REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE Mohamed Seddik Ben Yahia de JIJEL
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Physique

N° d'ordre :

Série :

Mémoire

présenté pour obtenir le diplome de

Master en physique

Option : Physique Théorique

par

Idoui Imane

Thème

le Trou Noir de Reissner Nordstrom en gravité téléparallèle

Soutenu le: 23/09/2021

Devant le Jury:

Président	Z. Belghobsi	Prof.	Univ. Jijel
Rapporteur	K. Nouicer	Prof.	Univ. Jijel
Examinateur	S.Haouat	Prof.	Univ. Jijel

Remerciements

Tout mes remerciements vont tout premièrement à **Allah** tout puissant pour la volonté, la sante et la patience qu'il m'a donne pour terminer ce mémoire..

Je tiens a remercier de maniére très particulière Mr **K.Nouicer**, professeur à la l'université de Jijel, d'avoir contribuer à la proposotion et l'encadrement de mon travail.

Mes vifs remerciements vont au proffeseur **Z.Belghobsi**, Maitre de conférence à l'université de Jijel, pour l'honneur qu'elle m'a fait en acceptant de présider le jurer.

Je remercie également le proffeseur **S.Haout** maitre de conférence à l'université de Jijel, pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter a ce travail.

J'adresse mes plus sincères remerciements à ma famille et en particulier ma mère et mon père qui m'ont toujours soutenue encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire

Mes vifs remerciements vont au **Soulaf Kirat** pour ses conseils et aussi pour ses encouragements au cours de ce travail, et qu'elle m'aide moi beaucoup.

Je remerciement également tous les enseignants de physique théorique ainsi que mes amis et mes collegues de la promotion 2020/2021.

Mes vifs remerciements vont aux mes amis proches **imane**, **khadija**, **ahlam**, **ibtissem**, **samia**,**anissa** pour encouragements au cours de ce travail.

Mes vifs remerciements vont au ma soeur **Meriem** et **fatima** et mon frére **hamza**, **sidaeli** et **abdassamad**.

Contents

Chapter 1

Introduction

Le début du XXe siècle a vu deux grandes révolutions scientifiques qui sont la mécanique quantique et la relativité générale, ce dernier est le noyau de cette mémoire. La théorie gravitationnelle de la relativité d'Einstein présentée dans sa version finale en 1916, a étonnamment prédit de nombreux phénomènes prouvés, et aucune observation n'a été faite pour remettre en question la validité de l'équation. La référence [1] fournit un bon exemple d'un débat animé et enthousiaste sur les fondements philosophique de la théorie d'Einstein. La même année Karl Schwarzschild trouva la solution de l'équation d'Einstein dans le vide dans le système symétrie sphérique, et aprés cela en 1923 George Birkhoff confirma que la métrique de Schwarzschild est la seule solution de l'équation d'Einstein dans le cas d'une géométrie sphérique [2].

En 1939 Albert Einstein publia un article prouvant l'éxistance des trou noirs. En utilisant sa théorie de la relativité générale, il montra que le trou noir est l'étape finale de l'évolution céleste. Donc le trou noir est un corps céleste dence avec un fort champ gravitationnel empêchant toute forme de matière ou de rayonnement de s'échapper, il est un corps dont la masse est plusieurs fois supérieur à la masse du soleil, et la masse d'un trou noir connu a une limite inférieure à celle d'oppenheimer-volkoff. La géométrie globale des trous noirs n'est comprise que de nombreuses années plus tard, grace au travaux de Roger Pontose. Le trou noir est un structure spéciale de l'éspace-temps courbe, ses caractéristique sont: il y a des frontière entre les zones éxtérieurs, où il est possible de transmèttre un signal à l'infini, et une région d'espace-temps interieur où tout signal envoyé est toujours piégé, il est caractérise par la masse, le moment cinétique et la charge. La gravité en tant que force est décrite par la théorie de jauge selon le principe d'équivalence, et d'aprés le principe de Mach, la gravité est considéré comme la déformation du plan de la géométrie vers l'espace courbe selon le schéma suivant:

$$\text{Gravité} \approx \text{Géométrie}$$

Le membre à droite de la formule ci-dessus représente la géométrie, on ne sait pas de quel type il s'agit doit-on utiliser la géométrie Riemannienne ou non-Riemannienne. Le concept de paraallélisme à grande distance a été proposé pour la première fois par Einstein pour unifier la gravitation et l'eléctromagnétisme, elle est devenue une théorie des champs unifiée en 1928 [3], Contrairement à la théorie de la relativité générale, la connection de Levi-Civita produit une courbure qui étant totalement nulle mais de torsion non nulle. La transmission parallèle du vecteur est indépendante du chemain, c'est l'origine du nom téléparallele signifiant "parallèle au loin"(la recherche d'Einstein d'une théorie des champs unifiée à travers le téléparallélisme est une histoire intéressante, que l'on peut trouver dans [4]). Depuis lors, il a été déterminé que la GR peut réellement être reconverti en un language de parallèlisme distant [5]. Elle a reçu plus d'attention en tant que théorie gravitationnelle alternative, et nous l'appelons maintenant l'équivalent téléparallèle (TEGR) de la relativité générale,voir [6]. Par une formule intéressante la TEGR est la théorie de la jauge supérieure [7].

En raison de la nécessité de comprendre l'accélération de l'univers, diverses théories gravitationnelles modifiées ont été introduites, parmi lesquelles des tentatives étendre la TEGR à la théorie gravitationnelle $f(T)$ et la modifier dans le même ésprit que la promotion générale par rapport à la théorie $f(R)$. Dans la gravitation d'Einstein-Maxwell sans matière, il éxiste un théorème d'unicite indiquant les solutions asymptotiquement plates de trous noirs et stationnaires ne sont decrites que par trois paramétres a savoir, la masse, la charge éléctrique et le moment angulaire [8]. Ce théorème est valable pour un champ scalaire canonique minimalement couple à la gravité [9]. La même propriété d'absence de cheveux (no-hair) persiste également pour les théories scalaires-tenseurs standards dans laquelles le champ a un coupage direct avec le scalaire de Ricci [10]. Cependant, le théorème no-hair [11] perd sa validite dans les théories de gravité modifiées avec des couplages dérivatifs non-minimaux, les exemples typiques de tels couplages sont les théories du Galileon, dont l'équation du mouvement réspecte la symetrie galilienne dans la limite de Minkowski. L'éxtension du modele du Galileon à des couplages plus generaux ont conduit à la redecouverte des théories des cordes [12]. Ces théories conduisent à des équations de mouvement de second ordre. Si l'on considère un champ vecteur sans masse A_μ avec le lagrangien $F = -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ où $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ est le tenseur de force du champ, la solution statique à symmetrie sphérique en (RG) est donnée par le trou noir de

Reissner-Nordstrom (RN) de masse M et de charge éléctrique Q [13].

La TEGR modifié $f(T)$ a des propriétés étranges et intéressantes, principalement ce qui se passe au niveau cosmologique, car les équations de champ et les trous noirs dépendent du référentiel considéré, cela signifie que si nous changeons le système de coordonnée d'une tétrade diagonale à une tétrade non diagonale, en éffectuant un certain type de transformation de lorentz, le résultat est différent. Cette caractéristique de son champ d'équation conduit à la non-invariance par la transformation de lorentz

[14].

Nous donnons dans le chapitre 2 un rappel sur la relativité générale (les principes fondamentaux et la variété riemannienne). Le chapitre 3 est dédiés au fondements géométriques de l'équivalent parallèle de la relativité générale (TEGR). Nous déduisons aussi les équations de mouvement du champ. Dans le chapitre quatre, nous étudions le trou noir statique chargé à quatre dimension pour des modèles téléparallèles modifiées en utilisant un ensemble de tétrades non diagonales.

Chapter 2

Introduction à la relativité générale

2.1 Principes de la Relativité Générale

La relativité générale est la théorie du champ gravitationnel qui a été développée par Albert Einstein entre 1907 et 1915. La relativité générale est devenue l'outil fondamental de l'astrophysique moderne, de la physique des trous noirs et de la cosmologie moderne. La construction de la théorie de la relativité générale est soumise à trois principes que nous allons détailler dans la suite.

2.1.1 Principe de Mach

La répartition de la matière dans l'univers détermine le mouvement des particules. Ce principe tente de transcender le concept habituel de l'éspace-temps newtonien. En fait, lorsqu'un mouvement s'éffectue à une vitesse uniforme, on parle de mouvement inertiel, un référentiel absolu assumé a priori au-delà de la répartition de toute matière. Suite à ce principe, Einstein a rejeté une telle hypothèse érigée en principe et a essayé de construire une théorie étroitement liée à la géométrie et à la matière: la matière déterminera la géométrie et vice versa. Ce principe est clairement éxprimé sous la forme de l'équation Einstein [15].

2.1.2 Principe d'équivalence

Le principe d'équivalence est l'une des composantes les plus importantes de la relativité générale. Ce principe montre que les valeurs mesurées obtenues par l'observateur immergé dans le champ gravitationnel dans le référentiel inertiel et l'observateur sans champ gravitationnel dans le référentiel accéléré sont équivalentes [16].

