme, si l'intersection entre deux éléments est soit vide, soit un sommet, soit un côté entier ou une face entière.*

Définition 1.4.3. *Une famille de triangulations* $(\mathcal{T}_h)_h$ *est dite régulière s'il existe une constante positive* c *telle que, pour tout* h
(i) en dimension $d = 1$*, pour tous éléments* K *et* K' *de* $\mathcal{T}_h$ *ayant une extrimité commune, le rapport* $\frac{h_K}{h_{K'}}$ *est inférieur à* c*,*
(ii) en dimension $d \geq 2$*, pour tout élément* K *de* $\mathcal{T}_h$*, le rapport* $\frac{h_K}{\rho_K}$ *est inférieur à* c*, où* ρ_K *désigne le diamètre de la plus grande sphère contenue dans* K*.*

Définition 1.4.4. *On appelle coordonnées barycentriques* λ_j*,* $1 \leq j \leq d+1$*, d'un point* $\boldsymbol{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq d}$ *de* $\mathbb{R}^d$ *par rapport aux* $d+1$ *sommets* $\boldsymbol{a}_j$ *non contenus dans un même* *hyperplan, la solution (unique) du système linéaire suivant*

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{d+1} a_{ij}\lambda_j = x_i, \quad 1 \leq i \leq d, \\ \sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j = 1, \end{cases}$$

où les a_{ij} sont les coordonnées du point $\boldsymbol{a}_j$.

Notation 1.4.1. *Pour tout entier $k \geq 0$, on définit $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^d)$ comme l'espace des polynômes sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de degré total $\leq k$ et $\mathcal{P}_k(K)$ défini par l'espace des restrictions à K des fonctions de l'ensemble $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^d)$.*

On introduit quelques notations supplémentaires.

Notation 1.4.2. *À une triangulation $\mathcal{T}_h$, on associe l'ensemble $\mathcal{E}_h$ des côtés $d = 2$ ou faces $d = 3$ des éléments de $\mathcal{T}_h$. On désigne par $\mathcal{E}_h^0$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}_h$ qui ne sont pas contenus dans $\partial\Omega$. Dans ce qui suit, h_e désigne le diamètre de n'importe quel élément e de $\mathcal{E}_h$.*

Notation 1.4.3. *Pour une triangulation $\mathcal{T}_h$ et tout élément K de $\mathcal{T}_h$, on note $\mathcal{E}_K$ l'ensemble des côtés $d = 2$ ou faces $d = 3$ de K et $\mathcal{E}_K^0$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}_K$ qui ne sont pas contenus dans $\partial\Omega$.*

On réfère à [7, Lemme 2.7, chap XI] pour la démonstration du lemme suivant.

Lemme 1.4.4. *Pour tout élément K de $\mathcal{T}_h$ et tout élément e de $\mathcal{E}_K$, il existe un opérateur $\mathcal{R}_{K,e}$ de l'espace $\mathcal{P}^0_{k+d-1}(e)$ de polynômes de $\mathcal{P}_{k+d-1}(e)$ s'annulant sur ∂e dans $\mathcal{P}_{k+d-1}(K)$ tel que, pour tout élément φ de $\mathcal{P}^0_{k+d-1}(e)$,*

(i)

$$\mathcal{R}_{K,e}\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \varphi(\boldsymbol{x}) & \text{dans } e, \\ 0 & \text{sur } \partial K \setminus e, \end{cases}$$

(ii) on ait l'estimation

$$|\mathcal{R}_{K,e}\varphi|_{H^1(K)} + h_K^{-1}\|\mathcal{R}_{K,e}\varphi\|_{L^2(K)} \leq c\, h_e^{-\frac{1}{2}}\|\varphi\|_{L^2(e)}. \tag{1.6}$$

1.5 Outils de l'analyse d'erreur a posteriori

Dans cette partie, on réfère à [7] pour les détails et les démonstrations des propriétés. Supposons que l'on ait à résoudre numériquement le problème suivant : trouver u dans un espace de Banach X tel que $A(u) = f$. Si h désigne le paramètre de discrétisation on va donc chercher une solution u_h de l'équation $A(u_h) = f$ dans un sous-espace de dimension finie X_h de X.

Les estimations d'erreur a priori fournissent des bornes sur la différence entre la solution exacte u de X et la solution approchée u_h dans la norme (ou semi-norme) $\| \cdot \|_X$ sous la forme,

$$\|u - u_h\|_X \leq c\, h^{m-1} \|u\|_{H^m(\Omega)}, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*. \tag{1.7}$$

Ces estimations sont utilisées afin de justifier théoriquement la convergence de la méthode numérique employée. De plus, la constante générique c qui apparaît dans l'estimation (1.7) est soit inconnue, soit difficile à estimer. La difficulté la plus importante est que la norme $\| \cdot \|_{H^m}$ n'est pas calculable, simplement parce que la solution exacte u est inconnue explicitement.

Pour pouvoir développer une méthode adaptative, on va avoir recours à des estimations d'erreur a posteriori.

Définition 1.5.1. *On appelle estimation d'erreur a posteriori, une estimation de la forme,*

$$\|u - u_h\|_X \leq c\, \eta(h, u_h, f), \tag{1.8}$$

où c est une constante réelle positive indépendante du paramètre h caractérisant la précision du maillage. La quantité $\eta(h, u_h, f)$ est appelée estimateur d'erreur a posteriori, et ne dépend que de la solution approchée u_h du maillage $\mathcal{T}_h$ et de la donnée f (le second membre de l'équation).

On attribue à un estimateur d'erreur a posteriori, certaines propriétés qui attestent de sa qualité. Ainsi, il doit satisfaire les trois propriétés suivantes :

• **Propriété de fiabilité.** Une première propriété que doit vérifier un estimateur d'erreur a posteriori est de satisfaire l'estimation

$$\|u - u_h\|_X \leq c_1\, \eta(h, u_h, f) + H_1, \tag{1.9}$$

où H_1 est une quantité ne dépendant que du second membre et des conditions de bord du problème.

L'estimation (1.9) s'interprète comme une propriété de fiabilité puisqu'elle garantit que l'erreur $\|u - u_h\|_X$ est effectivement contrôlée par l'estimateur d'erreur a posteriori.

• **Adaptation de maillage.** Un estimateur d'erreur a posteriori doit donner des informations sur la distribution locale de l'erreur. Il doit pouvoir être localisé, par exemple sur chaque élément du maillage sous la forme,

$$\eta(h, u_h, f) = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2(h, u_h, f) \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.10}$$

Alors on dit que les quantités $\{\eta_K(h, u_h, f)\}_{K \in \mathcal{T}_h}$ sont des indicateurs d'erreur locaux.

• **Propriété d'efficacité.** Pour qu'une procédure de raffinement adaptatif de maillage soit efficace, il faut que les indicateurs d'erreur locaux obéissent à l'estimation,

$$\eta_K(h, u_h, f) \leq c_2 \|u - u_h\|_{\Delta_K} + H_{2,K}(h, f), \tag{1.11}$$

où Δ_K désigne l'espace des restrictions des fonctions de X à un voisinage fixé de K et $H_{2,K}(h, f)$ ne fait intervenir que h et les valeurs du second membre f sur ce même voisinage.

Définition 1.5.2. *Une estimation de l'erreur a posteriori par une quantité $\eta(h, u_h, f)$ dépendant du paramètre de discrétisation h, de la solution discrète u_h et des données f est dite optimale si elle satisfait la propriété de fiabilité* (1.9) *et la propriété d'efficacité* (1.11).

Pour minorer localement l'erreur par les indicateurs d'erreur locaux, nous aurons besoin des fonctions bulles satisfaisant certaines propriétés.

Définition 1.5.3. *Soit λ_j, $1 \leq j \leq d+1$, les coordonnées barycentriques associées à K.*
1. La fonction bulle ψ_K est un élément de $\mathcal{P}_{d+1}(K)$, définie sur une maille K par :

$$\psi_K = (d+1)^{d+1} \prod_{j=1}^{d+1} \lambda_j.$$

2. Pour tout élément e de $\mathcal{E}_h$, on désigne par ψ_e la fonction bulle sur e égale au produit des d coordonnées barycentriques associées aux sommets de e

$$\psi_e = d^d \prod_{j=1}^{d} \lambda_j.$$

Lemme 1.5.1. *Les fonctions bulles vérifient les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} \psi_K &= 0 \quad \text{sur } \partial K, \\ \psi_e &= 0 \quad \text{sur } \partial W_e = \partial(K \cup K'), \\ \|\psi_K\|_{L^\infty(K)} &= \|\psi_e\|_{L^\infty(W_e)} = 1, \\ 0 \leq \psi_K &\leq 1, \\ 0 \leq \psi_e &\leq 1. \end{aligned}$$

Nous donnons à présent certaines inégalités inverses, lesquelles sont systématiquement utilisées pour établir la minoration locale de l'erreur, c'est-à-dire une estimation locale du type (1.11). L'idée principale consiste à majorer successivement chacun des termes intervenant dans la définition de l'indicateur local $\eta_K(h, u_h, f)$.

Proposition 1.5.2. *Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une famille régulière de triangulations sur $\overline{\Omega}$ et conforme dans le sens de la Définition 1.4.2. Alors pour tous $v_K \in \mathcal{P}_k(K)$ et $v_e \in \mathcal{P}_k(e)$, avec $e \in \mathcal{E}_K$, on a les inégalités suivantes :*

$$c \, \|v_K\|_{L^2(K)} \leq \|\psi_K^{\frac{1}{2}} v_K\|_{L^2(K)} \leq c' \, \|v_K\|_{L^2(K)}, \tag{1.12}$$

$$c \, \|v_e\|_{L^2(e)} \leq \|\psi_e^{\frac{1}{2}} v_e\|_{L^2(e)} \leq c' \, \|v_e\|_{L^2(e)}. \tag{1.13}$$

Proposition 1.5.3. *Pour tout entier m positif ou nul, il existe une constante c ne dépendant que de k telle que l'on ait pour tout d-simplexe K*

$$\forall v \in \mathcal{P}_k(K), \quad |v|_{H^m(K)} \leq c \, \rho_K^{-m-\frac{d}{2}} \, h_K^{\frac{d}{2}} \|v\|_{L^2(K)}. \tag{1.14}$$

Corollaire 1.5.4. *On suppose la triangulation $\mathcal{T}_h$ régulière dans le sens de la Définition 1.4.3. Pour tout entier m positif ou nul, il existe une constante c ne dépendant que de k telle que l'on ait pour tout d-simplexe K*

$$\forall v \in \mathcal{P}_k(K), \quad |v|_{H^m(K)} \leq c \, h_K^{-m} \|v\|_{L^2(K)}. \tag{1.15}$$

On désire finalement construire un opérateur de régularisation, appelé aussi opérateur de projection locale tel qu'introduit par P. Clément [14]. Dans ce but, on note $\boldsymbol{a}_i$, $1 \leq i \leq N_h^0$ les nœuds qui appartiennent à Ω.

Définition 1.5.4. *On définit l'opérateur $\tilde{\Pi}_h^0$ par*

$$\tilde{\Pi}_h^0 v = \sum_{i=0}^{N_h^0} (\pi_i v)(\boldsymbol{a}_i) \varphi_i,$$

à valeurs dans X_h^0, où π_i est un opérateur de régularisation dans un voisinage de $\boldsymbol{a}_i$ construit par projection locale (opérateur de projection orthogonale de $L^2(K_i)$ sur $\mathcal{P}_k(K_i)$).

Notation 1.5.5. *Pour tout triangle K de $\mathcal{T}_h$,*

- *on note Δ_K l'union des éléments de $\mathcal{T}_h$ partageant au moins un sommet avec K.*
- *l'ensemble Δ_e désigne l'union des éléments de $\mathcal{T}_h$ dont l'intersection avec e est non vide.*

Théorème 1.5.6. *Pour tout entier m, $1 \leq m \leq k+1$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m telle que, pour tout élément K de $\mathcal{T}_h$ et pour toute fonction v de $H^m(\Delta_K)$ s'annulant sur $\Delta_K \cap \partial\Omega$, on ait*

$$\|v - \tilde{\Pi}_h^0 v\|_{L^2(K)} \leq c\, h_K^m |v|_{H^m(\Delta_K)},$$

et

$$|v - \tilde{\Pi}_h^0 v|_{H^1(K)} \leq c\, h_K^{m-1} |v|_{H^m(\Delta_K)}.$$

Corollaire 1.5.7. *Pour tout entier m, $1 \leq m \leq k+1$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m telle que, pour tout élément K de $\mathcal{T}_h$ et tout côté $(d=2)$ ou face $(d=3)$ e de K non contenu dans $\partial\Omega$, et pour toute fonction v de $H^m(\Delta_e)$ s'annulant $\Delta_e \cap \partial\Omega$, on ait*

$$\|v - \tilde{\Pi}_h^0 v\|_{L^2(e)} \leq c\, h_e^{m-\frac{1}{2}} |v|_{H^m(\Delta_e)}.$$

Chapitre 2

Équation de la chaleur et sa discrétisation

2.1 Problème continue

Soit Ω un ouvert lipschitzien borné de $\mathbb{R}^d$, d $= 2$ ou 3, et T un réel positif fixé. On considère l'équation de la chaleur muni à la condition aux limites de Dirichlet

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega\times]0,T[, \\ u(\cdot,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[, \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

On présente les propriétés de stabilité de ce problème, ce qui permet de déterminer les normes dans lesquelles on va travailler. Puis on étudie une semi-discrétisation en temps par un schéma d'Euler implicite et la discrétisation totale obtenue par l'utilisation d'éléments finis en espace.

