




République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel



Faculté des Sciences et de la Technologie
Département d'Electronique

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Présenté en vue de l'obtention du diplôme

de **MASTER** en Electronique

Option : **Electronique des Systemes Embarqués**

Thème :

Récepteurs complets à étalement de
spectre par séquence chaotique directe

Encadré par :


Mr. Moussa Yahia

Réalisé par :

Abdenour Biad

Med-Wassim Boussetoua

Année Universitaire
2020/2021





Remerciement

Avant tout, nous tenons à remercier DIEU le tout puissant pour nous avoir donné la force et la patience pour mener à terme ce travail.

Nous remercions nos familles qui nous ont toujours encouragés et soutenues durant toutes nos années d'études.

*Nos plus grands remerciements vont à notre encadreur **Mr YAHIA Moussa** pour la sollicitude avec laquelle il a suivi et guidé ce travail.*

Nous remercions également les membres de jury qui nous feront l'honneur de juger ce modeste travail.

Enfin, nos remerciements à tous ceux qui ont participés de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

BIAD Abdenour & BOUSSETOUA Mohamed Wassim



Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

À la mémoire de mon père BIAD Abderahman.

À ma mère pour son affection et son sacrifice.


A mes sœurs, mes beaux frères, mes neveux et mes nièces.

A toute la famille « BIAD » et mes proches.


À Tous mes amis sans exception.

Bien sûr mon binôme « Mohamed wassim ».

À Tous mes collègues de master 2 système embarqué . Et tous les étudiants du Master 2 électronique de la promotion 2020-2021 sans exception.



BIAD Abdenour






Dédicaces

*Rien n'est aussi beau à offrir que le fruit d'un labeur qu'on dédie
Du fond du cœur à ceux qu'on aime et qu'on remercie
En exprimant la gratitude et la reconnaissance durant toute
Notre existence.*

Je dédie ce modeste travail :

*À Ma mère, sans elle, je n'aurais pas abouti à ce stade d'étude,
que Dieu puisse m'aider à l'honorer, la servir et la combler
À mon cher père qui reste en paix « incha Allah » je ne
t'oublierai jamais
À mes frères et sœurs, toute la famille « BOUSSETOUA » et mes proches
À Tous mes amis sans exception.*



Bien sûr mon binôme « Abd Ennour ».

*À Tous mes collègues de master 2 système embarqué .Et tous les
étudiants du Master 2 électronique de la promotion 2020-2021
sans exception*



BOUSSETOUA Mohamed Wassim



Sommaire

Introduction générale..... 1

Chapitre 1 : Systèmes dynamiques chaotiques et transmission de l'information.

1.1 Introduction..... 3

1.2 Le chaos : définition et propriétés..... 3

 1.2.1 Définition des systèmes dynamiques..... 3

 1.2.2 Comportement des systèmes dynamiques..... 6

 1.2.3 Évaluation du comportement dynamique..... 9

1.3 Synchronisation du chaos..... 12

 1.3.1 Synchronisation identique..... 13

 1.3.2 Synchronisation par filtrage de Kalman Étendu..... 15

1.4 Systèmes à étalement de spectre..... 20

 1.4.1 Étalement de spectre par séquence directe (DS-SS)..... 21

1.5 Transmissions à porteuses chaotiques..... 23

 1.5.1 Masquage chaotique..... 25

 1.5.2 Chaos Shift Keying (CSK)..... 25

1.6 Conclusion..... 31

Chapitre 2 : Filtres de Kalman non-linéaires.

2.1 Introduction..... 32

2.2 Filtre de Kalman Étendu (EKF)..... 33

 2.2.1 Modèle général de filtrage..... 34

 2.2.2 Principe du filtre de Kalman Étendu (EKF)..... 35

 2.2.2.1 Prédiction du vecteur d'état 35

Sommaire

2.2.2.1 Prédiction de la mesure.....	36
2.3 Filtre de Kalman Unscented.....	37
2.3.1 Transformation Unscented.	37
2.3.2 Transformation scaled-Unscented.....	40
2.3.3 Construction du modèle de filtrage récursif UKF.....	42
2.4 Conclusion	44
 Chapitre 3 : Le Filtre de Kalman Polynomial Exact.	
3.1 Introduction.....	45
3.2 Transformation Polynomiale Exacte.....	46
3.3 Filtre de Kalman Polynomial Exact (ExPKF).....	51
3.4 Application du filtrage ExPKF à la synchronisation chaotique.....	54
3.5 Conclusion.....	58
 Chapitre 4 : Transmission et réception avec le modèle à étalement de spectre par séquence chaotique directe.	
4.1 Introduction.....	60
4.2 Emetteur du système “Chaotic DS-SS” (CD3S).....	60
4.3 Modèles de base pour les récepteurs CD3S.....	61
4.3.1 Récepteur à estimation parallèle du code et du symbole.....	61
4.4 Résultats obtenus par simulation numérique	65
4.5 Conclusion.....	67
 Conclusion générale	 68
Bibliographie	70

Liste des figures

Fig.1.1	Exemple de trajectoire pour le système Lorenz.....	5
Fig.1.2	Étude du comportement dynamique pour la fonction logistique (eq. 1.8) : a) génération de la séquence récursive (web diagram) ; b) le diagramme de , bifurcation ; c,d,e) séquence générée et états limites pour $r = 2, 3.2, 3.55$; f) séquences générées et sensibilité aux CI pour $r = 3.9$ (comportement chaotique).....	7
Fig.1.3	Sensibilité aux CI - système de Lorenz.....	9
Fig.1.4	Synchronisation Maître-Esclave en utilisant la décomposition en sous- systèmes.....	14
Fig.1.5	Évolution des états du système maître et de l'esclave avant et après synchronisation: a) $y = X_2$; b) $z = X_3$; c) Diagramme de synchronisation pour l'état $y = X_2$; d) Puissance de l'erreur de synchronisation.....	15
Fig.1.6	Structure de l'estimateur récursif EKF.....	16
Fig.1.7	Exemple de synchronisation chaotique par filtrage de Kalman Etendu : a) séquence initiale vs séquence estimée ; b) diagramme de synchronisation ; c) évolution du gain Kalman K_k ; d) évolution de la covariance des erreurs P_k par rapport à la variance du bruit d'observation R	18
Fig.1.8	Modèle d'un système de communication à étalement de spectre.....	21
Fig.1.9	Modèle d'un système de communication à étalement de spectre par séquence directe.....	22
Fig.1.10	Exemple d'étalement de spectre par séquence directe : a) évolution en temps ; b) DSP du signal informationnel et signal étalé	22
Fig.1.11	Système à spectre étalé par sauts de fréquence : a) Distribution en temps et en fréquence de l'énergie émise ; b) DSP du signal étalé.....	23
Fig.1.12	Modulation directe du signal informationnel par une porteuse haute fréquence chaotique	24
Fig.1.13	Modulation en bande de base du signal informationnel par le signal chaotique, combinée avec une mise sur porteuse classique.....	24

Liste des figures

Fig.1.14 Modulation par masquage chaotique	25
Fig.1.15 Système générique de communication CSK.....	26
Fig.1.16 Récepteur cohérent CSK.....	27
Fig.1.17 Récepteur non-cohérent CSK/COOK.....	28
Fig.1.18 Récepteur non-cohérent DCSK.....	30
Fig.2.1 Un cycle de l'estimation d'état d'un système non-linéaire (filtre de Kalman Etendu).....	36
Fig.2.2 Le principe de la transformation Unscented.....	37
Fig.2.3 Un exemple de distribution de sigma points pour une v.a. gaussienne bi- dimensionnelle dans le cas de la transformation Unscented.....	38
Fig.3.1 EQM/R Performances de ExPKF, UsKF : $x_0 \sim G(0.4, 0.25)$. $Q = \frac{R}{10}$, 10^3 itérations de transition, (Nombre d'échantillons : $N_s = 10^6$).....	58
Fig.4.1 Schéma général d'un système CD3S.....	62
Fig.4.2 Récepteur CD3S basé sur une estimation Code/Symbole duale.....	62
Fig.4.3 L'estimateur Dual Code/Symbole.....	63
Fig. 4.4 a) Diagramme de synchronisation pour le récepteur parallèle C/S (implémentation UKF) ; b) Estimation du symbole émis.....	63
Fig. 4.5 – Estimation du symbole informationnel par l'ExPKF.....	65
Fig. 4.6 Performances BER (bit-error-rate) pour polynôme Kalman filtre (ExPKF) et unscented Filtre de Kalman (UKF).....	66

Liste des tableaux

Tab.1.1	Classification des régimes permanents en fonction du spectre Lyapunov.....	11
Tab.2.1	Performances des transformations EKF et Unscented pour différentes configurations de la distribution initiale et de non-linéarité.....	42
Tab.3.1	Les moments d'ordre un et deux de la v.a. résultant de la transformation.....	55

Glossaire

BER	Bit Error Rate
BPSK	Binary Phase Shift Keying
C/S	Récepteur à filtrage de Kalman parallèle <i>Code/Symbole</i>
CD3S	Chaotic Direct-Sequence Spread Spectrum
CDMA	Code Division Multiple Acces
CI	Conditions Initiales
COOK	Chaos On-Off Keying
CSK	Chaos Shift Keying
DCSK	Differential Chaos Shift Keying
DD2	Divided Difference - 2nd order
DLL	Delay Locked Loop
DS	Direct Sequence
DSP	Densité Spectrale de Puissance
EKF	Extended Kalman Filter
EQM = MSE	Erreur Quadratique Moyenne
ExPKF	Exact Polynomial Kalman Filter
FSK	Frequency Shift Keying
FH	Frequency Hopping
GPS	Global Positioning System
IS-95	Interim Standard 95
KF	Kalman Filter
LMMSE	Linear Minimum Mean Square Error
PSK	Phase Shift Keying
SNR	Signal to Noise Ratio
UKF	Unscented Kalman Filter
v. a.	Variable Aléatoire

Notations mathématiques

\mathbb{R}	Ensemble des réels
\mathbb{Z}	Ensemble des entiers
\mathbb{N}	Ensemble des entiers naturels
$\dot{\mathbf{x}}$	Dérivée du vecteur d'état \mathbf{x}
$\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}$	Gradient de la fonction \mathbf{f} par rapport au vecteur \mathbf{x}
λ_i	Exposant de Lyapunov de rang i
$N(\mu, \sigma^2)$	Distribution normale de moyenne μ et de variance σ^2
$\hat{\mathbf{x}}$	Vecteur \mathbf{x} estimé
N_x	Dimension du vecteur \mathbf{x}
$E[\cdot]$	Espérance mathématique
$p(\mathbf{x} Y)$	Densité de probabilité de la v. a. \mathbf{x} conditionnée au vecteur d'observation \mathbf{Y}
v_k	Etat associé au bruit de processus
n_k	Etat associé au bruit d'observation
\mathbf{Q}	Covariance du bruit de processus
\mathbf{R}	Covariance du bruit d'observation
$\bar{\mathbf{x}}$	Valeur moyenne de la v.a. \mathbf{x}
\mathbf{P}_{xx}	Matrice de covariance pour la v.a. \mathbf{x}
\mathbf{P}_{xy}	Matrice de trans-covariance entre les v.a. \mathbf{x} et \mathbf{y}
$\hat{\mathbf{x}}_{k k}$	Etat estimé à l'instant k
$\mathbf{P}_{k k}$	Covariance des erreurs à l'instant k
$\hat{\mathbf{x}}_{k+1 k}$	Etat prédit à l'instant $k + 1$, en sachant la statistique à l'instant k
$\mathbf{P}_{k+1 k}$	Covariance des erreurs prédite à l'instant $k + 1$, en sachant la statistique à l'instant k
\mathbf{K}_k	Gain de Kalman à l'instant k
$\mathbf{x}^{(i)}$	Point <i>sigma</i> de rang i (transformation <i>Unscented</i>)

Notations mathématiques

$W^{(i)}$	Pondération associée au point $x^{(i)}$ (transformation <i>Unscented</i>)
C_i^n	Coefficient binomial
$m_{i,j}^x$	Vecteur de moments centrés de la v.a. x avec les ordres compris entre i et j
$0_{i \times j}$	Matrice de dimension $i \times j$ avec tous les éléments nuls
1_N	Vecteur colonne de dimension N avec tous les éléments égaux à 1
\odot	Produit de Hadamard
$T_p(x)$	Polynôme de Chebyshev d'ordre p
b_k	Variable associée aux symboles informationnels à l'instant k
F_b	Fréquence symbole
c_k	Variable associée au code d'étalement (chip) dans un système CDSS, à l'instant k
F_c	Fréquence chip
	Variables associées à l'estimation de phase, à l'instant k



Introduction Générale

Introduction générale

Depuis le début de 20^e siècle, le monde a connu une évolution spectaculaire dans les domaines technologiques, plus précisément ceux de l'Informatique et d'Electronique, ce qui a donné naissance à plusieurs techniques de transmission efficace et appropriée. Parmi ces nouvelles techniques, on trouve l'application des systèmes chaotiques à la transmission de l'information et en particulier aux systèmes à étalement de spectre. Notre étude se focalise sur cette application qui a pour intérêt de sécuriser les transmissions.

Le domaine des mathématiques s'intéresse depuis longtemps aux systèmes dynamiques, mais au cours de ces dernières années, de multiples applications dans divers domaines des sciences de l'ingénieur ont été introduites. Un de ces domaines d'applications est la communication numérique.

Dans les systèmes de communication, la synchronisation est fondamentale pour une transmission réussie. La synchronisation chaotique au niveau du récepteur cherche à dupliquer le signal chaotique envoyé par l'émetteur. Pour le moment, la synchronisation entre deux systèmes dynamiques chaotiques nécessaires à la récupération de l'information transmise est difficile à réaliser. Pour notre recherche bibliographique montre que les travaux déjà faites sur la synchronisation chaotique sont concentrés dans un premier temps sur une solution basée sur les méthodes classiques de synchronisation des systèmes de transmission à étalement de spectre [COS93].

L'objectif du travail présenté dans ce document est le développement d'une structure d'un récepteur basé sur le principe du filtrage de Kalman non linéaire, d'après l'étude de la synchronisation chaotique en utilisant des méthodes d'estimation d'état avec un accent important sur la mise en place d'une méthode de filtrage de Kalman non-linéaire, et aussi mise en place une structure de récepteurs adaptés aux systèmes de communication à porteuse chaotique.

Pour mener à bien le sujet de notre modeste mémoire nous l'avons partagé en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre nous avons exposé les systèmes dynamiques chaotiques, ensuite la synchronisation du chaos et leurs méthodes. Puis nous avons exposé les systèmes à étalement de spectre, ainsi que les transmissions à porteuse chaotique.

Le deuxième chapitre est dédié aux types des filtres de kalman non linéaires: filtres de Kalman étendu (EKF) et le filtre de Kalman Unscented (UKF). Plusieurs méthodes de

Introduction générale

filtrage de Kalman non-linéaires ont été proposées récemment pour éviter les limitations imposées par le EKF, sans un coût de calcul additionnel significatif, le UKF [JU97], dans le contexte de la commande non-linéaire et davantage développé par Wan et van der Merwe [WvdM01], aborde le problème d'approximation d'une manière bien différente du EKF.

Dans le troisième chapitre, on a présenté une nouvelle méthode de filtrage Kalman non-linéaire d'une manière exacte sur le model polynomial ainsi les statistiques (moyenne, covariance et variance) sont basées sur la transformation polynomiale exacte et pour valider cette technique un algorithme de synchronisation chaotique a été réalisé sous Matlab.

Le dernier chapitre présente l'émetteur du système "Chaotic DS-SS" (CD3S) et ces récepteurs à estimation parallèle du code et du symbole. Le système CD3S a été développé [HBM94, APB02] à partir d'un modèle classique de transmission à étalement du spectre de type séquence directe. L'idée principale est de remplacer le code d'étalement binaire, généré classiquement avec des registres à décalage, par une séquence chaotique à valeurs réelles dans un intervalle fixe.



Chapitre 1

*Systemes dynamiques
chaotiques et
transmission de
l'information*

1.1 Introduction

Les systèmes dynamiques étranges (chaotiques) sont connus depuis longtemps dans le domaine des mathématiques mais c'est seulement au cours de la dernière décennie que les applications concrètes se sont multipliées. Ce chapitre est une synthèse bibliographique compacte sur les transmissions chaotiques, dont l'intérêt principal est de mieux mettre en évidence l'originalité des résultats que nous proposerons par la suite.

Dans ce chapitre on va parler premièrement des aspects généraux des systèmes dynamiques chaotiques et dans la deuxième section on continue par la présentation des méthodes de synchronisation associées à ce type de systèmes. Les aspects de communications numériques par méthodes à étalement de spectre, et dans la dernière partie des solutions "classiques" destinées aux systèmes de communications à porteuse chaotique sont évoquées.

1.2 Le chaos : définition et propriétés

Bien qu'il n'existe pas une définition du chaos adoptée de façon universelle dans la littérature, on pourrait dire que c'est un phénomène qui peut apparaître dans les systèmes dynamiques déterministes non linéaires caractérisés par une évolution qui semble aléatoire et un aspect fondamental d'instabilité appelé sensibilité aux conditions initiales, ce qui le rend imprédictible en pratique à long terme [GON04].

Du point de vue mathématique la notion générale de système dynamique est définie à son tour à partir d'un ensemble de variables qui forment le vecteur d'état $\mathbf{x} = \{x_i \in \mathbb{R}\}, i = 1 \dots n$ où n représente la dimension du vecteur. Ce jeu de variables a la propriété de caractériser complètement l'état instantané du système dynamique générique. En associant en plus un système de coordonnées on obtient l'espace d'état qui est appelé également l'espace de phase. Conjointement avec l'espace d'état un système dynamique est défini aussi par une loi d'évolution, généralement désignée par dynamique, qui caractérise l'évolution de l'état du système en temps. La notion de déterminisme provient du fait que le système considéré est complètement caractérisé par son état initial et sa dynamique.

1.2.1 Définition des systèmes dynamiques

Un système dynamique est un système physique qui évolue. Il peut évoluer dans le temps ou par rapport à une autre variable suivant l'espace de phase considéré.

La trajectoire d'un objet en mouvement dans le temps est donc un système dynamique, ainsi que le nombre d'individu d'une population quelconque dans le temps, encore les valeurs d'une fonction par rapport à une variable x [JUT06].

Un système dynamique en temps continu est décrit par un système d'équations différentielles, alors qu'en temps discret on parle d'un système d'équations aux différences finies [Ken94, Ser00, Ser04] :

– temps continu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), t) \quad (1.1)$$

où $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne la dynamique du système.

Si on associe à cette dynamique un état initial $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$, pour chaque couple chois (\mathbf{x}_0, t_0) on peut identifier une solution unique $\Phi(\cdot; \mathbf{x}_0, t_0): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\Phi(t_0; \mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{x}_0 \quad \text{et} \quad \dot{\Phi}(t; \mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{F}(\Phi(t; \mathbf{x}_0, t_0)) \quad (1.2)$$

Cette solution unique déterminée avec l'aide des équations (1.2), et qui fournit l'ensemble d'états successifs occupés par le système à chaque instant t , s'appelle généralement trajectoire.

On considère l'exemple du célèbre système de Lorenz donné par les équations suivantes [Lor63] :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma (y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= x (\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - b \end{aligned} \quad (1.3)$$

Les paramètres pour l'exemple de trajectoire donné dans la figure 1.1 ont été choisis de la manière suivante : $\sigma = 10, \rho = 28, b = 8/3$ avec la condition initiale $(x_0, y_0, z_0) = (2, 5, 20)$.

On observe que la dynamique du système de Lorenz donnée par les équations (1.3) est indépendante de l'instant t considéré, et généralement ce type de système est qualifié d'autonome. La dynamique dans ce cas particulier a la forme suivante :

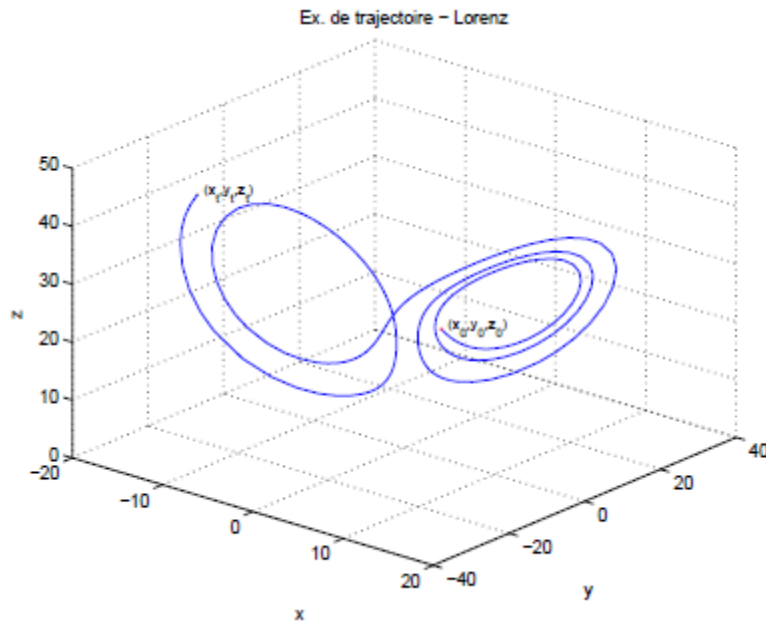


Fig. 1.1 – Exemple de trajectoire pour le système Lorenz

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \quad (1.4)$$

– temps discret

Comme il a été déjà précisé le système dynamique est dans ce cas représenté par des équations aux différences finies, avec le modèle général suivant :

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{G}(\mathbf{x}(k), k) \quad (1.5)$$

où $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne la dynamique du système en temps discret .

De même qu'en temps continu, si on associe à cette dynamique un état initial $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(k_0)$, pour chaque couple choisi (\mathbf{x}_0, k_0) on peut identifier une solution unique $\Phi_{\mathbf{G}}(\cdot; \mathbf{x}_0, k_0) : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\Phi_{\mathbf{G}}(k_0; \mathbf{x}_0, k_0) = \mathbf{x}_0 \text{ et } \Phi_{\mathbf{G}}(k + 1; \mathbf{x}_0, k_0) = \mathbf{G}(\Phi_{\mathbf{G}}(k; \mathbf{x}_0, k_0), k) \quad (1.6)$$

En temps discret on définit aussi le système autonome comme une dynamique qui ne dépend pas de l'instant k :

$$x(k + 1) = \mathbf{G}(x(k)) \quad (1.7)$$

1.2.2 Comportement des systèmes dynamiques

A partir d'un état initial x_0 et après un régime transitoire, la trajectoire d'un système dynamique atteint une région limitée de l'espace des phases. Ce comportement asymptotique obtenu pour $t, k \rightarrow \infty$ est une des caractéristiques les plus importantes à étudier pour tout système dynamique. Si dans le cas d'un système linéaire la solution asymptotique est indépendante de la condition initiale et unique, en présence de non linéarités il existe une plus grande variété de régimes permanents, parmi lesquelles on trouve, par ordre de complexité : points d'équilibre, solutions périodiques, solutions quasi-périodiques et chaos, respectivement. Il faut préciser que cette fois le comportement développé par un système dynamique particulier est fortement dépendant de la condition initiale choisie [Ser97].

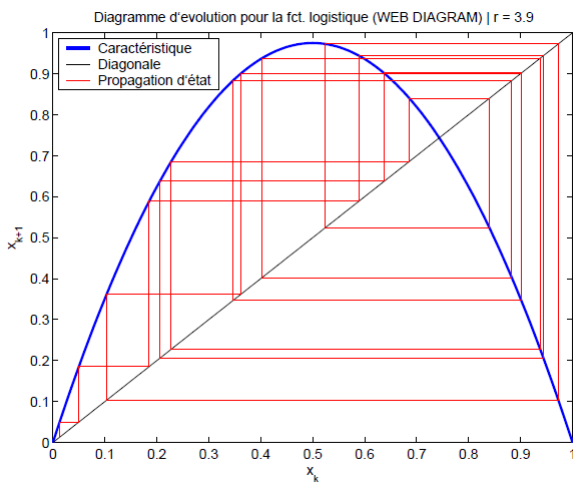
Par la suite on va définir et illustrer les comportements évoqués ci-dessus, en utilisant une dynamique très connue dans la théorie des systèmes non-linéaires ; Il s'agit de l'équation logistique définie par l'expression suivante [Kra99, Wei] :

$$x_{k+1} = f(x_k) = rx_k(1 - x_k) \quad (1.8)$$

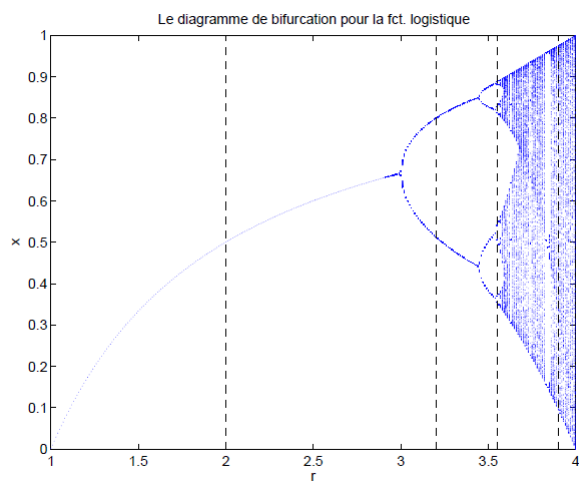
Dans les figures 1.2 on montre la dynamique propre à l'équation logistique ainsi que certains modes asymptotiques particuliers. Le mécanisme de construction d'une séquence est tout d'abord montré sous la forme d'un diagramme en toile (web diagram [Tab89]). Cette méthode permet la génération de la séquence choisie, graphiquement en utilisant la projection des états successifs par rapport à la diagonale principale (fig.1.2 a) ; $r = 3.9$). Dans la partie b) est présenté le diagramme de bifurcation qui montre la distribution des états limites pour différents choix du paramètre r . On appelle cette représentation diagramme de bifurcation parce que le comportement asymptotique subit, pour des valeurs du paramètre r bien déterminées, une bifurcation de l'ensemble des états limites. Dans le cas continu la bifurcation se manifeste comme une multiplication des trajectoires possibles. Pour cette représentation on a choisi pour chaque valeur $r \in [1,4]$ une séquence de 500 échantillons avec une période de transition de 50 échantillons.