Il est bien connu du cours de mécanique de base que l'utilisation du référentiel l'accélération est incompatible avec la loi de Newton, sauf s'il s'agit de forces dites virtuelles ou force d'inertie, elles sont proportionnelles à la masse des particules qui les subissent. plus précisement, si le référentiel accélère a_0 par rapport au référentiel inertiel, la deuxième loi de Newton $\vec{f} = m$ $\vec{a}$ s'applique toujours, à condition d'inclure une force d'inertie dans la force résultante égal $a - ma_0$, cette force d'inertie qui implique l'éxpréssion de la gravité ressentie par des particules ponctuelles massives endans un potentiel gravitationnel $\overrightarrow{F} = m_p \overrightarrow{\nabla} \Phi$. Finalement on obtient la masse grave active m_a, qui interfère avec le potentiel gravitationnel généré par la masse $U = \frac{GNm_a}{r}$. Ce type d'égalité est accidentel et inutil dans la théorie de Newton devient une condition nécessaire de la théorie d'Einstein, sans elle, ni éléments inertiels ni déscription cohérente des intéractions géométrie-matière éxiste [15].

2.1.3 Le principe de la covariance

Le principe de covariance générale stipule que tous les observateurs sont équivalents. Cela signifie que tout observateur donné, quels que soient ses attributs, devrait être capable de déterminer les lois de la physique. Sinon, comment expliquer que nous pouvons faire cela sur terre parce que nous ne sommes même pas des observateurs inertiels, Par conséquent, les équations physiques devraient être sous forme tensorielle [15], et tout système de coordonnées (ou de manière équivalente, tout observateur) devrait être acceptable. Cela ne signifie pas que n'importe quel système de coordonnées peut être utilisé, mais la théorie reste invaraînte dans les changements de coordonnées. Par conséquent, les gens doivent se méfier des éffets physiques évidents liés au choix d'un ensemble particulier et utiliser cette liberté pour extraire du contenu ayant une signification physique.

2.2 Variétés riemanniennes

Pour passer de la relativité restreinte à la relativité générale, il suffit de remplacer la géométrie Minkowskienne par celle de Riemann. Dans une variété riemannienne nous définissons un tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ qui détermine comment trouver les longueurs et les angles dans un éspace-temps donné. La longueur d'un intervalle de l'éspace–temps est définie par :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{2.1}$$

et elle doit être invariante. En fonction de cette métrique, le produit de deux vecteurs U et V est également défini par :

$$U.V = g_{\mu\nu} U^\alpha V^\beta. \tag{2.2}$$

Maintenant nous prenons la dérivé d'un vecteur V et nous la transformons en des coordonnées différentes, nous obtenons

$$V^{\alpha'}_{\ ,\beta'} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\gamma} V^\gamma_{\ ,\rho} + \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\beta'}} V^\gamma \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\gamma \partial x^\rho}. \tag{2.3}$$

La présence du deuxième terme indique que le vecteur V ne se transforme pas comme un tenseur. Cela veut dire que la dérivée d'un vecteur ordinaire n'est pas invariante par un changement de coordonnées. Pour cela, on introduit la dérivée covariante

$$\nabla_\beta V^\alpha = V^\alpha_{\ ;\beta} = V^\alpha_{\ ,\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\lambda\beta} V^\lambda, \tag{2.4}$$

où $\nabla_\beta V^\alpha \equiv V^\alpha_{\ ;\beta}$ et $\Gamma^\alpha{}_{\lambda\beta}$ représentent réspectivement la dérivée covariante du vecteur V^α et les symboles de Christoffel définis par

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\gamma g_{\lambda\beta} + \partial_\beta g_{\lambda\gamma} + \partial_\lambda g_{\beta\gamma}), \tag{2.5}$$

La dérivée covariante est contrairement à la dérivé ordinaire, invariante sous les transformations de coordonnées.

La courbure d'un espace-temps est quantifiée par le tenseur de courbure de Riemann. Ce tenseur qui est défini par

$$R^\rho{}_{\mu\sigma\nu} = \partial_\sigma \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho{}_{\sigma\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu} \ , \tag{2.6}$$

qui est une quantité qui détermine la déviation par rapport à la métrique de Minkowski plate. Les contractions du tenseur de Riemann sont souvent utilisés dans la relativité générale. L'un d'eux est le tenseur de Ricci symétrique donnée par

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\alpha} \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma{}_{\mu\alpha} \ , \tag{2.7}$$

En contractant ce tenseur, nous obtenons le scalaire Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \ , \tag{2.8}$$

qui fait partie des scalaires de courbures, R, $R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta\sigma\gamma} R^{\alpha\beta\sigma\gamma}$ utilisés pour appréhender les singularités de l'éspace-temps.

2.3 Équations d'Einstein

Les équations d'Einstein sont celles qui permettent de déterminer la métrique $g_{\mu\nu}$, dans le vide ou en présence de matière. Le tenseur d'Einstein est défini par

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} \tag{2.9}$$

Le tenseur d'Einstein est symétrique a cause de la symétrie du tenseur de Ricci et de la métrique et jouera un role fondamental pour les équations de mouvement.L'action totale en relativité générale est la somme d'une contribution gravitationnelle et d'une autre émanant de la matière

$$S_{totale} = S_{gravit\acute{e}} + S_{mati\grave{e}re}.$$

Les équations de mouvement d'Einstein peuvent etre obtenus, comme on le fait pour toute théorie, à partir du principe de moindre action:

$$\delta S_{total} = \delta S_{gravit\acute{e}} + \delta S_{mati\grave{e}re} = 0. \tag{2.10}$$

2.3.1 Action de courbure

On commencera par le terme géométrique de l'action:

$$S_g = -\frac{1}{\mu^2} \int R \sqrt{-g} d^4x \tag{2.11}$$

où$\mu^2 = 8\pi G$ $(c = 1)$ et g est le determinant du tenseur métrique $g = |g_{\mu\nu}|$. On donc:

$$R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} \delta S_g &= -\frac{1}{\mu^2} \int \delta(R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g}) d^4x \\ &= -\frac{1}{\mu^2} \int (R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \delta\sqrt{-g} + R_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu}) d^4x \end{aligned} \tag{2.13}$$

pour le premier terme nous avons

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \delta g^{\rho\sigma} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-g} &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g \\ &= -\frac{1}{2} \frac{g}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

$$R\delta\sqrt{-g} = -R \frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \tag{2.15}$$

et le troisième terme et en utilisant une reférentiel localement inertiel nous pouvons écrire le tenseur de Ricci sous la forme:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^\gamma_{\mu\gamma} - \partial_\gamma \Gamma^\gamma_{\mu\nu} \tag{2.16}$$

Il faut souligner que $\Gamma^\gamma_{\mu\gamma}$ n'est pas un tenseur, et que $\delta\Gamma^\gamma_{\mu\gamma}$ est un tenseur. La variation $\delta R_{\mu\nu}$ est donnée par:

$$\begin{aligned}
\delta R_{\mu\nu} &= \delta R^\sigma_{\mu\sigma\nu} \\
&= \partial_\sigma \delta\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} - \partial_\mu \delta\Gamma^\sigma{}_{\sigma\nu} + \delta(\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\Gamma^\sigma{}_{\sigma\lambda} - \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda}) \\
&= (\nabla_\sigma \delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\sigma\lambda}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\sigma\mu}\delta\Gamma^\sigma_{\lambda\nu} + \Gamma^\lambda_{\sigma\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\lambda\mu}) \\
&- (\nabla_\mu \delta\Gamma^\sigma_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\delta\Gamma^\lambda_{\sigma\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\delta\Gamma^\sigma_{\lambda\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\lambda}) + \delta(\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\sigma\lambda} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}) \\
&= \nabla_\sigma \delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \nabla_\mu \delta\Gamma^\sigma_{\sigma\nu}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

En utilisant la condition de compatibilité métrique $\nabla_a g^{\mu\nu} = 0$,on obtient

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \sqrt{-g}(\nabla_\sigma(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu}) - \nabla_\mu(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\nu})) \tag{2.18}$$

$$= \sqrt{-g}(\nabla_\mu(g^{\sigma\nu}\delta\Gamma^\mu_{\sigma\nu} - g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\nu})) \tag{2.19}$$

$$= \sqrt{-g}\nabla_\mu A^\mu \tag{2.20}$$

qui est une divergence totale:

$$\int \sqrt{-g}\nabla_\mu A^\mu d^4x = 0 \tag{2.21}$$

Aprés (2.15) (2.17) (2.21), la variation de δS_g est donné par

$$\begin{aligned}
\delta S_g &= \int -\frac{1}{\mu^2}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu})\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} d^4x \\
&= \int -\frac{1}{\mu^2} G_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} d^4x
\end{aligned} \tag{2.22}$$

où $G_{\mu\nu}$ est le tenseur symétrique d'Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu}.$$

2.3.2 Action de matière

L'action de matière exprimant la présence de champ de matières dans l'espace-temps est donnée par:

$$S_m = \int \sqrt{-g} d^4x \tag{2.23}$$

où $\mathcal{L}_m$ est la densité lagrangienne de la matière. La variation de l'action de matière est alors:

$$\delta S_m = \int d^4x\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m) \tag{2.24}$$

$$= \int d^4x(\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}\mathcal{L}_m + \sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}) \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}} \tag{2.26}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{\sqrt{-g}}{2(-g)}gg_{\mu\nu}$$

$$= -\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu} \tag{2.27}$$

alors

$$\delta S_m = \int(\sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} - \frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\mathcal{L}_m)d^4x \tag{2.28}$$

$$= \frac{1}{2}\int d^4x(\frac{2\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \mathcal{L}_m g_{\mu\nu})\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} \tag{2.29}$$

$$= \frac{1}{2}\int T_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}d^4x \tag{2.30}$$

où

$$T_{\mu\nu} = \frac{2\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \mathcal{L}_m g_{\mu\nu}$$

est le tenseur énérgie-impulsion du champ de matière. Donc

$$\delta S_{total} = -\frac{1}{2\mu^2}\int G_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}d^4x + \int\frac{1}{2}T_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}d^4x = 0 \tag{2.31}$$

et comme $\delta g_{\mu\nu}$ sont arbitaires on obtient:

$$G_{\mu\nu} = \mu^2 T_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{2.32}$$

2.4 Trou noir de Schwarzschild

Il s'agit d'une solution des èquations d'Einstein dans le vide, $R_{\mu\nu} = 0$, dans le cas du système solaire, c'est-à-dire très approximativement, le champ généré par une masse une sphérique et statique est au repos. La condition de staticitè signifie que $g_{\mu\nu}$ ne dèpendent pas de x^0, et ds^2 est invariant par l'inversion $x^0 \to -x^0$ (inversion du temps), donc ds^2 ne doit avoir aucun terme du genre $dx^i\ dx^0$. Cela signifie que $g_{i0} = g_{0i}$.