2.1.1 Formulation variationnelle

On considère f dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et u_0 une donnée initiale de $H_0^1(\Omega)$. Multiplions la première équation du problème (2.1) par une fonction test $v \in H_0^1(\Omega)$ qui ne dépend pas du temps t et intégrons sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega \partial_t u(\boldsymbol{x},t)v(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \Delta u(\boldsymbol{x},t)v(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f(\boldsymbol{x},t)v(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}.$$

En appliquant la formule de Green à la deuxième intégrale du membre de gauche, on trouve

$$\int_\Omega \partial_t u(\boldsymbol{x},t)v(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \nabla u(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla v(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} \partial_{\boldsymbol{n}} u(\boldsymbol{x},t)v(\boldsymbol{x})\,d\sigma = \int_\Omega f(\boldsymbol{x},t)v(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}.$$

D'où

$$\int_\Omega \partial_t u(\boldsymbol{x},t)v(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \nabla u(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla v(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f(\boldsymbol{x},t)v(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}. \tag{2.2}$$

On obtient ainsi la formulation variationnelle suivante :

Trouver u fonction de $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap\mathcal{C}^0(0,T;L^2(\Omega))$ telle que

$$\begin{cases} (\partial_t u, v) + a(u,v) = (f,v)\ ,\forall v\in H_0^1(\Omega)\ ,0\le t\le T, \\ u(\cdot,0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

avec

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla v(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \quad \text{et} \quad L(v) = \int_\Omega f(\boldsymbol{x},t)v(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}.$$

Proposition 2.1.1. *Le problème variationnel* (2.3) *et le problème aux limites* (2.1) *sont équivalents au sens où*

(*i*) *toute solution u dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap\mathcal{C}^0(0,T;L^2(\Omega))$ de* (2.1) *est solution de* (2.3).

(*ii*) *toute solution u de* (2.3) *est solution de* (2.1) *au sens des distributions.*

Preuve. La propriété (i) est déjà démontré au début de la section. Pour prouver (ii), on prend la fonction test v dans $D(\Omega)\subset H_0^1(\Omega)$, on trouve

$$<\partial_t u, v> + \sum_{i=1}^d <\partial_{\boldsymbol{x}_i} u, \partial_{\boldsymbol{x}_i} v> = <f,v>, \quad \forall v\in D(\Omega), \quad t\in]0,T[,$$

tel que $<\cdot,\cdot>$ est le crochet de dualité entre $D'(\Omega)$ et $D(\Omega)$. En appliquant la formule (1.5), on obtient

$$<\partial_t u, v> - \sum_{i=1}^d <\partial^2_{\boldsymbol{x}_i} u, v> = <f,v>, \quad \forall\ v\in D(\Omega),\ t\in]0,T[,$$

ceci implique que

$$<\partial_t u - \Delta u - f, v> = 0, \quad \forall v\in D(\Omega),\ t\in]0,T[,$$

alors

$$\partial_t u - \Delta u = f \textit{ dans } D'(\Omega),\ t\in]0,T[,$$

D'autre part, $u(\cdot,t)\in H_0^1(\Omega)$ donc $u(\cdot,t)=0$ sur $\partial\Omega$. ∎

2.1.2 Résultat d'existence

Nous montrons dans la proposition suivante une estimation a priori pour la solution du problème (2.3).

Théorème 2.1.2. *soient f appartenant à $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et u_0 à $H_0^1(\Omega)$ alors l'estimation a priori suivante pour la solution du problème* (2.3) *est satisfaite pour tout $t\in]0,T[$*

$$|u(\cdot,t)|^2_{H^1(\Omega)}+\int_0^t \|(\partial_s u)(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds\le |u_0|^2_{H^1(\Omega)}+\int_0^t \|f(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds. \tag{2.4}$$

Preuve. On pose $v(\cdot)=\partial_s u(\cdot,s)$ dans (2.2), il vient que

$$\int_\Omega \Big(\partial_s u(\boldsymbol{x},s)\Big)^2\,d\boldsymbol{x}+\int_\Omega \nabla u(\boldsymbol{x},s)\cdot\partial_s(\nabla u)(\boldsymbol{x},s)\,d\boldsymbol{x}=\int_\Omega f(\boldsymbol{x},s)\partial_s u(\boldsymbol{x},s)\,d\boldsymbol{x}. \tag{2.5}$$

On a

$$\int_\Omega \nabla u(\boldsymbol{x},s)\partial_s(\nabla u)(\boldsymbol{x},s)\,d\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}\int_\Omega \partial_s(\nabla u)^2(\boldsymbol{x},s)\,d\boldsymbol{x},$$

en remplaçant cette formule dans (2.5), on trouve

$$\|\partial_s u(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\int_\Omega \partial_s(\nabla u(\boldsymbol{x},s))^2\,d\boldsymbol{x}=\int_\Omega f(\boldsymbol{x},s)\partial_s u(\boldsymbol{x},s)\,d\boldsymbol{x}.$$

En intégrant sur $]0,t[$, pour tout $0\le t\le T$, il vient que

$$\int_0^t \|\partial_s u(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega \partial_s(\nabla u(\boldsymbol{x},s))^2\,d\boldsymbol{x}\,ds=\int_0^t\int_\Omega f(\boldsymbol{x},s)\partial_s u(\boldsymbol{x},s)\,d\boldsymbol{x}\,ds,$$

alors

$$\int_0^t \|\partial_s u(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds+\frac{1}{2}|u(\cdot,t)|^2_{H^1(\Omega)}-\frac{1}{2}|u_0|^2_{H^1(\Omega)}=\int_0^t\int_\Omega f(\boldsymbol{x},s)\partial_s u(\boldsymbol{x},s)\,d\boldsymbol{x}\,ds.$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\int_0^t \|\partial_s u(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds+\frac{1}{2}|u(\cdot,t)|^2_{H^1(\Omega)}\le\int_0^t \|f(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_s u(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)}\,ds+\frac{1}{2}|u_0|^2_{H^1(\Omega)}.$$

En utilisant le fait que $ab\le\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2$,

$$\begin{aligned}&\int_0^t \|\partial_s u(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds+\frac{1}{2}|u(\cdot,t)|^2_{H^1(\Omega)}\\&\qquad\le\frac{1}{2}\int_0^t \|f(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds+\frac{1}{2}\int_0^t \|\partial_s u(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds+\frac{1}{2}|u_0|^2_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

D'où, l'estimation désirée. ■

Théorème 2.1.3. *Soit f une fonction de $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et pour toute donnée initiale u_0 dans $H_0^1(\Omega)$, alors le problème* (2.2) *admet une solution unique u dans l'espace*

$$L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap\mathcal{C}^0(0,T;L^2(\Omega)).$$

Preuve. Pour prouver l'existence de u solution de (2.2), on applique le théorème de Cauchy-Lipschitz. Soit $(\mathbb{H}_n)_n$ une suite de sous-espace de dimension finie de $H_0^1(\Omega)$ telle que $(\mathbb{H}_n)_n$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$. On en déduit le problème suivant, pour tout $n > m$

$$\begin{aligned}
&\text{Trouver } u_n \in \mathcal{C}^0(0,T;\mathbb{H}_n) \text{ tel que}\\
&u_n(\cdot,0) = u_0,\\
&\forall v_m \in \mathbb{H}_m, \int_\Omega \partial_t u_n(\boldsymbol{x},t) v_m(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \nabla u_n(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla v_m(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f(\boldsymbol{x},t) v_m(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

D'une façon similaire, on a

$$\forall v_m \in \mathbb{H}_m, \int_\Omega \partial_t u_n v_m(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f(\boldsymbol{x},t) v_m(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \nabla u_n(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla v_m(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}.$$

Soit G une application définie par

$$< G(t,u_n), v_m >= (f, v_m) - (\nabla u_n, \nabla v_m).$$

Cette application est continue et lipschitzienne par rapport à u_n. En effet, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
< G(t,u_n) - G(t,w_n), v_m > &= (\nabla w_n - \nabla u_n, \nabla v_m)\\
&\leq |v_m|_{H^1(\Omega)} |u_n - w_n|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\underset{v_m\in\mathbb{H}_m}{sup} \frac{< G(t,u_n) - G(t,w_m), v_m >}{|v_m|_{H^1(\Omega)}} \leq |u_n - w_n|_{H^1(\Omega)}.$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (voir le Théorème 1.3.1), on déduit que (2.2) admet une unique solution u_n dans $L^2(0,T;\mathbb{H}_n)$, vérifiant (2.4). Comme $(u_n)_n$ est bornée, il existe une sous-suite que l'on note encore $(u_n)_n$ pour simplifier, qui converge faiblement vers u dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, i.e.

$$u_n \rightharpoonup u \;\; dans \;\; H_0^1(\Omega),$$

Passant à la limite quand n tend vers ∞ dans (2.6), on obtient

$$\forall v_m \in \mathbb{H}_m, \int_\Omega \partial_t u(\boldsymbol{x},t) v_m(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \nabla u(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla v_m(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f(\boldsymbol{x},t) v_m(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}. \tag{2.7}$$

Puis par densité de $\mathbb{H}_m$ dans $H_0^1(\Omega)$, l'équation (2.7) est satisfaite pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$. De plus, si u^1 et u^2 sont deux solutions de (2.3) et soit $u = u^1 - u^2$, u est solution du problème (2.3) tel que u_0 et f sont égaux à zéros, on déduit alors de (2.4) que u est nul, ceci prouve l'unicité de la solution. ■

2.2 Problème semi-discret en temps

On s'intéresse ici à la discrétisation du problème de la chaleur par un schéma d'Euler implicite en temps. Pour un entier n positif, nous introduisons une partition de l'intervalle $[0,T]$ en sous intervalles $[t_{n-1}, t_n]$, $1 \leq n \leq N$, avec $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ...t_N = T$. On désigne par τ_n le pas du temps $t_n - t_{n-1}$. On pose aussi

$$|\tau| = \max_{1 \leq n \leq N} \tau_n \quad \text{et} \quad \sigma_\tau = \max_{2 \leq n \leq N} \frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}.$$

On cherche une approximation u^n de la solution exacte u au point t_n, en discrétisant la dérivée partielle en temps par un schéma d'Euler implicite ce qui donne

$$\partial_t u(x, t_n) \simeq \frac{u(x, t_n) - u(x, t_{n-1})}{\tau_n} \simeq \frac{u^n(x) - u^{n-1}(x)}{\tau_n}$$

On suppose que f dans $\mathcal{C}^0(0, T; L^2(\Omega))$, et u_0 est dans $H_0^1(\Omega)$. Le problème semi-discret s'écrit :
Trouver $(u^n)_{0 \leq n \leq N} \in H_0^1(\Omega)^{N+1}$, tel que pour tout $1 \leq n \leq N$

$$\begin{cases} \dfrac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n} - \Delta u^n = f(., t_n) & \text{dans } \Omega, \\ u^n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u^0 = u_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2.8}$$

qui est équivalent au problème variationnel suivant
Trouver $(u^n)_{0 \leq n \leq N} \in H_0^1(\Omega)^{N+1}$ tel que

$$\begin{aligned} & u^0 = u_0 \quad \text{dans } \Omega \\ & \forall v \in H_0^1(\Omega), \ \left(\frac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n}, v \right) + (\nabla u^n, \nabla v) = (f^n, v). \end{aligned} \tag{2.9}$$

2.2.1 Résultat d'existence pour la solution semi-discrète

Dans cette section, nous vérifions que le problème (2.9) est bien posé.

Théorème 2.2.1. *Le problème* (2.9) *admet une solution unique* $(u^n)_{0 \leq n \leq N}$ *dans l'espace* $H_0^1(\Omega)^{N+1}$.

Preuve. Nous utilisons le Lemme de Lax-Milgram dont nous vérifions les hypothèses avec les notations pour $1 \leq n \leq N$

$$A(u^n, v) = (u^n, v) + \tau_n (\nabla u^n, \nabla v) \tag{2.10}$$

et

$$F(v) = \tau_n (f^n, v) + (u^{n-1}, v) \tag{2.11}$$

1. La bilinéarité de $A(\cdot,\cdot)$ provient de la linéarité des dérivées et intégrales.
2. La continuité de $A(\cdot,\cdot)$ est évidente. En effet, soient $u^n \in H_0^1(\Omega)$, $v \in H_0^1(\Omega)$

$$|A(u^n, v)| \leq |(u^n, v)| + \tau_n |(\nabla u^n, \nabla v)|.$$

   En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Poincaré-Friedrichs (1.2), on obtient

$$|A(u^n, v)| \leq c|u^n|_{H^1(\Omega)} |v|_{H^1(\Omega)} + \tau_n |u^n|_{H^1(\Omega)} |v|_{H^1(\Omega)},$$

   alors

$$|A(u^n, v)| \leq (c + \tau_n) |u^n|_{H^1(\Omega)} |v|_{H^1(\Omega)}.$$

3. La forme bilinéaire $A(\cdot,\cdot)$ est coercive, en effet, pour tout u^n dans $H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} A(u^n, u^n) &= (u^n, u^n) + \tau_n (\nabla u^n, \nabla u^n) \\ &= \|u^n\|^2_{L^2(\Omega)} + \tau_n |u^n|^2_{H^1(\Omega)} \\ &\geq \tau_n |u^n|^2_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

4. F est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$, en effet

$$|F(v)| \leq \tau_n |(f^n, v)| + |(u^{n-1}, v)|,$$

   l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Poincaré-Friedrichs entraînent

$$|F(v)| \leq c\Big(\tau_n \|f^n\|_{L^2(\Omega)} + \|u^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}\Big)|v|_{H^1(\Omega)}.$$