Par la suite pour chaque type de régime permanent on a :

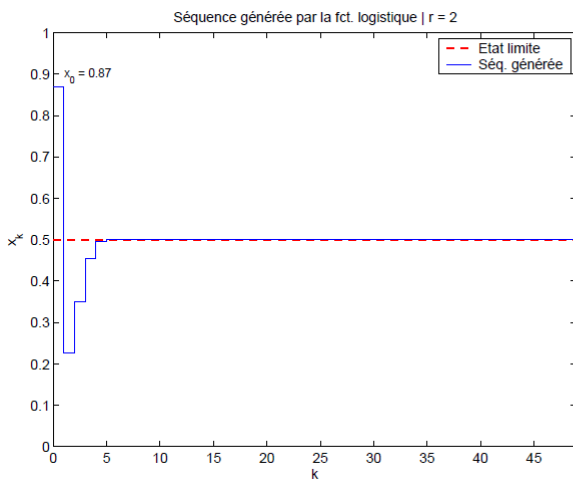
– **points d'équilibre** : Dans ce cas, la solution asymptotique est représentée par un point, sa valeur étant déterminée en fonction de la condition initiale choisie. Ainsi, pour des conditions initiales différentes on peut retrouver plusieurs points d'équilibres. De même ces points peuvent être stables ou instables suivant que les trajectoires voisines convergent ou divergent entre-elles. Dans le cas de la dynamique logistique, on observe que pour toute valeur $r \in [1,3]$, le régime permanent est formé par un point limite stable, sa valeur étant dépendante du choix de paramètre r . La figure 1.2 c) nous donne un aperçu d'une telle trajectoire pour $r = 2$. Ainsi on observe qu'après une période de transition relativement courte la séquence se stabilise autour du point fixe qui cette fois est $x_\infty = 0.5$.



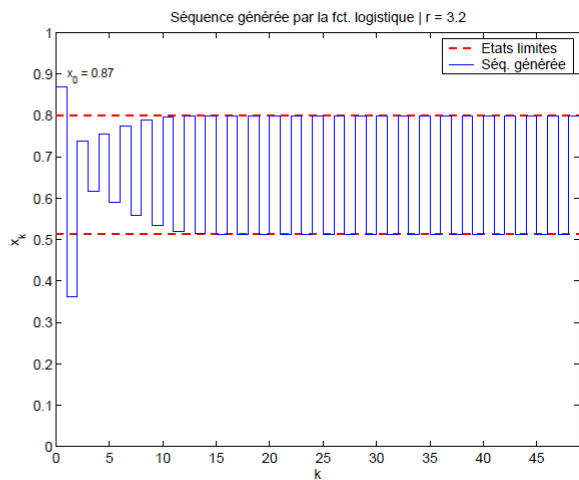
a)



b)



c)



d)

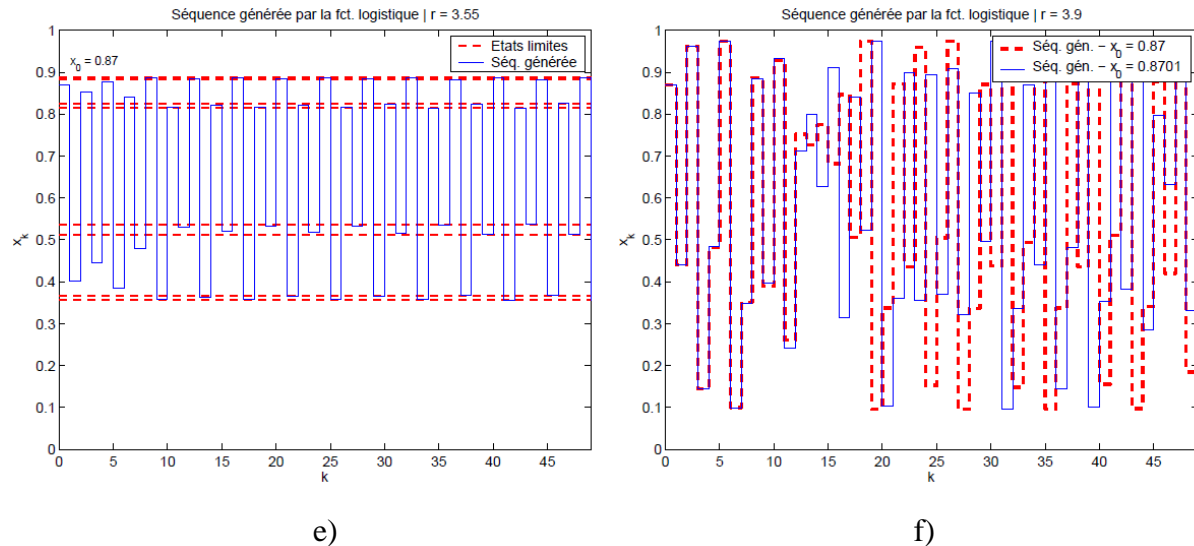


Fig. 1.2 – Étude du comportement dynamique pour la fonction logistique (eq. 1.8) : a) génération de la séquence récursive (web diagram) ; b) le diagramme de bifurcation ; c,d,e) séquence générée et états limites pour $r = 2, 3.2, 3.55$; f) séquences générées et sensibilité aux CI pour $r = 3.9$ (comportement chaotique).

– **régime périodique** : Le régime asymptotique permanent périodique correspond à une trajectoire dont les répliques d'une portion élémentaire sont espacées à des intervalles $nT, n \in \mathbb{N}^+, T$ désignant la période. Pour la fonction logistique on a choisi deux exemples pour le paramètre $r = 3.2$ puis $r = 3.55$.

Pour le premier cas, ce choix nous garantit que l'ensemble des états limites est formé par deux points, et la période correspond à deux échantillons (figure 1.2 d). La deuxième solution nous permet d'augmenter la dimension de l'ensemble des états limites et la période de répétition à 8 (figure 1.2 e).

– **régime quasi-périodique** : correspond à une somme de solutions périodiques dont le rapport des périodes est un nombre irrationnel. Un régime quasi-périodique peut être représenté dans l'espace d'état par un tore.

– **régime chaotique** : le régime chaotique est par définition tout régime permanent qui n'appartient à aucune des classes présentées antérieurement. Une telle solution a une trajectoire asymptotique bornée avec une extrême sensibilité aux conditions initiales. Ainsi deux trajectoires générées à partir de CI (conditions initiales) très proches, vont diverger très vite l'une par rapport à l'autre. Cette sensibilité par rapport aux CI traduit aussi le comportement en apparence stochastique des générateurs chaotiques, de telle sorte qu'une prévision à long terme du comportement du système est impossible. Dans la figure 1.2 f) un

exemple est donné pour deux CI espacées par une valeur de 10^{-4} et on peut observer que juste après quelques itérations les deux trajectoires divergent et deviennent non-corrélées.

Généralement, l'ensemble des solutions asymptotiques stables décrites ci-dessus est qualifié d'attracteur ; Il représente la région de l'espace d'état au voisinage de laquelle les trajectoires restent confinées lorsque $t, k \rightarrow \infty$. En parallèle avec la définition de l'attracteur apparait la notion de bassin d'attraction qui est défini comme la région de l'espace d'état formée par l'ensemble des CI à partir desquelles l'attracteur sera atteint.

1.2.3 Évaluation du comportement dynamique

La présence d'un comportement chaotique pour un système dynamique quelconque peut être déterminée par élimination de comportements introduits auparavant : si son comportement asymptotique n'est pas un point fixe, périodique ou quasi-périodique on conclut qu'il est chaotique. Mais dans le cas où la dynamique employée pour générer la séquence observée n'est pas connue et si en plus un bruit affecte les observations une telle méthode n'est pas envisageable. Par conséquence, la communauté scientifique a proposé des solutions avec une approche statistique du problème comme le calcul de la dimension de corrélation [GP83a], l'entropie de Kolmogorov [GP83b] ou les exposants de Lyapunov [WSSV85, ABK91]. La dimension de corrélation est un outil qui offre la possibilité de déterminer la dimension de l'attracteur reconstruit à partir d'une série temporelle observée, tandis que l'entropie ou les exposants de Lyapunov sont employés pour l'évaluation de l'instabilité propre au phénomène chaotique. Dans la pratique ces exposants se sont imposés comme des outils

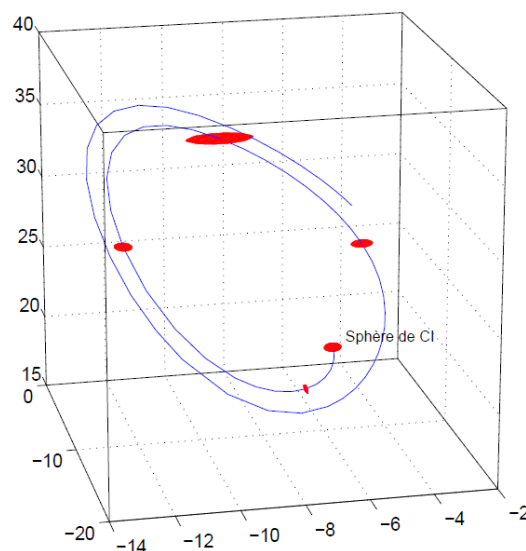


Fig. 1.3 – Sensibilité aux CI - système de Lorenz

performants, même dans le cas de séries temporelles courtes, avec un coût de calcul relativement réduit par rapport à la dimension de corrélation ou l'entropie de Kolmogorov.

Dans ce chapitre nous nous limiterons à la description des exposants de Lyapunov, solution que nous jugerons la plus pertinente dans le contexte des systèmes à dimension d'état réduite destinés aux communications numériques. Ainsi les exposants de Lyapunov se définissent comme une mesure invariante propre à un système dynamique qui caractérise la séparation exponentielle en temps de deux trajectoires proches. Cette propriété est aussi qualifiée de sensibilité aux CI, mais elle se réfère généralement à la divergence de trajectoires à n'importe quel instant temporel [ABK91]. Ainsi dans le cas d'un attracteur chaotique, deux trajectoires initialement voisines vont diverger à une vitesse exponentielle quantifiée par l'exposant de Lyapunov. Géométriquement, cela se traduit par le fait que si on choisit un ensemble de CI situées dans une sphère infiniment petite (de diamètre $\delta(0)$) dans le bassin d'attraction du système dynamique de dimension n ; sous l'effet de la dynamique cette sphère va se déformer pour se transformer en ellipsoïde. Le i -ème exposant de Lyapunov se définit alors en fonction de la déformation subie sur la i -ème direction [WSSV85] comme :

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\delta_i(t)}{\delta_i(0)}, i = 1 \dots n \quad (1.9)$$

L'ensemble $\{\lambda_i\}_{i=1 \dots n}$ constitue le spectre de Lyapunov. D'habitude les exposants sont classés par ordre décroissant : $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}, i = 1 \dots n - 1$.

Dans la figure 1.3 on montre l'exemple d'un ensemble de CI choisies dans le voisinage d'une valeur située dans le bassin d'attraction pour le système de Lorenz. On observe par la suite les déformations de cette sphère initiale à des instants différents. De cette façon on remarque que les déformations ne sont pas uniformes dans toute la région qui définit l'attracteur.

Régime permanent	Attracteur	Spectre	Exposants Lyapunov
point d'équilibre	point	composante continue	$0 > \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$
périodique	courbe fermée	fréq. fondamentale + harmoniques entières	$\lambda_1 = 0$ $0 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$
quasi-périodique	tore	composantes fréquentielles en rapport irrationnel	$\lambda_1 = \dots = \lambda_i = 0$ $0 > \lambda_{i+1} \geq \dots \geq \lambda_n$
chaotique	fractale	spectre large	$\lambda_1 > 0$ $0 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$

Tab. 1.1 – Classification des régimes permanents en fonction du spectre Lyapunov

Pour caractériser ce comportement Abarbanel [ABK91] a défini le spectre de Lyapunov associé localement à un point dans l'attracteur. Il faut noter que l'existence d'un attracteur nécessite que la dynamique de ce système soit globalement dissipative. Cela signifie que le système doit être caractérisé par une stabilité globale qui correspond à la condition suivante sur le spectre de Lyapunov :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0 \tag{1.10}$$

Si le spectre de Lyapunov reste une des plus robustes méthodes pour évaluer le comportement dynamique d'un système quelconque, le spectre de fréquence peut donner aussi des indices sur le régime permanent. Les divers critères permettant de caractériser la dynamique d'un système quelconque sont regroupés dans le tableau 1.1 [Ken94].

1.3 Synchronisation du chaos

L'emploi d'un signal chaotique dans le domaine des télécommunications pose directement le problème de synchronisation du récepteur dans le but de dupliquer le signal chaotique employé à l'émetteur. Dans la section précédente nous avons montré la sensibilité très importantes aux CI des systèmes chaotiques, et à première vue la synchronisation chaotique paraît difficile à réaliser. A la différence de la synchronisation classique employée dans les systèmes de télécommunication où l'on cherche à reproduire juste une période d'oscillation, la synchronisation chaotique présente plus de contraintes.

Dans la littérature plusieurs concepts de synchronisation chaotique ont été proposés tout d'abord avec les travaux de Yamada et Fujisaka [YF83, YF84] qui ont utilisé une approche locale de la synchronisation chaotique. Par la suite Afraimovich et al. [AVR83] ont développé les concepts importants liés à la synchronisation chaotique et ultérieurement Pecora et Carroll [PC90] ont défini la synchronisation chaotique connue sous le nom de synchronisation identique, développée sur la base de circuits chaotiques couplés, avec l'un maître et l'autre esclave ; Ces travaux ont ouvert la voie des applications du chaos aux télécommunications.

Une autre solution plus récente est la méthode de synchronisation généralisée, dont Rulkov et al. ont posé les bases [RTA94, RSTA95, Rul96] et qui a ensuite été étudiée dans [KP95] et [PC00] ; Cette approche considère aussi une paire de systèmes configurés en maître-esclave mais cette fois le couplage n'est pas réservé à l'identité. En parallèle avec ces études est apparue la notion de synchronisation de phase entre deux circuits chaotiques couplés, dans ce cas la synchronisation vise à réaliser une cohérence de phase entre les variables d'état des systèmes considérés [RPK97, Vol97]. Finalement, plus récemment, une nouvelle technique est apparue avec l'emploi des méthodes d'estimation non-linéaire de type filtrage de Kalman, vues comme une généralisation du couplage des systèmes chaotiques ; Sous certaines conditions sur le bruit d'observation, cette approche garantit un caractère optimal de la synchronisation au sens de l'EQM [LZD00, LZ01].

1.3.1 Synchronisation identique

Pour illustrer la méthode de synchronisation par couplage entre deux systèmes chaotiques on a choisi de présenter la synchronisation identique proposée par Pecora et Carroll [PC90]. Celle-ci a l'avantage de représenter une solution simple et performante de synchronisation dont l'objectif est que l'esclave reproduise le plus fidèlement possible l'état du maître, après un régime transitoire.

Considérons un système dynamique autonome, en temps continu, de dimension n , représenté par la relation suivante:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \quad (1.11)$$

où $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$.

Par la suite on divise le système initial en deux sous-systèmes $\{S_1, S_2\}$:

$$\begin{cases} S_1: \dot{\mathbf{x}}^{\{1\}} = \mathbf{F}^{\{1\}}(\mathbf{x}^{\{1\}}, \mathbf{x}^{\{2\}}) \\ S_2: \dot{\mathbf{x}}^{\{2\}} = \mathbf{F}^{\{2\}}(\mathbf{x}^{\{1\}}, \mathbf{x}^{\{2\}}) \end{cases} \quad (1.12)$$

avec les états et les dynamiques définis conformément aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [\mathbf{x}^{\{1\}}, \mathbf{x}^{\{2\}}]^T \\ \mathbf{x}^{\{1\}} &= [x_1, \dots, x_m]^T \\ \mathbf{x}^{\{2\}} &= [x_{m+1}, \dots, x_n]^T \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [\mathbf{F}^{\{1\}}(\mathbf{x}); \mathbf{F}^{\{2\}}(\mathbf{x})] \quad (1.14)$$

Bien sûr, cette opération peut être réalisée de manière arbitraire avec une réorganisation des variables d'état dans un ordre quelconque. On considère maintenant un deuxième

sous-système S'_2 caractérisé par une dynamique identique $\mathbf{F}^{\{2\}}$, et un vecteur d'état $\hat{\mathbf{x}}^{\{2\}}$:

$$S'_2 : \dot{\hat{\mathbf{x}}^{\{2\}}} = \mathbf{F}^{\{2\}}(\mathbf{x}^{\{1\}}, \hat{\mathbf{x}}^{\{2\}}) \quad (1.15)$$

On peut dire que ce sous-système réplique S'_2 est un candidat susceptible de se synchroniser avec la dynamique complète initiale. Pecora et Carroll ont démontré que la condition nécessaire et suffisante pour que cette proposition soit vraie est que le sous-système S'_2 soit stable [PC90] ; Hypothèse qui est équivalente avec la condition que l'ensemble des coefficients Lyapunov du sous-système S'_2 soient négatifs. Une synchronisation parfaite peut alors être accomplie ; les trajectoires étant asymptotiquement convergentes :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}^{\{2\}}(t) - x^{\{2\}}(t)\| = 0 \quad (1.16)$$

Dans la figure 1.4 on représente graphiquement le processus de décomposition en sous-systèmes, cette fois avec la notation $y = x^{\{1\}} + n$ de la variable d'état qui commande le système S'_2 où n est un éventuel bruit additif associé au canal de communication. Dans le cas pratique où la variance de ce bruit d'observation est significative, l'équation 1.16 qui traduit la convergence asymptotique ne reste plus valable. Dans ce cas on doit utiliser une approche de synchronisation généralisée [RSTA95].

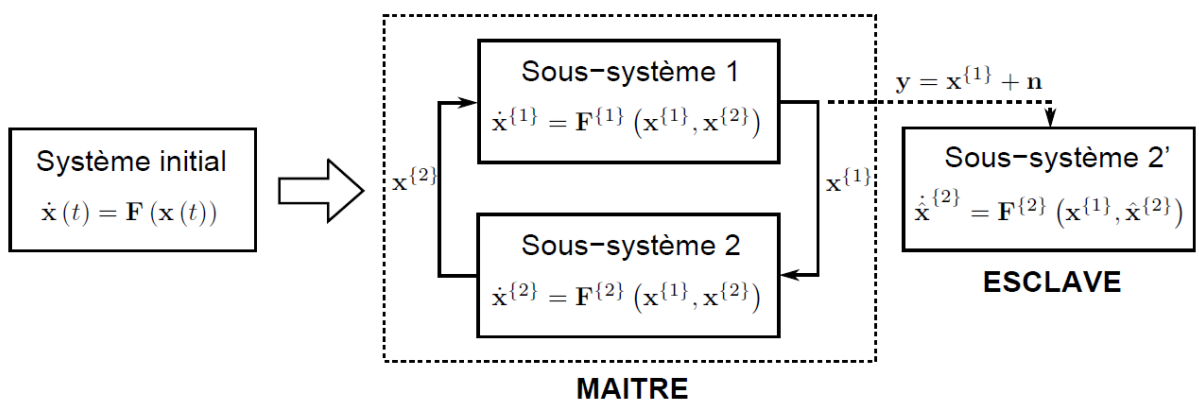


Fig. 1.4 – Synchronisation Maître-Esclave en utilisant la décomposition en sous-systèmes

Pour illustrer ce mécanisme de synchronisation on considère de nouveau le système dynamique de Lorenz, donné par les équations (1.3), avec l'ensemble de paramètres : $\{\sigma = 10, \rho = 28, b = 8/3\}$. L'émetteur et le récepteur sont initialisés séparément avec des conditions initiales proches. Pour une durée de 10 secondes on les laisse fonctionner indépendamment, ainsi on observe que les trajectoires des deux systèmes deviennent assez vite divergentes. A l'instant $t = 10s$ on supprime la dimension x du système récepteur et on le remplace par l'état correspondant côté émetteur ; Cette opération va forcer les états y et z du système esclave à converger asymptotiquement vers les états correspondants du système maître. La garantie de cette convergence est donnée par les valeurs négatives $\lambda'_2, \lambda'_3 \leq 0 \leq 0$ des exposants de Lyapounov associés au système esclave.

Dans les figures 1.5 ce comportement est démontré graphiquement par les représentations des états $y = X_2$ et $z = X_3$. Le diagramme de synchronisation montré pour l'état $y = X_2$ ainsi que la puissance de l'erreur nous confirment encore une fois qu'après une période de transition, le système esclave converge asymptotiquement vers l'état de l'émetteur (maître).

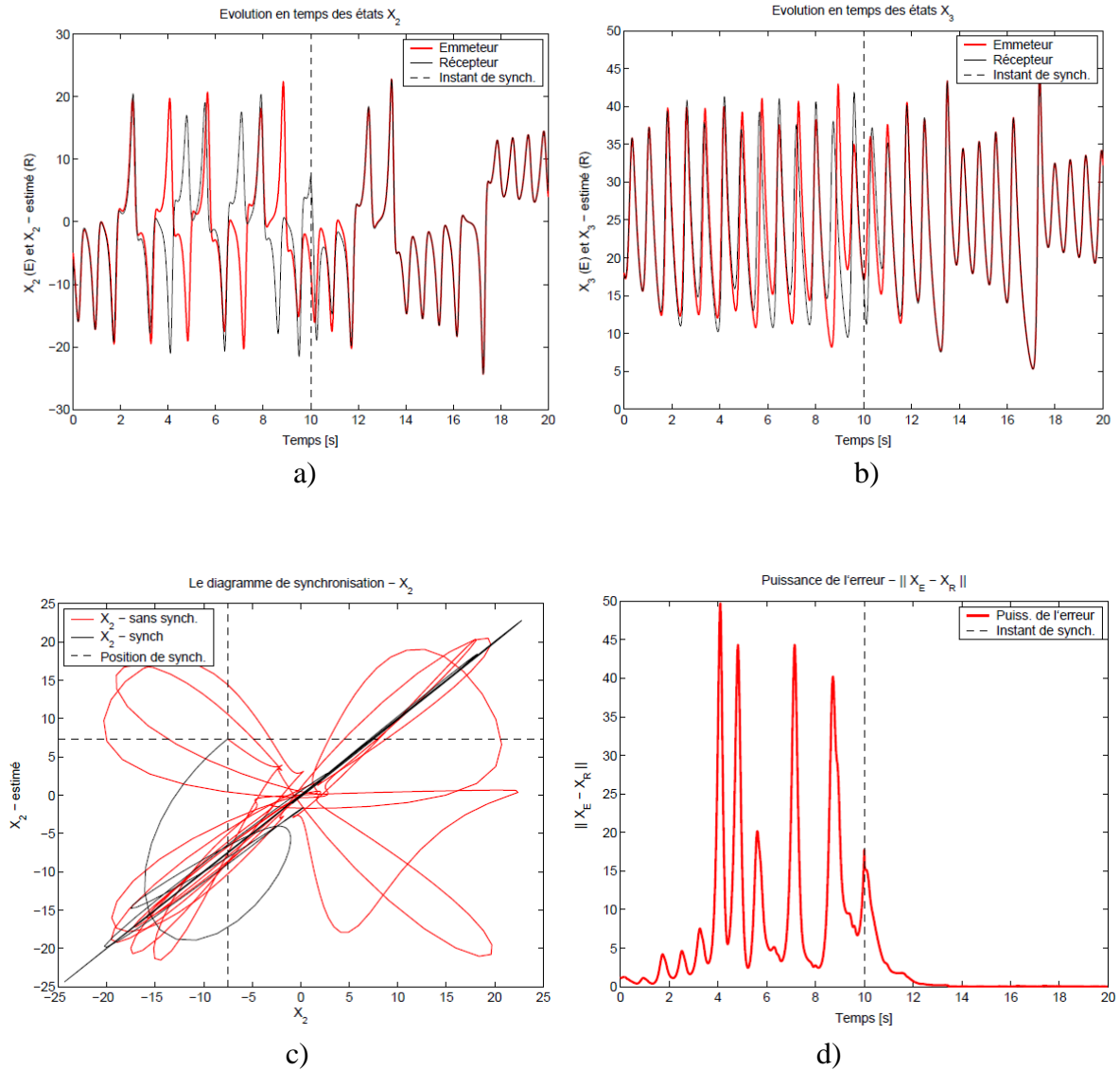


Fig. 1.5 – Évolution des états du système maître et de l'esclave avant et après synchronisation: a) $y = X_2$; b) $z = X_3$; c) Diagramme de synchronisation pour l'état $y = X_2$; d) Puissance de l'erreur de synchronisation.

1.3.2 Synchronisation par filtrage de Kalman Étendu

La méthode de synchronisation chaotique par filtrage de Kalman Étendu a été introduite comme une généralisation des méthodes de synchronisation à couplage unidirectionnel telles que la synchronisation identique. L'estimation récursive des états pour un système chaotique a été proposée pour la première fois par Fowler [Fow89], avec des aspects sur l'optimalité et la stabilité d'une telle synchronisation [LZD00, LZ01, LABS06]. Plusieurs applications ont été développées par la suite pour des structures de systèmes de communication avec l'emploi dans la démodulation et même l'égalisation du canal [LL01].