2.4.0.1 Théorème de Birkhoff

La théorème de Birkhoff montre que la métrique de Schwarzschild est la seule solution de l'équation d'Einstein en déhors de tous les corps de symétrie sphérique, même si le corps central n'est pas stationnaire (par exemple, une étoile pulsante oscillant radialement). Autrement dit, en symétrie sphérique et dans le vide, le champ gravitationnel l'état doit être statique. La théorème de Birkhoff est une analogie de la relativité avec le théorème de Gauss en mécanique newtonienne, le champ gravitationnel en déhors du corps sphèrique ne dépend pas du temps (même si l'objet vibre) et n'est qu'une fonction la masse de l'objet central [2].

2.4.0.2 Métrique de schwarzschild

La métrique de Schwarzschild permet de décrire la forme géométrique de l'éspace-temps. Il est donc possible de donner une expréssion de l'intervalle espace-temps de tout point en coordonnées sphérique centré sur une sphère:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{2.33}$$

La symétrie sphérique nous permet de choisir parmi les 4 coordonnées les deux coordonnées angulaires classiques θ et φ et d'écrire l'élément de longueur sous la forme

$$ds^2 = g_{aa} da^2 + 2g_{ab} da db + g_{bb} db^2 + \chi^2(a, b) d\Omega^2, \tag{2.34}$$

où χ est une fonction des deux coordonnées restantes a et b et $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d^2\varphi$ est l'élément d'angle solide. On inverse formellement $\chi(a, b)$pour obtenir $b(a, \chi)$ et sélectionner comme coordonnées $(a, \chi, \theta, \varphi)$. L'élément de longueur devient alors :

$$ds^2 = g_{aa} da^2 + 2g_{a\chi} da d\chi + g_{\chi\chi} d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2, \tag{2.35}$$

La matrice représentant les composantes de g est diagonale. On choisit donc un système de coordonnées (t, r, θ, φ) dans lequel l'élément de longueur s'écrit:

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + g_{rr} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{2.36}$$

Nous remarquons que

$$dt = \frac{\partial t}{\partial a} da + \frac{\partial t}{\partial \chi} d\chi, \tag{2.37}$$

En injectant (2.37) dans (2.36) et en identifiant avec (2.35), on obtient le système quatre équations à quatre inconnues $g_{tt}, g_{rr}, t(ar, \chi)$ et $r(a, \chi)$.

Dans les coordonnées (t, r, θ, φ) de schwarzschild, les composates du tenseur métrique s'écrivent

$$g_{aa} = g_{tt}\left(\frac{\partial t}{\partial a}\right)^2, \quad g_{a\chi} = g_{tt}\frac{\partial t}{\partial a}\frac{\partial t}{\partial \chi}, \quad g_{\chi\chi} = g_{rr} + g_{tt}\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)^2, \ \chi \equiv r. \tag{2.38}$$

nous avons la possibilité d'écrire l'élément de longueur sous la forme diagonale (2.36). Enfin, il nous reste à choisir lequel des coefficients g_{tt} et g_{rr} sera négatif. Par analogie avec le cas de la métrique de Minkowski éxprimée en symétrie sphérique, nous choisissons $g_{tt} < 0$, et donc la métrique de schwarzschild prend la forme

$$ds^2 = -u(r)c^2dt^2 + v(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{2.39}$$

où

$$u(r) = e^{2\nu(r)}, \quad v(r) = e^{2\lambda(r)} \tag{2.40}$$

et alors

$$ds^2 = -e^{2\nu(r)}c^2dt^2 + e^{2\lambda(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{2.41}$$

Les tenseurs mètriques convariant et contravariant sont alors donnès par:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{-2\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

Les symbôles de Christofell sont donnés par:

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \tag{2.43}$$

où

$$g_{\mu\sigma,\nu} = \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} \tag{2.44}$$

Les composantes qui non nulles sont:

$$\Gamma^{1}{}_{00} = \frac{1}{2}g^{1\sigma}(2g_{0\sigma,0} - g_{00,\sigma}) = -\frac{1}{2}g^{11}g_{00,1} = \nu' e^{2\nu-2\lambda} \tag{2.45}$$

où

$$\nu' = \frac{\partial \nu}{\partial r} \tag{2.46}$$

$$\Gamma^{0}{}_{10} = \Gamma^{0}{}_{01} = \nu' \quad , \quad \Gamma^{1}{}_{11} = \lambda' \ ,$$

$$\Gamma^{1}{}_{22} = -re^{-2\lambda} \quad ,\Gamma^{1}{}_{33} = -r\sin^2\theta e^{-2\lambda} \tag{2.47}$$

$$\Gamma^{2}{}_{12} = \Gamma^{2}{}_{21} = \Gamma^{3}{}_{13} = \Gamma^{3}{}_{31} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^{2}{}_{33} = -\sin\theta\cos\theta \quad , \quad \Gamma^{3}{}_{23} = \Gamma^{3}{}_{32} = \cot\theta \tag{2.48}$$

le tenseur de Ricci est donnée par

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^k{}_{\mu\nu,k} - \Gamma^k{}_{\mu k,\nu} + \Gamma^k{}_{\rho k}\ \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - \Gamma^k{}_{\rho\nu}\ \Gamma^\rho{}_{\mu k} = 0 \tag{2.49}$$

En effectuant tous les calculs et en remplaçant dans les èquations d'Einstein dans le vide on obtient:

$$R_{00} = (\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' + \frac{2\nu'}{r})e^{2\nu-2\lambda} = 0 \tag{2.50}$$

$$R_{11} = -\nu'' + \nu'\lambda' + \frac{2\lambda'}{r} - \nu'^2 = 0 \tag{2.51}$$

$$R_{22} = (-1 - r\nu' + r\lambda')e^{-2\lambda} + 1 = 0 \tag{2.52}$$

$$R_{33} = R_{22}\sin^2\theta \quad , \quad R_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu) \tag{2.53}$$

aprés (2.50) et (2.51)

$$\lambda' + \nu' = 0 \quad \Rightarrow \ \lambda(r) + \nu(r) = const \tag{2.54}$$

quand $r \to \infty$ il faut la métrique (2.39) approche la métrique minkowski $\eta_{\mu\nu}$, donc $\lambda, \nu \to 0$, $\lambda(r) = -\nu(r)$. L'équation (2.52) donne

$$(1 + 2\nu')e^{2\nu} = 1 \ \Rightarrow \ (re^{2\nu})' = 1 \quad \Rightarrow \ re^{2\nu} = r - 2m \tag{2.55}$$

où $2m$ est une constante d'intégration

$$e^{2\nu} = 1 - \frac{2m}{r} \tag{2.56}$$

donc :

$$g_{00} = -(1 - \frac{2m}{r}) \quad , \quad g_{11} = \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \tag{2.57}$$

$$g_{00} = -(1 - \frac{2GM}{rc^2}) \quad , \quad m = \frac{GM}{c^2} \tag{2.58}$$

$$ds^2 = -(1 - 2\frac{GM}{rc^2})c^2dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{2.59}$$

Finallement:

$$ds^2 = -(1 - \frac{2m}{r})c^2dt^2 + (1 - \frac{2m}{r})^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{2.60}$$

$$m = \frac{MG}{c^2}$$

est la solution de Schwarzschild.

2.4.0.3 Singularité et Horizon

Comme nous le savons, la solution de l'équation $g_{tt} = 0$, donne l'éxpression de horizon. En utilisant l'équation (2.60):

$$g_{tt} = 1 - \frac{2M}{r_h} = 0 \tag{2.61}$$

où $r_h = 2M$ est l'éxpréssion de l'horizon du trou noir de schwarzschild. Pour $M > 0$, dans la métrique la composante g_{tt} s'annule et g_{rr} est singulière en $r = 2M$. Il faut noter la singularité des composantes tensorielles de la métrique est uniquement due à une mauvaise sélection des coordonnées. Une étude des quantités scalaires de courbure telles que R et $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ montre quelles sont parfaitement dèfinies en $r = 2M$, et quelles sont singilières en $r = 0$.