Comme $H_0^1(\Omega)$ est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$ qui est de Hilbert ($H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$), donc $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, on déduit du Lemme de Lax-Milgram que le problème (2.9) admet une solution unique $(u^n)_{0\leq n\leq N} \in H_0^1(\Omega)^{N+1}$. ∎

2.2.2 Propriètè de stabilité

Proposition 2.2.2. *On suppose que f appartient à $\mathcal{C}^0(0, T; L^2(\Omega))$ et u_0 est dans $H_0^1(\Omega)$, la suite $(u^n)_{0\leq n\leq N}$ vérifie*

$$|u^n|^2_{H^1(\Omega)} + \sum_{m=1}^{n} \tau_m \left\| \frac{u^m - u^{m-1}}{\tau_m} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq |u_0|^2_{H^1(\Omega)} + \sum_{m=1}^{n} \tau_m ||f^m||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.12}$$

Preuve. On choisit v égal à $\dfrac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n}$ dans la deuxième équation de (2.9), on trouve

$$\frac{1}{\tau_n}\left(u^n, \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n}\right) + \left(\nabla u^n, \nabla \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n}\right) = \left(f^n, \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n}\right) + \frac{1}{\tau_n}\left(u^{n-1}, \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n}\right).$$

Ceci est équivalent à

$$\left\| \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\tau_n}\left(\nabla u^n, \nabla u^n - \nabla u^{n-1}\right) = \left(f^n, \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n}\right).$$

On utilise l'identité $(a, a-b) = \frac{1}{2}(\|a\|^2 + \|a-b\|^2 - \|b\|^2)$, on obtient

$$\left\| \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\,\tau_n}\Big(|u^n|^2_{L^2(\Omega)} + |u^n - u^{n-1}|^2_{L^2(\Omega)} - |u^{n-1}|^2_{L^2(\Omega)} \Big) = \left(f^n, \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n}\right).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\left\| \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\,\tau_n}\Big(|u^n|^2_{H^1(\Omega)} + |u^n - u^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)} - |u^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)} \Big) \leq \|f^n\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n} \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

On utilise la formule $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

$$\left\| \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\,\tau_n}\Big(|u^n|^2_{H^1(\Omega)} + |u^n - u^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)} - |u^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)} \Big) \leq \frac{1}{2}\|f^n\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\left\| \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n} \right\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Ceci est équivalent à

$$\tau_n \left\| \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + |u^n|^2_{H^1(\Omega)} - |u^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)} + |u^n - u^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)} \leq \tau_n \|f^n\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

En sommant sur n, on trouve

$$\sum_{m=1}^{n} \tau_m \left\| \frac{u^m - u^{m-1}}{\tau_m} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{m=1}^{n} (|u^m|^2_{H^1(\Omega)} - |u^{m-1}|^2_{H^1(\Omega)}) + \sum_{m=1}^{n} |u^m - u^{m-1}|^2_{H^1(\Omega)} \leq \sum_{m=1}^{n} \tau_m \|f^m\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Puisque $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} |u^m - u^{m-1}|^2_{H^1(\Omega)} > 0$, on obtient

$$\sum_{m=1}^{n} \tau_m \left\| \frac{u^m - u^{m-1}}{\tau_m} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + |u^n|^2_{H^1(\Omega)} \leq \sum_{m=1}^{n} \tau_m \|f^m\|^2_{L^2(\Omega)} + |u_0|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Ceci donne l'estimation désirée. ■

2.3 Problème discret

On suppose maintenant que le domaine Ω est un polygone ou un polyèdre. Soit $(\mathcal{T}_h^n)_h$ une famille régulière de triangulations pour tout $1 \leq n \leq N$ (par des triangles ou des tétraèdres), on note h_K le diamètre de chaque élément de K et h_n le plus grand diamètre des éléments K de $\mathcal{T}_h^n$. Pour un entier $k \geq 1$ et un élément K de $\mathcal{T}_h^n$, on définit l'espace $\mathcal{P}_k(K)$ des polynômes de degré total $\leq k$ sur K. Puis on pose

$$X_h^n = \{v_h \in H_0^1(\Omega); \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^n, v_{h|K} \in \mathcal{P}_k(K)\} \tag{2.13}$$

On note que π_h un opérateur de projection sur X_h^n. Le problème discret consiste à trouver une suite $(u_h^n)_{0 \leq n \leq N}$ de X_h^n, avec u_h^0 égal à $\pi_h u_0$, telle que pour $1 \leq n \leq N$,

$$\forall v_h \in X_h^n, \quad (u_h^n, v_h) + \tau_n\, a(u_h^n, v_h) = (u_h^{n-1}, v_h) + \tau_n\,(f^n, v_h). \tag{2.14}$$

Proposition 2.3.1. *Pour toute fonction f dans $\mathcal{C}^0(0,T;L^2(\Omega))$ et toute donnée u_0 dans $H_0^1(\Omega)$, le problème* (2.14) *admet une solution unique.*

Preuve. Vu que X_h^n est un sous espace de dimension finie de $H_0^1(\Omega)$, il est fermé muni du produit scalaire de $H_0^1(\Omega)$, X_h^n est un espace de Hilbert. La restriction de la forme bilinéaire $A(\cdot,\cdot)$ (définie dans (2.10)) à $X_h^n \times X_h^n$ est continue et coercive, et la restriction de $F(\cdot)$ (définie dans (2.11)) à X_h^n est linéaire et continue. D'après le Lemme de Lax-Milgram on a l'existence et l'unicité de u_h^n. ■

Proposition 2.3.2. *On suppose que f appartient à $\mathcal{C}^0(0,T;L^2(\Omega))$ et $\pi_h u_0 \in X_h^n$, telle que $u_h^0 = \pi_h u_0$, pour $1 \leq n \leq N$*

$$|u_h^n|^2_{H^1(\Omega)} + \sum_{m=1}^n \tau_m \left\| \frac{u_h^m - u_h^{m-1}}{\tau_m} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq |\pi_h u_0|^2_{H^1(\Omega)} + \sum_{m=1}^n \tau_m \|f^m\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.15}$$

Preuve. On choisit v_h égal à $\dfrac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}$ dans (2.14), on trouve

$$\left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}, \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}\right) + \left(\nabla u_h^n, \nabla \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}\right) = \left(f^n, \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}\right).$$

En utilisant l'identité $(a, a-b) = \frac{1}{2}(\|a\|^2 + \|a-b\|^2 - \|b\|^2)$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la formule $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ nous donnent

$$\tau_n \left\| \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + |u_h^n|^2_{H^1(\Omega)} + |u_h^n - u_h^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)} - |u_h^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)} \leq \tau_n \|f^n\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

En sommant sur n, on obtient

$$\sum_{m=1}^{n} \tau_m \left\| \frac{u_h^m - u_h^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + |u_h^n|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{m=1}^{n} |u_h^m - u_h^{m-1}|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \sum_{m=1}^{n} \tau_m \|f^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + |u_h^0|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Puisque $\sum_{m=1}^{n} |u_h^m - u_h^{m-1}|_{H^1(\Omega)}^2 > 0$, on trouve

$$|u_h^n|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{m=1}^{n} \tau_m \left\| \frac{u_h^m - u_h^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{m=1}^{n} \tau_m \|f^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + |\pi_h u_0|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Ceci achève la démonstration. ■

Chapitre 3

Estimations d'erreur a priori et a posteriori

Dans ce chapitre, on s'intéresse à étudier l'erreur entre la solution exacte du problème variationnel (2.2) et la solution approchée du problème discret (2.14). L'idée est d'écrire

$$u(\cdot, t_n) - u_h^n = (u(\cdot, t_n) - u^n) + (u^n - u_h^n)$$

et majorer chaque terme du membre de droite.

3.1 Estimation d'erreur a priori

On s'intéresse à étudier la convergence de la solution discrète vers la solution approchée.

3.1.1 Estimation d'erreur a priori en temps

Dans cette partie, on veut estimer l'erreur due à la discrétisation en temps. Soit $u(\cdot, t_n)$ solution de (2.2) à l'instant t_n et soit u^n solution de (2.9), on définit $e^n = u(\cdot, t_n) - u^n$. En soustrayant l'équation (2.9) de l'équation (2.2) à l'instant t_n on voit que,

$$\left(\partial_t u(\cdot, t_n) - \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n}, v\right) + (\nabla u(\cdot, t_n) - \nabla u^n, \nabla v) = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

on ajoute et retranche le terme $\dfrac{u(\cdot,t_n)-u(\cdot,t_{n-1})}{\tau_n}$ à l'équation précédente, on trouve

$$\left(\frac{u(\cdot,t_n)-u^n-(u(\cdot,t_{n-1})-u^{n-1})}{\tau_n},v\right)+(\nabla(u(\cdot,t_n)-u^n),\nabla v)$$
$$=\left(\frac{u(\cdot,t_n)-u(\cdot,t_{n-1})}{\tau_n},v\right)-(\partial_t u(\cdot,t_n),v)\,.$$

On constate que $e^0=0$ et que

$$\left(\frac{e^n-e^{n-1}}{\tau_n},v\right)+(\nabla e^n,\nabla v)=(\varepsilon^n,v)\,,\ \forall v\in H_0^1(\Omega), \tag{3.1}$$

où l'erreur de consistance ε^n est donnée par

$$\varepsilon^n=\frac{u(\cdot,t_n)-u(\cdot,t_{n-1})}{\tau_n}-\partial_t u(\cdot,t_n).$$

Proposition 3.1.1. *Supposons que u solution du problème (2.3) appartient à l'espace $H^2(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Alors, on a l'estimation suivante,*

$$\|\varepsilon^n\|_{L^2(\Omega)}\le\sqrt{\frac{\tau_n}{3}}\|u\|_{H^2(t_{n-1},t_n;L^2(\Omega))}. \tag{3.2}$$

Preuve. On fait appel à la formule de Taylor

$$u(\cdot,t_n)-u(\cdot,t_{n-1})=\tau_n\,(\partial_t u)(\cdot,t_n)-\int_{t_{n-1}}^{t_n}(t-t_{n-1})\partial_{tt}^2 u(\cdot,t)\,dt,$$

donc

$$\varepsilon^n=-\frac{1}{\tau_n}\int_{t_{n-1}}^{t_n}(t-t_{n-1})\partial_{tt}^2 u(\cdot,t)\,dt.$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\varepsilon^n\le\frac{1}{\tau_n}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}(t-t_{n-1})^2\,dt\right)^{\frac12}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}(\partial_{tt}^2 u(\cdot,t))^2\,dt\right)^{\frac12}.$$

Or

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n}(t-t_{n-1})^2\,dt=\frac13(t-t_{n-1})^3\Big|_{t_{n-1}}^{t_n}=\frac{\tau_n^3}{3}.$$

Par conséquent,

$$\varepsilon^n\le\sqrt{\frac{\tau_n}{3}}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}(\partial_{tt}^2 u(\cdot,t))^2\,dt\right)^{\frac12}.$$

En passant à la norme de $L^2(\Omega)$, on obtient

$$\|\varepsilon^n\|_{L^2(\Omega)}^2\le\frac{\tau_n}{3}\|\partial_{tt}^2 u\|_{L^2(t_{n-1},t_n;L^2(\Omega))}^2.$$

D'où

$$\|\varepsilon^n\|_{L^2(\Omega)}^2\le\frac{\tau_n}{3}\|u\|_{H^2(t_{n-1},t_n;L^2(\Omega))}^2.$$

Ceci donne l'estimation désirée. ■

Proposition 3.1.2. *Sous les hypothèses de la Proposition 3.1.1, on a l'estimation a priori suivante pour tout* $1 \leq n \leq N$

$$|u(\cdot,t_n) - u^n|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{|\tau|}{\sqrt{3}} \|u\|_{H^2(0,t_n;L^2(\Omega))}. \tag{3.3}$$

Preuve. On applique les mêmes arguments de (2.9) au problème (3.1). Pour v égal à $\frac{e^n - e^{n-1}}{\tau_n}$ dans l'équation (3.1). On trouve

$$\left\|\frac{e^n - e^{n-1}}{\tau_n}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\tau_n}(\nabla e^n, \nabla(e^n - e^{n-1})) = \left(\varepsilon^n, \frac{e^n - e^{n-1}}{\tau_n}\right).$$

L'identité $(a, a-b) = \frac{1}{2}(\|a\|^2 + \|a-b\|^2 - \|b\|^2)$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la formule $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ nous donnent

$$\left\|\frac{e^n - e^{n-1}}{\tau_n}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\,\tau_n}\left(|e^n|^2_{H^1(\Omega)} + |e^n - e^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)} - |e^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)}\right) \leq \frac{1}{2}\|\varepsilon^n\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\left\|\frac{e^n - e^{n-1}}{\tau_n}\right\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Alors

$$\tau_n \left\|\frac{e^n - e^{n-1}}{\tau_n}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + |e^n|^2_{H^1(\Omega)} + |e^n - e^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)} - |e^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)} \leq \tau_n\|\varepsilon^n\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

En sommant sur n, on obtient

$$\sum_{m=1}^{n} \tau_m \left\|\frac{e^m - e^{m-1}}{\tau_m}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{m=1}^{n}(|e^m|^2_{H^1(\Omega)} + |e^m - e^{m-1}|^2_{H^1(\Omega)} - |e^{m-1}|^2_{H^1(\Omega)}) \leq \sum_{m=1}^{n}\tau_m\|\varepsilon^m\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