L'objet de cette étude est de proposer des structures de filtrage non-linéaire innovantes, dans la continuité des travaux pré-cités.

Par exemple on considère un système en temps discret, autonome défini par la relation générale :

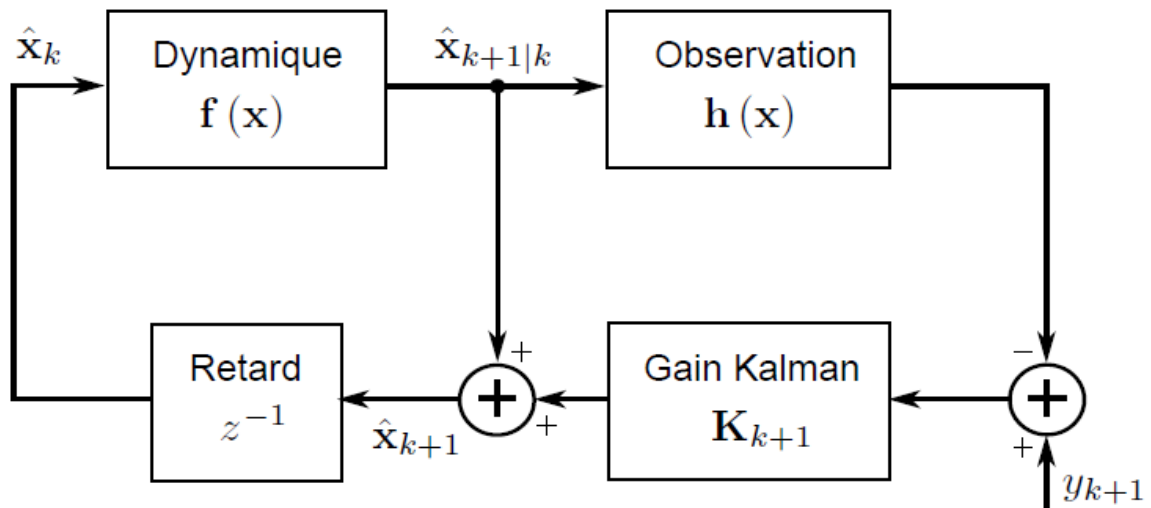


Fig. 1.6 – Structure de l'estimateur récursif EKF

$$x_{k+1} = \mathbf{f}(x_k) \quad (1.17)$$

où $x_k \in R_n$ est le vecteur d'état et $f(\cdot)$ est la dynamique non-linéaire associée.

D'habitude, pour une efficacité maximale, l'on a intérêt à transmettre entre l'émetteur et le récepteur un nombre d'états le plus réduit possible ; nous supposons que le signal de contrôle est un scalaire donné par l'équation suivante :

$$y_k = \mathbf{h}^T x_k + n_k \quad (1.18)$$

où $\mathbf{h} = [h_1, \dots, h_n]^T$, et $n_k = N(0, R)$ représente l'éventuel bruit supposé gaussien centré, de variance R , associé aux imperfections du canal de communication. Généralement, dans le cadre d'un filtrage récursif de Kalman les équations (1.17) et (1.18) sont appelées modèle de

processus et modèle d'observation. Nous n'insisterons pas ici sur les aspects de la théorie du filtrage non-linéaire de Kalman car le chapitre suivant sera dédié à ce sujet.

L'interprétation dans le cas général d'un tel modèle est donnée dans la figure 1.6 comme une structure à rétroaction qui permet l'estimation de l'état à partir des observations bruitées [LZ01]. On note que le modèle d'observation dans ce cas ne doit pas respecter forcément une fonction linéaire. Ainsi dans la partie gauche du schéma on effectue une projection de l'estimation courante \hat{x}_k pour obtenir la valeur a priori du nouvel état estimé $\hat{x}_{k+1|k}$. Dans la partie droite ce nouvel état va incorporer l'information apportée par la nouvelle mesure y_{k+1} pour obtenir la valeur estimée a posteriori \hat{x}_{k+1} . Le coefficient de pondération \mathbf{K}_{k+1} , appelé aussi gain de Kalman, est calculé par rapport à la dynamique du système; Il donne une évaluation de la confiance accordée aux observations à chaque étape de filtrage.

Cette dualité présentée par la structure de l'algorithme de filtrage se retrouve dans le développement des équations employées :

– équations de mise à jour temporelle, destinées à évaluer la statistique d'ordre deux de l'état prédit :

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1|k} &= \mathbf{f}(\hat{x}_k) \\ \mathbf{P}_{k+1|k} &= \mathbf{F}_k \mathbf{P}_k \mathbf{F}_k^T\end{aligned}\quad (1.19)$$

où $\mathbf{F}_k \triangleq \nabla \mathbf{f}|_{\hat{x}_k}$, et $\mathbf{P}_{k+1|k}$ représente la covariance des erreurs prédite.

– équations de mise à jour par des observations, donnant la valeur estimée en utilisant la connaissance de l'état observé :

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1} &= \hat{x}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1}(y_k - \mathbf{h}^T \hat{x}_{k+1|k}) \\ \mathbf{P}_{k+1} &= (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{h}) \mathbf{P}_{k+1|k}\end{aligned}\quad (1.20)$$

où \mathbf{I}_n est la matrice unité $n \times n$, \mathbf{P}_{k+1} représente la covariance des erreurs, et \mathbf{K}_{k+1} désigne le gain de Kalman s'exprimant comme :

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{h}^T (\mathbf{h} \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{h}^T + R)^{-1}\quad (1.21)$$

Ainsi par l'unification des relations 1.19 et 1.20 on obtient la solution récursive suivante :

$$\hat{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\hat{x}_k) + \mathbf{K}_{k+1}(y_k - \mathbf{h}^T \mathbf{f}(\hat{x}_k))\quad (1.22)$$

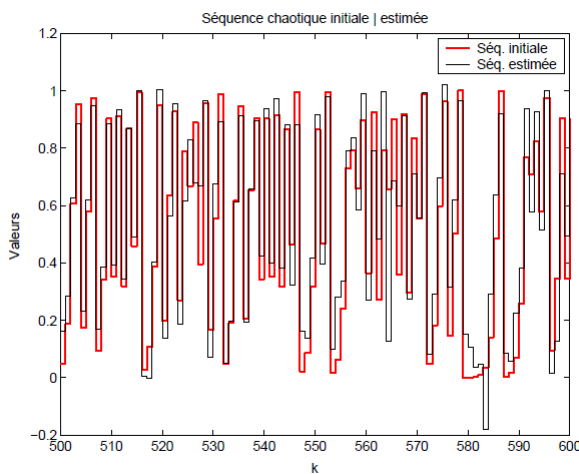
En utilisant la décomposition du vecteur d'état sous la forme $x_k = [x_k^{\{1\}}, x_k^{\{2\}}]^T$, comme en synchronisation identique, on peut écrire la dynamique du système sous la forme :

$$\mathbf{f}(x_k) = [f^{\{1\}}(x_k^{\{1\}}, x_k^{\{2\}}), f^{\{2\}}(x_k^{\{1\}}, x_k^{\{2\}})]^T \quad (1.23)$$

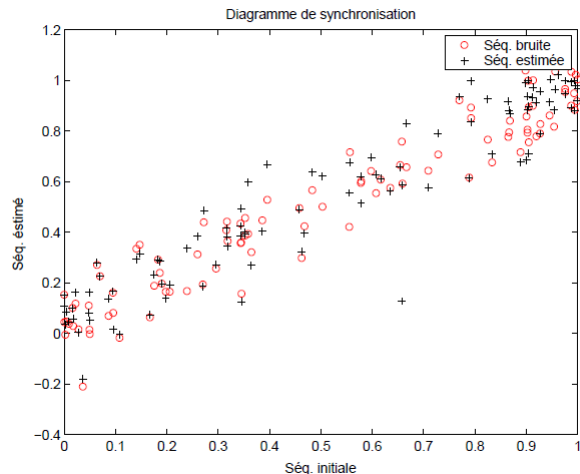
Avec cette relation le parallèle avec la synchronisation identique est immédiat. En considérant le système esclave caractérisé par la dynamique $\mathbf{f}^{\{2\}}(y_k, \hat{x}_k^{\{2\}})$ où $y_k = x_k^{\{1\}} + n_k$ est le signal de synchronisation, et avec $\mathbf{h} = [1, 0, \dots, 0]^T$, $\mathbf{K} = [1, 0, \dots, 0]^T$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1}^{\{1\}} &= y_{k+1} \\ \hat{x}_{k+1}^{\{2\}} &= \mathbf{f}^{\{2\}}(\hat{x}_k, \hat{x}_k^{\{2\}}) \end{aligned} \quad (1.24)$$

Nous voyons ainsi que la méthode de synchronisation en utilisant le filtrage de Kalman est une généralisation de la méthode de synchronisation identique présentée antérieurement. En ce qui concerne le fonctionnement du filtre de Kalman dans le cadre de la synchronisation chaotique, il est intéressant de mentionner que si généralement on est habitué à une convergence du gain de Kalman vers une valeur fixe, dans le cas de systèmes chaotiques, des oscillations aperiodiques du gain seront obtenues [LZD00]. Le même phénomène est constaté au niveau de la covariance des erreurs \mathbf{P}_k .



a)



b)

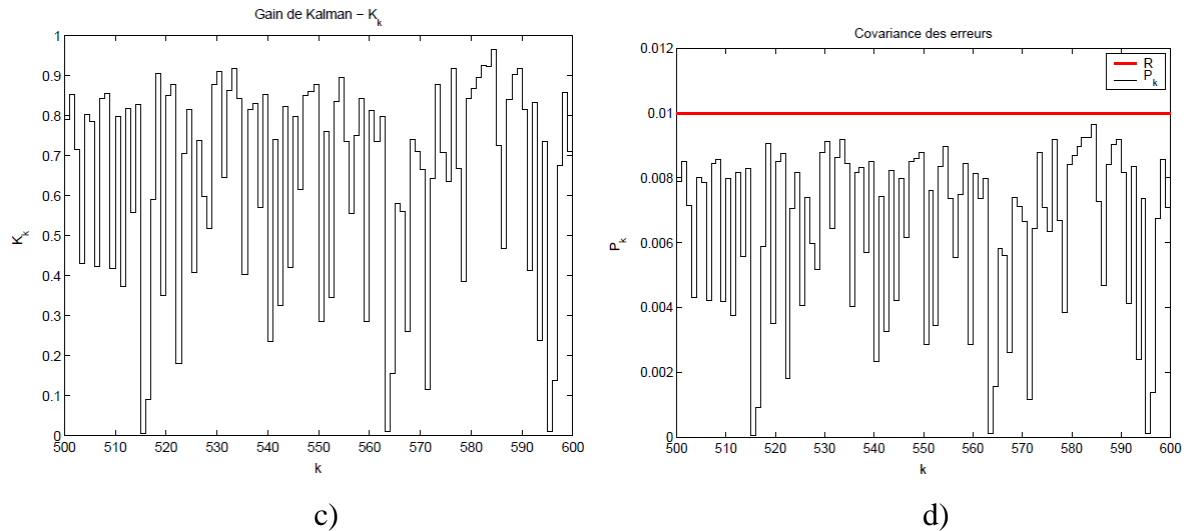


Fig. 1.7 – Exemple de synchronisation chaotique par filtrage de Kalman Etendu : a) séquence initiale vs séquence estimée ; b) diagramme de synchronisation ; c) évolution du gain Kalman K_k ; d) évolution de la covariance des erreurs P_k par rapport à la variance du bruit d'observation R

Dans les figures 1.7 on considère le cas de synchronisation chaotique appliquée à une dynamique non-linéaire mono-dimensionnelle représentée par la fonction logistique (eq. 1.8), avec le paramètre $r = 4$. Ainsi on a généré une séquence chaotique avec une longueur de 600 échantillons, affectée par un bruit d'observation gaussien additif de variance $R = 10^{-2}$. Après une période de transition de 500 échantillons on représente l'évolution de la séquence estimée, le diagramme de synchronisation, le comportement du gain de Kalman K_k ainsi que la covariance des erreurs estimées P_k .

Si on parle qualitativement de performances de synchronisation, on observe que l'introduction du bruit de mesure dans le modèle va entraîner l'impossibilité d'obtenir une synchronisation parfaite. Cela signifie que le vecteur d'état du système maître et le vecteur d'état du système esclave ne seront jamais égaux ; Dans ce cas la synchronisation chaotique peut être définie au sens d'une erreur d'estimation bornée. Une autre remarque peut être faite par rapport à l'évolution comparative entre le gain de Kalman et la covariance des erreurs, qui suivent une relation de proportionnalité. Analytiquement il est facile de prouver que dans le cas mono-dimensionnel cette relation est valide [LZ01], avec un coefficient de proportionnalité égal à la variance du bruit d'observation considéré :

$$P_k = RK_k \quad (1.25)$$

Le modèle d'estimation employé reste assez sensible aux perturbations introduites par le bruit de canal ainsi qu'aux approximations faites par le filtre de Kalman Étendu. Une solution généralement utilisée pour compenser ces approximations est de considérer la présence d'un bruit de processus associé au système dynamique chaotique mais un paramétrage optimal de la valeur de ce bruit est difficile à faire. Dans les chapitres qui suivent nous démontrerons que le filtrage de type Kalman Étendu n'est pas la meilleure solution d'estimation à employer, d'autres variantes étant proposées pour améliorer les performances globales de synchronisation.

1.4 Systèmes à étalement de spectre

L'étalement de spectre désigne un ensemble de techniques de transmission numérique de l'information caractérisées par une bande de fréquence W beaucoup plus importante que celle R du signal informationnel en bande de base. Ceci définit le gain d'étalement

$$G_e = W/R.$$

Un deuxième élément important qui intervient dans le développement d'un tel système est la caractéristique pseudo-aléatoire des signaux employés, qui fait que le signal transmis apparaisse comme une valeur stochastique rendant la démodulation plus difficile par des utilisateurs non-autorisés. Plus spécifiquement l'étalement de spectre est utilisé pour [Pro95] :

- combattre les effets néfastes de l'interférence produite par un brouillage, d'autres utilisateurs présents dans le canal ou la propagation par trajet multiple ;
- masquer le signal en utilisant une faible puissance d'émission, et par conséquent le signal sera difficile à intercepter par un utilisateur non-autorisé ;
- garantir un niveau de confidentialité de la transmission étant donné le caractère aléatoire des signaux.

Les premières applications de l'étalement de spectre datent des années 50, essentiellement dans le domaine militaire, avec des systèmes anti-brouillage, des systèmes de guidage, ou encore des prototypes de systèmes de propagation à trajet multiple [Sch82, PSM82, Vit79]. Plus récemment on voit l'apparition de l'étalement de spectre couramment dans les applications militaires satellitaires avec le système GPS et c'est juste au début des années 90 que des solutions à étalement de spectre sont employées dans le cadre de systèmes de communications civiles avec les normes IS-95 et CDMA2000 [LM98].

Le modèle donné dans la figure 1.8 représente la structure d'un système de communication à étalement de spectre avec le but de transmettre la séquence informationnelle

binaires caractérisée par la largeur de bande R . Le signal subit par la suite l'étalement avec l'aide d'une séquence pseudo-aléatoire, et il est transmis dans le canal sur une bande utile W . Côté récepteur on effectue l'opération inverse de désétalement pour retrouver le signal informationnel. Le filtre passe-bas est utilisé pour limiter la bande du signal obtenu à la bande informationnelle R .

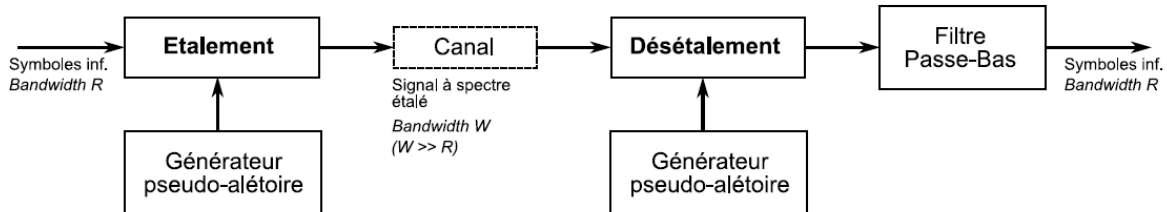


Fig. 1.8 – Modèle d'un système de communication à étalement de spectre

En ce qui concerne les techniques de base employées dans l'étalement de spectre deux types de modulations sont identifiées :

- modulation PSK (Phase Shift Keying) : employée dans le cas des applications où la cohérence de phase entre le signal transmis et le signal réceptionné peut être maintenue pour une durée assez longue par rapport à l'inverse de la bande utile. Dans ce cas la séquence pseudo-aléatoire est utilisée pour modifier la phase du signal transmis ; Ce type de modulation a reçu le nom de séquence directe (DS – Direct Séquence).
- modulation FSK (Frequency Shift Keying) : employée dans le cas où cette cohérence de phase ne peut pas être maintenue à cause des variations rapides de la réponse impulsionnelle du canal. Cette fois le générateur pseudo-aléatoire est utilisé conjointement avec la modulation M-FSK pour sélectionner la fréquence d'émission ; Ce type de modulation a reçu le nom de étalement de spectre par sauts de fréquence (FH - Frequency Hopping) [Pro95].

1.4.1 Étalement de spectre par séquence directe (DS-SS)

Pour illustrer le fonctionnement de cette méthode on considère le cas particulier où le signal informationnel subit une modulation PSK d'ordre 2 (BPSK). Dans cette configuration, pour obtenir le signal étalé, la séquence informationnelle (période symbole $T_s = 1/R$) est multipliée directement par la séquence binaire pseudo-aléatoire évoluant au rythme W (figure 1.9). Les éléments binaires de la séquence d'étalement, appelés aussi "chips" auront pour période $T_c = T_s/G_e = 1/W$. Finalement pour la transmission le signal obtenu est modulé par une porteuse sinusoïdale. Côté récepteur la structure est symétrique : on effectue tout d'abord

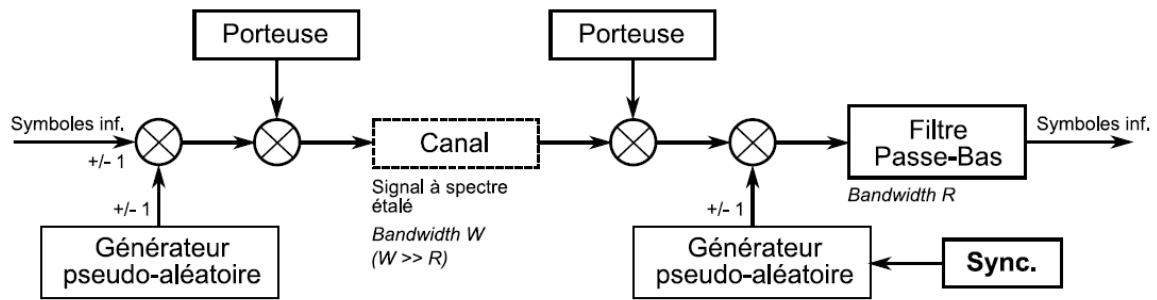


Fig.1.9 – Modèle d'un système de communication à étalement de spectre par séquence directe

la récupération de la porteuse et par la suite le signal est dés étalé par une réplique de la séquence pseudo aléatoire utilisée à l'émission. On observe l'apparition d'un sous-système de synchronisation qui permet aux deux séquences d'étalement de rester en phase. D'ailleurs la synchronisation reste le problème le plus difficile à maîtriser pour garantir une démodulation correcte du signal informationnel.

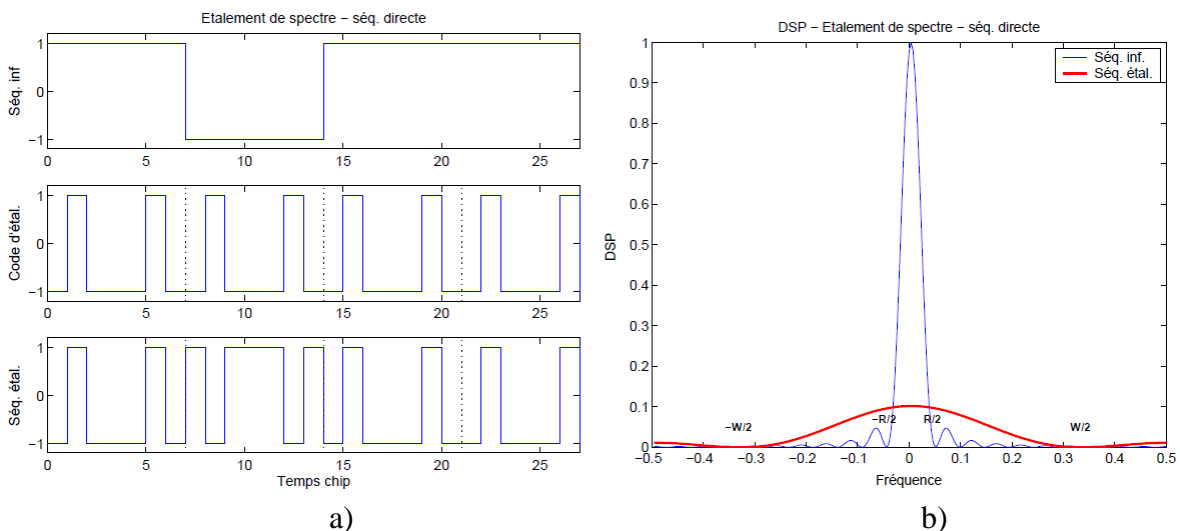


Fig. 1.10 – Exemple d'étalement de spectre par séquence directe : a) évolution en temps ; b) DSP du signal informationnel et signal étalé ;

Le couple d'opérations étalement et désétalement est lié au gain de traitement défini antérieurement, ainsi on peut établir une relation entre la rapport signal à bruit à l'entrée du récepteur (SNR_{in}) et respectivement le même rapport calculé pour le signal démodulé en bande de base (SNR_{out}) :

$$SNR_{out} = \frac{W}{R} \cdot SNR_{in} \tag{1.26}$$

Dans les figures 1.10 on présente un exemple d'évolution en temps ainsi que le spectre de puissance pour :

le signal informationnel, le code d'étalement et le signal étalé.

Pour les figures 1.10 on a choisi une séquence d'étalement aléatoire, mais dans les applications réelles

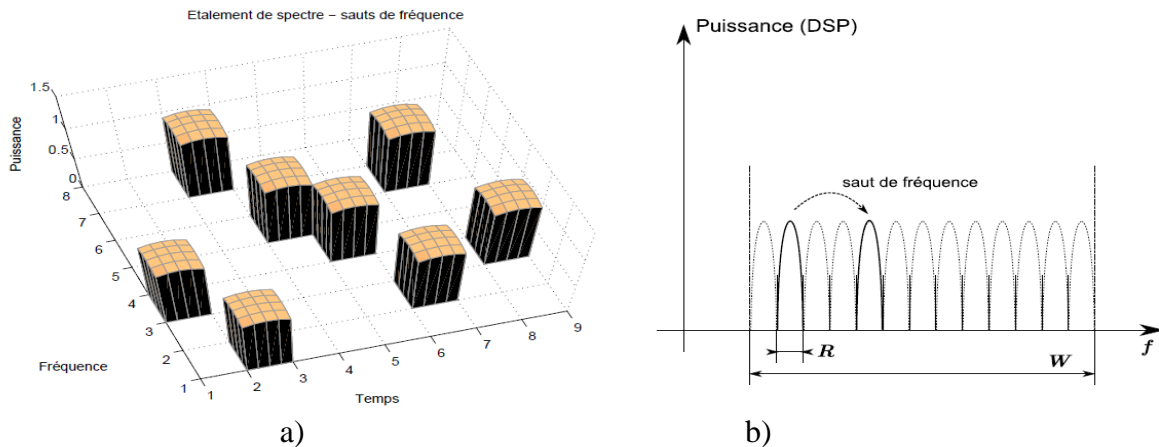


Fig. 1.11 – Système à spectre étalé par sauts de fréquence : a) Distribution en temps et en fréquence de l'énergie émise ; b) DSP du signal étalé

les séquences pseudo-aléatoires doivent respecter des propriétés de corrélation quasi-optimales pour réduire l'influence des interférences. Ainsi beaucoup d'études ont été réalisées pour choisir au mieux les séquences d'étalement, dont on va citer ici les séquences de longueur maximale et de type Gold, générées par l'intermédiaire des registres à décalage [Pro95]. En ce qui concerne l'emploi des séquences chaotiques dans une structure d'étalement de spectre similaire, nous verrons dans le paragraphe suivant que de telles études existent, et des performances supérieures sont ainsi obtenues en ce qui concerne la capacité du canal par rapport au nombre d'utilisateurs disponible.

1.5 Transmissions à porteuses chaotiques

Les signaux chaotiques peuvent être utilisés pour la transmission de l'information principalement dans deux objectifs. Le premier objectif est de protéger l'information transmise et dans ce cas les applications réalisées sont en compétition avec les méthodes de cryptographie classiques. Un deuxième objectif est d'étalement le signal informationnel avec tous les avantages des techniques à étalement de spectre. Dans ce deuxième cas, les méthodes développées doivent être comparées aux systèmes classiques à étalement de spectre.

Si on regarde du point de vue de la structure d'un tel système de transmission on peut définir deux approches. La première, représentée dans la figure 1.12 remplace le signal porteur sinusoïdal par un modulateur chaotique contrôlé d'une manière quelconque par le signal informationnel. Cette solution a l'avantage d'être très simple à implémenter mais par contre nécessite un système chaotique avec des contraintes fortes sur les paramètres intrinsèques et en plus celui-ci doit travailler à des hautes fréquences. En pratique, il est difficile de trouver des circuits permettant un tel fonctionnement et pour le moment cette solution est surtout considérée dans un cadre théorique.