Chapter 3

Le téléparallelisme en gravité

3.1 Introduction

En fait. Bien qu'Einstein n'ait pas compris les raisons observationnelles de la modification de la RG, il a été parmi les premiers à suggérer une modification de la relativité peu de temps après sa création. Cela a pris diverses formes avec divers degrés de nouveauté. En plus de la formulation pour laquelle la relativité générale est célèbre en termes de courbure, il ya des formulations alternatives basées sur la torsion ou la non métricitè, ce qui a conduit à l'émergence de l'équivalent téléparallèle de la relativité générale (TEGR) et l'équivalent téléparallèle symétrique de la relativité générale (STEGR). Cependant, Einstein a été plus intéressé par le téléparallèlisme. L'objectif principal d'Einstein était d'utiliser cette nouvelle méthode de téléparallélisme absolu pour l'unification de la gravité et de l'éléctromagnétisme, car le champ de tétrades peut prendre en charge seize composants indépendantes représentant dix degrés de liberté (DoF) associés au tenseur métrique, et les six autres correspondent à une connexion séparée, et il veut montrer qu'elle peut être abandonnée pour créer des secteurs électromagnétiques. Après trois années de recherches intenses entre l'été 1928 et le printemps 1931, avec huit articles sur le sujet, Einstein a abandonné l'idée. Il n'a pas réussi à établir la relation entre ce nouveau cadre et l'éléctromagnétisme. Au contraire, il a constaté que ces degrés de liberté supplémentaires sont liés au groupe de Lorentz, qui n'est qu'une manifèstation de la liberté gravitationnelle locale de Lorentz. En se concentrant sur la théorie gravitationnelle téléparallèle construite par l'action qui est quadratiques dans le tenseur de torsion, il éxiste cinq invariants de torsion scalaires indépendants, dont trois ont une parité paire, et les deux autres avec une parité impaire. La théorie de la gravité quadratique téléparallèle la plus générale est établie par des invariants de parité paire [17, 18].

3.2 Approches métriques-affines

3.2.1 Géométrie métrique affine

Dans le contexte plus général des métriques affines, la variable de base est une métrique de signature Lorentzienne $g_{\mu\nu}$, le coefficient de connexion affine $\widehat{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\nu}$, et la dérivée covariante associée $\widehat{\nabla}$, défini dans la variété éspace-temps à 4 dimensions [17].

3.2.2 Tenseurs caractéristiques

La géométrie métrique-affine la plus générale définie par la connexion métrique-affine est caractérisée par de nombreux tenseurs, les définitions et conventions que nous avons utilisées dans cette revue sont données ci-dessous. Seulement à partir de la connexion nous obtenons le tenseur de courbure.

$$\widehat{R}^{\mu}{}_{\nu\sigma\rho} = \partial_\sigma \widehat{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu\rho} - \partial_\rho \widehat{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu\sigma} + \widehat{\Gamma}^{\mu}{}_{\lambda\sigma}\widehat{\Gamma}^{\lambda}{}_{\nu\rho} - \widehat{\Gamma}^{\mu}{}_{\lambda\rho}\widehat{\Gamma}^{\lambda}{}_{\nu\sigma} \ , \tag{3.1}$$

Ainsi que le tenseur de torsion est dèfini par:

$$\widehat{T}^{\mu}{}_{\rho\nu} = \widehat{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu\rho} - \widehat{\Gamma}^{\mu}{}_{\rho\nu} \ , \tag{3.2}$$

En utilisant également la métrique, on définit en outre le tenseur de non-métricité :

$$\widehat{Q}_{\mu\nu\lambda} = \widehat{\nabla}_\mu g_{\nu\lambda} - \widehat{\Gamma}^{\sigma}{}_{\nu\mu} g_{\sigma\lambda} - \widehat{\Gamma}^{\sigma}{}_{\lambda\mu} g_{\nu\sigma} \ , \tag{3.3}$$

où les virgules indiquent les dérivées partielles des composantes fondamentales par rapport à leurs coordonnées réspéctives.

3.2.3 Identités Bianchi

Les tenseurs distinctifs pour les connexions affines générales ne sont pas complètement indépendantes les unes des autres, où courbure et torsion sont associées à l'identité Bianchi

$$\widehat{R}^{\alpha}{}_{[\mu\nu\lambda]} = \widehat{\nabla}_{[\mu}\widehat{T}^{\alpha}{}_{\nu\lambda]} + \widehat{T}^{\alpha}{}_{w[\mu}\widehat{T}^{w}{}_{\nu\lambda]} \ , \tag{3.4}$$

et

$$\widehat{\nabla}_{[w}\widehat{R}^{\alpha}_{|\mu|\nu\lambda]} = -\widehat{R}^{\alpha}{}_{\mu\tau[w}\widehat{T}^{\tau}{}_{\nu\lambda]}, \tag{3.5}$$

cela peut être vu par le calcul direct. Pour la première identité (3.4), on a

$$\widehat{\nabla}_{[\nu}\widehat{T}^{\mu}_{\alpha\sigma]} = -2\widehat{\nabla}_{[\nu}\widehat{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\sigma]} - 2\widehat{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu[w}\widehat{\Gamma}^{w}{}_{\alpha\sigma]} + 2\widehat{\Gamma}^{w}{}_{[\alpha\nu}\widehat{\Gamma}^{\mu}{}_{|w|\sigma]} + 2\widehat{\Gamma}^{w}{}_{\sigma\nu}\widehat{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha]w}, \tag{3.6}$$

et

$$\widehat{T}^{\mu}{}_{w[\nu}\widehat{T}^{w}{}_{\alpha\sigma]} = 2\widehat{\Gamma}^{\mu}{}_{w[\nu}\widehat{\Gamma}^{w}{}_{\alpha\sigma]} - 2\widehat{\Gamma}^{\mu}{}_{[\nu|w|}\widehat{\Gamma}^{w}{}_{\alpha\sigma]}, \tag{3.7}$$

nous combinons ces deux termes, on obtient l'éxpression

$$\widehat{\nabla}_{[w}\widehat{R}^{\mu}{}_{|\nu|\alpha\sigma]} + \widehat{T}^{\mu}{}_{w[\nu}\widehat{T}^{w}{}_{\alpha\sigma]} = 2\partial_{[\alpha}\widehat{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu\sigma]} + 2\widehat{\Gamma}^{\mu}{}_{w[\alpha}\widehat{\Gamma}^{w}{}_{\nu\sigma]} = \widehat{R}^{\mu}{}_{[\nu\alpha\sigma]}, \tag{3.8}$$

c'est le côté gauche de l'équation (3.5). Aussi, l'équation peut être démontrée (3.8). On a

$$\widehat{\nabla}_{[w}\widehat{R}^{\mu}{}_{|\nu|\alpha\sigma]} = \partial_{w}\widehat{R}^{\mu}{}_{|\nu|\alpha\sigma]} + \widehat{\Gamma}^{\mu}{}_{\tau[w}\widehat{R}^{\tau}{}_{|\nu|\alpha\sigma]} - \widehat{\Gamma}^{\tau}{}_{\nu[w}\widehat{R}^{\mu}{}_{|\tau|\alpha\sigma]} - \widehat{\Gamma}^{\tau}{}_{[\alpha w}\widehat{R}^{\mu}{}_{|\nu\tau|\sigma]} - \widehat{\Gamma}^{\tau}{}_{[\sigma w}\widehat{R}^{\mu}{}_{|\nu|\alpha]\tau}, \tag{3.9}$$

maintenant, il est facile de voir que les deux derniers termes sont identiques

$$\widehat{\Gamma}^{\tau}{}_{[\sigma w}\widehat{R}^{\mu}{}_{|\nu|\alpha]\tau} = -\widehat{\Gamma}^{\tau}{}_{[\sigma w}\widehat{R}^{\mu}{}_{|\nu\tau|\alpha]} = \widehat{\Gamma}^{\tau}{}_{[\alpha w}\widehat{R}^{\mu}{}_{|\nu\tau|\sigma]}, \tag{3.10}$$

on utilise la définition (3.2) de la torsion, ainsi que la réorganisation cyclique des indices avec des crochets, les deux derniers termes de l'équation (3.9) peuvent être combiné à

$$-2\widehat{\Gamma}^{\tau}{}_{[\alpha w}\widehat{R}^{\mu}{}_{|\nu\tau|\sigma]} = -\widehat{R}^{\mu}{}_{\nu\tau[w}\widehat{T}^{\mu}{}_{\alpha\sigma]}, \tag{3.11}$$

qui est le côté droit de l'identité Bianchi (3.5). Il reste à montrer que les trois premiers termes du membre de droite du développement (3.9) s'annulent. En utilisant sa définition (3.1) on obtient

$$\partial_{[w}\widehat{R}^{\mu}{}_{|\nu|\alpha\sigma]} = 2\partial_{[w}\partial_{\alpha}\widehat{\Gamma}^{\mu}{}_{|\nu|\sigma]} + 2\partial_{[w}\widehat{\Gamma}^{\mu}{}_{|\tau|\alpha}\widehat{\Gamma}^{\tau}{}_{|\nu|\sigma]} + 2\widehat{\Gamma}^{\mu}{}_{\tau[\alpha}\partial_{w}\widehat{\Gamma}^{\tau}{}_{|\nu|\sigma]}, \tag{3.12}$$

le premier terme du membre de droite disparaît à cause de l'échange de dérivées partielles. Dans les deux termes restants, nous pouvons remplacer la dérivée du coefficient de connexion par un tenseur de courbure, ce qui donne

$$2\partial_{[w}\widehat{\Gamma}^{\mu}{}_{|\tau|\alpha}\widehat{\Gamma}^{\tau}{}_{|\nu|\sigma]} = \widehat{\Gamma}^{\tau}{}_{\nu[\sigma}\widehat{R}^{\mu}{}_{|\tau|w\alpha]} - 2\widehat{\Gamma}^{\tau}{}_{\nu[\sigma}\widehat{\Gamma}^{\mu}{}_{|\rho|w}\widehat{\Gamma}^{\rho}{}_{|\tau|\alpha]}, \tag{3.13}$$

$$2\widehat{\Gamma}^{\mu}{}_{\tau[\alpha}\partial_{w}\widehat{\Gamma}^{\tau}{}_{|\nu|\sigma]} = \widehat{\Gamma}^{\mu}{}_{\tau[\alpha}\widehat{R}^{\tau}{}_{|\nu|w\sigma]} - 2\widehat{\Gamma}^{\mu}{}_{\tau[\alpha}\widehat{\Gamma}^{\tau}{}_{|\rho|w}\widehat{\Gamma}^{\rho}{}_{|\nu|\sigma]}. \tag{3.14}$$

Après permutation des indices entre crochets nous voyons deux résultats de courbure, le deuxième et les troisièmes éléments sur le côté droit du développement (3.9) sont annulés ici. Enfin, pour les deux termes cubiques du coefficient de connexion, nous pouvons échanger l'éxposant virtuel $\alpha \rightarrow \omega$ dans le premier terme pour trouve

$$\widehat{\Gamma}^{\mu}{}_{\tau[w}\widehat{\Gamma}^{\tau}{}_{|\rho|\alpha}\widehat{\Gamma}^{\rho}{}_{|\nu|\sigma]} + \widehat{\Gamma}^{\mu}{}_{\tau[\alpha}\widehat{\Gamma}^{\tau}{}_{|\rho|w}\widehat{\Gamma}^{\rho}{}_{|\nu|\sigma]} = 0, \tag{3.15}$$

Ceci complète la deuxième preuve d'identité de Bianchi (3.5).