D'où

$$\sum_{m=1}^{n} \tau_m \left\|\frac{e^m - e^{m-1}}{\tau_m}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{m=1}^{n} |e^m - e^{m-1}|^2_{H^1(\Omega)} + |e^n|^2_{H^1(\Omega)} \leq \sum_{m=1}^{n}\tau_m\|\varepsilon^m\|^2_{L^2(\Omega)} + |e^0|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Puisque $\sum_{m=1}^{n} |e^m - e^{m-1}|^2_{H^1(\Omega)} > 0$ et $\sum_{m=1}^{n} \left\|\frac{e^m - e^{m-1}}{\tau_m}\right\|^2_{L^2(\Omega)} > 0$, on trouve

$$|e^n|^2_{H^1(\Omega)} \leq \sum_{m=1}^{n}\tau_m\|\varepsilon^m\|^2_{L^2(\Omega)} + |e^0|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Puisque $|e^0|^2_{H^1(\Omega)} = 0$, on déduit de (3.2) l'estimation d'erreur désirée. ∎

3.1.2 Estimation d'erreur a priori en espace

On rappelle que π_h est l'opérateur de projection orthogonale de $H_0^1(\Omega)$ sur X_h^n. Les conditions suffisantes sur la famille $(\mathcal{T}_h^n)_h$ pour que cet opérateur vérifie pour une constante c indépendante de h_n,

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad |\pi_h v|_{H^1(\Omega)} \leq c|v|_{H^1(\Omega)} \tag{3.4}$$

sont données par [7] : l'inégalité est vraie avec une famille $(\mathcal{T}_h^n)_h$ uniformément régulière, toutefois cette condition peut être affaiblie. Sous l'hypothèse (3.4), on a pour toute fonction v assez régulière :

$$\|v - \pi_h v\|_{L^2(\Omega)} + h_n|v - \pi_h v|_{H^1(\Omega)} \leq c h_n^{s+1}\|v\|_{H^{s+1}(\Omega)}, \quad s \leq k. \tag{3.5}$$

Théorème 3.1.3. *Sous l'hypothèse* (3.4) *et si l'on suppose que la solution* $(u^n)_{0\leq n\leq N}$ *vérifie*

$$u^n \in H^{s+1}(\Omega), \quad 0 \leq s \leq k$$

l'estimation d'erreur a priori s'écrit, pour tout $1 \leq n \leq N$,

$$\|u^n - u_h^n\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{m=1}^n \tau_m|u^m - u_h^m|^2_{H^1(\Omega)} \leq c\sum_{m=1}^n h_m^{2s}(h_m^2 + \tau_m)\|u^m\|^2_{H^{s+1}(\Omega)}.$$

Preuve. Soit v_h^n une fonction de X_h^n. Par une inégalité triangulaire, on écrit

$$\begin{aligned}
&\|u^n - u_h^n\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{m=1}^n \tau_m|u^m - u_h^m|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq \|u^n - v_h^n\|_{L^2(\Omega)} + \|v_h^n - u_h^n\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{m=1}^n \tau_m(|u^m - v_h^m|_{H^1(\Omega)} + |v_h^m - u_h^m|_{H^1(\Omega)})
\end{aligned}$$

En ajoutant et en retranchant v_h^n dans l'équation (2.14), il vient que

$$\begin{aligned}
\forall w_h \in X_h^n, \quad &(u_h^n - v_h^n, w_h) + \tau_n\, a(u_h^n - v_h^n, w_h) \\
&= (u_h^{n-1}, w_h) + \tau_n\,(f^n, w_h) - (v_h^n, w_h) - \tau_n a(v_h^n, w_h).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

D'autre part, on choisit $v = w_h$ dans (2.9), on obtient

$$\forall w_h \in X_h^n, \quad (u^n, w_h) + \tau_n\, a(u^n, w_h) = (u^{n-1}, w_h) + \tau_n\,(f^n, w_h),$$

alors

$$\tau_n\,(f^n, w_h) = (u^n, w_h) + \tau_n\, a(u^n, w_h) - (u^{n-1}, w_h), \quad \forall w_h \in X_h^n.$$

En remplaçant la dernière équation dans (3.6), on trouve

$$\begin{aligned}\forall w_h \in X_h^n, \quad & (u_h^n - v_h^n, w_h) + \tau_n\, a(u_h^n - v_h^n, w_h) \\ &= \tau_n a(u^n - v_h^n, w_h) - (u^{n-1} - u_h^{n-1}, w_h) + (u^n - v_h^n, w_h),\end{aligned}$$

on pose $w_h = u_h^n - v_h^n$, on obtient

$$\begin{aligned}\|u_h^n - v_h^n\|^2_{L^2(\Omega)} + \tau_n|u_h^n - v_h^n|^2_{H^1(\Omega)} &= \tau_n a(u^n - v_h^n, u_h^n - v_h^n) \\ &\quad - (u^{n-1} - u_h^{n-1}, u_h^n - v_h^n) + (u^n - v_h^n, u_h^n - v_h^n).\end{aligned}$$

On voit que

$$\begin{aligned}\|u_h^n - v_h^n\|^2_{L^2(\Omega)} + \tau_n|u_h^n - v_h^n|^2_{H^1(\Omega)} &= \tau_n a(u^n - v_h^n, u_h^n - v_h^n) \\ &\quad - (u^{n-1} - v_h^{n-1} + v_h^{n-1} - u_h^{n-1}, u_h^n - v_h^n) + (u^n - v_h^n, u_h^n - v_h^n).\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(\|u_h^n - v_h^n\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u_h^{n-1} - v_h^{n-1}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|(u_h^n - v_h^n) - (u_h^{n-1} - v_h^{n-1})\|^2_{L^2(\Omega)}) \\ &\qquad + \tau_n|u_h^n - v_h^n|^2_{H^1(\Omega)} = \tau_n a(u^n - v_h^n, u_h^n - v_h^n) \\ &\qquad\qquad - (u^{n-1} - v_h^{n-1}, u_h^n - v_h^n) + (u^n - v_h^n, u_h^n - v_h^n).\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Young puis en sommant sur n, on trouve

$$\begin{aligned}&\|u_h^n - v_h^n\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u_h^0 - v_h^0\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{m=1}^{n} \tau_m|u_h^m - v_h^m|^2_{H^1(\Omega)} \\ &\leq c\Big(\sum_{m=1}^{n} \tau_m|u^m - v_h^m|^2_{H^1(\Omega)} + \sum_{m=1}^{n} \|u^m - v_h^m\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{m=1}^{n} \|u^{m-1} - v_h^{m-1}\|^2_{L^2(\Omega)}\Big).\end{aligned}$$

On choisit v_h^n égal à $\pi_h u^n$ et on utilise la formule (3.5), on trouve

$$\begin{aligned}&\|u_h^n - v_h^n\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{m=1}^{n} \tau_m|u_h^m - v_h^m|^2_{H^1(\Omega)} \\ &\qquad\leq c\left(\sum_{m=1}^{n} h_m^{2s}\tau_m\|u^m\|^2_{H^{s+1}(\Omega)} + h_m^{2s+2}\sum_{m=1}^{n} \|u^m\|^2_{H^{s+1}(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

D'où le resultat cherché. ■

Il s'agit maintenant d'écrire une estimation d'erreur a posteriori et de définir des indicateurs d'erreur.

3.2 Estimation d'erreur a posteriori

Dans cette partie on veut majorer l'erreur entre la solution continue du problème (2.3) et la solution discrète du problème (2.14) en fonction de la solution discrète u_h^n.
À la famille $(u^n)_{0\leq n\leq N}$, on associe la fonction u_τ affine sur chaque intervalle $[t_{n-1}, t_n]$ et égale à u^n en t_n, $1 \leq n \leq N$,

$$u_\tau(x,t) = u^n(x) - \frac{t_n - t}{\tau_n}(u^n - u^{n-1})(x), \quad t \in [t_{n-1}, t_n], \quad x \in \Omega. \tag{3.7}$$

On voit que

$$\partial_t u_\tau = \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n}, \tag{3.8}$$

alors (2.9) devient

$$\int_\Omega \partial_t u_\tau v \, d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \nabla u^n \cdot \nabla v \, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f^n v \, d\boldsymbol{x} \ \ , \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.9}$$

De la même manière, on définit $u_{\tau h}$ la fonction affine sur chaque intervalle $[t_{n-1}, t_n]$ et égale à u_h^n en t_n :

$$u_{\tau h}(x,t) = u_h^n(x) - \frac{t_n - t}{\tau_n}(u_h^n - u_h^{n-1})(x).$$

Pour estimer l'erreur $\|u - u_{\tau h}\|$, on écrit par une inégalité triangulaire

$$\|u - u_{\tau h}\| \leq \|u - u_\tau\| + \|u_\tau - u_{\tau h}\|.$$

Pour majorer chaque terme on écrit l'équation du résidu pour chacun.

3.2.1 Équation du résidu pour l'erreur en temps

On ajoute et on retranche le terme u_τ de l'équation (2.2), on trouve

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial_t (u - u_\tau) v \, d\boldsymbol{x} &+ \int_\Omega \nabla(u - u_\tau) \cdot \nabla v \, d\boldsymbol{x} \\ &= \int_\Omega f v \, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \partial_t u_\tau v \, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \nabla u_\tau \cdot \nabla v \, d\boldsymbol{x} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).\end{aligned}$$

De (3.9), on remarque que

$$\int_\Omega \partial_t u_\tau v \, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f^n v \, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \nabla u^n \cdot \nabla v \, d\boldsymbol{x} \ \ , \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

on combine les deux dernières équations, il en résulte

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \partial_t (u - u_\tau) v \, d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \nabla(u - u_\tau) \cdot \nabla v \, d\boldsymbol{x} \\ &= \int_\Omega f v \, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega f^n v \, d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \nabla u^n \cdot \nabla v \, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \nabla u_\tau \cdot \nabla v \, d\boldsymbol{x}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Définition 3.2.1. *On définit la famille d'indicateurs d'erreur de la façon suivante, pour tout $1 \leq n \leq N$,*

$$\eta^n = \sqrt{\frac{\tau_n}{3}}|u_h^n - u_h^{n-1}|_{H^1(\Omega)}. \tag{3.11}$$

Théorème 3.2.1. *Soit $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^0(0,T;L^2(\Omega))$, alors on a l'estimation suivante pour tout $1 \leq n \leq N$*

$$\begin{aligned}\|(u-u_\tau)(t_n)\|^2_{L^2(\Omega)} &+ \sum_{m=1}^{n}\int_{t_{m-1}}^{t_m} |(u-u_\tau)(t)|^2_{H^1(\Omega)}\,dt \\ &\leq c\sum_{m=1}^{n}\Big((\eta^m)^2 + \int_{t_{m-1}}^{t_m}\|f(t)-f^m\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \\ &\qquad + \tau_m|u^m - u_h^m|^2_{H^1(\Omega)}\Big) + c\,\tau_1|u_0 - \pi_h u_0|^2_{H^1(\Omega)}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Preuve. On pose $v = u - u_\tau$ dans l'équation (3.10), on trouve

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u-u_\tau\|^2_{L^2(\Omega)} &+ |u-u_\tau|^2_{H^1(\Omega)} \\ &= \int_\Omega (f-f^n)(u-u_\tau)\,d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \nabla(u_\tau - u^n)\cdot\nabla(u-u_\tau)\,d\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Young donnent

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u-u_\tau\|^2_{L^2(\Omega)} + |u-u_\tau|^2_{H^1(\Omega)} &\leq \frac{\varepsilon}{2}\|f-f^n\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon}\|u-u_\tau\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &+ \frac{\varepsilon}{2}|u_\tau - u^n|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon}|u-u_\tau|^2_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Poincaré-Friedrichs au second terme du membre de droite, et on choisit ε de sorte que

$$\frac{d}{dt}\|u-u_\tau\|^2_{L^2(\Omega)} + |u-u_\tau|^2_{H^1(\Omega)} \leq c\big(\|f-f^n\|^2_{L^2(\Omega)} + |u_\tau - u^n|^2_{H^1(\Omega)}\big).$$

En intégrant cette ligne entre t_n et t_{n-1}, on trouve

$$\begin{aligned}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{d}{dt}\|(u-u_\tau)(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt &+ \int_{t_{n-1}}^{t_n}|(u-u_\tau)(t)|^2_{H^1(\Omega)}\,dt \\ &\leq c\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|f(t)-f^n\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n}|u_\tau(t)-u^n|^2_{H^1(\Omega)}\,dt\right).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\|(u-u_\tau)(t_n)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|(u-u_\tau)(t_{n-1})\|^2_{L^2(\Omega)} &+ \int_{t_{n-1}}^{t_n}|(u-u_\tau)(t)|^2_{H^1(\Omega)}\,dt \\ &\leq c\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|f(t)-f^n\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n}|u_\tau(t)-u^n|^2_{H^1(\Omega)}\,dt\right).\end{aligned}$$

En sommant sur n, on obtient

$$\begin{aligned}\|(u-u_\tau)(t_n)\|^2_{L^2(\Omega)} &+ \sum_{m=1}^{n}\int_{t_{m-1}}^{t_m} |(u-u_\tau)(t)|^2_{H^1(\Omega)}\,dt\\ &\le c\sum_{m=1}^{n}\left(\int_{t_{m-1}}^{t_m}\|f(t)-f^m\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \int_{t_{m-1}}^{t_m}|u_\tau(t)-u^m|^2_{H^1(\Omega)}\,dt\right).\end{aligned}$$