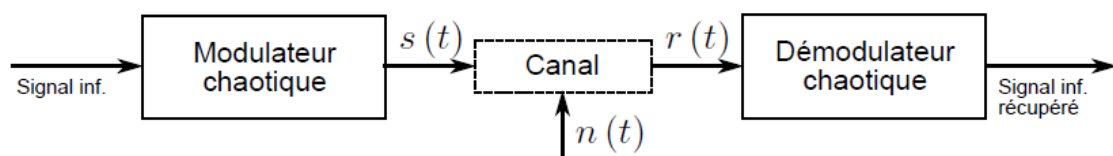


Fig. 1.12 – Modulation directe du signal informationnel par une porteuse haute fréquence chaotique

Une deuxième solution est de moduler le signal informationnel par celui chaotique en bande de base, et après d'appliquer une transposition en haute-fréquence par l'intermédiaire d'une porteuse sinusoïdale. Ce schéma est présenté dans la figure 1.13. Son avantage principal consiste dans une simplification importante du modulateur chaotique, mais avec une complexité générale du système plus importante [HS01].

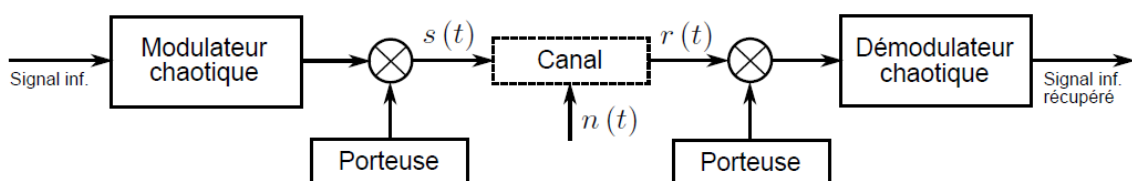


Fig. 1.13 – Modulation en bande de base du signal informationnel par le signal chaotique, combinée avec une mise sur porteuse classique

Dans l'intégralité de ce document la deuxième solution sera considérée. Dans le reste de ce chapitre nous passons en revue les principaux résultats recensés dans la littérature sur le sujet.

1.5.1 Masquage chaotique

La méthode de masquage chaotique a été la première solution proposée dans la littérature comme application du chaos aux communications [OWIC92, KHE+92]. L'idée est d'additionner directement le signal informationnel $s(t)$ au signal chaotique $y(t)$ et de le récupérer ensuite par synchronisation chaotique (fig.1.14). Le même système est utilisé à la fois à l'émetteur et au récepteur, avec la différence que le récepteur est contrôlé par le signal émis pour obtenir la synchronisation. Il est démontré [OWIC92] que grâce à la synchronisation chaotique, à la sortie du système dynamique récepteur, le signal sera plus proche du signal chaotique original $y(t)$ que de la somme $y(t) + s(t)$. Ainsi avec une simple différence on peut obtenir une approximation $\hat{s}(t)$ du signal informationnel initial. Il est évident que la présence d'un bruit important dans le canal de communication va affecter fortement les performances du système.

Même si cette méthode n'a pas trouvé d'applications directes sur des canaux radio-fréquence, elle est envisagée comme solution de cryptage sur des canaux à fort SNR, comme c'est le cas dans la fibre optique[ASL+05].

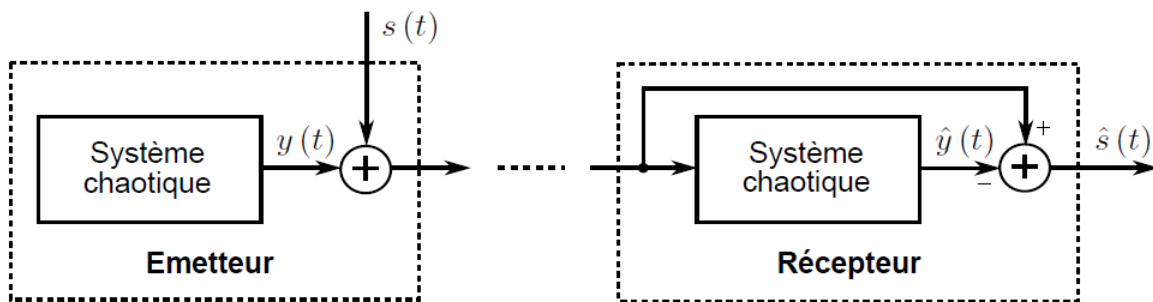


Fig. 1.14 – Modulation par masquage chaotique

1.5.2 Chaos Shift Keying (CSK)

La technique CSK introduite pour la première fois dans [DKH93, KD93], est définie comme une modulation numérique qui associe à chaque symbole informationnel un attracteur où une somme d'attracteurs différents, en se plaçant dans une période de symbole de durée T . Cette définition générale peut être développée analytiquement avec la supposition que chaque attracteur va générer une fonction de base $g_i(t)$ et que l'ensemble des signaux porteurs de l'information s'exprime alors, sur l'intervalle $t \in [iT, (i + 1)T]$, comme [KKC97, KKC98] :

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^N s_{ij} g_j(t), i = 1, \dots, M \quad (1.27)$$

où $N \leq M$ est le nombre de fonctions de base et M est la dimension de l'espace de symboles.

Dans la figure 1.15 on présente le schéma générique pour un système de communication CSK en bande de base. Du côté de l'émetteur la construction de la forme d'onde courante, associée au symbole i , est définie par l'équation (1.27). Ainsi on suppose une commutation des coefficients s_{ij} aux instants multiples de la durée symbole T . Si dans le cas d'un système de transmission classique les formes d'onde des fonctions de base ont un caractère périodique, dans le cas du CSK cette condition ne reste plus valable à cause du caractère chaotique des attracteurs utilisés pour la génération de ces fonctions de base.

A la réception on suppose que la forme du signal reçu $r_i(t)$, associée au symbole i , est donnée par la version du signal émis $s_i(t)$ affectée par un bruit additif $n(t)$:

$$r_i(t) = s_i(t) + n(t) \quad (1.28)$$

La structure usuelle d'un récepteur CSK repose sur une batterie de corrélateurs, en fonction du nombre de fonctions de base N utilisées par l'émetteur. Les fonctions $\{y_j(t)\}_{j=1\dots N}$ forment l'ensemble des fonctions de base utilisées pour mettre en place le mécanisme de corrélation. Nous verrons par la suite que le choix de ces fonctions est fait par rapport à une structure particulière du récepteur. Après corrélation, le vecteur

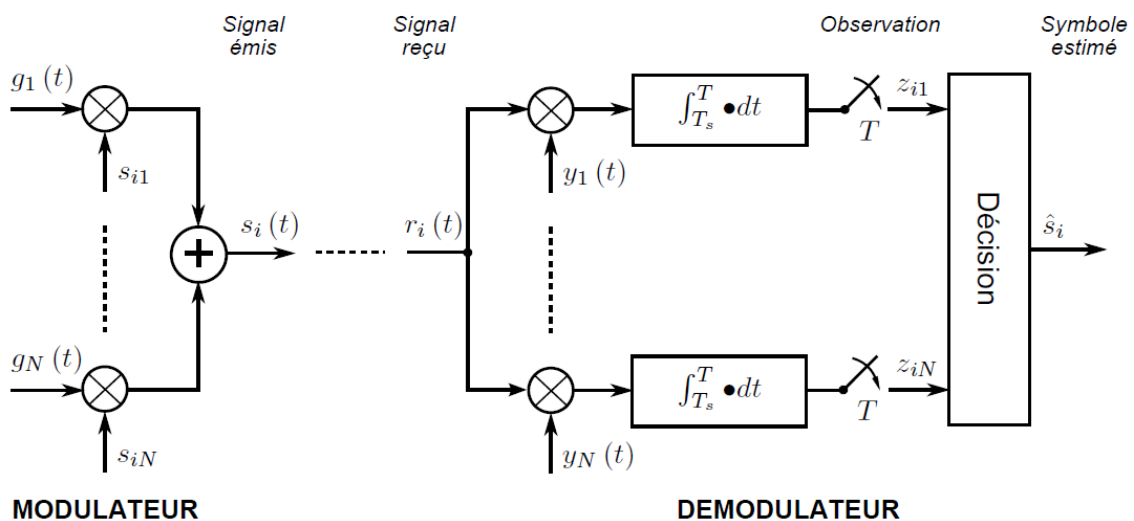


Fig. 1.15 – Système générique de communication CSK

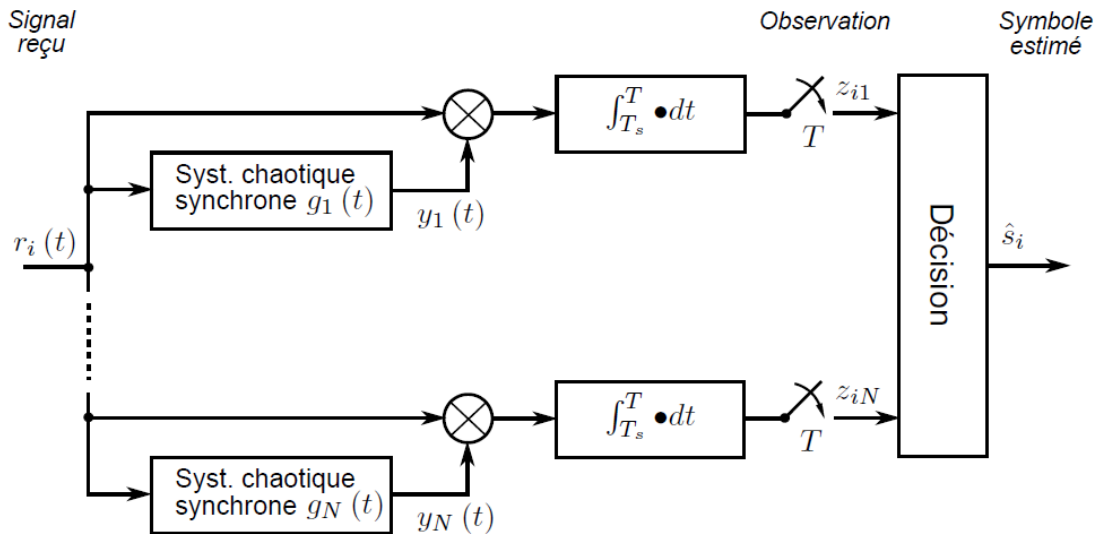


Fig. 1.16 – Récepteur cohérent CSK

d'observation $z_i = [z_{i1}, \dots, z_{iN}]^T$ est utilisé pour faire la décision du symbole transmis \hat{s}_i . Pour cette configuration de récepteur, comme dans le cas des communications numériques classiques, on peut considérer les quatre cas suivants :

– récepteur cohérent qui utilise une méthode de synchronisation chaotique :

Dans ce cas, les références $\{y_j(t)\}$ correspondent aux fonctions de base originales $\{g_j(t)\}$ reconstruites à partir du signal reçu avec l'aide d'une méthode de synchronisation chaotique (fig. 1.16).

Dans cette structure le signal reçu va essayer de synchroniser tous les systèmes chaotiques, ainsi en supposant que le signal transmis est $s_i(t) = g_j(t)$, à la sortie du j -ème circuit chaotique synchrone on va avoir une convergence de $y_j(t)$ vers $g_j(t)$; T_s est le temps nécessaire pour que la synchronisation soit réalisée. En contraste avec la synchronisation de ce système, tous les autres vont avoir un caractère divergent par rapport au j -ème attracteur.

La prise de décision sera alors faite à partir de l'erreur de synchronisation, en sortie des corrélateurs ; Ainsi on peut affirmer sans doute que la convergence de $y_j(t)$ vers $g_j(t)$ sur l'intervalle $[T_s, T]$ va nous donner une observation $z_{ij} > z_{ik}, \forall k = 1 \dots N, k \neq j$. une telle conclusion l'étape de décision consiste à prendre la valeur caractérisée par l'énergie maximale.

Analytiquement on peut écrire que la valeur du coefficient d'observation z_{ij} est donnée par :

$$\begin{aligned}
 z_{ij} &= \int_{T_s}^T r_i(t)y_j(t)dt \\
 &= \int_{T_s}^T [s_i(t) + n(t)]y_j(t)dt \\
 &= \int_{T_s}^T g_j(t)y_j(t)dt + \int_{T_s}^T n(t)g_j(t)dt
 \end{aligned}
 \tag{1.29}$$

Ceci nous montre que z_{ij} est une variable aléatoire, dont la valeur moyenne va dépendre de l'énergie par élément binaire et de la qualité de synchronisation.

L'inconvénient important présenté par cette méthode est que la synchronisation est perdue et ensuite récupérée chaque fois que le symbole informationnel change. Ainsi le temps nécessaire pour la transmission d'un seul symbole est donné par le temps de synchronisation plus le temps d'estimation dont le vecteur d'observation est calculé. Par conséquent le débit de transmission possible est limité par l'inverse du temps de synchronisation.

– récepteur cohérent de type filtre adapté : si cette solution dans le cas des transmissions classiques est équivalente aux structures cohérentes de type corrélateur, dans le cas chaotique cette solution ne peut pas être utilisée. L'impossibilité vient du fait que les formes d'ondes employées dans la modulation doivent être connues en avance et dans le cas d'un système chaotique ces formes d'ondes changent d'un symbole à l'autre [KKC98].

– récepteur non-cohérent : dans le cas de la détection non-cohérente la référence côté récepteur ne sera plus obtenue par l'intermédiaire d'une synchronisation chaotique mais par contre elle correspond à une partie du signal reçu (fig 1.17).

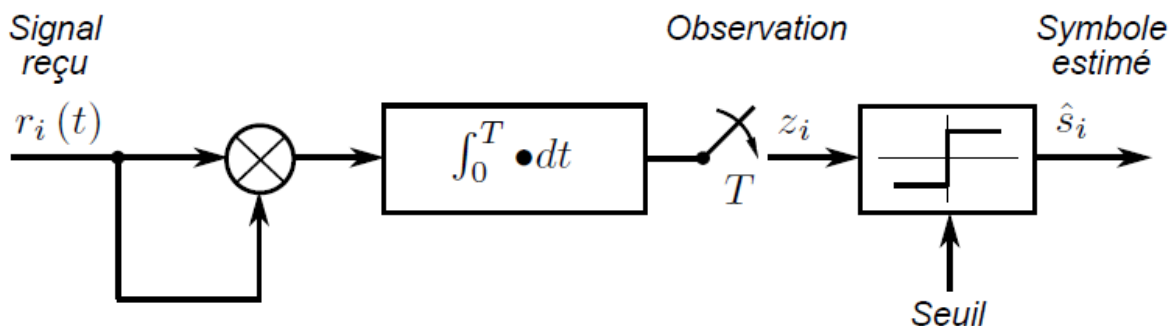


Fig. 1.17 – Récepteur non-cohérent CSK/COOK

Dans la littérature deux systèmes CSK non-cohérents sont proposés :

1. système COOK (Chaotic on-off keying) [KKK97] qui offre la plus simple solution ; Le signal informationnel binaire est directement multiplié par le signal chaotique. Ce principe est équivalent à associer à l'élément binaire "1" le signal $s_1(t) = g_1(t)$ et au symbole "0" le signal $s_2(t) = 0$. Dans ce cas le récepteur présenté dans la figure 1.17 va évaluer l'énergie par bit transmis et va prendre la décision en utilisant un comparateur à seuil.
2. système CSK non-cohérent, qui utilise des propriétés qui peuvent différencier les différentes formes d'onde associées aux symboles transmis, au niveau statistique par exemple. La structure présentée dans la figure 1.17 reste la même avec la prise de décision cette fois effectuée sur les paramètres d'intérêt.

Généralement ces solutions sont envisageables étant donné que les propriétés statistiques entre différents attracteurs chaotiques sont différentiables. Par exemple dans [Yan95] les fonctions de base sont deux signaux chaotiques caractérisés par des fréquences moyennes différentes ; côté récepteur les signaux peuvent être identifiés en mesurant la valeur moyenne de la fréquence quand le signal change de signe.

D'autres méthodes de modulation considèrent par exemple l'évaluation de la fonction d'auto-corrélation [Sch95] qui est modifiée selon le symbole à transmettre.

– récepteur cohérent différentiel (DCSK - Differential Chaos Shift Keying) : Dans le cas du récepteur cohérent CSK les fonctions de base $g_i(t)$ doivent être récupérées avant que toute démodulation soit possible. Il existe des situations pour lesquelles cette approche est impossible à cause des mauvaises conditions de propagation. Dans ce cas la seule solution cohérente disponible est une solution différentielle, ainsi on va transmettre sur une partie de la durée du symbole une référence, et le reste est associé à la transmission de l'information [KKK97].

Par exemple, pour la modulation DCSK binaire, le symbole "1" est représenté par un signal de référence, de durée $T/2$, suivi d'une réplique exacte de celui-ci retardée bien sûr avec la même durée $T/2$. Pour le bit "0" on transmet le même signal référence suivi cette fois par sa copie inversée. On peut exprimer alors le signal produit par le modulateur pour le i -ème symbole comme :

$$s_i(t) = \begin{cases} x(t) & t_i \leq t < t_i + \frac{T}{2} \\ b_i x\left(t - \frac{T}{2}\right) & t_i + \frac{T}{2} \leq t < t_i + T \end{cases} \quad (1.30)$$

où $x(t)$ désigne le signal issu d'une source chaotique et $b_i \in \{-1, +1\}$ représente le i -ième symbole informationnel à transmettre.

Côté récepteur la démodulation est réalisée en utilisant une structure similaire au CSK non-cohérent. Ainsi on introduit dans ce cas une cellule à retard qui permet au signal de référence et à celui porteur de l'information d'être en phase (fig. 1.18).

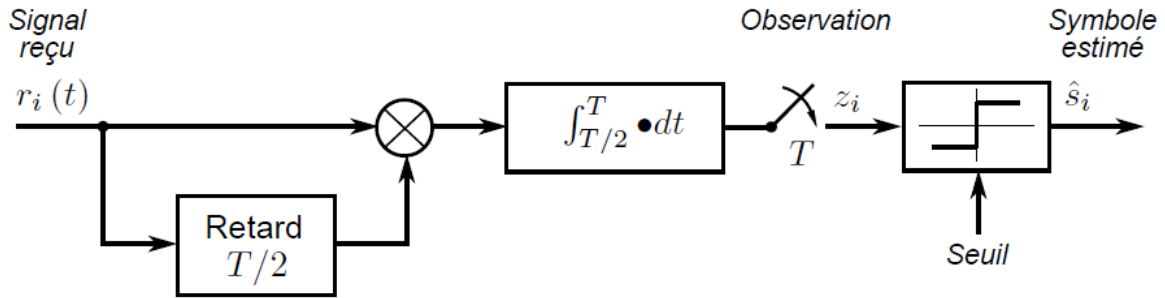


Fig. 1.18 – Récepteur non-cohérent DCSK

Analytiquement la valeur z_i observée est donnée par la relation suivante :

$$\begin{aligned}
 z_i &= \int_{T/2}^T r_i(t)r_i\left(t - \frac{T}{2}\right) dt \\
 &= \int_{T/2}^T [s_i(t) + n(t)] \left[s_i\left(t - \frac{T}{2}\right) + n\left(t - \frac{T}{2}\right) \right] dt \\
 &= \int_{T/2}^T [x(t) + n(t)] \left[b_i x\left(t - \frac{T}{2}\right) + n\left(t - \frac{T}{2}\right) \right] dt \\
 &= b_i \int_{T/2}^T x^2(t) dt + \int_{T/2}^T x(t)n\left(t - \frac{T}{2}\right) dt + \\
 &\quad + b_i \int_{T/2}^T x(t)n(t) dt + \int_{T/2}^T n(t)n\left(t - \frac{T}{2}\right) dt \tag{1.31}
 \end{aligned}$$


Avec l'hypothèse que le bruit présent dans le canal est blanc, le récepteur devient un estimateur nonbiaisé, avec un seuil de décision nul, indépendant de la variance du bruit présent dans le canal. Une autre observation doit être faite sur le terme associé à l'inter-corrélation avec le bruit, qui va influencer de façon négative les performances. En plus de ce fait, étant donné que l'énergie associée à chaque symbole varie, à cause de la séquence chaotique utilisée, une incertitude doit être encore prise en compte pour déterminer le taux

d'erreur binaire. Une solution à ce problème est d'employer une modulation FM qui va nous permettre de garder une énergie constante sur la durée du symbole (solution FM-DCSK - [KKJK98]).

Dans les dernières années les solutions DCSK ont reçues plus d'attention étant donné que des systèmes à accès multiple sont proposés [TLT04, MB04, XTL04] avec une évaluation des performances sur des canaux à trajets multiples.

1.6 Conclusion

Ce chapitre avait comme objectif l'introduction de quelques notions élémentaires concernant les systèmes dynamiques chaotiques et leur application dans le domaine des télécommunications. Dans la première section les définitions de systèmes dynamiques non-linéaires en temps continu et discret, ainsi que leurs particularisation pour le cas de systèmes chaotiques ont été données. Par la suite on a présenté les méthodes envisageables pour établir éventuellement une synchronisation entre deux systèmes chaotiques dans le but de transmettre un signal informationnel. La troisième section était destinée à la présentation générale des solutions classiques d'étalement de spectre ainsi que des inconvénients associés, et finalement dans la dernière partie les méthodes les plus connues de transmission à porteuse chaotique ont été introduites.



Chapitre 2
Filtres de Kalman
non-linéaires

2.1 Introduction

La prédiction peut être définie comme le comportement futur probable d'un processus et la confiance qui lui est assignée dépend de la nature du processus étudié et de la qualité de l'adéquation du modèle adopté.

Le Filtre de Kalman (FK) est une version moderne et probabiliste du concept des moindres carrés qui se base sur la description du système en se basant sur la notion d'état, il peut être défini d'une manière simple comme étant un algorithme optimal et récursif de traitement de données.

Son principe est simple, il consiste à combiner deux estimations indépendantes pour former une estimation pondérée ou prédiction. La première estimation peut être une prédiction a-priori ou une estimation basée sur une information a-priori, la seconde, une prédiction basée sur la nouvelle information (nouvelle mesure).

L'objectif du FK est justement de combiner ces deux pièces d'information afin d'obtenir une estimation améliorée et son grand avantage est de procurer avec précision la covariance des erreurs de prédiction qui constitue en soi un critère d'optimalité.

Un autre aspect d'optimalité du filtre de Kalman c'est qu'il incorpore toute l'information disponible sur le système et ses perturbations et peut être amorcé avec le minimum d'information disponible.

Dans le cas d'une dynamique non-linéaire le problème d'estimation devient difficile. Comme dans ce contexte une connaissance complète de la densité de probabilité est exigée, l'estimateur optimal conforme aux règles de Bayes, n'est pas d'habitude utilisé en pratique.

Pour quelques cas particuliers de dynamiques non-linéaires une solution optimale peut être développée, sous des hypothèses contraignantes [Ben81, Dau88].

Parmi les nombreuses solutions non-optimales disponibles, le filtre de Kalman Étendu (EKF - Extended Kalman Filtre) reste une solution populaire car il évite le coût de calcul important habituellement exigé par des approches quasi optimales telles que le filtre particulière [AMGC02].

Le EKF se base sur la propagation de la distribution des états, par linéarisation au premier ordre du système non-linéaire, en gardant la même structure que le filtre de Kalman classique. Bien que le EKF puisse faire face aux systèmes faiblement non-linéaires, de larges erreurs peuvent être commises sur les moments a posteriori (moyenne et covariance) en présence de non-linéarités importantes.

Plusieurs méthodes de filtrage de Kalman non-linéaires ont été proposées récemment pour éviter les limitations imposées par le EKF, sans un coût de calcul additionnel significatif.

Le UKF, introduit par Julier et al. [JU97], dans le contexte de la commande non-linéaire et davantage développé par Wan et van der Merwe [WvdM01], aborde le problème d'approximation d'une manière bien différente du EKF.

Ainsi, même s'il utilise une hypothèse gaussienne pour les états, cette fois la statistique est représentée par un ensemble minimal de points judicieusement choisis (sigma points). A chaque étape d'estimation, ces points sont propagés à travers la non-linéarité du modèle (transformation Unscented), évitant ainsi le calcul de Jacobiens.

En utilisant cette approche, la moyenne et la covariance de la distribution a posteriori sont capturés jusqu'au troisième ou deuxième ordre dans la série de Taylor, quelle que soit la non-linéarité considérée.

Le UKF est une solution intéressante pour les applications en temps réel, car il réalise un bon compromis entre les performances d'estimation (toujours une meilleure consistance que le EKF), le coût de calcul et la facilité d'implémentation.

2.2 Filtre de Kalman Étendu (EKF : Extended Kalman Filter)

La version initiale du filtre de Kalman était destinée à résoudre de manière élégante les problèmes de prédiction et de filtrage des modèles dynamiques linéaires, continus ou discrets. Cette technique est basée sur l'exploitation d'un modèle de mesure associé à un modèle dynamique de mouvement.

Dans l'approche filtre de Kalman, les erreurs de mesure et de modélisation obéissent, par hypothèse, à certaines lois de probabilité.

Sa réalisation fournit en de ligne non seulement la valeur estimée optimale, au sens de la variance minimale, mais également la variance de l'erreur d'estimation. Cependant, il arrive souvent que l'hypothèse de linéarité ne soit pas valide.

Dans ce cas, il est possible de généraliser le filtre de Kalman en utilisant des formes linéarisées de l'opérateur d'observation et du modèle dynamique.