Il éxiste deux types de cas particuliers. Pour une connexion symétrique $\widehat{T}^{\mu}{}_{\nu\alpha} = 0$, donc les identités de Bianchi sont réduites aux relations bien connues

$$\widehat{R}^{\mu}{}_{[\nu\alpha\sigma]} = 0 \qquad , \widehat{\nabla}_{[w}\widehat{R}^{\mu}{}_{|\nu|\alpha\sigma]} = 0 \tag{3.16}$$

c'est le cas de la connexion de Levi-Civita. Pour une connexion plate, on a $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\sigma}$, donc la seconde identité de Bianchi devient triviale, tandis que la première est réduite à

$$\widehat{\nabla}_{[\nu}\widehat{T}^{\mu}{}_{\alpha\sigma]} + \widehat{T}^{\mu}{}_{w[\nu}\widehat{T}^{w}{}_{\alpha\sigma]} = 0 \tag{3.17}$$

si la la courbure et la torsion disparaissent, les deux identités Bianchi deviennent triviales.

3.2.4 Décomposition de la connexion

L'une des propriétés les plus importantes de la géométrie affine métrique est que lorsque la métrique éxiste, le coefficient de connexion affine générale $\widehat{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu\rho}$ peut être décomposé en trois parties de la forme suivante:

$$\widehat{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\nu} + \widehat{K}^{\rho}{}_{\mu\nu} + \widehat{L}^{\rho}{}_{\mu\nu} \ , \tag{3.18}$$

où nous avons introduit les coefficients de la connexion Levi-Civita

$$\mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\nu\lambda,\rho} - g_{\mu\nu,\lambda}) \ , \tag{3.19}$$

le tenseur de contorsion

$$\widehat{K}^{\mu}{}_{\nu\rho} = \frac{1}{2}(\widehat{T}_{\nu}{}^{\mu}{}_{\rho} + \widehat{T}_{\rho}{}^{\mu}{}_{\nu} - \widehat{T}^{\mu}{}_{\nu\rho}) \ , \tag{3.20}$$

ainsi que le tenseur de déformation

$$\widehat{L}^{\rho}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\widehat{Q}^{\mu}{}_{\nu\rho} - \widehat{Q}_{\rho}{}^{\mu}{}_{\nu} - \widehat{Q}_{\nu}{}^{\mu}{}_{\rho}), \tag{3.21}$$

3.2.5 Sous-classes métriques affines

En éxigeant que certains tenseurs s'annulent, nous pouvons réduire les catégories géométriques affines les plus générales de métriques, que nous avons introduites ci-dessus, sont caractérisées par la connexion générale $\widehat{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ à côté de la métrique $g_{\mu\nu}$, obtenant ainsi des sous-classes spécifiques. Beaucoup de ces géométries restreintes sont liées et utilisées pour modéliser les théories de la gravité. Par restriction continue, on trouve les cas particuliers suivants de géométrie affine métrique :

1. $\widehat{R}^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} \equiv 0$: En cas de suppression de la courbure, la connexion est plate. Cet état est connu sous le nom de géométrie téléparallèle, même si à la fois la torsion et la non-métricité sont présentes.

2. $\widehat{T}^{\mu}{}_{\nu\rho} \equiv 0$: Si la torsion s'annule, la connexion est dite symétrique. C'est le cas en gravité de Weyl.

3. $\widehat{Q}_{\mu\nu\rho} \equiv 0$: La connexion est dite compatible métrique, et la géométrie correspondante est appelée géométrie de Riemann-Cartan. Ce choix de connexion est utilisé dans la théorie de jauge de Poincaré.

4. $\widehat{R}^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} \equiv 0, \widehat{Q}_{\mu\nu\rho} \equiv 0$: Seulement la torsion n'est pas nulle, on obtiendra la mésure de géométrie téléparallèle (appelée aussi torsion), qui est le thème principal de cette revue. Pour la connexion parallè et ses quantités associées, nous omettrons le chapeau et écrirons simplement $\widehat{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\nu}$.

5.$\widehat{R}^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} \equiv 0, \widehat{T}^{\mu}{}_{\nu\rho} \equiv 0$: En éxigeant que seules les non-métriques soient différentes de zéro, une autre forme de géométrie peut être obtenue. Ce type de structure géométrique est appelé téléparallèle symétrique.

6. $\widehat{T}^{\mu}{}_{\nu\rho} \equiv 0, \widehat{Q}_{\mu\nu\rho} \equiv 0$: Le type de géométrie le plus connu et le plus couramment utilisé pour décrire la théorie de la gravité (y compris RG et ses éxtensions) est la symétrie et les connexions compatibles métriques. Dans ce cas, la connexion est uniquement déterminée comme étant une connexion Levi-Civita, qui est représentée par un cercle, qui est $\mathring{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu\alpha}$.

7. $\widehat{R}^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} \equiv 0, \widehat{T}^{\mu}{}_{\nu\rho} \equiv 0$, $\widehat{Q}_{\mu\nu\rho} \equiv 0$: Enfin, si tous les tenseurs s'annulent, la métrique est également contrainte, et on trouve le cas de l'éspace de Minkowski. Dans ce cas, la géométrie affine métrique est fixée comme un homéomorphisme différentiel et ne porte aucun degré de liberté gravitationnel.

3.2.6 Relation entre la métrique et la connexion

Le variable de base dans la théorie téléparallèle de la relativité générale (TEGR) est le champ devtétrades $e^i{}_\mu$ où l'indice holonome représente les coordonnées de la variété et l'indice latin (non holonome) représente le referentiel. Index par zoom cadre et coordonnées. Nous utilisons quelques symboles pour créer un ensemble de tétrades non diagonales, comme

$$e^i{}_\mu e_i{}^\nu = \delta^\nu_\mu \ , \tag{3.22}$$

$$e^i{}_\mu e_j{}^\mu = \delta^i_j, \tag{3.23}$$

$$e_a = e_a{}^\mu \partial_\mu \ , \tag{3.24}$$

De plus, la base linéaire satisfait la relation de commutation suivante

$$[e_a, e_b] = e_a e_b - e_b e_a = e_a{}^\mu \partial_\mu (e_b{}^\nu \partial_\nu) - e_b{}^\mu \partial_\mu (e_a{}^\nu \partial_\nu). \tag{3.25}$$

Aprés le simplification, l'équation ci-dessus devient

$$[e_a, e_b] = e_a{}^\mu e_b{}^\nu (\partial_\mu e^c{}_\nu - \partial_\nu e^c{}_\mu) e_c = f^c{}_{ab} e_c \ \ , \tag{3.26}$$

où $f^c{}_{ab}$ sont les constantes de structures d'anholonomie . Les référentiels holonomes ou inertiels sont ceux où les $f^c{}_{ab}$s'annulent en tout point de la variété.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ij} e^i{}_\mu e^j{}_\nu, \tag{3.27}$$

où $\eta_{ij} = diag(1, -1, -1, -1)$ est la métrique de l'éspace tangent qui est l'espace de Minkowski. Étant donné que la relation entre la métrique et le quadrilatère est constante dans les transformations locales de Lorentz, la théorie TEGR est basée sur la connexion de Weitzenbock. Maintenant, nous pouvons considérer l'indice latin de chaque tenseur au lieu de l'indice spatio-temporel. La relation entre les deux est comprise comme :

$$T^{a1...am}_{b1...bm} \equiv e^{a1}_{\alpha 1} ... e^{an}_{\alpha n} T^{\alpha 1...\alpha n}_{\beta 1...\beta n} e^{\beta 1}_{b1} ... e^{\beta m}_{bm}, \tag{3.28}$$

on peut aussi dire qu'on a une copie de l'espace tangent en chaque point, qui contient la métrique canonique η_{ab}, et la tétrade réalise un isomorphisme entre deux (pseudo) éspaces linéaires normalisés.