De (3.7), on a

$$\nabla(u_\tau - u^n) = -\frac{t_n - t}{\tau_n}\,\nabla(u^n - u^{n-1}).$$

On intègre sur t, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{t_{m-1}}^{t_m}|u_\tau(t)-u^m|^2_{H^1(\Omega)}\,dt &= |u^m-u^{m-1}|^2_{H^1(\Omega)}\int_{t_{m-1}}^{t_m}\left(\frac{t-t_m}{\tau_m}\right)^2 dt\\ &= \frac{\tau_m}{3}\,|u^m-u^{m-1}|^2_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Alors

$$\int_{t_{m-1}}^{t_m}|u_\tau(t)-u^m|^2_{H^1(\Omega)}\,dt = \frac{\tau_m}{3}|u^m-u_h^m+u_h^m-u_h^{m-1}+u_h^{m-1}-u^{m-1}|^2_{H^1(\Omega)},$$

d'après l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}\int_{t_{m-1}}^{t_m}|u_\tau(t)-u^m|^2_{H^1(\Omega)}\,dt \le \frac{\tau_m}{3}\Big(&|u^m-u_h^m|_{H^1(\Omega)}+|u_h^m-u_h^{m-1}|_{H^1(\Omega)}\\ &+|u^{m-1}-u_h^{m-1}|_{H^1(\Omega)}\Big)^2.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\|(u-u_\tau)(t_n)\|^2_{L^2(\Omega)} &+ \sum_{m=1}^{n}\int_{t_{m-1}}^{t_m}|(u-u_\tau)(t)|^2_{H^1(\Omega)}\,dt\\ &\le c\sum_{m=1}^{n}\Bigg(\int_{t_{m-1}}^{t_m}\|f(t)-f^m\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt\\ &\quad+\frac{\tau_m}{3}\big(|u^m-u_h^m|^2_{H^1(\Omega)}+|u_h^m-u_h^{m-1}|^2_{H^1(\Omega)}+|u^{m-1}-u_h^{m-1}|^2_{H^1(\Omega)}\big)\Bigg)\\ &\le c\sum_{m=1}^{n}\Bigg((\eta^m)^2+\int_{t_{m-1}}^{t_m}\|f(t)-f^m\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt\\ &\qquad+\frac{\tau_m}{3}\big(|u^m-u_h^m|^2_{H^1(\Omega)}+|u^{m-1}-u_h^{m-1}|^2_{H^1(\Omega)}\big)\Bigg)\end{aligned}$$

Puis on utilise la propriété $\tau_n \leq \sigma_\tau \tau_{n-1}$ on trouve

$$\begin{aligned}
\|(u-u_\tau)(t_n)\|^2_{L^2(\Omega)} &+ \sum_{m=1}^{n}\int_{t_{m-1}}^{t_m} |(u-u_\tau)(t)|^2_{H^1(\Omega)}\,dt \\
&\leq c\Big\{ \sum_{m=1}^{n}\Big((\eta^m)^2 + \int_{t_{m-1}}^{t_m} \|f(t)-f^m\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \Big) \\
&+ \sum_{m=1}^{n} \tau_m |u^m - u_h^m|^2_{H^1(\Omega)} + \sigma_\tau \sum_{m=2}^{n} \tau_{m-1}|u^{m-1}-u_h^{m-1}|^2_{H^1(\Omega)} \\
&\qquad + \tau_1 |u^0 - u_h^0|_{H^1(\Omega)} \Big\}.
\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration. ■

3.2.2 Équation du résidu pour l'erreur en espace

On a la relation d'orthogonalité de Galerkin suivante :

$$a(u^n - u_h^n, v_h) + \int_\Omega \frac{u^n - u_h^n - (u^{n-1} - u_h^{n-1})}{\tau_n} v_h\, d\boldsymbol{x} = 0, \quad \forall v_h \in X_h^n$$

et donc, pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega)$ et $v_h \in V_h$

$$\begin{aligned}
a(u^n - u_h^n, v) &+ \int_\Omega \frac{u^n - u_h^n - u^{n-1} + u_h^{n-1}}{\tau_n} v d\boldsymbol{x} \\
&= a(u^n - u_h^n, v - v_h) + \int_\Omega \frac{u^n - u_h^n - u^{n-1} + u_h^{n-1}}{\tau_n}(v - v_h) d\boldsymbol{x}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

De l'égalité (3.13) et la définition de $a(.,.)$

$$\begin{aligned}
&a(u^n - u_h^n, v) + \left(\frac{u^n - u_h^n}{\tau_n}, v\right) - \left(\frac{u^{n-1} - u_h^{n-1}}{\tau_n}, v\right) \\
&= \Big(\nabla(u^n - u_h^n), \nabla(v - v_h)\Big) + \left(\frac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n}, v - v_h\right) - \left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}, v - v_h\right) \\
&= \Big(\nabla u^n, \nabla(v - v_h)\Big) - \Big(\nabla u_h^n, \nabla(v - v_h)\Big) + \left(\frac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n}, v - v_h\right) - \left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}, v - v_h\right) \\
&= (f^n, v - v_h) - (\nabla u_h^n, \nabla(v - v_h)) - \left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}, v - v_h\right).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

On remarque que dans l'équation (3.14) u^n a été éliminé du membre de droite. Maintenant on fait une décomposition sur les éléments de la triangulation $\mathcal{T}_h^n$:

$$\begin{aligned}
a(u^n - u_h^n, v) &+ \left(\frac{u^n - u_h^n}{\tau_n}, v\right) - \left(\frac{u^{n-1} - u_h^{n-1}}{\tau_n}, v\right) \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h^n} \Big(\int_K f^n (v - v_h) d\boldsymbol{x} \\
&\quad - \int_K \nabla u_h^n \nabla(v - v_h) d\boldsymbol{x} - \int_K \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}(v - v_h) d\boldsymbol{x} \Big).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

On applique la formule de Green (1.4) sur le deuxième terme du membre de droite pour obtenir

$$\begin{aligned} a(u^n - u_h^n, v) &+ \left(\frac{u^n - u_h^n}{\tau_n}, v\right) - \left(\frac{u^{n-1} - u_h^{n-1}}{\tau_n}, v\right) \\ &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h^n} \left(\int_K f^n(v - v_h)d\boldsymbol{x} + \int_K \Delta u_h^n(v - v_h)d\boldsymbol{x} \right. \\ &\left. - \int_{\partial K} \partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n(v - v_h)d\sigma - \int_K \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}(v - v_h)d\boldsymbol{x}\right), \end{aligned} \tag{3.16}$$

où $\boldsymbol{n}_K$ désigne le vecteur normal unitaire extérieur à K.
À cette étape, une seconde idée importante est à retenir l'application de la formule de Green à $\int_K \nabla u_h^n \cdot \nabla(v - v_h)d\boldsymbol{x}$ dans l'équation (3.15) pour éliminer l'opérateur gradient "∇" agissant sur $(v - v_h)$.

Dans (3.16), l'intégrale sur ∂K peut s'écrire comme une somme d'intégrales sur les éléments e de $\mathcal{E}_K$, on note que ces éléments se répartissent en deux parties :

- ou bien e est contenu dans $\partial\Omega$ et l'intégrale sur e est nulle car v et v_h s'annulent sur $\partial\Omega$.
- ou bien e est contenu dans la frontière de deux èlèments K et K' et au total, la quantité à intégrer sur e dans le second membre de (3.16) s'écrit :

$$(\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n)(\sigma)(v - v_h)(\sigma) + (\partial_{\boldsymbol{n}_{K'}} u_h^n)(\sigma)(v - v_h)(\sigma) = [\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n](\sigma)(v - v_h)(\sigma), \tag{3.17}$$

où $[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n]$ désigne le saut $\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n + \partial_{\boldsymbol{n}_{K'}} u_h^n$. Les relations (3.16) et (3.17) conduisent à

$$\begin{aligned} a(u^n - u_h^n, v) &+ \left(\frac{u^n - u_h^n}{\tau_n}, v\right) - \left(\frac{u^{n-1} - u_h^{n-1}}{\tau_n}, v\right) \\ &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h^n} \left(\int_K \left(f^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}\right)(v - v_h)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \right. \\ &\qquad \left. - \frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_K^0} \int_e [\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n](\sigma)(v - v_h)(\sigma)\, d\sigma\right). \end{aligned} \tag{3.18}$$

À partir de cette équation, on peut majorer l'erreur en fonction de normes appropriées de $f^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}$ et de $[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n]$. Une difficulté est que, la fonction f^n pouvant être compliquée, la norme de $f^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}$ n'est pas forcément simple à calculer. Pour remédier à cet inconvénient, on fixe un entier $\ell \geq 0$, on introduit l'espace

$$W_h^n = \{f_h \in L^2(\Omega); \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^n, \quad f_{h|K} \in \mathcal{P}_\ell(K)\}, \quad \forall 1 \leq n \leq N,$$

puis on introduit une approximation f_h^n de f^n dans W_h^n.

Finalement l'équation du résidu s'écrit :

$$
\begin{aligned}
a(u^n - u_h^n, v) + \left(\frac{u^n - u_h^n}{\tau_n}, v\right) - \left(\frac{u^{n-1} - u_h^{n-1}}{\tau_n}, v\right) \\
= \sum_{K \in \mathcal{T}_h^n} \Bigg(\int_K (f^n - f_h^n)(\boldsymbol{x})(v - v_h)(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \\
+ \int_K \left(f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} \right)(\boldsymbol{x})(v - v_h)(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \\
- \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K^0} \int_e [\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n](\sigma)(v - v_h)(\sigma)\, d\sigma \Bigg).
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Définition 3.2.2. *On définit la famille d'indicateurs d'erreur de la façon suivante, pour tout K dans $\mathcal{T}_h^n$,*

$$
\eta_K^n = h_K \left\| f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} \right\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K^0} h_e^{\frac{1}{2}} \| [\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n] \|_{L^2(e)}. \tag{3.20}
$$

Les propriétés de cette suite sont données dans les propositions qui suivent, où sont énoncées

- les majorations de l'erreur de discrétisation en espace en fonction de la somme en temps et espace des indicateurs,
- une majoration de l'indicateur en fonction de l'erreur locale provenant de la discrétisation en espace, d'où l'on peut déduire des inverses locaux des majorations précédentes.

Théorème 3.2.2. *On suppose la donnée f dans $\mathcal{C}^0(0, T; L^2(\Omega))$ et la donnée u_0 dans $H_0^1(\Omega)$. Alors, il existe une constante positive c indépendante de h et τ_n telle qu'on ait l'estimation suivante pour tout* $1 \leq n \leq N$

$$
\begin{aligned}
\|u^n - u_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{m=1}^{n} \tau_m |u^m - u_h^m|_{H^1(\Omega)}^2 \\
\leq c \left(\|u_0 - \pi_h u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{m=1}^{n} \tau_m \sum_{K \in \mathcal{T}_h^m} \left((\eta_K^m)^2 + h_K^2 \|f^m - f_h^m\|_{L^2(K)}^2 \right) \right).
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Preuve. pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ et tout v_h dans X_h^n, on utilise l'équation (3.19), combinée avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
a(u^n - u_h^n, v) + \left(\frac{u^n - u_h^n}{\tau_n}, v\right) - \left(\frac{u^{n-1} - u_h^{n-1}}{\tau_n}, v\right) \\
\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h^n} \Bigg(& \|f^n - f_h^n\|_{L^2(K)} \|v - v_h\|_{L^2(K)} \\
& + \left\| f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} \right\|_{L^2(K)} \|v - v_h\|_{L^2(K)} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K^0} \|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n]\|_{L^2(e)} \|v - v_h\|_{L^2(e)} \Bigg).
\end{aligned}$$

Puis on choisit v_h égal à l'image de v par l'opérateur $\tilde{\Pi}_h^0$ et on utilise le Théorème 1.5.6, on trouve

$$\|v - \tilde{\Pi}_h^0 v\|_{L^2(K)} \leq c\, h_K |v|_{H^1(\Delta_K)},$$

et le Corollaire 1.5.7, on obtient

$$\|v - \tilde{\Pi}_h^0 v\|_{L^2(e)} \leq c\, h_e^{\frac{1}{2}} |v|_{H^1(\Delta_e)}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
& a(u^n - u_h^n, v) + \left(\frac{u^n - u_h^n}{\tau_n}, v\right) - \left(\frac{u^{n-1} - u_h^{n-1}}{\tau_n}, v\right) \\
& \leq c \sum_{K \in \mathcal{T}_h^n} \Bigg(h_K \Big(\|f^n - f_h^n\|_{L^2(K)} + \left\| f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} \right\|_{L^2(K)} \Big) |v|_{H^1(\Delta_K)} \\
& \qquad + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K^0} h_e^{\frac{1}{2}} \|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n]\|_{L^2(e)} |v|_{H^1(\Delta_e)} \Bigg),
\end{aligned}$$

où les Δ_K et Δ_e sont introduits dans la Notation 1.5.5. Par une inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
& a(u^n - u_h^n, v) + \left(\frac{u^n - u_h^n}{\tau_n}, v\right) - \left(\frac{u^{n-1} - u_h^{n-1}}{\tau_n}, v\right) \\
& \leq c \Bigg(\sum_{K \in \mathcal{T}_h^n} h_K^2 \Big(\|f^n - f_h^n\|_{L^2(K)} + \left\| f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} \right\|_{L^2(K)} \Big)^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}} \\
& \qquad \times \Bigg(\sum_{K \in \mathcal{T}_h^n} |v|_{H^1(\Delta_K)}^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}} \\
& + \Bigg(\frac{1}{4} \sum_{K \in \mathcal{T}_h^n} \sum_{e \in \mathcal{E}_K^0} h_e \|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n]\|_{L^2(e)}^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}} \Bigg(\sum_{K \in \mathcal{T}_h^n} \sum_{e \in \mathcal{E}_K^0} |v|_{H^1(\Delta_e)}^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Et comme

$$\begin{aligned}
& \Big(\|f^n - f_h^n\|_{L^2(K)} + \left\| f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} \right\|_{L^2(K)} \Big)^2 \\
& \qquad \leq 2 \Big(\|f^n - f_h^n\|_{L^2(K)}^2 + \left\| f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} \right\|_{L^2(K)}^2 \Big).
\end{aligned}$$