L'extension du filtre de Kalman linéaire à des systèmes non-linéaires est connu sous le nom filtre de Kalman étendu (EKF).

EKF repose sur un développement en série de Taylor des équations de processus et d'observation qui forment le modèle. Ainsi le Filtre de Kalman Étendu est défini en utilisant les deux idées suivantes [BSL93] :

- une linéarisation au premier ordre dans le développement de Taylor pour les non-linéarités correspondantes aux équations de processus et/ou observation.
- une estimation de type LMMSE (Minimum Mean Square Error).

2.2.1 Modèle général de filtrage

Soit le système dynamique décrit par l'équation suivante:

$$X_{(k+1)} = f[k, X_{(k)}] + v_{(k)} \quad (2.1)$$

L'équation de mesure est donnée par:

$$Z_{(k)} = h[k, X_{(k)}] + w_{(k)} \quad (2.2)$$

Pour simplifier, nous supposons qu'il n'y a pas de commande et que le bruit du système $v_{(k)}$ ainsi que le bruit de mesure $w_{(k)}$ sont de type Gaussien additif à moyenne nulle.

$$E[v_{(k)}] = 0$$

$$E[v_{(k)} v_{(j)}] = v_{(k)} \delta_{kj}$$

$$E[w_{(k)}] = 0$$

$$E[w_{(k)} w_{(j)}] = R_{(k)} \delta_{kj} \quad (2.3)$$

On suppose également que les deux bruits sont dé-corrélés:

$$E[v_{(k)} w_{(j)}] = 0 \quad (2.4)$$

Pour l'étape d'initialisation, on note par:

- $\hat{X}_{(0|0)}$, l'approximation de la moyenne conditionnelle au point initial, i.e. à $t = 0$,
- $P_{(0|0)}$, la matrice de covariance associée à l'estimée initiale supposée non corrélée avec les deux séquences de bruit v et w .

Comme dans le cas linéaire, on supposera que l'estimée à l'instant k n'est qu'une approximation de la moyenne conditionnelle $\hat{X}(k|k)$ donnée par:

$$\hat{X}_{(k|k)} \cong E [X_{(k)} | Z^k] \tag{2.5}$$

avec $P_{(k|k)}$ la matrice de covariance et Z^k l'ensemble de mesures obtenues jusqu'à l'instant k .

2.2.2 Principe du filtre de Kalman Étendu (EKF)

2.2.2.1 Prédiction du vecteur d'état

L'état prédit à l'instant $k + 1$ noté par $\hat{X}_{(k+1|k)}$ est obtenu par développement en série de Taylor de premier ordre de la fonction non-linéaire, donnée par l'éq. 2.1, au voisinage de l'estimé précédent, $\hat{X}_{(k|k)}$

$$\hat{X}_{(k+1|k)} = f [k, \hat{X}_{(k|k)}] + f_{x(k)} [X_{(k)} - \hat{X}_{(k|k)}] + \text{HOT} + v_{(k)} \tag{2.6}$$

où le terme HOT représente les composantes d'ordre supérieur ou égale à 2, et f_x est la dérivée de la fonction f évaluée au voisinage de l'estimée $\hat{X}_{(k|k)}$:

$$f_{x(k)} \triangleq [\nabla_x f_{[k,X]}] |_{x=\hat{x}(k|k)} \tag{2.7}$$

L'état prédit $\hat{X}_{(k+1|k)}$ est alors donné par l'équation suivante:

$$\hat{X}_{(k+1|k)} = f [k, \hat{X}_{(k|k)}] \tag{2.8}$$

et la matrice de covariance associée s'écrit:

$$P_{(k+1|k)} = f'_{x(k)} P_{(k|k)} (f_{x(k)} + Q_{(k)}) \tag{2.9}$$

2.2.2.1 Prédiction de la mesure

Pour une matrice d'observation non-linéaire, l'éq. 2.2 peut être développée en série de Taylor de premier ordre au voisinage de l'état prédit $\hat{X}_{(k+1|k)}$:

$$\hat{Z}_{(k+1|k)} = h [k+1, \hat{X}_{(k+1|k)}] \tag{2.10}$$

La matrice de covariance de l'innovation est :

$$S_{(k+1)} = h_{x(k+1)} P_{(k+1|k)} h'_{x(k+1)} + R_{(k)} \tag{2.11}$$

Avec :

$$h_{x(k+1)} \triangleq [\nabla_x h_{[k+1,x]}]' |_{x=\hat{x}(k+1|k)} \tag{2.12}$$

La seule différence qui existe entre un filtre de Kalman (KF: Kalman Filter) et un filtre EKF est la présence des Jacobiens dans l'équation dynamique et celle de mesure.

La figure 2.1 résume un cycle d'exécution récursive de l'algorithme du filtre EKF

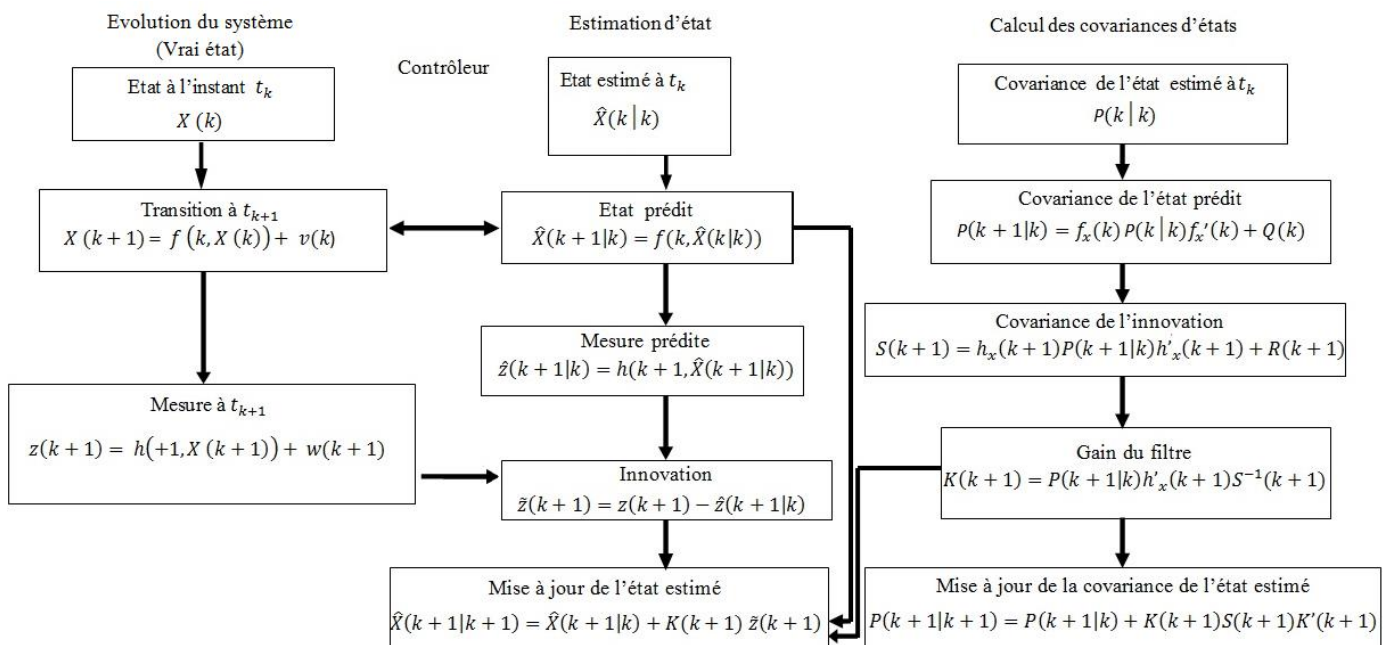


Fig. 2.1 – Un cycle de l'estimation d'état d'un système non-linéaire (filtre de Kalman Etendu)

2.3 Filtre de Kalman *Unscented*

2.3.1 Transformation *Unscented*

Le filtre de Kalman *Unscented* est défini de même que le EKF à l'aide d'une transformation non-linéaire de statistique appelée dans ce cas *Unscented*. La transformation *Unscented* a été introduite par Julier [JU97], dans l'idée d'estimer la distribution de probabilité de la statistique transformée en évitant d'approximer la fonction non-linéaire, dont la linéarisation au premier ordre fait partie.

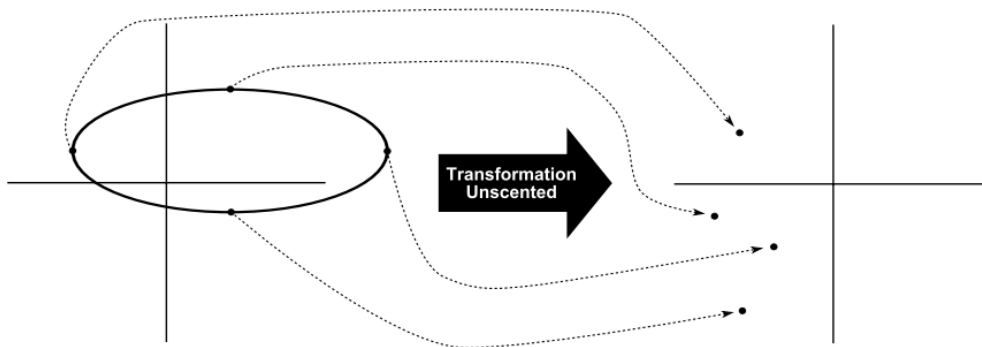


Fig. 2.2 – Le principe de la transformation *Unscented*

fonction non-linéaire, dont la linéarisation au premier ordre fait partie.

Ainsi cette approche se base sur une constellation de points (appelés *sigma points*) et respectivement leurs pondérations, distribués dans l'espace d'état de la v.a. initiale pour approximer sa statistique.

Comme on peut l'observer sur la figure 2.2 ces points sont choisis de telle manière que leur moyenne et covariance représentent exactement la statistique initiale. L'ensemble de points choisi $\{x(i)\}$, auquel on associe les coefficients de pondération $\{W(i)\}$ calculés d'une manière déterministe forme l'ensemble de *sigma points*

$S = \{x(i), W(i)\}$, qui caractérise complètement les vraies moyenne et covariance.

Cet ensemble de points subit ensuite la propagation à travers la fonction non-linéaire, comme dans le cas du EKF.

Cette méthode de propagation de points a une ressemblance avec le filtrage particulaire qui sera pré-senté plus tard dans ce chapitre, mais à la différence de celui-ci, le choix de points est déterministe et les pondérations associées sont choisies d'une autre manière, sans se baser sur la distribution.

Dans son article [JUDW00] Julier démontre qu'un tel ensemble de points, permettant le calcul de la moyenne et covariance de la v.a. transformée, est donné par un nombre de $2N_x$ points, où N_x est la dimension du vecteur état x .

Les points sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(i)} &= \bar{\mathbf{x}} + (\sqrt{N_x P_{xx}})_i \\ W^{(i)} &= 1/2N \\ \mathbf{x}^{(i+N_x)} &= \bar{\mathbf{x}} - (\sqrt{N_x P_{xx}})_i \\ W^{(i+N_x)} &= 1/2N_x \end{aligned} \quad (2.13)$$

où $i = 1 \dots N_x$, $(x)_i$ représente la i -ème ligne ou colonne de la matrice $(\sqrt{N_x P_{xx}})$ et où $W^{(i)}$ est la pondération associée.

Dans la figure 2.4 on donne un exemple pour le choix de points sigma avec l'hypothèse d'une distribution initiale gaussienne bi-dimensionnelle.

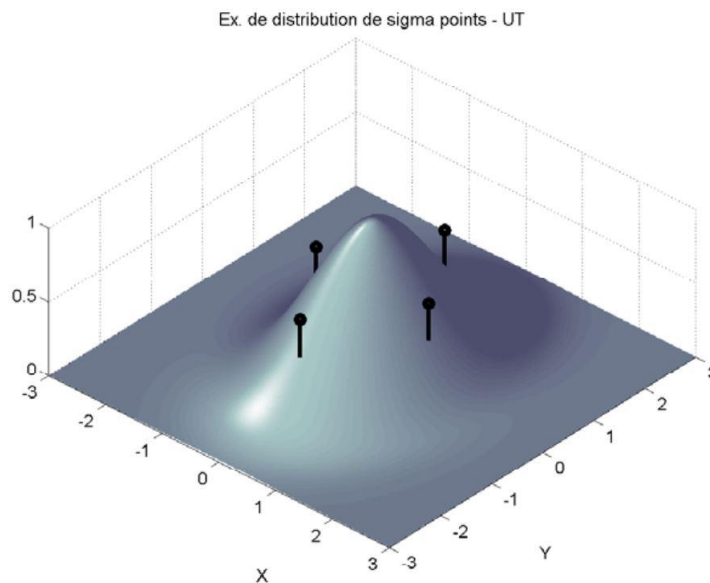


Fig. 2.3 – Un exemple de distribution de sigma points pour une v.a. gaussienne bi-dimensionnelle dans le cas de la transformation Unscented.

Les points sont situés par rapport à la surface gaussienne à une distance égale au coefficient de pondération.

Étant donné cet ensemble de points, la moyenne et la variance sont calculées de la manière suivante :

1. par propagation par la fonction non-linéaire on obtient l'ensemble de points transformés :

$$\mathbf{y}^{(i)} = [\mathbf{f} \mathbf{x}^{(i)}] \quad (2.14)$$

2. la moyenne est calculée par la somme des points transformés, pondérés par les coefficients $\{W^{(i)}\}$:

$$\bar{\mathbf{y}} \approx \sum_{i=1}^{2N_x} w^{(i)} \mathbf{y}^{(i)} \quad (2.15)$$

$$P_{yy} \approx \sum_{i=1}^{2N_x} w^{(i)} \{ \mathbf{y}^{(i)} - \bar{\mathbf{y}} \} \{ \mathbf{y}^{(i)} - \bar{\mathbf{y}} \}^T \quad (2.16)$$

L'ensemble de points ainsi défini, permet d'approximer la valeur moyenne de la vraie distribution jusqu'au deuxième ordre dans le développement de Taylor mais par contre-offre une estimation biaisée au niveau de la covariance.

Ce biais découle de l'impossibilité de l'ensemble de points à traduire l'influence des moments supérieurs de la statistique. Pour corriger ce problème la solution la plus simple est de compléter l'ensemble de points choisi avec un ou plusieurs points.

Les mêmes auteurs [JUDW00, vdM04] ont alors proposé d'ajouter un point correspondant à la moyenne et avec son coefficient de pondération de permettre le réglage de l'influence des moments supérieurs. Ainsi le nouvel ensemble de *sigma points* proposé est défini de la manière suivante :

$$\mathbf{x}^{(0)} = \bar{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{W}^{(0)} = \mathbf{K} / (N_x + K)$$

$$\mathbf{x}^{(i)} = \bar{\mathbf{x}} + (\sqrt{(N_x + k)P_{xx}})_i$$

$$W^{(i)} = 1/ \{2 (N_x + K)\}$$

$$\mathbf{x}^{(i+N_x)} = \bar{\mathbf{x}} - (\sqrt{(N_x + k)P_{xx}})_i$$

$$W^{(i+N_x)} = 1/ \{2 (N_x + K)\} \tag{2.17}$$

où $i = 1 \dots N_x$. Le choix original des points *sigma*, défini par les équations (2.13), a la propriété que l'ellipsoïde qui limite le positionnement des points augmente avec la dimension N_x de l'espace d'état.

Ainsi le choix du nouveau paramètre introduit k , en plus de capturer l'influence des moments supérieurs, doit être utilisé aussi pour limiter la dispersion des points dans l'espace d'état en présence de forte non-linéarité.

Avec la définition du nouvel ensemble de points *sigma* on observe que la distance du i -ème point par rapport à $\bar{\mathbf{x}}$ est proportionnelle à la valeur $\sqrt{(N_x + k)}$.

Ainsi le choix du paramètre $k = 0$, nous place dans le cas des équations (2.13), tandis qu'une valeur $k > 0$ éloigne les points de la moyenne, et avec une valeur négative de k , on trouve l'effet inverse avec un rapprochement des points. Il existe un cas spécial avec la solution de $k = 3 - N_x$, correspondant à l'annulation de la dimension N_x sur la distribution de points.

Par contre avec le choix $k = 3 - N_x < 0$ on va se retrouver dans un cas où le coefficient de pondération du point situé sur la moyenne est négatif et la covariance obtenue après propagation peut devenir semi-définie négative.

2.3.2 Transformation *scaled-Unscented*

Enfin il existe une solution proposée dans [JUDW00] où un nouvel ensemble de points est proposé avec un paramètre de décalage :

$$\mathbf{x}_s^{(i)} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(0)}), i = 0 \dots 2N_x, (0 < \alpha < 1) \tag{2.18}$$

Cette nouvelle transformation porte le nom de transformation *scaled-Unscented*. Les auteurs ont démontré que le nouveau paramètre de décalage α introduit ne va pas influencer de

manière négative l'estimation de la statistique de la variable transformée $(\bar{y}, \mathbf{P}_{yy})$, avec une expression exacte jusqu'au deuxième ordre des moments de la v.a. initiale, et une pondération des autres moments supérieurs grâce à α . Enfin les auteurs ont proposé un ensemble de points qui intègre ce décalage ainsi que les nouvelles pondérations associées :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}^{(0)} &= \bar{x} & W_{(m)}^{(0)} &= \frac{\lambda}{N_x + \lambda} \\
 \mathbf{x}^{(i)} &= \bar{x} + (\sqrt{(N_x + k)P_{xx}})_i \quad i=1, \dots, N_x & W_{(c)}^{(0)} &= \frac{\lambda}{N_x + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta) \\
 \mathbf{x}^{(i)} &= \bar{x} - (\sqrt{(N_x + k)P_{xx}})_i \quad i=N_x + 1, \dots, 2N_x & W_{(m)}^{(i)} &= W_{(c)}^{(i)} = \frac{1}{2(N_x + \lambda)} \quad i=1, \dots, 2N_x
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

où $\lambda = \alpha^2 (N_x + K) - N_x$ et les pondérations désignées par $W_{(m)}^{(i)}$ et $W_{(c)}^{(i)}$ sont associées au calcul de la moyenne et de la covariance, respectivement

L'expression du point central $\mathbf{x}^{(0)}$ garantit une matrice de covariance définie semi-positive.

Le choix des paramètres qui apparaissent dans le calcul de l'ensemble de points se fait de la manière suivante :

– Afin d'avoir une matrice de covariance définie semi-positive, on prendra $K \geq 0$.

Il s'avère que la valeur de K n'est pas critique, de telle sorte que $K = 0$ correspond généralement à tous les cas d'estimation ;

– Le paramètre $0 < \alpha < 1$ considéré antérieurement va jouer directement sur la dimension de l'ellipsoïde de distribution des sigma points.

Ainsi de façon idéale sa valeur doit être petite pour limiter l'influence de certains effets de non-linéarité dans les régions éloignées de la valeur estimée ;

Pour illustrer les performances de cette nouvelle transformation définie par le choix de l'ensemble de paramètres:

$\{K = 0, \alpha = 10^{-3}, \beta = 2\}$ on va prendre la fonction non-linéaire $f(x) = \cos x$, avec x .

Possédant pour paramètres de distribution initial $\mu = -0.5, \sigma = 0.05$; on peut observer sur le tableau (2.1) que la transformation Unscented arrive à mieux estimer les deux premiers moments, mais par contre avec l'augmentation de l'ordre de la non-linéarité cette transformation présente des erreurs les résultats sont issus d'une simulation de type monté-

carlo car la propagation d'une séquence aléatoire de 10^6 échantillon.

Fonction non-linéaire $f(x)$	$x = \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$		$y = f(x) - \text{EKF}$		$y = f(x) - \text{UKF}$		$y = f(x) - \text{MC}$	
	μ_x	σ_x^2	μ_y	σ_y^2	μ_y	σ_y^2	μ_y	σ_y^2
$f(x) = \cos x$	- 0.7	0.0125	0.76484	0.005187	0.76006	0.005233	0.97044	0.005172
$f(x) = \cos x$	-0.6	0.025	0.82534	0.007970	0.81502	0.008183	0.8151	0.007980
$f(x) = \cos x$	-0.5	0.05	0.87758	0.011492	0.85564	0.012455	0.85592	0.011855
$f(x) = 2x^3 - 1.5x + 0.5$	-0.1	0.05	0.648	0.10368	0.618	0.10548	0.61804	0.069748

Tab. 2.1– Performances des transformations EKF et Unscented pour différentes configurations de la distribution initiale et de non-linéarité

2.3.3 Construction du modèle de filtrage récursif UKF

Avec la définition de la transformation Unscented donnée ci-dessus la forme récursive du filtrage de Kalman peut être facilement déduite. Ainsi Julier et al. [JUDW00, vdM04] proposent une formulation générale dont le vecteur d'état est modifié en ajoutant à l'état original les vecteur associés aux bruits de processus et d'observation. Le vecteur finale obtenu, en utilisant un modèle de filtrage similaire a celui donné par l'equation,écrit sont la forme suivante:

$$X_k^a = \begin{bmatrix} x_k \\ v_k \\ n_k \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

La dimension du nouveau vecteur d'état augmenté est $N_a = N_x + N_v + N_n$, où N_x , N_v et N_n représentent les dimensions des vecteurs x_k , v_k et n_k respectivement. Étant données les nouvelles notations, le modèle d'estimation récursif peut être écrit sous la forme générale suivante :

$$\begin{aligned} X_{k+1}^a &= f^a(X_k^a) \\ Y_k &= h^a(X_k^a) \end{aligned} \tag{2.21}$$

avec la transformation Unscented qui calcule les points *sigma* à partir des expressions suivantes des moments :

$$\mu_k^a = \begin{pmatrix} \mu_k \\ 0_{N_v \times 1} \\ 0_{N_n \times 1} \end{pmatrix}$$

$$P_{k|k}^a = \begin{bmatrix} P_{k|k} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 \\ 0 & 0 & R_k \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Bien sûr un modèle plus général peut être écrit avec la prise en compte de certaines corrélations entre les bruits et les états ou entre les bruits eux-mêmes, mais pour tous les cas considérés par la suite un tel développement n'est pas nécessaire. Finalement les notations introduites nous permettent d'écrire l'algorithme récursif de filtrage pour un instant k quelconque, en utilisant la succession d'étapes suivantes :

1. Construction de l'ensemble de points *sigma* en utilisant les relations (2.17) :

$$\{X_{k|k}^{(i)}, W^{(i)}\}_{i=0 \dots N_a}$$

2. Propagation de l'ensemble des points construit à travers la fonction de processus :

$$x_{k+1|k}^{(i)} = f^a(x_{k|k}^{(i)}), i = 0 \dots N_a \quad (2.23)$$

3. Calcul de la valeur estimée et de la covariance des erreurs prédites :

$$\hat{x}_{k+1|k} = \sum_{i=1}^{N_a} W_{(m)}^{(i)} x_{k+1|k}^{(i)}$$

$$P_{x_{k+1|k} x_{k+1|k}} = \sum_{i=1}^{N_a} W_{(c)}^{(i)} \{x_{k+1|k}^{(i)} - \hat{x}_{k+1|k}\} \{x_{k+1|k}^{(i)} - \hat{x}_{k+1|k}\}^T \quad (2.24)$$

4. Propagation des points *sigma* à travers le modèle d'observation :

$$y_{k+1|k}^{(i)} = h^a(x_{k+1|k}^{(i)}), i = 0 \dots N_a \quad (2.25)$$

5. Calcul de l'observation prédite, de la covariance de l'innovation et de la matrice de cross-covariance :

$$\hat{y}_{k+1|k} = \sum_{i=1}^{N_a} W_{(m)}^{(i)} y_{k+1|k}^{(i)}$$

$$P_{y_{k+1|k} y_{k+1|k}} = \sum_{i=1}^{N_a} W_{(c)}^{(i)} \{y_{k+1|k}^{(i)} - \hat{y}_{k+1|k}\} \{y_{k+1|k}^{(i)} - \hat{y}_{k+1|k}\}^T$$

$$P_{x_{k+1|k} y_{k+1|k}} = \sum_{i=1}^{N_a} W_{(c)}^{(i)} \{x_{k+1|k}^{(i)} - \hat{x}_{k+1|k}\} \{y_{k+1|k}^{(i)} - \hat{y}_{k+1|k}\}^T \quad (2.26)$$

6. Expression du gain de Kalman et calcul final de l'état estimé et de la covariance des erreurs:

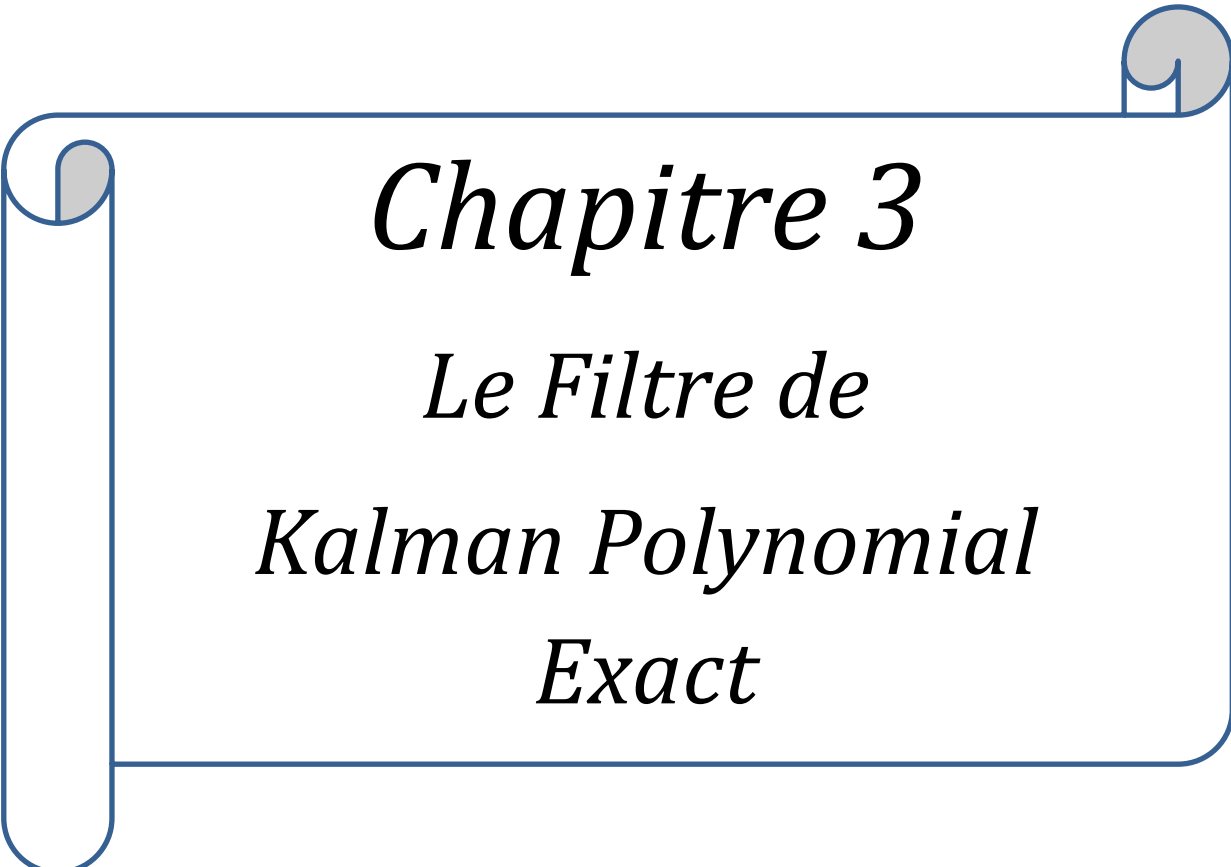
$$\begin{aligned}
 K_{k+1} &= P_{x_{k+1}|k, y_{k+1}|k} P_{x_{k+1}|k, y_{k+1}|k}^{-1} \\
 \hat{x}_{k+1|k+1} &= \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1} (y_{k+1} - \hat{y}_{k+1|k}) \\
 P_{k+1|k+1} &= P_{x_{k+1}|k, y_{k+1}|k} - K_{k+1} P_{y_{k+1}|k, y_{k+1}|k} K_{k+1}^T \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

Avec les expressions qui caractérisent l'implémentation récursive du filtrage de Kalman, le développement de la structure classique du filtrage de type *scaled-Unscented* est accompli. On souligne encore une fois que la solution choisie pour former l'ensemble de points *sigma* n'est pas unique ; Dans le paragraphe qui suit nous évoquons une méthode associée à la transformation Unscented qui grâce à un nombre plus grand de points réussit une meilleure approximation des moments supérieurs.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques variantes du filtre de Kalman appliquées au cas non linéaire. Le premier est le filtre de Kalman étendu EKF, où le problème de la non linéarité est résolu en procédant à une linéarisation basée sur le développement en série de Taylor au premier ordre. Le fait de négliger les termes HOT dans l'approximation de la fonction non linéaire ajoute, d'autres types d'erreurs qui peuvent causer la divergence de l'algorithme EKF. Une autre méthode d'approximations qui permet d'avoir de meilleures performances a été présentée, il s'agit de la transformation Unscented (**UKF**) qui utilise la notion des points sigmas pondérés.