De plus, on peut maintenant avoir deux types de coefficients de connexion, $\widehat{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu}$ pour le tenseur usuel (coefficient de connexion affine) et $\widehat{w}^\alpha{}_{\mu\nu}$ (coefficient de connexion de spin) avec l'indice d'espace tensoriel de la tangente, nous avons des connexions affines en termes de connexions de spin :

$$\widehat{\Gamma}^{\nu}_{\mu\sigma} = e^{\nu}_{a}\partial_{\mu}e^{a}_{\sigma} + e^{\nu}_{a}e^{\lambda}_{\sigma}\widehat{w}^{a}_{\mu\lambda}, \tag{3.29}$$

qui est l'unique connexion affine, où

$$\widehat{w}^{\alpha}_{\mu\lambda} = e^{\alpha}_{\nu}e^{\sigma}_{\lambda}\widehat{\Gamma}^{\nu}_{\mu\sigma} - e^{\sigma}_{\lambda}\partial_{\mu}e^{\alpha}_{\sigma}, \tag{3.30}$$

$$\partial_{\mu}e^{a}_{\mu} + \widehat{w}^{a}_{\mu b} - \widehat{\Gamma}^{\sigma}_{\mu b}e^{a}_{\sigma} = 0. \tag{3.31}$$

Enfin, notons que pour une géométrie métrique-affine donnée, une tétrade, en général, n'éxiste que localement, et que les tétrades globales n'éxistent que si la variété d'éspace-temps M est parallélisable.

3.3 Transformations de lorentz locales et jauge de Weitzenböck

Il est important de noter que la tétrade $e^{a}{}_{\mu}$ et la connexion de rotation $\widehat{w}^{a}_{\beta\mu}$ ne sont pas uniquement déterminés par la métrique $g_{\mu\nu}$ et la connexion affine $\widehat{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\nu}$. D'aprés l'équation (3.27), nous remarquons que la métrique est invariante $g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu}$, si nous transformons les champs de tétrades par:

$$e^{a}{}_{\mu} \to e'^{a}{}_{\mu} = \Lambda^{a}{}_{\beta}e^{\beta}{}_{\mu}\ , \tag{3.32}$$

où $\Lambda^{a}{}_{\beta}$ est une transformation de Lorentz locale (dépendante du point spatio-temporel) , c'est-à-dire il faut

$$\eta_{ab}\Lambda^{a}{}_{\gamma}\Lambda^{b}{}_{\sigma} = \eta_{\gamma\sigma}, \tag{3.33}$$

On note cependant que les coefficients de spin $\hat{w}^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ne sont pas invariants sous cette transformation de la tétrade seule, sauf si la transformation de Lorentz est globale $\partial_{\mu}\Lambda^{a}{}_{b}$. Pour obtenir l'invariance de la connexion également sous les transformations de Lorentz locales, il faut en outre transformer la connexion de spin par la règle :

$$\widehat{w}^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \to \widehat{w}'^{a}{}_{\beta\gamma} = \Lambda^{a}{}_{c}(\Lambda^{-1})^{\sigma}{}_{\beta}\widehat{w}^{c}{}_{\sigma\gamma} + \Lambda^{a}{}_{c}\partial_{\gamma}(\Lambda^{-1})^{c}{}_{\beta}, \tag{3.34}$$

D'où, les variables de connexion tétrade et spin sont associées à une symétrie de jauge de Lorentz. La liberté de jauge de Lorentz est particulièrement pertinente pour le téléparallélisme métrique, avec une connexion de spin plate et compatible métrique. Ici, il est possible de choisir une échelle telle que la rotation s'annule de la même manière. Pour que la connexion de spin disparaisse de la même manière, $\widehat{w}^{\alpha}{}_{\beta\mu} = 0$. Cette gauge est connue sous le nom de gauge de Weitzenbock et il s'ensuit que dans toute autre gauge, la connexion de spin prend la forme simple

$$\widehat{w}'^{\alpha}{}_{\beta\mu} = \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma}\partial_{\mu}(\Lambda^{-1})^{\gamma}{}_{\beta}, \tag{3.35}$$

Il est également utile de noter comment la tétrade et la connexion de spin se transforment sous des transformations de Lorentz infinitésimales, qui sont de la forme :

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} + \lambda^{\alpha}_{\beta}, \tag{3.36}$$

où la condition (3.33) se traduit par:

$$\eta_{ab} = \eta_{cd}(\delta^{c}_{a} + \lambda^{c}{}_{a})(\delta^{d}_{b} + \lambda^{d}{}_{b}) = \eta_{ab} + 2\lambda_{(ab)} + O(\lambda^2) \tag{3.37}$$

et donc $\lambda_{(ab)} = 0$ dans ce cas on trouve la transformation:

$$\delta_{\lambda} e^{a}{}_{b} = e'^{a}{}_{b} - e^{a}{}_{b} = \lambda^{a}{}_{\gamma} e^{\gamma}{}_{b}, \tag{3.38}$$

pour la tétrade, et:

$$\delta_{\lambda}\widehat{w}^{a}{}_{\gamma b} = \widehat{w}'^{a}{}_{\gamma b} - \widehat{w}^{a}{}_{\gamma b} = -\partial_b \lambda^{a}{}_{\gamma} - \widehat{w}^{a}{}_{cb}\lambda^{c}{}_{\gamma} + \widehat{w}^{c}{}_{\gamma b}\lambda^{a}{}_{c} = -\widehat{D}_b \lambda^{a}{}_{\gamma}, \tag{3.39}$$

pour les coefficients de spin.

3.3.1 Fixation de la gauge de lorentz

La formulation covariante de la gravité téléparallèle implique une liberté de jauge de lorentz, qui est implémentée via la connexion de spin $w^{\alpha}{}_{\mu\nu}$compatible avec la métrique, puisque la connexion de spin représente un DOF de jauge pur, la question est donc de savoir comment traiter cette variable sous forme hamiltonienne. la connexion de spin est classée en trois manières, la première était l'utilisation des multiplicateurs de lagrange: qui imposent les conditions de non-métrique et de courbure nulle dans la forme ulation hamiltonienne. Et on a la deuxième possibilité, qui n'utilise pas les multiplicateurs de lagrange, et la dernière possibilité est la fixation de la jauge, qui permet d'éliminer la connexion de spin avant d'effectuer l'analyse hamiltonienne. À partir de l'approche précédente qui intègre localement la connexion de spin à une variable, ceci peut être réalisé, qui constitue la transformation de lorentz, en faisant un changement de variables selon

$$\tilde{e}^{a}{}_{\mu} = (\Lambda^{-1})^{a}{}_{b} e^{b}{}_{\mu} \quad , \quad \hat{\Lambda}^{a}{}_{b} = \Lambda^{a}{}_{b} \ , \tag{3.40}$$

où la nouvelle variable $\tilde{e}^a{}_\mu$représente la tétrade de weitzenböck qui est dépend de la tétrade d'origine $e^a{}_\mu$, par la condition que $\Lambda^a{}_b$relie la connexion de spin weitzenböck en voie de disparition à la connecxion de spin d'origine $w^a{}_{b\mu}$, il s'ensuit que la nouvelle variable $\tilde{e}^a{}_b$est invariant sous les transformations de lorentz locale $\Lambda^a{}_b$, qui agit sur les variables d'origine comme

$$e'^a{}_\mu = \hat{\Lambda}^a{}_b e^b{}_\mu \ , \quad \Lambda'^a{}_b = \hat{\Lambda}^a{}_c \Lambda^c{}_b \ , \tag{3.41}$$

On peut remarque que la transformation de lorentz $\hat{\Lambda}^a{}_b$ n'est appliquée qu'au premier indice de le variable $\Lambda^a{}_b$, il n'applique pas au second, c'est-à-dire le premier indice de $\Lambda^a{}_b$ représente la variable de jauge non-weitzenböckienne, dans laquelle la tétrade est donnée par $e^a{}_b$, et la deuxième indice fait référence à la jauge fixe de weitzenböck, à partir de laquelle la connexion de spin $w^a{}_{b\mu}$ est obtenue par la transformation. Cela peut également être vu en calculant explicitement la transformation

$$\begin{aligned}
w'^a{}_{b\mu} &= \Lambda'^a{}_c \partial_\mu (\Lambda'^{-1})^c{}_b \\
&= \hat{\Lambda}^a{}_d \Lambda^d{}_c \partial_\mu \left[(\Lambda^{-1})^c{}_\mu (\hat{\Lambda}^{-1})^\gamma{}_b \right] \\
&= \hat{\Lambda}^a{}_d \left[(\hat{\Lambda}^{-1})^\gamma{}_b \Lambda^d{}_c \partial_\mu (\Lambda^{-1})^c{}_\mu + \partial_\mu (\hat{\Lambda}^{-1})^d{}_b \right] \\
&= \Lambda^a{}_d (\hat{\Lambda}^{-1})^\gamma{}_b w^d{}_{\gamma\mu} + \hat{\Lambda}^a{}_d \partial_\mu (\hat{\Lambda}^{-1})^d{}_b \ .
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Du changement de variable (3.40), nous pouvons voir que ces transformations s'annulent pour $e^a{}_\mu$, comme nous pouvons le voir en calculant explicitement

$$\tilde{e}'^a{}_\mu = (\Lambda'^{-1})^a{}_b e'^b{}_\mu g = (\Lambda^{-1})^a{}_b (\hat{\Lambda}^{-1})^b{}_c \hat{\Lambda}^c{}_d e^d{}_\mu g = (\Lambda^{-1})^a{}_b e^b{}_\mu g = \tilde{e}^a{}_\mu . \tag{3.43}$$

Par conséquent, les transformations de lorentz agisent sur $\hat{\Lambda}^a{}_b$, de sorte que les nouvelles variables $(\tilde{e}^a{}_\mu, \hat{\Lambda}^a{}_b)$ fournissent une division en une variable de jauge pure et une variable invariante de jauge. On trouve que la connexion affine téléparallelle et la métrique, qui entrent dans les actions de la gravité téléparallele sont exprimées dans les nouvelles variables comme