On obtient

$$a(u^n - u_h^n, v) + \left(\frac{u^n - u_h^n}{\tau_n}, v\right) - \left(\frac{u^{n-1} - u_h^{n-1}}{\tau_n}, v\right)$$
$$\leq c\Bigg(\sum_{K\in\mathcal{T}_h^n} \Bigg(h_K^2 \|f^n - f_h^n\|^2_{L^2(K)} + h_K^2 \left\| f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} \right\|^2_{L^2(K)}$$
$$+ \frac{1}{4} \sum_{e\in\mathcal{E}_K^0} h_e \|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n]\|^2_{L^2(e)} \Bigg)\Bigg)^{\frac{1}{2}} \Bigg(\sum_{K\in\mathcal{T}_h^n} |v|^2_{H^1(\Delta_K)} \Bigg)^{\frac{1}{2}}.$$

Et en rappelant qu'un même élément de $\mathcal{T}_h^n$ n'est contenu que dans un nombre fini (borné indépendamment de h) de Δ_K, on obtient alors

$$a(u^n - u_h^n, v) + \left(\frac{u^n - u_h^n}{\tau_n}, v\right) - \left(\frac{u^{n-1} - u_h^{n-1}}{\tau_n}, v\right)$$
$$\leq c\Bigg(\sum_{K\in\mathcal{T}_h^n} \Big((\eta_K^n)^2 + h_K^2 \|f^n - f_h^n\|^2_{L^2(K)} \Big)\Bigg)^{\frac{1}{2}} |v|_{H^1(\Omega)}. \tag{3.22}$$

On prend ensuite v égal à $u^n - u_h^n$ et on trouve

$$a(u^n - u_h^n, u^n - u_h^n) + \left(\frac{u^n - u_h^n}{\tau_n}, u^n - u_h^n\right) - \left(\frac{u^{n-1} - u_h^{n-1}}{\tau_n}, u^n - u_h^n\right)$$
$$\leq c\Bigg(\sum_{K\in\mathcal{T}_h^n} \Big((\eta_K^n)^2 + h_K^2 \|f^n - f_h^n\|^2_{L^2(K)} \Big)\Bigg)^{\frac{1}{2}} |u^n - u_h^n|_{H^1(\Omega)}.$$

En multipliant par τ_n, on aura

$$\tau_n\, |u^n - u_h^n|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{2}\Big(\|u^n - u_h^n\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u^{n-1} - u_h^{n-1}\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+ \|(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})\|^2_{L^2(\Omega)} \Big)$$
$$\leq c\,\tau_n \Bigg(\sum_{K\in\mathcal{T}_h^n} \Big((\eta_K^n)^2 + h_K^2 \|f^n - f_h^n\|^2_{L^2(K)} \Big)\Bigg)^{\frac{1}{2}} |u^n - u_h^n|_{H^1(\Omega)}.$$

On applique l'inégalité de Young, on trouve

$$\tau_n\, |u^n - u_h^n|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{2}\Big(\|u^n - u_h^n\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u^{n-1} - u_h^{n-1}\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+ \|(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})\|^2_{L^2(\Omega)} \Big)$$
$$\leq c\,\tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_h^n} \Big((\eta_K^n)^2 + h_K^2 \|f^n - f_h^n\|^2_{L^2(K)} \Big) + \frac{\tau_n}{2} |u^n - u_h^n|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Donc

$$\tau_n\, |u^n - u_h^n|^2_{H^1(\Omega)} + \|u^n - u_h^n\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u^{n-1} - u_h^{n-1}\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq c\,\tau_n \sum_{K\in\mathcal{T}_h^n} \Big((\eta_K^n)^2 + h_K^2 \|f^n - f_h^n\|^2_{L^2(K)} \Big).$$

En sommant sur n, on obtient

$$\sum_{m=1}^{n} \tau_m |u^m - u_h^m|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{m=1}^{n} \Big(\|u^m - u_h^m\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u^{m-1} - u_h^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \Big)$$
$$\leq c \sum_{m=1}^{n} \tau_m \sum_{K \in \mathcal{T}_h^m} \Big((\eta_K^m)^2 + h_K^2 \|f^m - f_h^m\|_{L^2(K)}^2 \Big).$$

Alors

$$\sum_{m=1}^{n} \tau_m |u^m - u_h^m|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u^n - u_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2$$
$$\leq \|u_0 - u_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + c \sum_{m=1}^{n} \tau_m \sum_{K \in \mathcal{T}_h^m} \Big((\eta_K^m)^2 + h_K^2 \|f^m - f_h^m\|_{L^2(K)}^2 \Big).$$

Donc

$$\|u^n - u_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{m=1}^{n} \tau_m |u^m - u_h^m|_{H^1(\Omega)}^2$$
$$\leq c \Big(\|u_0 - \pi_h u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{m=1}^{n} \tau_m \sum_{K \in \mathcal{T}_h^m} \Big((\eta_K^m)^2 + h_K^2 \|f^m - f_h^m\|_{L^2(K)}^2 \Big) \Big).$$

■

Proposition 3.2.3. *On suppose la donnée f du problème (2.3) dans $\mathcal{C}^0(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et u_0 dans $H_0^1(\Omega)$. Alors, pour le problème discret (2.14), il existe une constante positive c indépendante de h_n et τ_n telle qu'on ait la majoration d'erreur*

$$|u^n - u_h^n|_{H^1(\Omega)}^2 + 2 \sum_{m=1}^{n} \tau_m \left\| \frac{(u^m - u_h^m) - (u^{m-1} - u_h^{m-1})}{\tau_m} \right\|_{L^2(\Omega)}^2$$
$$\leq c \Big(|u_0 - \pi_h u_0|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{m=1}^{n} \sum_{K \in \mathcal{T}_h^m} \Big((\eta_K^m)^2 + h_K^2 \|f^m - f_h^m\|_{L^2(K)}^2 \Big) \Big). \tag{3.23}$$

Preuve. Dans l'inégalité (3.22), on choisit v égal à

$$\frac{(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})}{\tau_n},$$

on trouve

$$a\Big(u^n - u_h^n, \frac{(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})}{\tau_n}\Big) + \left\| \frac{(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})}{\tau_n} \right\|_{L^2(\Omega)}^2$$
$$\leq c \Big(\sum_{K \in \mathcal{T}_h^n} \Big((\eta_K^n)^2 + h_K^2 \|f^n - f_h^n\|_{L^2(K)}^2 \Big) \Big)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})}{\tau_n} \right|_{H^1(\Omega)}.$$

En notant que

$$
\begin{aligned}
&a\big(u^n - u_h^n, \frac{(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})}{\tau_n}\big) \\
&= \frac{1}{\tau_n}\big(\nabla(u^n - u_h^n), \nabla((u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1}))\big) \\
&= \frac{1}{2\tau_n}\Big(|u^n - u_h^n|^2_{H^1(\Omega)} + |(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})|^2_{H^1(\Omega)} - |u^{n-1} - u_h^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)}\Big).
\end{aligned}
$$

On en déduit que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\,\tau_n}|u^n - u_h^n|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{2\,\tau_n}|(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})|^2_{H^1(\Omega)} \\
&\qquad - \frac{1}{2\,\tau_n}|u^{n-1} - u_h^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)} + \left\|\frac{(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})}{\tau_n}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad \leq c\Big(\sum_{K\in\mathcal{T}_h^n}\Big((\eta_K^n)^2 + h_K^2\|f^n - f_h^n\|^2_{L^2(K)}\Big)\Big)^{\frac{1}{2}}\left|\frac{(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})}{\tau_n}\right|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

En multipliant par τ_n et utilisant l'inégalité de Young au second membre, on trouve

$$
\begin{aligned}
|u^n - u_h^n|^2_{H^1(\Omega)} - |u^{n-1} - u_h^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)} + 2\,\tau_n\left\|\frac{(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})}{\tau_n})\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\leq c\sum_{K\in\mathcal{T}_h^n}\Big((\eta_K^n)^2 + h_K^2\|f^n - f_h^n\|^2_{L^2(K)}\Big).
\end{aligned}
$$

En sommant sur n, on obtient

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{n}(|u^m - u_h^m|^2_{H^1(\Omega)} - |u^{m-1} - u_h^{m-1}|^2_{H^1(\Omega)}) + 2\sum_{m=1}^{n}\tau_m\left\|\frac{(u^m - u_h^m) - (u^{m-1} - u_h^{m-1})}{\tau_m})\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\leq c\Big(\sum_{m=1}^{n}\sum_{K\in\mathcal{T}_h^m}\Big((\eta_K^m)^2 + h_K^2\|f^m - f_h^m\|^2_{L^2(K)}\Big)\Big).
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
|u^n - u_h^n|^2_{H^1(\Omega)} + 2\sum_{m=1}^{n}\tau_m\left\|\frac{(u^m - u_h^m) - (u^{m-1} - u_h^{m-1})}{\tau_m})\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\leq c\Big(|u_0 - u_h^0|^2_{H^1(\Omega)} + \sum_{m=1}^{n}\sum_{K\in\mathcal{T}_h^m}\Big((\eta_K^m)^2 + h_K^2\|f^m - f_h^m\|^2_{L^2(K)}\Big)\Big).
\end{aligned}
$$

Ceci achève la démonstration. ■

La majoration (3.21) conforme également la propriété de fiabilité énoncée dans (1.9).

3.2.3 Propriété de fiabilité

On déduit de Théorèmes 3.2.1 et 3.2.2 le théorème suivant.

Théorème 3.2.4. *On suppose la donnée f du problème (2.3) dans $\mathcal{C}^0(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et u_0 dans $H_0^1(\Omega)$. Alors, pour le problème discret (2.14), il existe une constante positive c indépendante de h_n et τ_n telle qu'on ait la majoration d'erreur*

$$\begin{aligned}
&\|(u-u_{\tau h})(t_n)\|_{L^2(\Omega)} + \|u-u_{\tau h}\|_{L^2(0,t_n;H_0^1(\Omega))} \\
&\qquad \leq \left(\sum_{m=1}^{n} (\eta^m)^2 + \tau_m \sum_{K\in\mathcal{T}_h^m} \Big((\eta_K^m)^2 + \tau_m \|f^m - f_h^m\|^2_{L^2(K)} \Big) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\qquad + c\big(\|u_0 - \pi_h u_0\|_{H^1(\Omega)} + \|f - f^n\|_{L^2(0,t_n;L^2(\Omega))} \big). \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

Preuve. On utilise l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}
&\|(u-u_{\tau h})(t_n)\|_{L^2(\Omega)} + \|u-u_{\tau h}\|_{L^2(0,t_n;H_0^1(\Omega))} \\
&\qquad \leq \Big(\|(u-u_\tau)(t_n)\|_{L^2(\Omega)} + \|u-u_\tau\|_{L^2(0,t_n;H_0^1(\Omega))} \Big) \\
&\qquad + \Big(\|(u_\tau-u_{\tau h})(t_n)\|_{L^2(\Omega)} + \|u_\tau-u_{\tau h}\|_{L^2(0,t_n;H_0^1(\Omega))} \Big).
\end{aligned}$$

Du Théorème 3.2.1, on a l'estimation de $\|u-u_\tau\|_{L^2(\Omega)} + \|u-u_\tau\|_{L^2(0,t_n;H_0^1(\Omega))}$. Pour majorer les deux derniers termes on écrit $u_\tau - u_{\tau h}$ en fonction de $u^n - u_h^n$. Il est clair que

$$\|(u_\tau - u_{\tau h})(t_n)\|_{L^2(\Omega)} = \|u^n - u_h^n\|_{L^2(\Omega)}. \qquad (3.25)$$

On doit alors comparer les deux quantités

$$\|u_\tau - u_{\tau h}\|_{L^2(0,t_n;H_0^1(\Omega))} \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{n} \tau_m |u^m - u_h^m|^2_{H^1(\Omega)}.$$

On pose $v_\tau = u_\tau - u_{\tau h}$, on a

$$\begin{aligned}
|v_\tau(\cdot,t)|^2_{H^1(\Omega)} &= \Big(\nabla(v^n - \frac{t_n - t}{\tau_n}(v^n - v^{n-1})), \nabla(v^n - \frac{t_n - t}{\tau_n}(v^n - v^{n-1})) \Big) \\
&= \left(1 - 2\frac{t_n - t}{\tau_n} + \left(\frac{t_n - t}{\tau_n}\right)^2 \right) |v^n|^2_{H^1(\Omega)} \\
&+ \left(\frac{t_n - t}{\tau_n}\right)^2 |v^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)} + \left(2\frac{t_n - t}{\tau_n} - 2\left(\frac{t_n - t}{\tau_n}\right)^2 \right) (\nabla v^n, \nabla v^{n-1}).
\end{aligned}$$

On intègre de t_{n-1} à t_n, on voit que

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} |v_\tau(\cdot,t)|^2_{H^1(\Omega)} dt = \frac{\tau_n}{3} \big(|v^n|^2_{H^1(\Omega)} + |v^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)} + (\nabla v^n, \nabla v^{n-1}) \big)$$

En majorant le dernier terme par l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$,

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} |v_\tau(\cdot,t)|^2_{H^1(\Omega)} dt \leq \frac{\tau_n}{2} \big(|v^n|^2_{H^1(\Omega)} + |v^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)} \big).$$

En sommant sur n, et on utilise la propriété $\tau_n \leq \tau_{n-1}\sigma_\tau$

$$\int_0^{t_n} |v_\tau(\cdot,t)|^2_{H^1(\Omega)} dt \leq \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} \tau_m |v^m|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{\sigma_\tau}{2}\sum_{m=2}^{n} \tau_{m-1}|v^{m-1}|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{\tau_1}{2}|v^0|^2_{H^1(\Omega)}.$$

On déduit alors que

$$\|u_\tau - u_{\tau h}\|^2_{L^2(0,t_n;H^1_0(\Omega))} \leq \frac{1+\sigma_\tau}{2}\sum_{m=1}^{n}\tau_m|u^m - u^m_h|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{\tau_1}{2}|u_0 - \pi_h u_0|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{3.26}$$

On combine les relations (3.21), (3.25) et (3.26)

$$\begin{aligned}&\|(u_\tau - u_{\tau h})(t_n)\|_{L^2(\Omega)} + \|u_\tau - u_{\tau h}\|^2_{L^2(0,t_n;H^1_0(\Omega))}\\ &\qquad\leq c\Big(\|u_0 - \pi_h u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{m=1}^{n}\tau_m \sum_{K\in\mathcal{T}_h^m}\Big((\eta_K^m)^2 + h_K^2\|f^m - f_h^m\|^2_{L^2(K)}\Big)\Big).\end{aligned} \tag{3.27}$$

On déduit de (3.12) et (3.27) l'estimation cherchée. ■

3.2.4 Propriété d'efficacité

On commence par donner une majoration aux indicateurs d'erreur temporels η^n.