Dans le prochain chapitre en va introduire une nouvelle transformation non-linéaire des modèles polynomiaux en temps discret.



Chapitre 3

Le Filtre de

Kalman Polynomial

Exact

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons d'introduire une nouvelle méthode de filtrage Kalman non-linéaire par le problème de synchronisation du chaos. Si l'idée d'utiliser une transformation polynomiale a été déjà exposée par Norgaard et al. [NPR00a, NPR00b], on se propose de réaliser une nouvelle transformation qui ne va pas juste approximer la dynamique du système par un polynôme d'ordre deux (filtre DD2) ; Pour le cas particulier où le modèle est caractérisé par une forme polynomiale, nous proposons de calculer d'une manière exacte la statistique d'ordre deux des états estimés.

Des propositions voisines ont été effectuées par Basin [Bas03], pour le cas des systèmes à temps continu et avec certaines restrictions : ordre du système limité à trois et modèle d'observation linéaire. Nous allons considérer un processus dynamique caractérisé par un modèle polynomial mono-dimensionnel en temps discret. Pour la réalisation de l'algorithme récursif de type Kalman, une transformation non-linéaire dénommée Transformation Polynomiale Exacte sera introduite.

Des relations matricielles générales vont permettre le calcul de la statistique d'ordre deux de n'importe quelle variable aléatoire (v.a.) propagée à travers une fonction polynomiale. Le calcul, réalisé en utilisant tous les termes de la série de Taylor, facilitera l'implémentation du filtre Kalman polynomial et cela sans approximation.

Notre objectif initial est d'appliquer ce type de filtrage à la synchronisation chaotique, dont la définition et le cadre général ont été présentés dans le chapitre 2.

On utilisera ici comme fonctions génératrices des polynômes de Chebyshev [Riv90], qui présentent des propriétés statistiques et de corrélation très intéressantes, en particulier dans le contexte de transmissions basées sur l'étalement de spectre.

Beaucoup d'articles démontrent la pertinence de diverses méthodes de filtrage de Kalman pour accomplir une synchronisation chaotique [COS93, LL97, CN00, BDR02, SOD94].

En particulier Leung et Zhu ont récemment démontré des résultats importants au sujet de la synchronisation du chaos par le filtrage de Kalman étendu (EKF) : les auteurs montrent que la technique basée sur ce filtre est une généralisation des méthodes de synchronisation chaotique classiques.

3.2 Transformation Polynomiale Exacte

La transformation non-linéaire d'une distribution connue a priori étant au coeur de toutes les méthodes de filtrage Kalman non-linéaire, il existe un intérêt croissant pour trouver la transformation qui offre la meilleure approximation des moments de la distribution résultante.

Dans ce chapitre on va considérer le cas des fonctions non-linéaires polynomiales mono-dimensionnelles, données par la forme générale suivante :

$$f(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n \quad (3.1)$$

Le but de la transformation est d'estimer la moyenne et la variance pour une variable aléatoire y qui résulte de la propagation de la variable aléatoire x par la fonction non-linéaire considérée :

$$y = f(x) \quad (3.2)$$

Pour le moment, on ne considère aucune restriction au sujet de la densité de probabilité de la v.a. x .

La supposition d'une distribution Gaussienne ne sera introduite que pour construire l'algorithme de filtrage Kalman polynomial.

De façon générale on peut exprimer les deux premiers moments de la distribution transformée pour la v.a. y , en utilisant le développement en série de Taylor. On écrit la distribution initiale sous la forme suivante :

$$x = \bar{x} + \Delta x \quad (3.3)$$

où Δx est une v.a. centrée. Avec le développement en série de Taylor appliquée à la v.a. y on obtient :

$$\bar{y} = f(\bar{x}) + \sum_{n=2}^N \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n} \Big|_{x=\bar{x}} \quad (3.4)$$

et on peut calculer le moment d'ordre un :

$$\bar{y} = E [y]$$

$$= f(\bar{x}) + \sum_{n=2}^N \frac{m_n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n} \Big|_{x=\bar{x}} \quad (3.5)$$

où m_n désigne le moment d'ordre n pour la v.a. Δx .

Avec la forme polynomiale (3.1) de la fonction $f(\cdot)$ les dérivées peuvent être exprimées de la manière suivante :

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \sum_{i=n}^N a_i \frac{i!}{(i-n)!} x^{i-n} \quad (3.6)$$

Comme $m_0 = 1$, $m_1 = 0$ et en utilisant les coefficients binomiaux $c_i^n = \frac{i!}{(i-n)!} x^{i-n}$ le calcul du moment d'ordre un devient :

$$\bar{y} = \sum_{n=0}^N m_n \sum_{i=n}^N a_i C_i^n x^{i-n} \quad (3.7)$$

Cette expression peut être écrite sous une forme matricielle compacte pour faciliter l'implémentation en pratique :

$$\bar{y} = \mathbf{a}_{0:N}^T \mathbf{C}_{\bar{x}} \mathbf{m}_{0:N}^x \quad (3.8)$$

où $\mathbf{a}_{i:j}$ dénote $[a_i, a_{i+1}, \dots, a_j]$, $\mathbf{m}_{i:j}^x = [m_i, m_{i+1}, \dots, m_j]^T$ et $\mathbf{C}_{\bar{x}}^x$ est une matrice triangulaire dont les éléments ont la forme de puissances de \bar{x} :

$$\mathbf{C}_{\bar{x}}^x = \begin{bmatrix} C_0^0 \bar{x}^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_1^0 \bar{x}^1 & C_1^1 \bar{x}^0 & 0 & \dots & 0 \\ C_2^0 \bar{x}^2 & C_1^1 \bar{x}^0 & C_2^2 \bar{x}^0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_N^0 \bar{x}^N & C_1^1 \bar{x}^{N-1} & C_2^2 \bar{x}^{N-2} & \dots & C_N^N \bar{x}^0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Dans les exemples de simulation, la matrice $\mathbf{C}_{\bar{x}}^x$ est impliquée récursivement à chaque estimation d'état, donc afin de réduire le coût de calcul, elle prendrait la forme de produit Hadamard :

$$\mathbf{C}_{\bar{x}}^x = \mathbf{M}_N^C \odot \mathbf{M}_N^{\bar{x}} \quad (3.10)$$

$$M_N^C = \begin{bmatrix} C_0^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_1^0 & C_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_N^0 & C_N^1 & C_N^2 & \dots & C_N^N \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$M_N^{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \bar{x}^1 & \bar{x}^0 & 0 & \dots & 0 \\ \bar{x}^2 & \bar{x}^0 & \bar{x}^0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{x}^N & \bar{x}^{N-1} & \bar{x}^{N-2} & \dots & \bar{x}^0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

On peut observer que M_N^C est une matrice constante, de sorte qu'elle est calculée une fois pour toutes ; et pour $M_N^{\bar{x}}$ nous nous occupons seulement de construire sa *N*ème ligne : $R_N = [x^{-N}, x^{-N-1}, x^{-N-2}, \dots, x^{-0}]$, puis il suffit de tronquer ce principal élément pour obtenir les autres lignes.

$$KV_{0:q} = [e_0; e_1; \dots; e_0]^T = (M_q^C \odot M_q^{\bar{x}}) M_{0:q}^x$$

$$= \left(\begin{bmatrix} C_0^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_1^0 & C_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_q^0 & C_q^1 & C_q^2 & \dots & C_q^N \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \bar{x}^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \bar{x}^1 & \bar{x}^0 & 0 & \dots & 0 \\ \bar{x}^2 & \bar{x}^0 & \bar{x}^0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{x}^q & \bar{x}^{q-1} & \bar{x}^{q-2} & \dots & \bar{x}^0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_q \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Simplement le terme $(y - \bar{y})$ est un polynôme défini par le vecteur de coefficients suivant :

$$b_{0:N} = [a_0 - \bar{y}, a_1, a_2, \dots, a_N]^T \quad (3.14)$$

il en résulte que l'expression $(y - \bar{y})^n$ représente une transformation polynomiale d'ordre nN de la variable indépendante x , par conséquent, le moment central d'ordre n (σ_y^n) : $E[(y - \bar{y})^n]$ a la même expression que celle de l'espérance mathématique de la fonction polynômiale $(y - \bar{y})^n$, et en utilisant l'algorithme (1) pour calculer le vecteur de coefficients $V_{0:nN}$

$$\sigma_y^n = E[y - \bar{y}]^n = V_{0:nN}^T C_{nN}^{\bar{x}} m_{0:nN}^x = V_{0:nN}^T (M_{nN}^C \odot M_{nN}^{\bar{x}}) m_{0:nN}^x \quad (3.15)$$

Algorithm 1

$V_{0:nN} \leftarrow b_{0:N}$
For $i = 1$ to $n - 1$ **do**
 $V_{0:nN} \leftarrow Conv(V_{0:nN}, b_{0:N})$
end for

où $Conv^1$ désigne la convolution et la multiplication polynomiales.

1. $C = Conv(A; B)$ convolue les vecteurs A et B . Le vecteur résultant est de

$$longueur = Longueur(A) + longueur(B) - 1$$

Si A et B sont deux vecteurs de coefficients polynomiaux, la convolution entre eux équivaut à multiplier les deux polynômes.

L'objectif étant d'obtenir une variante du filtre de Kalman basée sur le calcul exact des statistiques, il devrait calculer la variance P_{yy} et la covariance P_{xy} entre x et y , alors, à partir de (3.15) on a :

$$P_{yy} = V_{0:2N}^T (M_{nN}^C \odot M_{nN}^{\bar{x}}) m_{0:2N}^x \quad (3.16)$$

et comme il est facile d'observer que le terme $(x - \bar{x})(y - \bar{y})$ est un polynôme d'ordre $(N + 1)$, à cet effet, il est nécessaire de trouver le vecteur de coefficients pour calculer la covariance P_{xy} .

– Bien qu’il y ait des similitudes avec la référence [LABS06], notre analyse en diffère de façon que toutes les statistiques (moyenne, covariance, ou tout autre moment central) de la variable transformée gardent la même forme compacte, ce qui permet d’exploiter à chaque itération, le vecteur colonne Cléf donné par (Eq :3.13) pour chacun d’eux. Quoi qu’il en soit, pour chaque deux entiers différents p et q tel que $1 < p < q$, le vecteur $KV_{0:p}$ est un sous-ensemble du vecteur colonne $KV_{0:q}$, dans le sens où, les $(P + 1)$ premiers éléments de $KV_{0:q}$, sont partagés entre eux. Ainsi, pour obtenir un estimé de l’état, il serait préférable de construire le vecteur $KV_{0:q}$ qui correspond au plus grand moment central, et puis sélectionner le sous vecteur avec la même taille que le vecteur de coefficients. Par exemple, pour calculer la moyenne \bar{y} , la variance P_{yy} et le moment central d’ordre 3 $E[(y - \bar{y})^3]$ de la variable transformée y via le polynôme de Chebyshev d’ordre 4 : “ $y = T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ ”, on construit le vecteur $KV_{0:q}$, avec $q = 12$ et à partir duquel les deux sous vecteurs $KV_{0:p}$, ($p = 4,8$) seront choisis pour trouver respectivement, la moyenne, la variance et finalement le moment central d’ordre 3 :

$$\bar{y} = [1,0, -8,0,8]KV_{0:4} = [1,0, -8,0,8][e_0, e_1, e_2, e_3, e_4]^T, \quad (3.17)$$

$$\text{donc, } b_{0:4} = [1 - \bar{y}, 0, -8,0,8]^T \text{ et,}$$

$$P_{yy} = V_{0:8}^T KV_{0:8} = [e_0, e_1, \dots, e_8]^T, \quad (3.18)$$

$$E[(y - \bar{y})^3] = V_{0:12}^T KV_{0:12} = V_{0:12}^T [e_0, e_1, \dots, e_{12}]^T \quad (3.19)$$

où $V_{0:8}V_{0:12}$ sont calculés conformément à l’algorithme (1).

\odot représentant le produit de Hadamard et $\mathbf{1}_N$ un vecteur colonne de longueur N avec tous les éléments unité.

L’objectif étant d’obtenir une variante du filtrage Kalman basée sur les relations précédentes, il reste à calculer la covariance de transition P_{xy} entre les v.a. x et y :

$$\begin{aligned}
P_{xy} &= E [(x - \bar{x}) (y - \bar{y})] \\
&= E [\Delta x \cdot y] - E [\Delta x \cdot \bar{y}] \\
&= \sum_{n=1}^N m_{n+1} \sum_{i=n}^N a_i C_i^n x^{-i-n} \tag{3.20}
\end{aligned}$$

Encore une fois on peut mettre cette relation sous forme matricielle :

$$P_{xy} = a_{0:N}^T C^{\bar{x}} m_{1:N+1}^x \tag{3.21}$$

Il faut remarquer que les relations (3.8), (3.15) et (3.21) sont vraies pour n'importe quelle distribution initiale x avec les moments centrés connus, et pour une fonction polynomiale $f(\cdot)$ quelconque.

Les relations matricielles formulées ne constituent pas un moyen de réduire le coût de calcul mais plutôt une solution d'implémentation générale et rapide.

Nous présenterons dans la section 3.4 une application au cas particulier des polynômes de Chebyshev.

Des expressions alternatives des moments seront alors données pour un calcul le plus direct possible. Dans la section suivante nous proposons d'intégrer la transformation polynomiale exacte dans un filtre de Kalman.

3.3 Filtre de Kalman Polynomial Exact (ExPKF)

Pour développer le filtre de Kalman à base de transformation polynomiale, on considère les modèles mono-dimensionnels de processus et d'observation suivants :

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= f_{(xk)} + v_k \\
y_k &= h_{(xk)} + n_k \tag{3.22}
\end{aligned}$$

où $\{f(\cdot), h(\cdot)\}$ désignent des fonctions non-linéaires et où les bruits additifs $\{v_k, n_k\}$ sont considérés de moyennes zéros, gaussiens et avec une inter-corrélation nulle :

$$E[v_k] = E[n_k] = 0$$

$$\begin{aligned}
 E[v_k v_j] &= Q \delta_{kj} \\
 E[n_k n_j] &= R \delta_{kj} \\
 E[v_k n_j] &= 0 \\
 E[v_k n_j] &= E[n_k x_j] = 0
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Si on suppose aussi la gaussiannité de l'état a priori x_k et des valeurs observées y_{k+1} , on peut exprimer la valeur optimale de l'état estimé x_{k+1} de la manière suivante :

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1} (y_{k+1} - \hat{y}_{k+1|k}) \tag{3.24}$$

Où

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{k+1|k} &= E [f (x_k) + v_k] = E [f (x_k)] \\
 \hat{y}_{k+1|k} &= E [h (x_{k+1|k}) + n_{k+1}] = E [h (x_{k+1|k})] \\
 K_{k+1} &= P_{x_{k+1|k} y_{k+1|k}} P_{y_{k+1|k} y_{k+1|k}}^{-1}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

En utilisant le modèle général (3.22), les covariances $P_{x_{k+1|k} y_{k+1|k}}$ et $P_{y_{k+1|k} y_{k+1|k}}^{-1}$ seront données par les expressions :

$$\begin{aligned}
 P_{x_{k+1|k} y_{k+1|k}} &= E [(x_{k+1|k} - \hat{x}_{k+1|k}) (y_{k+1|k} - \hat{y}_{k+1|k})] \\
 &= E [(x_{k+1|k} - \hat{x}_{k+1|k}) (h (x_{k+1|k}) - E [h (\hat{x}_{k+1|k})])]
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
 P_{y_{k+1|k} y_{k+1|k}} &= E [(y_{k+1|k} - \hat{y}_{k+1|k}) (y_{k+1|k} - \hat{y}_{k+1|k})] \\
 &= E [h (x_{k+1|k}) - \hat{y}_{k+1|k}]^2 + R
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

L'hypothèse gaussienne des valeurs estimées et des observations limite la connaissance des moments à l'ordre deux et dans ce cas le vecteur des moments prend la forme :

$$\begin{aligned} m_{0:N}^x &= [m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, \dots]^T \\ &= [1, 0, \sigma_x^2, 0, 3\sigma_x^4]^T \end{aligned} \quad (3.28)$$

En conclusion, avec l'hypothèse gaussienne et la transformation polynomiale exacte présentée dans la section 3.2, on peut développer un algorithme de filtrage Kalman où les calculs se font de façon exacte avec la condition que les fonctions de processus et d'observation soient mono-dimensionnelles et polynomiales, i.e.

$$f(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n, \quad h(x) = \sum_{k=0}^K b_k x^k$$

A l'étape de mise à jour temporelle, la moyenne et la covariance de l'état prédit sont obtenues à l'aide des relations (3.8) et respectivement (3.15) :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k} &= E [f(x_k)] \\ &= a_{0:N}^T C^{\hat{x}_k} m_{0:N}^{x_k} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} P_{k+1|k} &= E [(x_{k+1|k} - \hat{x}_{k+1|k})^2] \\ &= V_{1:N}^T (M^{c_k} \odot M^{\hat{x}_k}) m_{1:N}^{x_k} + Q \end{aligned} \quad (3.30)$$

L'état observé prédit et les covariances de transition/innovation sont calculés à l'étape de mise à jour des observations en utilisant les équations (3.8) (3.21) et (3.15) :

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k+1|k} &= E [h(x_{k+1|k})] \\ &= b_{0:k}^T C^{\hat{x}_{k+1|k}} m_{0:N}^{x_{k+1|k}} \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$P_{x_{k+1|k} y_{k+1|k}} = E [(x_{k+1|k} - \hat{x}_{k+1|k}) (h(x_{k+1|k}) - E[h(\hat{x}_{k+1|k})])]$$

$$= b_{0:N}^T C \hat{x}_{k+1|k} m_{1:N}^{x_{k+1|k}} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} P_{y_{k+1|k} y_{k+1|k}} &= E [h (x_{k+1|k}) - \hat{y}_{k+1|k}]^2 + R \\ &= V_{1:N}^T (M^{c_{k+1|k}} \odot M^{\hat{x}_{k+1|k}}) m_{1:N}^{x_{k+1|k}} + Q \end{aligned} \quad (3.33)$$

Finalemnt à l'instant $(k + 1)$, la moyenne et la covariance de l'état x_{k+1} sont calculées à l'aide des relations suivantes :

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1} (y_{k+1} - \hat{y}_{k+1|k}) \quad (3.34)$$

$$P_{k+1} = P_{k+1|k} - k_{k+1}^2 P_{y_{k+1|k} y_{k+1|k}} \quad (3.35)$$

où le gain de Kalman K_{k+1} est donné par la relation (3.25).

On rappelle que les relations présentées donnent une formulation générale et elles ne sont pas optimisées pour réduire le coût de calcul. On va démontrer dans la section suivante que pour des modèles polynomiaux bien définis on peut trouver des expressions beaucoup plus simples.

3.4 Application du filtrage ExPKF à la synchronisation chaotique

De par la grande richesse de leurs propriétés, les polynômes de Chebyshev constituent l'une des familles de fonctions les plus populaires pour résoudre des problèmes de modélisation, de filtrage et de traitement du signal [Riv90]. Il a été démontré que tous les polynômes de Chebyshev génèrent du chaos, avec une densité limite égale à $P(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ [KT94], et qu'ils sont caractérisés par un exposant de Lyapunov $\ln p$ [BG97, ABK91], où p est l'ordre du polynôme $T_p(x)$ considéré comme fonction génératrice de la séquence chaotique

$\{x_k, k = 0, 1, \dots\}$:

$$x_{k+1} = f(x_k) = T_p(x_k) \quad (3.36)$$

Par leurs bonnes propriétés de corrélation, les polynômes de Chebyshev ont été utilisés récemment dans le domaine des communications numériques avec une technique d'accès multiple [CYKB01, LTYH04].

p	$y = T_p(x)$	$\bar{y} = E[y]$	$\sigma_y^2 = E[(y - \bar{y})^2]$
2	$2x^2 - 1$	$2\sigma_x^2 + 2\bar{x}^2 - 1$	$8\sigma_x^2 (\sigma_x^2 + 2\bar{x}^2)$
3	$4x^3 - 3x$	$\bar{x}(12\sigma_x^2 + 4\bar{x}^2 - 3)$	$3\sigma_x^2(80\sigma_x^4 + 192\sigma_x^2\bar{x}^2 + \dots + 48\bar{x}^4 - 24\sigma_x^2 - 24\bar{x}^2 + 3)$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$	$24\sigma_x^4 + 48\sigma_x^2\bar{x}^2 + \dots + 8\bar{x}^4$ $- 8\sigma_x^2 - 8\bar{x}^2 + 1$	$128\sigma_x^2(48\sigma_x^6 + 192\sigma_x^4\bar{x}^2 + \dots + 84\sigma_x^2\bar{x}^4 + 8\bar{x}^6 - 12\sigma_x^4$ $- \dots - 36\sigma_x^2\bar{x}^2 - 8\bar{x}^4 + \sigma_x^2 + 2\bar{x}^2)$

Tab. 3.1 – Les moments d'ordre un et deux de la v.a. résultant de la transformation

D'une v.a. gaussienne par un polynôme de Chebyshev (ordre des polynômes 2, 3 et 4)

On rappelle une dernière propriété liée à la récursivité des coefficients de polynômes de Chebyshev qui peuvent être calculés avec la relation :

$$T_{p+1}(x) = 2xT_p(x) - T_{p-1}(x) \tag{3.37}$$

Cette forme générale polynomiale permet l'application directe du filtrage Kalman Exact (ExPKF) à la synchronisation du chaos.

L'expression des moments pour quelques polynômes de Chebyshev d'ordre faible va être donnée ci-après, pour mettre en évidence qu'un algorithme à très bas coût de calcul peut être obtenu.

Alors dans le cas de la synchronisation chaotique pour une fonction génératrice mono-dimensionnelle, le modèle non-linéaire (3.18) se simplifie à cause de la linéarité de la fonction $h(\cdot)$:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k) + v_k \\ y_k &= x_k + n_k \end{aligned} \quad (3.38)$$

et on peut écrire les équations pour l'algorithme ExPKF proposé en utilisant des relations analytiques pour $\{\bar{y}, \sigma_y^2\}$. Par exemple, pour la synchronisation d'une séquence chaotique générée par un polynôme Chebyshev d'ordre deux, le filtre est implémenté de la manière suivante, une fois que la statistique d'ordre deux de la v.a. transformée a été calculée analytiquement (Tableau 3.1).