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a{}_\mu e^b{}_\nu = \eta_{ab} \Lambda^a{}_c \Lambda^b{}_d \tilde{e}^c{}_\mu \tilde{e}^d{}_\nu = \eta_{ab} \tilde{e}^a{}_\mu \tilde{e}^b{}_\nu \ , \tag{3.44}$$

aussi bien que

$$\begin{aligned}
\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} &= e_a{}^\mu \left[\partial_\rho e^a{}_\nu + \Lambda^a_b \partial_\rho (\Lambda^{-1})^b{}_c e^c{}_\nu \right] \\
&= (\Lambda^{-1})^d{}_a \tilde{e}_d{}^\mu \left[\partial_\rho (\Lambda^a{}_b \tilde{e}^b{}_\nu) + \Lambda^a{}_b \partial_\rho (\Lambda^{-1})^b{}_c \Lambda^c{}_\gamma \tilde{e}^\gamma{}_\nu \right] \\
&= (\Lambda^{-1})^d{}_a \tilde{e}_d{}^\mu \left[\Lambda^a{}_b \partial_\rho \tilde{e}^b{}_\nu + \tilde{e}^b{}_\nu \partial_\rho \Lambda^a{}_b - \partial_\rho \Lambda^a{}_\gamma \tilde{e}^\gamma{}_\nu \right] \\
&= \tilde{e}_a{}^\mu \partial_\rho \tilde{e}^a{}_\nu .
\end{aligned} \tag{3.45}$$

où ce dernier confirme l'affirmation précédente selon laquelle $\tilde{e}^a{}_\mu$représente la tétrade dans la jauge de weitzenböck. Peut être éxprimée en termes de connexion affine métrique et téléparallèle à travers sa torsion, car toute action de gravité téléparallèle est un invariant de lorentz.

3.3.2 Formulation par les formes différentielles

La langage des formes différentielles peut être utilisé [17] pour obtenir une déscription plus compacte des objets liés dans la formule de connexion de tétrade et spin. Ceci peut être réalisé en réalisant que les tétrades et les connexions de spin sont de la forme un $e^A = e^A{}_\mu dx^\mu$ et $\widehat{w}^A{}_B = \widehat{w}^A{}_B dx^\mu$, où l'éxistence de l'éxposant de Lorentz indique que le premier prend la valeur dans l'éspace de Minkowski. La comparaison des courbures des deux connexions appuie encore cette conclusion

$$\widehat{R}^a_{\gamma\mu\nu}(\widehat{w}) = \partial_\mu \widehat{w}^a{}_{\nu\gamma} \partial_\nu \widehat{w}^a{}_{\mu\gamma} + \widehat{w}^a{}_{\mu c} \widehat{w}^c{}_{\nu\gamma} - \widehat{w}^a{}_{\nu c} \widehat{w}^c{}_{\mu\gamma}, \tag{3.46}$$

on a déja

$$\widehat{R}^\alpha_{\beta\mu\nu}(\widehat{\Gamma}) = \partial_\mu \widehat{\Gamma}^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu \widehat{\Gamma}^\alpha_{\mu\rho} \widehat{\Gamma}^\rho_{\nu\beta} - \widehat{\Gamma}^\alpha_{\nu\rho} \widehat{\Gamma}^\rho_{\mu\beta}, \tag{3.47}$$

En d'autres termes, ces deux tenseurs de Riemann sont reliés par un simple changement de type d'indice, donc selon la convention commune à tous les tenseurs que nous utilisons, ce sont le même tenseur. Notons également que la non-métricité dans ce formalisme (suppression de la "dérivée covariante complète" du quaternion) est automatiquement nulle car:

$$\widehat{\nabla}_\alpha g_{\mu\nu} = \eta_{ab}(\partial_\alpha(e^a_\mu e^\beta_\nu) - \widehat{\Gamma}^\beta_{\alpha\nu} e^a_\beta e^b_\nu - \widehat{\Gamma}^\beta_{\alpha\nu}, \tag{3.48}$$

$$= -e^b_\mu e^c_\nu (\eta_{ab} \widehat{w}^a_{\alpha c} + \eta_{ac} \widehat{w}^a_{\alpha b}) = 0. \tag{3.49}$$

L'idée principale pour la gravité parallèle, il faut donner une description équivalente de la relativité générale en termes de tenseur de torsion, car $\widehat{\nabla}_\alpha g_{\mu\nu} = 0$, nous pouvons suivre la dérivation standard de la connexion Levi-Civita et prouver que:

$$\widehat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}(g) - \widehat{K}^\alpha_{\mu\nu}, \tag{3.50}$$

où

$$\widehat{K}^{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2}(\widehat{T}^{\alpha\mu\nu} + \widehat{T}^{\nu\alpha\mu} + \widehat{T}^{\mu\alpha\nu}) = -\widehat{K}^{\alpha\nu\mu}, \tag{3.51}$$

est appelée distorsion, antisymétrique par rapport aux deux indices. $\mathring{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}(g)$ est le symbole de Christoffel couramment utilisé pour les connexions symétriques, et $\widehat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}$ est la connexion dite de Weitzenbock

$$\widehat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} = e^\alpha_\gamma \partial_\nu e^\gamma_\mu, \tag{3.52}$$

l'éxistence de la décomposition unique(3.18) du coefficient de connexion $\widehat{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}$ de chaque géométrie affine métrique conduit à un résultat intéressant. Par conséquent, le tenseur de courbure $\widehat{R}^{\mu}{}_{\mu\nu\sigma}$ permet une décomposition similaire

$$\widehat{R}^{\alpha}_{\mu\nu\beta} = \mathring{R}^{\alpha}_{\mu\nu\beta} + \widehat{\nabla}_{\nu}\widehat{D}^{\alpha}{}_{\mu\beta} - \widehat{\nabla}_{\beta}\widehat{D}^{\alpha}{}_{\mu\nu} + \widehat{D}^{\alpha}{}_{\tau\nu}\widehat{D}^{\tau}{}_{\mu\beta} - \widehat{D}^{\alpha}{}_{\tau\beta}\widehat{D}^{\tau}{}_{\mu\nu}, \tag{3.53}$$

où nous avons utilisé le raccourci

$$\widehat{D}^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \widehat{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\nu} - \widehat{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \widehat{K}^{\alpha}{}_{\mu\nu} + \widehat{L}^{\alpha}_{\mu\nu}\ , \tag{3.54}$$

on l'appelle le tenseur de distorsion. Deux cas particuliers de cette relation méritent une attention particulière, ils ont en commun le tenseur zéro conduisant à la courbure $\widehat{R}^{\alpha}{}_{\mu\nu\beta} \equiv 0$. Le premier cas est donné par la connexion parallèle métrique $\widehat{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} \equiv \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$. Le tenseur de Riemann permet d'exprimer le tenseur de Riemann connecté de Levi-Civita sous la forme

$$\mathring{R}^{\alpha}{}_{\mu\nu\beta} = K^{\alpha}{}_{\tau\beta}K^{\tau}{}_{\mu\nu} - K^{\alpha}{}_{\tau\nu}K^{\tau}{}_{\mu\beta} + \mathring{\nabla}_{\beta}K^{\alpha}{}_{\mu\nu} - \mathring{\nabla}_{\nu}K^{\alpha}{}_{\mu\beta}, \tag{3.55}$$

dans l'équation de tenseur de contorsion. Le deuxième cas est celui d'une liaison téléparallèle symétrique $\widehat{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\nu} \equiv \mathring{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\nu}$. Dans ce cas, le tenseur de Riemann est exprimé comme

$$\mathring{R}^{\alpha}{}_{\mu\nu\beta} = \mathring{L}^{\alpha}{}_{\tau\beta}\mathring{L}^{\tau}{}_{\mu\nu} - \mathring{L}^{\alpha}{}_{\tau\nu}\mathring{L}^{\tau}{}_{\mu\beta} + \mathring{\nabla}_{\beta}\mathring{L}^{\alpha}{}_{\mu\nu} - \mathring{\nabla}_{\nu}\mathring{L}^{\alpha}{}_{\mu\beta}, \tag{3.56}$$

Par conséquent, le scalaire de Ricci peut être exprimée comme

$$\mathring{R} = K^{\alpha}{}_{\nu\mu}K^{\nu\mu}{}_{\alpha} - K^{\alpha}{}_{\nu\alpha}K^{\nu\mu}{}_{\mu} - 2\mathring{\nabla}_{\alpha}K^{\alpha\mu}{}_{\mu} = -T + 2\mathring{\nabla}_{\alpha}T_{\mu}{}^{\mu\alpha}, \tag{3.57}$$

dans le cas du téléparallélisme métrique, est comme

$$\mathring{R} = \mathring{L}^{\alpha\mu\nu}\mathring{L}_{\alpha\mu\nu} - \mathring{L}^{\alpha}{}_{\alpha\nu}\mathring{L}^{\nu\mu}{}_{\mu} + \mathring{\nabla}_{\mu}\mathring{L}_{\alpha}{}^{\alpha\mu} - \mathring{\nabla}_{\alpha}\mathring{L}^{\alpha\mu}{}_{\mu} = -\mathring{Q} + \mathring{\nabla}_{\mu}\mathring{Q}_{\alpha}{}^{\alpha\mu} - \mathring{\nabla}_{\alpha}\mathring{Q}^{\alpha\mu}{}_{\mu}, \tag{3.58}$$

dans le cas du téléparallèlisme symétrique. Le tenseur de Ricci est l'élément le plus important de la partie gravitationnelle de l'action d'Einstein-Hilbert

$$S_{EH} = \frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}\mathring{R} \qquad \text{où } \sqrt{-g} = e, \tag{3.59}$$

Selon le résultatci dessus, nous avons vu qu'en supposant une géométrie de distance métrique ou symétrique, nous pouvons convertir le travail d'Einstein-Hilbert en formules alternatives. Pour cela, veuillez noter que les expressions standard de Ricci (3.18) et (3.19) contiennent toutes deux la partie entière de l'espacement. Lorsque ces relations sont utilisées dans le travail d'Einstein - Hilbert (3.59), on obtient l'action:

$$S_{TEGR} = -\frac{1}{2k^2}\int d^4x(eT), \tag{3.60}$$

pour la TEGR, et

$$S_{STEGR} = -\frac{1}{2k^2}\int d^4x(e\mathring{Q}), \tag{3.61}$$

pour la (STEGR). Ces théories sont équivalentes à la GR dans le sens où elles conduisent à une dynamique équivalente pour la métrique, qui est la seule variable de champ fondamentale dans cette dernière théorie.