Proposition 3.2.5. *On suppose la donnée f du problème* (2.3) *dans $\mathcal{C}^0(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et u_0 dans $H^1_0(\Omega)$. Alors, pour le problème discret* (2.14)*, il existe une constante positive c indépendante de h_n et τ_n telle qu'on ait la majoration d'erreur pour tout $1 \leq n \leq N$*

$$\begin{aligned}\eta^n \leq \sqrt{\frac{\tau_n}{3}}\Big(&|u^n - u^n_h|_{H^1(\Omega)} + |u^{n-1} - u^{n-1}_h|_{H^1(\Omega)}\\ &+ c\Big(\|\partial_t(u-u_\tau)\|_{L^2(t_{n-1},t_n;L^2(\Omega))} + \|f - f^n\|_{L^2(t_{n-1},t_n,L^2(\Omega))} + \|u - u_\tau\|_{L^2(t_{n-1},t_n;H^1(\Omega))}\Big)\Big).\end{aligned}$$

Preuve. De l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned}|u^n_h - u^{n-1}_h|_{H^1(\Omega)} &= |u^n_h - u^n + u^n - u^{n-1} + u^{n-1} - u^{n-1}_h|_{H^1(\Omega)}\\ &\leq |u^n_h - u^n|_{H^1(\Omega)} + |u^{n-1} - u^{n-1}_h|_{H^1(\Omega)} + |u^n - u^{n-1}|_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

On va majorer le troisième terme du membre de droite. On retranche l'équation (3.9) de (2.2), on obtient

$$\int_\Omega \nabla(u - u^n)\cdot\nabla v \, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega (f - f^n) v \, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \partial_t(u - u_\tau) v \, d\boldsymbol{x} \quad, \forall v \in H^1_0(\Omega). \tag{3.28}$$

De (3.7), on voit que

$$u^n(x) = u_\tau(x,t) + \frac{t_n - t}{\tau_n}(u^n - u^{n-1})(x), \tag{3.29}$$

on remplace la relation (3.29) dans (3.28), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{t_n - t}{\tau_n}\int_\Omega \nabla(u^n - u^{n-1})\cdot\nabla v\, d\boldsymbol{x} &= \int_\Omega \partial_t(u-u_\tau)v\, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega (f - f^n)v\, d\boldsymbol{x}\\ &+ \int_\Omega \nabla(u - u_\tau)\cdot\nabla v\, d\boldsymbol{x}, \qquad \forall v\in H_0^1(\Omega),\end{aligned}$$

on pose $v = u^n - u^{n-1}$, et on intègre entre t_{n-1} et t_n, on voit que

$$\begin{aligned}&|u^n - u^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{t_n - t}{\tau_n}\,dt\\ &= \int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_\Omega \partial_t(u-u_\tau)(u^n - u^{n-1})\, d\boldsymbol{x}dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_\Omega (f-f^n)(u^n-u^{n-1})\, d\boldsymbol{x}dt\\ &+ \int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_\Omega \nabla(u-u_\tau)\cdot\nabla(u^n - u^{n-1})\, d\boldsymbol{x}dt.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{\tau_n}{2}|u^n - u^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)} \le &\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\partial_t(u-u_\tau)\|_{L^2(\Omega)}\|u^n - u^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}dt\\ &+\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|f - f^n\|_{L^2(\Omega)}\|u^n - u^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}dt\\ &+\int_{t_{n-1}}^{t_n}|u - u_\tau|_{H^1(\Omega)}|u^n - u^{n-1}|_{H^1(\Omega)}dt.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré-Fridriechs, on trouve

$$\frac{\tau_n}{2}|u^n - u^{n-1}|_{H^1(\Omega)} \le c\int_{t_{n-1}}^{t_n}\Big(\|\partial_t(u-u_\tau)\|_{L^2(\Omega)} + \|f - f^n\|_{L^2(\Omega)} + |u - u_\tau|_{H_0^1(\Omega)}\Big)dt.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne

$$\begin{aligned}\frac{\tau_n}{2}|u^n - u^{n-1}|_{H^1(\Omega)} \le\ & c\sqrt{\tau}_n(\|\partial_t(u-u_\tau)\|_{L^2(t_{n-1},t_n;L^2(\Omega))}\\ &+\|f - f^n\|_{L^2(t_{n-1},t_n;L^2(\Omega))} + |u - u_\tau|_{H^1(t_{n-1},t_n;L^2(\Omega))}).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}|u_h^n - u_h^{n-1}|_{H^1(\Omega)} \le\ & |u^n - u_h^n|_{H^1(\Omega)} + |u^{n-1} - u_h^{n-1}|_{H^1(\Omega)}\\ &+\frac{c}{\sqrt{\tau}_n}\Big(\|\partial_t(u - u_\tau\|_{L^2(t_{n-1},t_n;L^2(\Omega))}\\ &+\|f - f^n\|_{L^2(t_{n-1},t_n;L^2(\Omega))} + \|u - u_\tau\|_{L^2(t_{n-1},t_n;H_0^1(\Omega))}\Big).\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\eta^n \le \sqrt{\frac{\tau_n}{3}}\Big(|u^n - u_h^n)|_{H^1(\Omega)} + |u^{n-1} - u_h^{n-1}|_{H^1(\Omega)} + c\Big(\|\partial_t(u-u_\tau)\|_{L^2(t_{n-1},t_n;L^2(\Omega))} \\ + \|f - f^n\|_{L^2(t_{n-1},t_n,L^2(\Omega))} + \|u - u_\tau\|_{L^2(t_{n-1},t_n;H_0^1(\Omega))}\Big)\Big).$$

■

Pour prouver la propriété d'efficacité pour les indicateurs d'erreur spatials η_K^n, on s'appuie sur l'équation dite du "résidu" qui s'obtient en prenant v_h égal à 0 dans (3.19)

$$\begin{aligned}\forall v \in H_0^1(\Omega),\quad & a(u^n - u_h^n, v) + \Big(\frac{u^n - u_h^n}{\tau_n}, v\Big) - \Big(\frac{u^{n-1} - u_h^{n-1}}{\tau_n}, v\Big) \\ & = \sum_{K\in\mathcal{T}_h^n}\Big(\int_K (f^n - f_h^n)(\boldsymbol{x})(v)(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \\ & + \int_K \Big(f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}\Big)(\boldsymbol{x})(v)(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \\ & - \frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_K^0}\int_e [\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n](\sigma)(v)(\sigma)\,d\sigma\Big).\end{aligned} \tag{3.30}$$

En effet, par deux choix appropriés de la fonction v, on peut déduire de cette équation une majoration des deux termes figurant dans chaque η_K^n. On a besoin de la notation suivante.

Notation 3.2.6. *Pour tout K de $\mathcal{T}_h^n$, on désigne par : ω_K l'union des éléments de $\mathcal{T}_h^n$ qui partagent au moins une $d-1$ face avec K.*

Proposition 3.2.7. *On suppose f^n dans $L^2(\Omega)$, pour tout élément K de $\mathcal{T}_h^n$, l'indicateur d'erreur défini en* (3.20) *vérifie pour tout $1 \le n \le N$*

$$\eta_K^n \le c\Big(h_K\Big\|\frac{(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})}{\tau_n}\Big\|_{L^2(\omega_K)} \\ + |u^n - u_h^n|_{H^1(\omega_K)} + h_K\|f^n - f_h^n\|_{L^2(\omega_K)}\Big). \tag{3.31}$$

Preuve. On prouve la majoration en deux étapes.

1. Dans une première étape, on choisit tout d'abord la fonction v dans (3.30) égale à

$$v_K = \begin{cases}\Big(f_h^n + \Delta u_h^n - \dfrac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}\Big)\psi_K & \text{dans } K,\\ 0 & \text{dans } \Omega\setminus K,\end{cases} \tag{3.32}$$

tel que ψ_K est la fonction bulle introduit dans la Définition 1.5.3. On note que la fonction v_K est à support contenu dans K et s'annule sur ∂K et donc

$$\int_e [\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n](\sigma) v_K(\sigma) d\sigma = 0.$$

On en déduit de (3.30) que

$$a(u^n - u_h^n, v_K) + \left(\frac{u^n - u_h^n}{\tau_n}, v_K\right) - \left(\frac{u^{n-1} - u_h^{n-1}}{\tau_n}, v_K\right)$$
$$= \sum_{K \in \mathcal{T}_h^n} \left(\int_K (f^n - f_h^n)(\boldsymbol{x}) v_K(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} + \int_K \left(f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}\right)(\boldsymbol{x}) v_K(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}\right).$$

Donc

$$\int_K \left(f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}\right)(\boldsymbol{x}) v_K(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$$
$$= \int_K \nabla(u^n - u_h^n)(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla v_K(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} - \int_K (f^n - f_h^n)(\boldsymbol{x}) v_K(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$$
$$+ \int_K \frac{(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})}{\tau_n}(\boldsymbol{x}) v_K(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}.$$

On écrit explicitement v_K dans le membre de gauche,

$$\int_K \left(f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}\right)^2(\boldsymbol{x}) \psi_K(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$$
$$= \int_K \nabla(u^n - u_h^n)(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla v_K(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} - \int_K (f^n - f_h^n)(\boldsymbol{x}) v_K(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$$
$$+ \int_K \frac{(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})}{\tau_n}(\boldsymbol{x}) v_K(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}.$$

Et en passant à la norme de $L^2(K)$, on obtient

$$\left\| \left(f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}\right) \psi_K^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(K)}^2$$
$$= \int_K \nabla(u^n - u_h^n)(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla v_K(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} - \int_K (f^n - f_h^n)(\boldsymbol{x}) v_K(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$$
$$+ \int_K \frac{(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})}{\tau_n}(\boldsymbol{x}) v_K(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne

$$\left\| \left(f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}\right) \psi_K^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(K)}^2$$
$$\leq |u^n - u_h^n|_{H^1(K)} |v_K|_{H^1(K)} + \|f^n - f_h^n\|_{L^2(K)} \|v_K\|_{L^2(K)}$$
$$+ \left\| \frac{(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})}{\tau_n} \right\|_{L^2(K)} \|v_K\|_{L^2(K)}.$$

On utilise l'inégalité inverse (1.12)

$$c\left\|f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}\right\|_{L^2(K)} \leq \left\|\left(f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}\right)\psi_K^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^2(K)}.$$

Et donc

$$\begin{aligned}
c&\left\|f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}\right\|^2_{L^2(K)} \\
&\leq |u^n - u_h^n|_{H^1(K)}|v_K|_{H^1(K)} + \|f^n - f_h^n\|_{L^2(K)}\|v_K\|_{L^2(K)} \\
&\qquad + \left\|\frac{(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})}{\tau_n}\right\|_{L^2(K)}\|v_K\|_{L^2(K)}.
\end{aligned}$$

Encore une fois l'inégalité inverse (1.15)

$$|v_K|_{H^1(K)} \leq c\, h_K^{-1}\|v_K\|_{L^2(K)}.$$

En notant que la fonction ψ_K prend ses valeurs entre 0 et 1 sur K (voir Lemme 1.5.1), on en déduit

$$\begin{aligned}
\|v_K\|_{L^2(K)} &= \left\|\left(f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}\right)\psi_K\right\|_{L^2(K)} \\
&\leq c' \left\|f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}\right\|_{L^2(K)}.
\end{aligned}$$

Alors

$$|v_K|_{H^1(K)} \leq c\, h_K^{-1}\left\|f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}\right\|_{L^2(K)}.$$

On trouve

$$\begin{aligned}
c&\left\|f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}\right\|^2_{L^2(K)} \\
&\leq c\, h_K^{-1}|u^n - u_h^n|_{H^1(K)}\left\|f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}\right\|_{L^2(K)} \\
&+ c'\,\|f^n - f_h^n\|_{L^2(K)}\left\|f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}\right\|_{L^2(K)} \\
&+ c'\left\|\frac{(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})}{\tau_n}\right\|_{L^2(K)}\left\|f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}\right\|_{L^2(K)}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
&\left\|f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}\right\|_{L^2(K)} \\
&\leq c\left(h_K^{-1}|u^n - u_h^n|_{H^1(K)} + \|f^n - f_h^n\|_{L^2(K)} + \left\|\frac{(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})}{\tau_n}\right\|_{L^2(K)}\right).
\end{aligned}$$

En multipliant cette dernière relation par h_K, on obtient

$$\begin{aligned} h_K \left\| f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} \right\|_{L^2(K)} \\ \leq c \Bigg(|u^n - u_h^n|_{H^1(K)} + h_K \| f^n - f_h^n \|_{L^2(K)} \\ + h_K \left\| \frac{(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})}{\tau_n} \right\|_{L^2(K)} \Bigg). \end{aligned} \tag{3.33}$$