Les équations de mise à jour temporelle (3.29) et (3.30) deviennent :

$$\hat{x}_{k+1|k} = E[f(x_k)] = 2P_k + 2\hat{x}_k^2 - 1 \quad (3.39)$$

$$P_{k+1} = E[(x_{k+1|k} - \hat{x}_{k+1|k})^2] = 8P_k^2 + 16P_k\hat{x}_k^2 + Q \quad (3.40)$$

De même, si on considère la linéarité de la fonction $h(\cdot)$ et l'indépendance des bruits de modèle et d'observation entre eux et par rapport aux états, les équations de mise à jour des observations deviennent :

$$\hat{y}_{k+1|k} = E[h(x_{k+1|k})] = \hat{x}_{k+1|k} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} P_{x_{k+1|k}y_{k+1|k}} &= E[(x_{k+1|k} - \hat{x}_{k+1|k})(y_{k+1|k} - \hat{y}_{k+1|k})] \\ &= P_{k+1|k} \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$P_{y_{k+1|k}y_{k+1|k}} = E[(y_{k+1|k} - \hat{y}_{k+1|k})(y_{k+1|k} - \hat{y}_{k+1|k})]$$

$$= P_{k+1|k} + R \quad (3.43)$$

$$K_{k+1} = \frac{P_{k+1|k}}{P_{k+1|k} + R} \quad (3.44)$$

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1} + K_{k+1} (y_{k+1} - \hat{y}_{k+1|k}) \quad (3.45)$$

$$P_{k+1} = P_{k+1|k} - K_{k+1}^2 P_{y_{k+1|k} y_{k+1|k}} = \frac{P_{k+1|k} R}{P_{k+1|k} + R} \quad (3.46)$$

Les (3.41) - (3.46) montrent que l'algorithme ExPKF proposé pour la synchronisation d'une séquence chaotique Chebyshev d'ordre deux offre un coût de calcul très limité.

EQM : Un des critères les plus populaires pour mesurer la performance d'un estimateur est l'erreur quadratique moyenne (EQM).

Alors on va examiner la capacité du filtre ExPKF proposé à synchroniser des séquences chaotiques générées par des polynômes de Chebyshev.

L'EQM de synchronisation sera définie comme :

$$EQM = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N (x_k - \hat{x}_k)^2 \quad (3.47)$$

où x_k désigne l'état vrai à l'instant k et où \hat{x}_k son estimée.

Des simulations Monte Carlo ont été menées pour obtenir l'EQM par filtrage ExPKF, entre le signal chaotique original et celui synchronisé, sous différentes conditions de bruit. On a dressé un comparatif des résultats que nous avons obtenus avec ceux résultant d'une application **UsKF**. Pour ces deux méthodes nous avons considéré des séquences de longueur 10^6 échantillons avec une période de transition de 10^3 échantillons. L'état estimé a été initialisé à $x_0 = 0.5$ avec une covariance de $P_0 = 0.25$, et on a pris les mêmes séquences de bruit.

Pour mettre en évidence les possibilités de dé bruitage des filtres, on présente dans la figure (fig.3.1), l'évolution d'EQM normalisée par rapport à la variance du bruit d'observation R . Un polynôme de Chebyshev d'ordre 4 est considéré pour cette simulation,

parce que pour des ordres inférieurs les performances des filtres sont voisines, l'influence des moments statistiques d'ordre supérieur étant limités dans ce cas.

Nous avons remarqué sur la figure (fig.3.1) que pour des variances du bruit d'observation allant jusqu'à 10^{-2} l'erreur correspondant à l'implémentation UsKF, est très proche de celle obtenue par la méthode proposée ,mais elle reste toujours inférieures. Alors que pour des conditions plus bruitées, ses performances se dégradent rapidement.

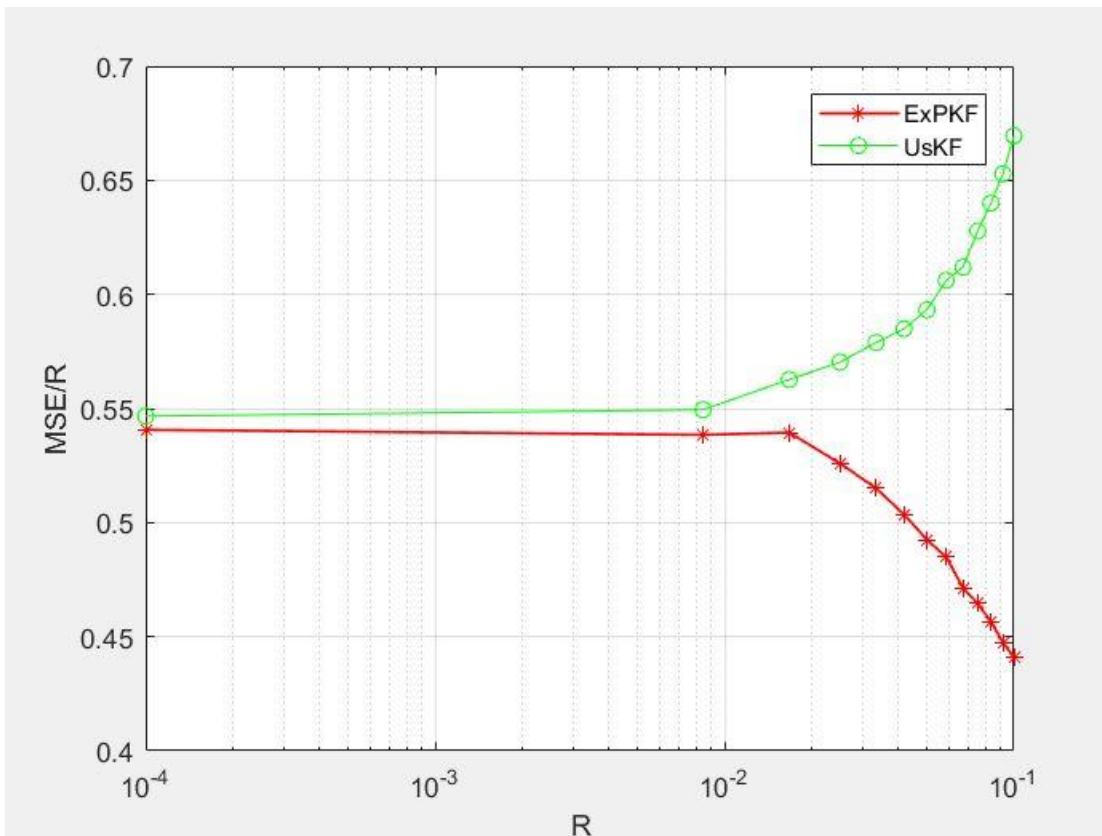


Fig 3.1 – EQM/R Performances de ExPKF, UsKF : $x_0 \sim G(0.4, 0.25)$. $Q = \frac{R}{10}$, 10^3 itérations de transition, (Nombre d'échantillons : $N_s = 10^6$)

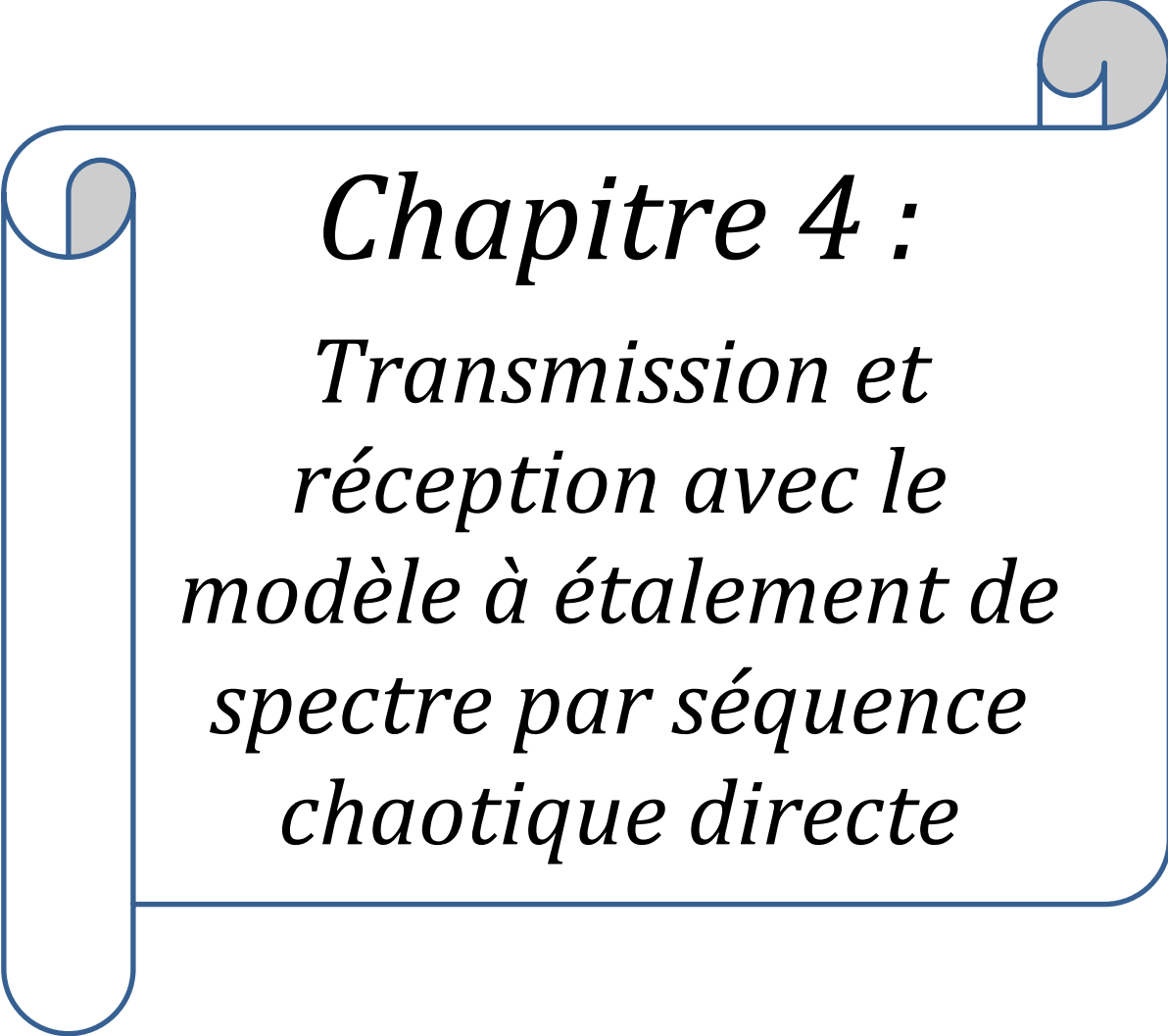
3.5 Conclusion

Ce chapitre présenté le filtrage non-linéaire des modèles polynomiaux monodimensionnels en temps discret .d'après le développement en série de Taylor nous avons obtenu la statistique exacte d'ordre deux de n'importe quelle variable ayant subie une transformation polynomiale. On obtient une expression générale du filtre de Kalman polynomial, grâce aux expressions matricielles compactes de la moyenne et de la covariance à chaque étape.

Comme application, nous avons considéré la synchronisation de séquences chaotiques générées par des polynômes de Chebyshev.

Le chapitre suivant aura comme objectif, l'application de la méthode de synchronisation chaotique dont les performances ont été présentées ici, à plusieurs structures des récepteurs à spectre étalé par séquence chaotique.

L'EQM a été évaluée dans diverses conditions de bruit pour montrer l'efficacité du filtre proposé.



Chapitre 4 :
Transmission et
réception avec le
modèle à étalement de
spectre par séquence
chaotique directe

4.1 Introduction

Les communications numériques à l'aide de systèmes chaotiques ont reçu au cours des dix dernières années une attention importante par la communauté scientifique, à cause des propriétés intrinsèques associées au chaos. Ainsi, grâce à son comportement en apparence aléatoire, le chaos étale le spectre du signal informationnel, de ce fait fournissant la robustesse contre des distorsions de canal, et en plus de ça il agit comme clef de cryptage. Par conséquent, le fonctionnement à faible puissance d'émission est envisageable et en raison de la dynamique complexe des signaux, il est extrêmement difficile pour l'utilisateur non autorisé, averti de la transmission, d'accéder à l'information [APB02].

Dans ce chapitre on va parler de l'émetteur du système de chaotique DS-SS (CD3S) et ces récepteurs à estimation parallèle du code et du symbole.

4.2 Emetteur du système "Chaotic DS-SS" (CD3S)

Le système CD3S a été développé [HBM94, APB02] à partir d'un modèle classique de transmission à étalement du spectre de type séquence directe. L'idée principale est de remplacer le code d'étalement binaire, généré classiquement avec des registres à décalage, par une séquence chaotique à valeurs réelles dans un intervalle fixe. Le schéma général d'un système CD3S est présenté dans la figure 4.1. Les symboles informationnels b_k , représentant une modulation de phase de l'information initiale binaire, subissent ultérieurement l'étalement par le code chaotique $c_k \in \mathbb{R}$ caractérisé par une fréquence chip $F_c \gg F_b$, où $F_b = 1/T_b$ est le taux de transmission des symboles. A ce point nous ne faisons aucune supposition sur le type de séquence chaotique, juste que celle-ci est donnée par l'équation récursive mono-dimensionnelle $c_k = f(c_k - 1)$.

On peut écrire l'expression du signal étalé sous la forme $x_k = b_{\lfloor k/l \rfloor} c_k$, où $\lfloor X \rfloor$ désigne la partie entière du nombre X et où $G = F_c/F_b$ représente le gain d'étalement. Le choix du gain d'étalement dépend de la bande disponible, du taux de transmission et du taux d'erreur binaire souhaité de même que d'éventuelles contraintes de sécurité de transmission.

On peut remarquer la similarité de ce système avec la méthode de modulation chaotique de type CSK.

Effectivement, si on considère la modulation de phase d'information comme un changement de la dynamique chaotique du code d'étalement, on obtient vraiment une structure de type

CSK. L'étalement du spectre par séquence chaotique directe représente donc un cas particulier de modulation CSK.

En ce qui concerne l'établissement de la synchronisation, des symboles pilotes peuvent être interposés au cours de la transmission comme nous le verrons plus tard. Finalement le signal subit un filtrage de type Nyquist et une porteuse sinusoïdale est utilisée pour la transposition dans la bande choisie.

4.3 Modèles de base pour les récepteurs CD3S

Comme il a été suggéré récemment [APB02], la synchronisation chaotique et la détection du symbole peut être obtenue simultanément en utilisant un schéma de filtrage Kalman parallèle (estimation simultanée du Code/Symbole). Pour une application sur des canaux réels le problème de la récupération de la porteuse doit être considéré. Généralement, ce problème est supposé résolu, l'analyse générique des systèmes de transmission étant faits plutôt en bande de base. Les travaux où la récupération de porteuse n'est pas ignorée exploitent habituellement une boucle de Costas ; Nous considérerons aussi cette solution comme point de départ dans notre étude. Les deux prochains paragraphes exposent deux réponses possibles au problème : la récupération de porteuse sera d'abord traitée en amont de l'estimation simultanée Code/Symbole, puis nous examinerons une autre approche où ces deux traitements seront réglés conjointement.

4.3.1 Récepteur à estimation parallèle du code et du symbole

Cette première méthode considère le problème de la récupération de la porteuse résolu en amont de la structure d'estimation du code et du symbole. Cette solution proposée par [APB02], se base sur un filtrage Kalman parallèle. L'information est ici récupérée par une méthode de synchronisation chaotique et non par une structure de type corrélateur. Ainsi la non-linéarité introduite par la dynamique chaotique joue un rôle-clé dans ce récepteur. Le schéma général d'un tel récepteur est donné dans la figure 4.2.

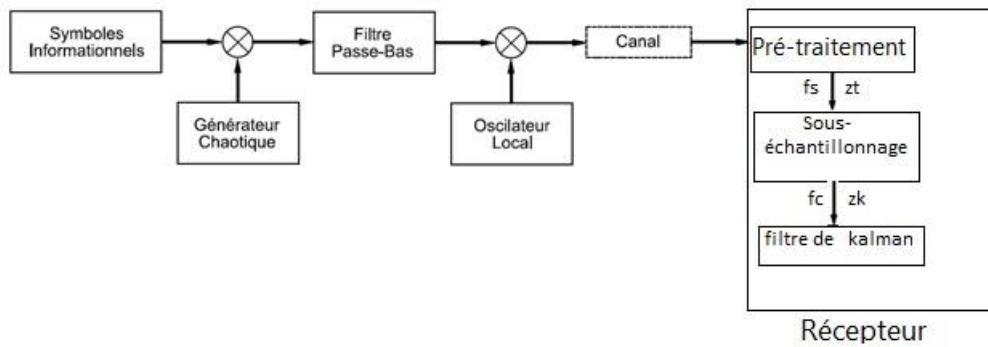


Fig. 4.1 – Schéma général d'un système CD3S



Fig. 4.2 – Récepteur CD3S basé sur une estimation Code/Symbole duale

Cette structure suppose un signal à valeurs réelles en entrée du bloc de filtrage parallèle ; En conséquence, le problème de la récupération de porteuse doit être réglé en amont pour compenser l'erreur de phase. Dans la figure 4.3, la structure de filtrage Kalman permet l'estimation simultanée, à la fréquence chip F_C , de la séquence d'étalement chaotique initiale c_k et du symbole informationnel b_k , à partir de l'observation bruitée y_k . Chacun des deux filtres utilise le dernier état estimé par l'autre filtre comme paramètre, le modèle général étant donné par les équations (4.1). Ainsi les modèles de processus et d'observation pour la synchronisation du code ont la forme suivante :

$$\begin{cases} c_{k+1} = f(c_k) + v_k^c \\ y_k = \text{sgn}(\hat{b}_{k-1})c_k + n_k \end{cases} \quad (4.1)$$

où $f(\cdot)$ désigne la fonction génératrice chaotique, et où la séquence de bruit $v_k^c \sim N(0, Q^c)$, indépendante de l'état c_k , reflète l'incertitude de modèle associée aux imperfections du canal ; Le terme $n_k \sim N(0, R)$ désigne le bruit d'observation et il est surtout dépendant du rapport Signal à Bruit (SNR - Signal to Noise Ratio) à l'entrée du récepteur.

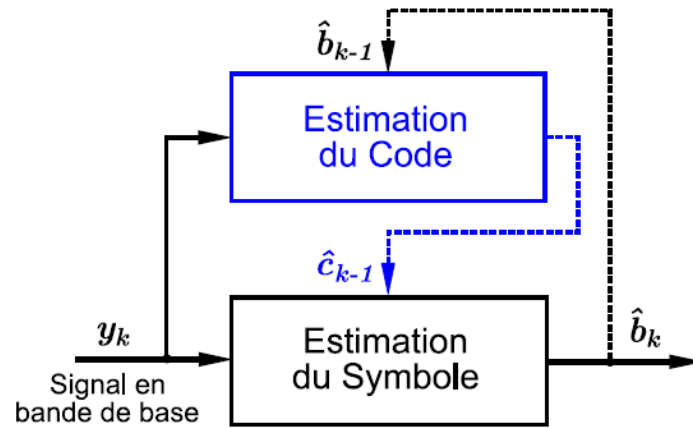


Fig. 4.3 – L’estimateur Dual Code/Symbole

De façon similaire, le symbole sera estimé à la fréquence chip en utilisant les modèles dynamique et d’observation suivants :

$$\begin{cases} b_k = & b_k + v_k^b \\ y_k = & b_k f(\hat{c}_{k-1}) + n_k \end{cases} \quad (4.2)$$

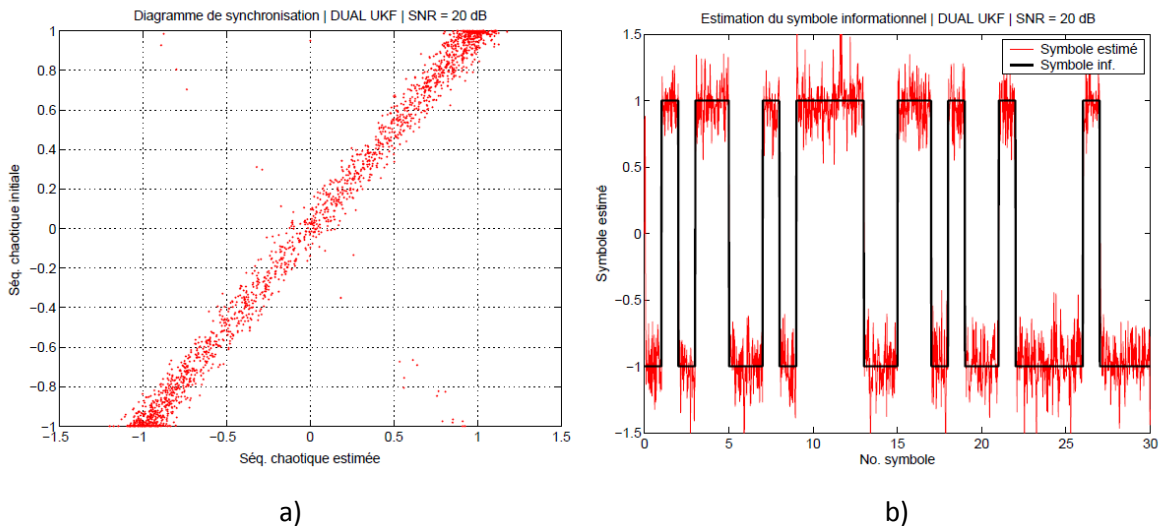


Fig. 4.4 – a) Diagramme de synchronisation pour le récepteur parallèle C/S (implémentation UKF) ; b) Estimation du symbole émis

Où la séquence de bruit gaussien $v_k^b \sim N(0, Q^b)$, considéré de même indépendant de l'état b_k , va influencer la capacité du filtre à suivre l'évolution du symbole. Une petite valeur de la variance Q^b entraînera une faible capacité de poursuite alors qu'une variance importante du bruit de processus va permettre une meilleure adaptation aux changements de symbole. Il faut souligner que grâce à l'ensemble des termes de bruit $\{v_k^c, v_k^b, n_k\}$ et à l'emploi d'une méthode d'estimation non-linéaire de type Unscented ou ExPKF, ce récepteur peut encore fonctionner sur des canaux sélectifs en fréquence [APB02, APDB03], même si le modèle d'observation n'a pas explicitement inclus la propagation par trajet multiple. Un tel modèle ainsi qu'un comparatif des performances seront présentés au paragraphe 4.4. Les figures 4.4 a) et b) illustrent le comportement du récepteur parallèle C/S, en utilisant une dynamique chaotique de type Chebyshev d'ordre deux et une modulation de l'information de type BPSK. Ainsi on représente dans la partie a) le diagramme de synchronisation et dans la partie b) on donne un aperçu des symboles informationnels estimés.

Les paramètres de simulation ont été choisis de la manière suivante :

- simulation en bande de base ;
- fonction chaotique génératrice de type Chebyshev (ordre 2) : $f(x_k) = 2x_k^2 - 1$;
- gain d'étalement : $G = 63$;
- rapport Signal à Bruit : $SNR = 20 \text{ dB}$;

Aussi on va préciser le paramétrage du filtre de Kalman employé :

- filtrage non-linéaire UKF;
- variances des bruits de processus : $Q^b = 10^{-2}, Q^c = 10^{-1}$; ;
- variance du bruit de mesure adapté au rapport SNR : $R = \sigma_c \cdot 10^{-\frac{SNR}{10}} = 5 \cdot 10^{-3}$, où la variance de la séquence d'étalement est $\sigma_c = 0.5$.

Le diagramme de synchronisation nous confirme que le récepteur travaille avec une méthode de synchronisation chaotique pour réussir en même temps l'estimation du symbole informationnel. Quelques courtes désynchronisations s'observent au niveau du changement de symbole binaire mais le récepteur réussit rapidement à récupérer la bonne valeur de l'état. En jouant sur les variances du bruit de processus on peut augmenter ou réduire la rapidité de synchronisation, au risque de pénaliser l'EQM. Une telle étude a été faite [Luc03] sur le meilleur choix de ces deux variances, et finalement les valeurs $Q^b = 10^{-2}, Q^c = 10^{-1}$

conviennent dans la majorité des situations par rapport au critère de l'EQM de synchronisation.

4.4 Résultats obtenus par simulation numérique

Nous avons généré une séquence pseudo-aléatoire de N bits, représentant les symboles à transmettre.

Ce message a ensuite été multiplié par une porteuse chaotique générée au moyen de la carte linéaire par morceaux avec un facteur d'étalement S_f donné.

Après avoir ajouté le bruit système $N(0, Q_s)$ et le bruit de mesure $N(0, Q_b)$, le signal résultant a été correctement démodulé et le nombre de bits correctement récupérés a été compté. L'ensemble du processus a été répété pour des valeurs de E_b/N_0 allant de -0dB à 10dB , avec un pas unitaire croissant.

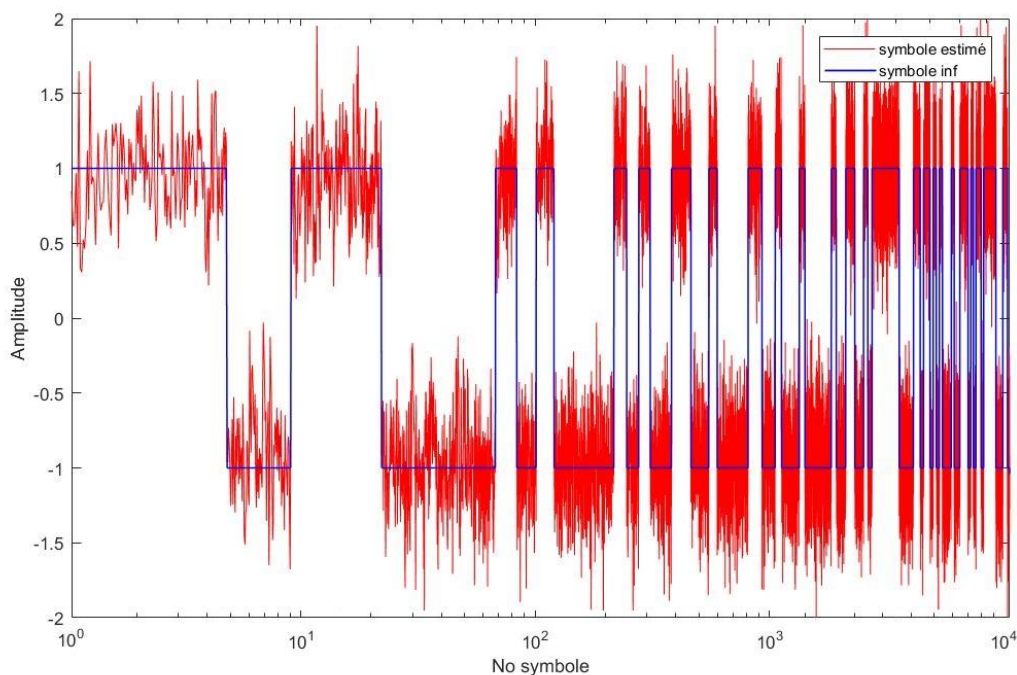


Fig. 4.5 – Estimation du symbole informationnel par l'ExPKF

La figure 4.6 présente les courbes BER obtenues pour les deux approches comparées. Chaque point est la moyenne de 5 passages indépendants. Des expériences ont été faites avec les paramètres suivants :

$$N = 105, Q_b = 10^{-2}, Q_s = 10^{-1}, S_f = 31.$$

Le résultat obtenu lors de la simulation numérique par la méthode ExPKF appliqué à un système CD3S.

En comparant l'algorithme de démodulation ExPKF avec l'algorithme UKF sous différentes valeurs du rapport entre l'énergie du bit et la puissance de bruit (E_b/N_0) et en prenant le taux d'erreur sur les bits (BER) comme métrique de comparaison.

Cette norme est communément adoptée afin d'évaluer la performance d'un système de communication.

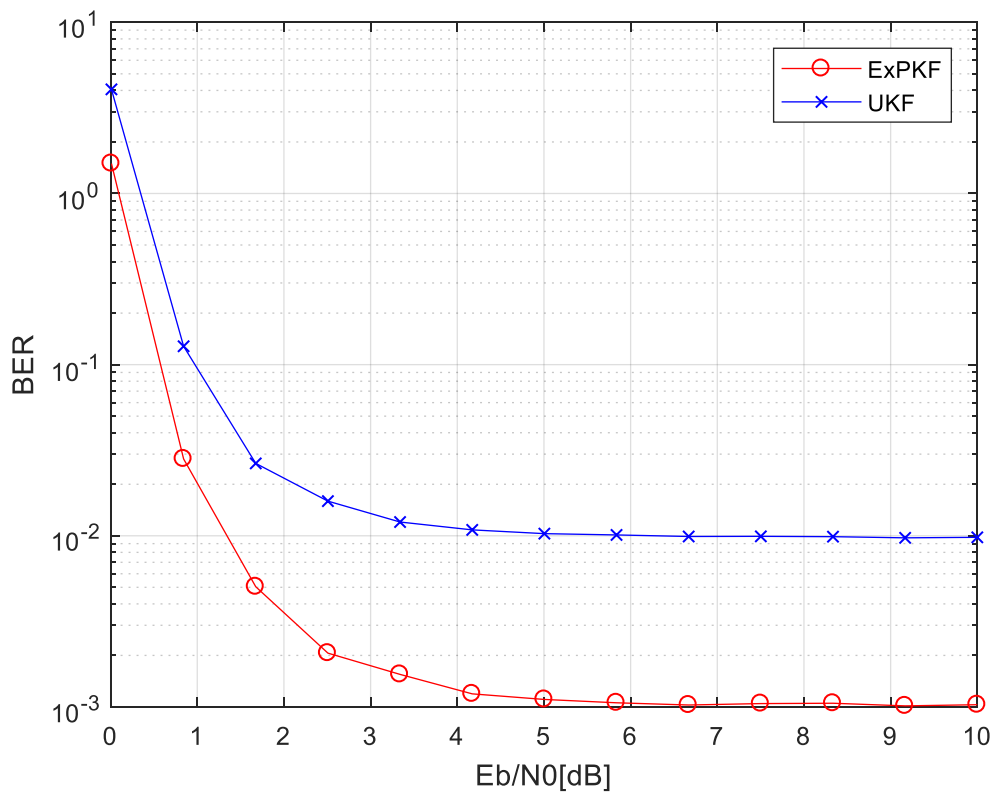


Fig 4.6 – Performances BER (bit-error-rate) pour polynôme Kalman filtre (ExPKF) et unscented Filtre de Kalman (UKF)

On observe que le taux d'erreur sur les bits (BER) pour la courbe ExPKF diminue plus rapidement que la courbe UKF, cela montre que le nombre d'erreur de la méthode ExPKF proposée apparaît plus faibles sur toute la gamme E_b/N_0 .

On conclut à partir des Performances BER (bit-error-rate) pour polynôme Kalman filtre (ExPKF) et unscented Filtre de Kalman (UKF) la méthode ExPKF est plus précise et meilleure que la méthode d'UKF.

4.5 Conclusion

Ce chapitre est dédié la réalisation d'une structure de récepteur adaptée à un système de transmission à étalement du spectre, de type séquence chaotique directe. Ainsi dans le schéma du système, on est parti sur une structure classique d'émetteur remplaçant la séquence d'étalement binaire par une séquence chaotique à valeurs réelles dans un intervalle bien précis.



Conclusion Général

Conclusion générale

A l'étude de la synchronisation entre les systèmes non-linéaires étranges (Chaotiques) s'est révélée fructueuse. Notre travail a contribué à la mise en place, d'une structure d'un récepteur basé sur le principe du filtrage de Kalman non linéaire.

Dans le premier chapitre de ce document a été présenté les systèmes dynamiques continus et discrets, ainsi on a exposé plusieurs modèles de communications à l'aide des systèmes dynamiques chaotiques. Dans un système de communication à porteuse chaotique, la synchronisation est l'élément le plus important qui doit être pris en compte pour assurer les meilleurs performances de transmission, mais en présence du bruit dynamique, la synchronisation peut être vu comme un processus de l'estimation d'état et l'appelle au filtre de Kalman devient immédiat.

Dans le cas du problème de filtrage non linéaire, nous avons présenté quelques variantes du filtre de Kalman appliquées au cas non linéaire ce que nous avons traité dans le deuxième chapitre.

Le premier est le filtre de Kalman étendu EKF, où le problème de la non linéarité est résolu en procédant à une linéarisation basée sur le développement en série de Taylor au premier ordre. Le fait de négliger les termes HOT dans l'approximation de la fonction non linéaire ajoute, d'autres types d'erreurs qui peuvent causer la divergence du filtre EKF. Les autres méthodes d'approximations qui permettent d'avoir de meilleures performances ont été présentées, telle que la transformation Unscented (UKF) qui utilise la notion des points sigma pondérés.

Dans un système de communication à porteuse chaotique, la synchronisation est l'élément le plus important qui doit être pris en compte pour assurer les meilleures performances de transmission. Ainsi dans ce but, on a développé une nouvelle méthode d'estimation d'état, représentée par le filtre de Kalman Polynomial Exact (ExPKF).

On a prouvé ainsi dans le chapitre 3, que pour un modèle polynomial monodimensionnel on peut calculer facilement la statistique exacte d'ordre deux d'une v. a. aléatoire qui subit cette transformation. Les relations obtenues pour les moments d'ordre un et deux suivent des expressions de calcul matricielles rendant ainsi une application en pratique très facile à implémenter. A partir de ces relations, le développement d'un algorithme de filtrage récursif de type Kalman est immédiat.

Cet algorithme a été développé pour un modèle polynomial général rendant ainsi possible son application à tout problème d'estimation récursive où le processus adopte une

Conclusion générale

forme polynomiale. En ce qui concerne son application directe à la synchronisation chaotique, l'expression de moments de l'état transformé peut être encore simplifiée en explicitant les relations matricielles analytiquement, pour obtenir un coût de calcul très réduit. EQM de synchronisation et une évaluation de la consistance du mécanisme de filtrage. Sur tous les plans la méthode Exacte a montré des performances supérieures et a confirmé ainsi que cette solution originale a un potentiel important pour la synchronisation chaotique.

Les premières perspectives pour le filtrage ExPKF portent sur la possibilité d'appliquer cet algorithme à d'autres applications propres aux méthodes d'estimation d'état comme le positionnement, les méthodes de classification, et en général à tout modèle polynomial.

En fin dans le dernier chapitre qui concerne les récepteurs à porteuse chaotique on a étudié plusieurs variantes à synchronisation chaotique ainsi que d'autres solutions plus classiques à synchronisation par boucle de retard de code. Pour les récepteurs à synchronisation chaotique on a mis l'accent sur les systèmes qui emploient des méthodes d'estimation d'état, étant donné les bonnes performances présentées. on a considéré plusieurs solutions de traitement en bande de base du signal reçu par estimation parallèle du code et du symbole d'étalement chaotique.

Pour le contrôle de gain on a considéré deux solutions : une approche de dynamique modifiée et une boucle de contrôle qui utilise les propriétés statistiques de la séquence chaotique utilisée ; Ces solutions sont ensuite testées par rapport à un critère de BER sur différents canaux de communications. Comme perspectives à l'avenir, nous suggérons la réalisation d'autre solution de système de communication à accès multiple, Si la méthode de synchronisation chaotique devient difficile dans un cas multi-utilisateur.



Bibliographie

Bibliographie

- [ABK91] H. D. I. Abarbanel, R. Brown, et M. B. Kennel. Exposants de Lyapunov dans les systèmes chaotiques : leur importance et leur évaluation à partir des données observées. *Int. J. de Physique Moderne B*,5(9):1347–1375, 1991.
- [AMGC02] M. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, et T. Clapp. Un tutoriel sur les filtres à particules pour le suivi bayésien non-linéaire/non-gaussien en ligne. *IEEE Trans. Traitement de signal*, 50(2):174–189, Fév. 2002
- [APB02] S. Azou, C. Pistre, et G. Burel. Un système chaotique à spectre étalé à séquence directe pour la communication sous-marine. Dans *IEEE-Oceans'02*, Biloxi, USA, Oct. 2002.
- [ASL+05] A. Argyris, D. Syvridis, L. Larger, V. Annovazzi-Lodi, P. Colet, I. Fischer, J. Garcia-Ojalvo C. R. Mirasso, L. Pesquera, et K. Alan Shore. Communications basées sur le chaos à des débits binaires élevés utilisant des liaisons commerciales à fibre optique. *Nature* 437/17:343–346, Nov. 2005.
- [AVR83] V. S. Afraimovich, N. N. Verochev, et M. I. Rabinovich. Synchronisation stochastique des oscillations dans les systèmes dissipatifs. *Radio Phys. et L'électron Quantique*, 29:795–803, 1983.
- [Ben81] V. E. Benes. Filtres exacts de dimension finie pour certaines diffusions à dérive non linéaire. *Stochastique*, 5:65–92, 1981.
- [BSL93] Y. Bar-Shalom et X.-R. Li. *Estimation et Suivi - Principes, Techniques et Logiciels*. Maison Artech, 1993.
- [BG97] A. Boyarsky et P. Gora. *Lois du chaos : mesures invariantes et systèmes dynamiques à une dimension*. Birkhauser, 1997.
- [Bas03] M. V. Basin. Sur le filtrage optimal des états du système polynomial. *J. de Systèmes Dynamiques, de Mesure et de Contrôle*, 125(1):123–125, Mars 2003.
- [BDR02] M. Boutayeb, M. Darouach, et H. Rafaralahy. Observateurs d'espace d'état généralisés pour une synchronisation chaotique et une communication sécurisée. *IEEE Trans. Système de Circuits. I*, 49(3):345–349, 2002
- [COS93] K. M. Cuomo, A. V. Oppenheim, et S. H. Strogatz. Synchronisation de circuits chaotiques à base de Lorenz avec application à la communication. *IEEE Trans. Système de Circuits. II*, 40(10):626–633,1993
- [CN00] C. Cruz et H. Nijmeijer. Synchronisation par filtrage. *Int. J. de Bifurcation et Chaos (IJBC)*, 10(4):763–775, 2000

Bibliography

- [CYKB01] C.-C. Chen, K. Yao, K. Umeno K., et E. Biglieri. Conception de séquences chaotiques à spectre étalé en utilisant la théorie ergodique. *IEEE Trans. Système de Circuits*, I, 48(9):1110–1114, Sep. 2001.
- [Dau88] F. Daum. Analyse bayésienne des séries temporelles et modèles dynamiques, chapitre Nouveaux filtres non linéaires exacts, pages 199–226. Marcel Dekker, Inc., 1988.
- [DKH93] H. Dedieu, M. P. Kennedy, et M. Hasler. Chaos shift keying : modulation et démodulation de la porteuse chaotique à l'aide d'un circuit chua auto-synchronisé. *IEEE Trans. Système de Circuits*, II, 40:634–642, Oct. 1993.
- [Fow89] T. B. Fowler. Application des techniques de contrôle stochastique aux systèmes non linéaires chaotiques. *IEEE Trans. Automat. Contrôle*, 34:201–205, Fév. 1989.
- [GON04] E. Goncalvès « introduction au système dynamiques et Chaos ». Cours de l'institut National Polytechnique de Grenoble, 2004.
- [GP83a] P. Grassberger et I. Procaccia. Caractérisation des attracteurs étranges. *Phys. Rév. Lett.*, 50:346–349, 1983.
- [GP83b] P. Grassberger et I. Procaccia. Estimation de l'entropie de kolmogorov à partir d'un signal chaotique. *Phys. Rév. A*, 28:2591–2593, 1983.
- [HBM94] G. Heidari-Bateni et C. D. McGillem. Un système de communication à spectre étalé à séquence directe chaotique. *IEEE Trans. sur les Communications*, 42(2):1524–1527, 1994.
- [HS01] M. Hassler et Thomas Schimming. Communications utilisant le chaos. Dans *Int. Conf. sur les Signaux et les Systèmes Electroniques*, 2001.
- [JU97] S. J. Julier et J. K. Uhlmann. Une nouvelle extension du filtre de Kalman aux systèmes non linéaires. *Proc. SPIE-Int. Soc. Opter. Eng.*, 3068:182–193, 1997.
- [JUDW00] S. Julier, J. Uhlmann, et H. F. Durrant-Whyte. Une nouvelle méthode pour la transformation non linéaire des moyennes et des covariances dans les filtres et les estimateurs. *IEEE Trans. Automat. Contrôle*, 45(3):477–482, 2000.
- [JUT06] C. Jutten « Systèmes asservis non linéaires » cours de troisième année du département 3i option Automatique. Université Joseph Fourier- Polytech Grenoble. 2006.
- [KD93] M. P. Kennedy et H. Dedieu. Démonstration expérimentale de la manipulation par décalage du chaos binaire à l'aide d'un circuit chua auto-synchronisé. *IEEE Int. Atelier Spécialisé sur la Dynamique Non-linéaire des Systèmes Electroniques*, pages 67–72, 1993.
- [Ken94] M. P. Kennedy. Concepts de base de la dynamique non linéaire et du chaos. Tutoriels (IEEE), pages 289–313, 1994.
- [KHE+92] L. Kocarev, K.S. Halle, K. Eckert, L.O. Chua, et U. Parlitz. Démonstration expérimentale de communication sécurisée via synchronisation chaotique. *Int. J. de Bifurcation et Chaos (IJBC)*, 2:709–713, 1992.
- [KP95] L. Kocarev et U. Parlitz. Approche générale pour la synchronisation chaotique avec application à la communication. *Phys. Rév. Lett.*, 74(25):5028–5031, 1995.

Bibliography

- [Kra99] R. L. Kraft. Chaos, ensembles de points, et hyperbolicité pour les cartes logistiques. *Am. Math. Mon.*, 106:400–408, 1999.
- [KKC97] G. Kolumban, M. P. Kennedy, et L. O. Chua. Le rôle de la synchronisation dans les communications numériques utilisant le chaos - partie I : Fondamentaux des communications numériques. *IEEE Trans. Système de Circuits. I*, 44(10):927–936, Oct. 1997.
- [KKC98] G. Kolumban, M. P. Kennedy, et L. O. Chua. Le rôle de la synchronisation dans les communications numériques utilisant le chaos - partie ii: Modulation chaotique et synchronisation chaotique. *IEEE Trans. Système de Circuits. I*, 45(11):1129–1140, Nov. 1998.
- [KKJK98] G. Kolumban, G. Kis, Z. Jako, et M. P. Kennedy. Fm-dcsk: Un schéma de modulation robuste pour les communications chaotiques. *IEICE Trans. Fondamentaux de l'Electronique, des Communications et de l'Informatique*, E81-A(9):1798–1802, Sep. 1998.
- [KKK97] G. Kolumban, M. P. Kennedy, et G. Kis. Amélioration des performances des systèmes de communication chaotiques. En *Proc. Conf. Européenne sur la Théorie et la Conception des Circuits*, pages 284–289, 1997.
- [KT94] T. Kohda et A. Tsuneda. Fonctions de corrélation paire et impaire des séquences chaotiques de bits de chebyshev pour CDMA. En *Proc. IEEE Int. Symp. Techniques et Applications à Spectre Étale*, 1994.
- [LABS06] M. B. Luca, S. Azou, G. Burel, et A. Serbanescu. Sur le filtrage de Kalman exact des systèmes polynomiaux. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 53(6):1329–1340, Juin 2006.
- [LL01] H. Leung and J. Lam. Adaptive blind equalization for chaotic communication systems using extended kalman filter. *IEEE Trans. Système de Circuits. I*, 48:979–989, Août. 2001.
- [LL97] H. Leung et J. Lam. Conception de démodulateur pour la communication par modulation chaotique. *IEEE Trans. Système de Circuits. I*, 44:262–267, 1997.
- [LTYH04] F. C. M. Lau, C. K. Tse, M. Ye, et S. F. Hau. Coexistence de systèmes de communication basés sur le chaos et conventionnels à débit binaire égal. *IEEE Trans. Système de Circuits. I*, 51(2):391–408, Fév. 2004.
- [LM98] J. S. Lee et L. E. Miller. *Manuel d'ingénierie des systèmes CDMA*. Maison Artech, 1998.
- [Lor63] E. N. Lorenz. Flux non périodique déterministe. *J. Atmos. Sci.*, 20:130–141, 1963.
- [Luc03] M. B. Luca. Synchronisation d'un récepteur numérique de signaux à spectre étalé par code chaotique. Technical report, Université de Bretagne Occidentale & ENSIETA, Juillet 2003.
- [LZ01] H. Leung et Z. Zhu. Évaluation des performances de la synchronisation chaotique basée sur EKF. *IEEE Trans. Système de Circuits. I*, 48(9):1118–1125, Sep. 2001.
- [LZD00] H. Leung, Z. Zhu, et Z. Ding. Phénomène aperiodique du filtre de Kalman étendu dans le filtrage des signaux chaotiques bruités. *IEEE Trans. Traitement de Signal*, 48(6):1807–1810, Juin 2000.

Bibliography

- [MB04] S. Mandal et S. Banerjee. Analyse et implémentation cmos d'un système de communication basé sur le chaos. *IEEE Trans. Système de Circuits. I*, 51(9):1708–1722, Sep. 2004.
- [NPR00a] M. Norgaard, N. Poulsen, et O. Ravn. Avancées dans l'estimation d'états sans dérivée pour les systèmes non linéaires. Rapport technique, Dept. of Mathematical Modelling, Technical University of Danemark, Avril 2000.
- [NPR00b] M. Norgaard, N. Poulsen, et O. Ravn. Nouveaux développements dans l'estimation d'état pour les systèmes non linéaires. *Automatique*, 36(11):1627–1638, Nov. 2000.
- [OWIC92] A. V. Openheim, G. W. Wornell, S. H. Isabelle, et K. M. Cuomo. Traitement du signal dans le contexte des signaux chaotiques. Dans *IEEE ICASP*, 1992.
- [PC00] L. M. Pecora et T. L. Carroll. Détection de la géométrie chaotique de la réponse du lecteur dans la synchronisation généralisée. *Int. J. de Bifurcation et Chaos (IJBC)*, 10(4):875–889, 2000.
- [PC90] L. Pecora et T. Carroll. Synchronisation dans les systèmes chaotiques. *Phys. Rév. Lett.*, 64:821–823, 1990.
- [Pro95] J. G. Proakis. *Communications numériques*. McGraw-Hill, 3e édition, 1995.
- [PSM82] R. L. Pickholtz, D. L. Schilling, et L. B. Milstein. Théorie des communications à spectre étalé : un tutoriel. *IEEE Trans. sur les Communications*, COM-30(5):822–854, Mai 1982.
- [Riv90] T. J. Rivlin. *Polynômes de Tchebychev*. Wiley, 1990.
- [RPK97] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, et J. Kurths. Synchronisation de phase dans des oscillateurs chaotiques entraînés et couplés. *IEEE Trans. Système de Circuits. I*, 44(10):874–881, Oct. 1997.
- [RSTA95] N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring, et H. D. I. Abarbanel. Synchronisation généralisée du chaos dans les systèmes chaotiques à couplage directionnel. *Phys. Rév. E*, 51(2):980–993, Fév. 1995.
- [RTA94] N. F. Rulkov, L. S. Tsimring, et H. D. I. Abarbanel. Suivi des orbites instables dans le chaos à l'aide du contrôle de rétroaction dissipatif. *Phys. Rev. E*, 50(1):314–324, Juillet 1994.
- [Rul96] N. F. Rulkov. Images de chaos synchronisé : Expériences avec des circuits. *le chaos*, 6(3):262–279, Sept. 1996.
- [Sch82] R. A. Scholtz. Les origines des communications à spectre étalé. *IEEE Trans. sur les Communications*, COM-30(5):822–854, Mai 1982.
- [Sch95] J. Schweizer. Une approche stochastique pour étendre la communication à spectre en utilisant le chaos. In *Proc. SPIE Circuits chaotiques pour la communication*, pages 115–125, Oct. 1995.

Bibliography

- [Ser00] A. Serbanescu. Système de transmission intégrante vol. 1 - Communication de banda large a florin et système dynamique chaotique. Ed. ATM, 2000.
- [Ser04] A. Serbanescu. Systèmes dynamiques - Applications dans les communications. Ed. ATM, 2004.
- [Ser97] A. Serbanescu. Electronique, physique et signal pour les télécommunications, Chapitre Systèmes et Signaux Face au Chaos. Ed. Tehnica, 1997.
- [SOD94] P. So, E. Ott, et W. P. Dayawansa. Observer le chaos : Déduire et suivre l'état d'un système chaotique à partir d'observations limitées. Phys. Rev. E, 49:2650–2660, 1994.
- [TLT04] W. M. Tam, F. C. M. Lau, et C. K. TseUn schéma d'accès multiple pour des systèmes de communication numérique basés sur le chaos utilisant une référence transmise. IEEE Trans. Système de Circuits. I,51(9):1868–1978, Sep. 2004.
- [vdM04] R. van der Merwe. Filtres de Kalman Sigma-Point pour l'inférence probabiliste dans les modèles d'espace d'état dynamique. Thèse de doctorat, OGI School of Science & Engineering, 2004.
- [Vit79] A. J. Viterbi. Communications à spectre étalé : mythes et réalités. IEEE Commun. Mag.,17(3):11–18, Mai 1979.
- [Vol97] A. Volkovskii. Synchronisation de systèmes chaotiques par contrôle de phase. IEEE Trans. Système de Circuits. I, 44(10):913–917, Oct. 1997.
- [Wei] E. W. Weisstein. Carte Logistique. MathWorld–Une ressource Web Wolfram, 2001.
- [WSSV85] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, et J. A. Vastano. Détermination des exposants de Lyapunov à partir d'une série chronologique. Physique D, 16:285–317, 1985.
- [WvdM01] E. A. Wan et R. van der Merwe. Filtrage de Kalman et réseaux de neurones, chapitre Le filtre de Kalman non parfumé. Éditions Wiley, 2001.
- [XTL04] Y. Xia, C. K. Tse, et F. C. M. Lau. Performances de systèmes de communication numérique différentiels à modulation par déplacement de chaos sur un canal à évanouissements multi-trajets avec étalement du retard. IEEE Trans.Circuits Syst. II, 51(12):680–684, Dec. 2004.
- [Yan95] T. Yang. Récupération des signaux numériques de la commutation chaotique. Int. J. Théorie des Circuits Appl.,23:611–615, 1995.
- [YF83] T. Yamada et H. Fujisaka. Théorie de la stabilité du mouvement synchronisé dans les systèmes à oscillateurs couplés. ii. Programme. Théor. Physique., 70:1240, 1983.
- [YF84] T. Yamada et Théorie de la stabilité du mouvement synchronisé dans les systèmes à oscillateurs couplés. iii. Programme. Théor., 72:885, 1984.

Bibliography

[YAB11] M. Yahia. P. Acco, et M. Benslama. Estimation de systèmes non linéaires via une approche d'approximation de Chebyshev. *Journal International du Contrôle, de l'Automatisation et des Systèmes*, 9(6):1021-1027, 2011.