2. Dans une deuxième étape, pour tout élément e de $\mathcal{E}_K^0$, soit K' l'autre élément de $\mathcal{T}_h^n$ contenant e. On choisit ici la fonction v dans (3.30) égale à

$$v_e = \begin{cases} \mathcal{R}_{K,e}([\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n]\psi_e) & \text{dans } K, \\ \mathcal{R}_{K',e}([\partial_{\boldsymbol{n}_{K'}} u_h^n]\psi_e) & \text{dans } K', \\ 0 & \text{dans } \Omega \setminus (K \cup K'), \end{cases} \tag{3.34}$$

où les opérateurs $\mathcal{R}_{K,e}$ et $\mathcal{R}_{K',e}$ sont introduits dans le Lemme 1.4.4. En utilisant cette fonction dans (3.30), on voit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\kappa \in \{K,K'\}} \sum_{e \in \mathcal{E}_\kappa^0} \int_e [\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n](\sigma) v_e(\sigma)\, d\sigma \\ = -a(u^n - u_h^n, v_e) - \left(\frac{(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})}{\tau_n}, v_e \right) \\ + \sum_{\kappa \in \{K,K'\}} \Bigg(\int_\kappa (f^n - f_h^n)(\boldsymbol{x}) v_e(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \\ + \int_\kappa \left(f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} \right)(\boldsymbol{x}) v_e(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \Bigg). \end{aligned} \tag{3.35}$$

On a par définition de ψ_e, la fonction $[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n]\psi_e$ s'annule sur ∂e de sorte que v_e s'annule sur $\partial(K \cup K')$ et donc

$$\frac{1}{2} \sum_{\kappa \in \{K,K'\}} \sum_{e \in \mathcal{E}_\kappa^0} \int_e [\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n](\sigma) v_e(\sigma)\, d\sigma = \frac{1}{2} \int_e [\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n](\sigma) v_e(\sigma)\, d\sigma.$$

On combine cette égalité avec (3.35), on obtient

$$\begin{aligned} \int_e [\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n](\sigma) \psi_e(\sigma)\, d\sigma \\ = -a(u^n - u_h^n, v_e) - \left(\frac{(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})}{\tau_n}, v_e \right) \\ + \sum_{\kappa \in \{K,K'\}} \Bigg(\int_\kappa (f^n - f_h^n)(\boldsymbol{x}) v_e(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \\ + \int_\kappa \left(f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} \right)(\boldsymbol{x}) v_e(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \Bigg). \end{aligned}$$

Alors

$$\|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n]\psi_e^{\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(e)} = \sum_{\kappa\in\{K,K'\}} \Big(-\int_\kappa \nabla(u^n - u_h^n)(\boldsymbol{x})\cdot\nabla v_e(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$$
$$- \int_\kappa (\frac{(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})}{\tau_n})(\boldsymbol{x}) v_e(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$$
$$+ \int_\kappa (f^n - f_h^n)(\boldsymbol{x}) v_e(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$$
$$+ \int_\kappa (f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n})(\boldsymbol{x}) v_e(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}\Big).$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n]\psi_e^{\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(e)} \le \sum_{\kappa\in\{K,K'\}} \Big(|u^n - u_h^n|_{H^1(\kappa)} |v_e|_{H^1(\kappa)}$$
$$+ \left\| \frac{(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})}{\tau_n} \right\|_{L^2(\kappa)} \|v_e\|_{L^2(\kappa)}$$
$$+ \|f^n - f_h^n\|_{L^2(\kappa)} \|v_e\|_{L^2(\kappa)}$$
$$+ \left\| f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} \right\|_{L^2(\kappa)} \|v_e\|_{L^2(\kappa)} \Big).$$

On utilise l'inégalité inverse (1.13),

$$c\, \|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n]\|_{L^2(e)} \le \|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n]\psi_e^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(e)}.$$

Ce qui entraîne

$$c\, \|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n]\|^2_{L^2(e)} \le \sum_{\kappa\in\{K,K'\}} \Big(|u^n - u_h^n|_{H^1(\kappa)} |v_e|_{H^1(\kappa)}$$
$$+ \left\| \frac{(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})}{\tau_n} \right\|_{L^2(\kappa)} \|v_e\|_{L^2(\kappa)}$$
$$+ \|f^n - f_h^n\|_{L^2(\kappa)} \|v_e\|_{L^2(\kappa)}$$
$$+ \left\| f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} \right\|_{L^2(\kappa)} \|v_e\|_{L^2(\kappa)} \Big).$$

On utilise l'inégalité (1.6),

$$|v_e|_{H^1(\kappa)} + h_K^{-1} \|v_e\|_{L^2(\kappa)} \le c\, h_e^{-\frac{1}{2}} \|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n]\psi_e\|_{L^2(e)}.$$

On obtient

$$\|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n]\|^2_{L^2(e)} \leq c \sum_{\kappa\in\{K,K'\}} \Bigg(h_e^{-\frac{1}{2}} |u^n - u_h^n|_{H^1(\kappa)} \|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n]\psi_e\|_{L^2(e)}$$
$$+ h_K h_e^{-\frac{1}{2}} \left\| \frac{(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})}{\tau_n} \right\|_{L^2(\kappa)} \|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n]\psi_e\|_{L^2(e)}$$
$$+ h_K h_e^{-\frac{1}{2}} \|f^n - f_h^n\|_{L^2(\kappa)} \|\|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n]\psi_e\|_{L^2(e)}$$
$$+ h_K h_e^{-\frac{1}{2}} \left\| f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} \right\|_{L^2(\kappa)} \|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n]\psi_e\|_{L^2(e)} \Bigg).$$

Du Lemme 1.5.1, ψ_e est inférieur à 1, on aura

$$\|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n]\psi_e\|_{L^2(e)} \leq c' \, \|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n]\|_{L^2(e)}.$$

On trouve

$$\|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n]\|^2_{L^2(e)} \leq c \sum_{\kappa\in\{K,K'\}} \Bigg(h_e^{-\frac{1}{2}} |u^n - u_h^n|_{H^1(\kappa)} \|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n]\|_{L^2(e)}$$
$$+ h_K h_e^{-\frac{1}{2}} \left\| \frac{(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})}{\tau_n} \right\|_{L^2(\kappa)} \|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n]\|_{L^2(e)}$$
$$+ h_K h_e^{-\frac{1}{2}} \|f^n - f_h^n\|_{L^2(\kappa)} \|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n]\|_{L^2(e)}$$
$$+ h_K h_e^{-\frac{1}{2}} \left\| f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} \right\|_{L^2(\kappa)} \|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n]\|_{L^2(e)} \Bigg).$$

En multipliant par $h_e^{\frac{1}{2}}$, on obtient

$$h_e^{\frac{1}{2}} \|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n]\|_{L^2(e)} \leq c \sum_{\kappa\in\{K,K'\}} \Bigg(|u^n - u_h^n|_{H^1(\kappa)} + h_K \left\| \frac{(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})}{\tau_n} \right\|_{L^2(\kappa)}$$
$$+ h_K \|f^n - f_h^n\|_{L^2(\kappa)} + h_K \left\| f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} \right\|_{L^2(\kappa)} \Bigg).$$

On passe à la somme sur e dans $\mathcal{E}_K^0$,

$$\sum_{e\in\mathcal{E}_K^0} h_e^{\frac{1}{2}} \|[\partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h^n]\|_{L^2(e)}$$
$$\leq c \sum_{e\in\mathcal{E}_K^0} \sum_{\kappa\in\{K,K'\}} \Bigg(|u^n - u_h^n|_{H^1(\kappa)} + h_K \left\| \frac{(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})}{\tau_n} \right\|_{L^2(\kappa)}$$
$$+ h_K \|f^n - f_h^n\|_{L^2(\kappa)} + h_K \left\| f_h^n + \Delta u_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} \right\|_{L^2(\kappa)} \Bigg). \tag{3.36}$$

En combinant (3.33) et (3.36) et par définition de $\mathcal{E}_K^0$, κ devient tout élément K' qui partage une arrête $d = 2$ (ou une face en $d = 3$) avec K, ce qui revient à ω_K, on trouve l'estimation désirée. ■

En vertu de la propriété de fiabilité prouvée dans le Théorème 3.2.4 et la propriété d'efficacité des indicateurs d'erreur prouvée dans les Propositions 3.2.5 et 3.2.7, l'analyse a posteriori pour l'équation de la chaleur est optimale au sens de la Définition 1.5.2.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'équation de la chaleur en décrivant une formulation variationnelle correspondante puis en proposant une discétisation usuelle par élément finis et schéma d'Euler implicite, ainsi que ses propriétés de stabilité ont été démontrées. Ensuite nous avons établi des estimations d'erreur a priori. Puis, nous avons proposé deux familles d'indicateur d'erreur temporelle et spatiale et nous avons montré son optimalité. Cette étude pour l'équation de la chaleur ainsi que les résultats obtenus dans [24] et [9] pour le problème de Stokes, ont permis de définir des indicateurs locaux d'erreur (spatiale) pour le problème de Navier-Stokes traité par un schéma en temps aux caractéristiques d'ordre 1. Ces indicateurs, par résidu, ont été introduits dans le code de thermo-hydraulique N3S et au vu des tests réalisés, ils offrent un comportement numérique satisfaisant [5].

Bibliographie

[1] R.A. Adams and J. Fournier. *Sobolev Spaces.* Academic Press, 2003.

[2] I. Babuška and W. C. Rheinboldt. *Error estimates for adaptative finite element computations.* SIAM, J. Numer. Anal., **15** : $736-754, 1978$.

[3] I. Babuška and W. C. Rheinboldt. *A posteriori error estimates for the finite element method.* Int. J. Num. Meth. Engrg., **12** : $1597--1615, 1978$.

[4] A. Bergam, C. Bernardi and Z. Mghazli. *A posteriori analysis of the finite element discretization of some parabolic equation,* Mathematics Computation, **74** : $1117-1138, 2004$.

[5] C. Bernardi and O. Bonnin, C. Langouët and B. Métivet. *Residual error indicators for linear problems. Extension to the Navier-Stokes equations,* Proc. Int. Conf. Finite Elements in Fluids, Venezia, $347-356$, 1995.

[6] C. Bernardi and V. Girault. *A local regularization operator for triangular and quadrilateral finite elements,* SIAM. Numer. Anal., **35** : $1893-1916$, 1998.

[7] C. Bernardi, Y. Maday, and F. Rapetti. *Discrétisations Variationnelles de Problèmes aux Limites Elliptiques.* volume 45 of Mathématiques & Applications. Springer-Verlag, Paris, 2004.

[8] C. Bernardi and B. Métivet. *Indicateurs d'erreur pour l'équation de la chaleur.* Revue européenne des éléments finis. **9** : $425-438, 2000$.

[9] C. Bernardi, B. Métivet, and R. Verfürth. *Analyse numérique d'indicateurs d'erreur.* Rapport technique, Université Paris 6, 1993.

[10] C. Bernardi and G. Raugel. *Approximation numérique de certaines équations paraboliques non linéaire.* R.A.I.R.O. Anal. Numer., **18** : 237-285, 1984.

[11] M. Bieterman and I. Babuška. *The finite element method for parabolic equations. I. A posteriori error estimation.* Num. Math., **40** : 339-371, 1982.

[12] M. Bieterman and I. Babuška. *The finite element method for parabolic equations. II. A posteriori error estimation and adaptive approach.* Num. Math., **40** : 373-406, 1982.

[13] J. Céa. *Approximation variationnelle des problèmes aux limites.* Ann. Inst. Fourier Grenoble, **14** : 345-444, 1964.

[14] P. Clément. *Approximation by finite element functions using local regularization.* Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique, **9**(R2) : 77-84, 1975.

[15] M. Crouzeix,P. -A. Raviart, *"Approximation des problèmes d'évolution",* Interne de l'université de Rennes, 1982.

[16] R. Dautray and J.-L. Lions. *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques. Vol. 1.* Masson, Paris, 1987.

[17] P. Grisvard. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, volume 24 of *Monographs and Studies in Mathematics.* Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.

[18] F. Hecht. *Métriques et indicateurs d'erreur.* In cours maillage. Paris, INRIA, CEA, EDF, 2003.

[19] P. D. Lax and A. N. Milgram. *Parabolic equations.* Contributions to the theory of partial differential equations, Annals of Mathematics Studies, no. 33, pages 167–190. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1954.

[20] J.-L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications, Vol. 1.* Dunod, Paris, 1968.

[21] M. Picasso. *Adaptative finite elements for a linear parabolic problem.* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **167** : $223-237, 1998$.

[22] M. Schatzman. *Analyse Numérique. Cours et Exercices pour la Licence.* InterEditions, Paris, 1991.

[23] L. Schwartz. *Théorie des Distributions.* Hermann, Paris, 1966.

[24] R. Verfürth. *A posteriori error estimation and adaptative mesh-refinement techniques.* Comput. Appl. Math., **50** : $67-83$, 1994.

[25] R. Verfürth. *A posteriori error estimates for nonlinear problems :* $L^r(0,T;W^{1,\rho}(\Omega))$*-error estimates for finite element discretizations of parabolic equations.* Numer. Methods Partial Differential Equations, **14** : $487-518$, 1998.

[26] R. Verfürth. *Error estimates for somme quasi-interpolation operators.* M2AN Math.Model. Numer. Anal., **33** : 695 − 713, 1999.

[27] R. Verfürth. *A posteriori error estimates for finite element discretizations of heat equation.* Calcolo, **40** : 195 − 212, 2003.