3.4 La formulation téléparallèle de la gravité et son équivalent en relativité générale

Dans le contexte et l'environnement des principaux points soulevés jusqu'ici dans cette section, il est possible d'établir un analogie de la gravité avec la GR, qui est dynamiquement équivalente. C'est Einstein qui a proposé le premier léquivalent téléparallèle de la gravité [17], qui faisait à l'origine partie de sa tentative d'unifier la gravité et l'interaction électromagnétique. Cela a finalement échoué, mais il a produit un formalisme théorique indépendant de la gravité, qui est dynamiquement équivalent à la GR. Concrètement, cela signifie que les équations de champ et les prédictions classiques de la théorie seront équivalentes. Cependant, compte tenu des différences dans leurs formules d'action, lorsque les facteurs quantiques sont considérés, ces théories ne fonctionnenent pas de la même façon. Dans d'autres domaines, les actions plutôt que les équations dynamiques jouent un rôle.

3.4.1 Équivalent téléparallèl de la gravité

En GR, la procédure d'Einstein-Hilbert est basée sur une seule variable dynamique, le tenseur métrique. Cela se produit à travers le tenseur métrique lui-même et le tenseur de Riemann exprimé par

$$\mathring{R}^{\alpha}{}_{\mu\nu\lambda} = \mathring{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\lambda.\nu} - \mathring{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\nu,\lambda} + \mathring{\Gamma}^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\mathring{\Gamma}^{\sigma}{}_{\mu\lambda} - \mathring{\Gamma}^{\alpha}{}_{\sigma\lambda}\mathring{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\nu}, \tag{3.62}$$

qui produit une mesure de la courbure associée à la connexion de Levi-civita. Si cela est échangé avec la connexion téléparallèle, le tenseur de Riemann résultant

$$R^{\alpha}{}_{\mu\nu\lambda} = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda.\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\lambda} + \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\lambda}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}, \tag{3.63}$$

En utilisant l'éq. (3.18) les deux connexions peuvent être reliées entre elles par le tenseur de contorsion $K^{\rho}{}_{\mu\nu}$ avec la relation

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\nu} + K^{\alpha}{}_{\mu\nu}, \tag{3.64}$$

ce qui signifie que les deux formes du tenseur de Riemann peuvent être reliées par

$$0 \equiv R^{\alpha}{}_{\mu\nu\lambda} = \mathring{R}^{\alpha}{}_{\mu\nu\lambda} + P^{\alpha}{}_{\mu\nu\lambda}, \tag{3.65}$$

où

$$\begin{aligned}
\mathring{R}^{\alpha}{}_{\mu\nu\lambda} =& -\left(K^{\alpha}{}_{\mu\lambda,\nu} - K^{\alpha}{}_{\mu\nu,\lambda} + \mathring{\Gamma}^{\alpha}{}_{\sigma\nu}K^{\sigma}{}_{\mu\lambda} - \mathring{\Gamma}^{\alpha}{}_{\sigma\lambda}K^{\sigma}{}_{\mu\nu} + \mathring{\Gamma}^{\sigma}{}_{\mu\lambda}K^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\right. \\
& \left. - \mathring{\Gamma}^{\sigma}{}_{\mu\nu}K^{\alpha}{}_{\sigma\lambda} + K^{\alpha}{}_{\sigma\nu}K^{\sigma}{}_{\mu\lambda} - K^{\alpha}{}_{\sigma\lambda}K^{\sigma}{}_{\mu\nu}\right) \\
=& -P^{\alpha}{}_{\mu\nu\lambda}.
\end{aligned} \tag{3.66}$$

cela conduira à au tenseur de Ricci

$$0 \equiv R_{\lambda\mu} = R^{\alpha}{}_{\lambda\alpha\mu} = \mathring{R}^{\alpha}{}_{\lambda\alpha\mu} + P^{\alpha}{}_{\lambda\alpha\mu}, \tag{3.67}$$

ou bien en termes du scalaire de Ricci

$$0 = R = \mathring{R} + P, \tag{3.68}$$

où

$$R = g^{\lambda\mu}R_{\lambda\mu}, \tag{3.69}$$

et

$$P = g^{\lambda\mu}P^{\alpha}{}_{\lambda\alpha\mu} = \frac{2}{e}\partial_{\alpha}(eT^{\mu\alpha}{}_{\mu}) + K^{\alpha\sigma\mu}K_{\mu\sigma\alpha} - K^{\alpha}{}_{\sigma\alpha}K^{\mu}{}_{\sigma\mu}, \tag{3.70}$$

où les identités suivantes ont été utilisées

$$K^{\mu}{}_{\alpha\mu} = T^{\mu}{}_{\mu\alpha}, \quad T^{\sigma}{}_{\mu\nu} = -T^{\sigma}{}_{\nu\mu}, \tag{3.71}$$

le premier terme de l'equation(3.70) est un terme de divergence totale écrit sous la forme

$$B = \frac{2}{e}\partial_{\alpha}(eT^{\mu}{}_{\mu}{}^{\alpha}) \equiv -\frac{2}{e}\partial_{\alpha}(T^{\mu\alpha}{}_{\mu}), \tag{3.72}$$

tandis que le reste peut être simplifié en

$$K^{\alpha\sigma\mu}K_{\mu\sigma\alpha} - K^{\alpha}{}_{\sigma\alpha}K^{\mu}{}_{\sigma\mu} = \frac{1}{4}T^{\alpha\sigma\mu}T_{\alpha\sigma\mu} - T^{\alpha}{}_{\alpha\sigma}T^{\mu}{}_{\mu}{}^{\sigma}, \tag{3.73}$$

qui est la définition originale du scalaire de torsion, à savoir

$$T = \frac{1}{4}T^{\alpha\sigma\mu}T_{\alpha\sigma\mu} + \frac{1}{2}T^{\mu\sigma\alpha}T_{\alpha\sigma\mu} - T^{\alpha}{}_{\alpha\sigma}T^{\mu}{}_{\mu}{}^{\sigma}, \tag{3.74}$$

Par conséquent, le scalaire de Ricci diffère par un terme de frontière par rapport au scalaire de torsion , il peut être écrit comme

$$\mathring{R} = -P = -T + B, \tag{3.75}$$

qui garantit l'équivalence dynamique entre l'action d'Einstein-Hilbert et celle de la TEGR (3.60) construite à partir du scalaire de torsion. De cette façon, la relativité générale et la TEGR doivent produire la même équation du champ et ne peuvent être distingués que par leur apparence plutôt que par leurs caractéristiques dynamiques. La raison du terme de divergence est que les Lagrangiens dans la RG et la TEGR dépendent des dérivées première et seconde de la métrique et de la tétrade, respectivement. Cependant, les éléments de dérivée seconde dans la tétrade se simplifient en un terme de divergence totale.

3.4.2 Propriétés générales de la gravité téléparallèle

3.4.2.1 Action et Equation du champ

Dans la TEGR, on suppose le plus souvent une action de la forme

$$S_{TG} = S_g[e, w] + S_m[e, \chi] \quad , \tag{3.76}$$

où S_g dépend de la tétrade e^a_μ et de la connexion de spin $w^\alpha_{\mu\nu}$ et l'action de matière dépend de la tétrade e^a_μ et des champs de matière χ^I. Après intégration par parties pour supprimer toutes les dérivées agissant sur les les champs, on obtient

$$\delta S_m = \int d^4x(\ominus_a{}^\mu \delta e^a{}_\mu + \Omega_I \delta\chi^I), \tag{3.77}$$

où $\Omega_I = 0$ sont les équations du champ de matière et $\ominus_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion

$$\ominus_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}} = e^a{}_\mu \left(\frac{1}{e}\frac{\delta L_m}{\delta e^a{}_{\nu'}}\right) g_{\nu\nu'} = e^a{}_\mu \ominus^{\nu'}_a \; g_{\nu\nu'} \ , \tag{3.78}$$

$$L_m = \sqrt{-g}\mathcal{L}_m \tag{3.79}$$

La variation correspondante de l'action gravitationnelle prend la forme

$$\delta S_g = -\int d^4xe(W_a{}^{\mu}\delta e^a{}_{\mu} + Y_a{}^{\beta\mu}\delta W^a{}_{\beta\mu}) \quad , \tag{3.80}$$

avec les tenseurs $W_a{}^{\mu}$ et $Y_a^{\beta\mu}$issus de la variation et de l'intégration par parties. De la variation par rapport à la tétrade on obtient donc les équations de champ

$$W_a{}^{\mu} = \ominus_a{}^{\mu}. \tag{3.81}$$

Une autre forme est obtenue à partir des équations de champ en convertissant le premier indice en indice d'espace-temps à l'aide d'un quadrilatère, et on obtient

$$W_{\mu\nu} = e^a{}_{\mu} g_{\sigma\nu} W_a{}^{\sigma} \ , \quad \ominus_{\mu\nu} = e^a{}_{\mu} g_{\sigma\nu} \ominus_a{}^{\sigma} \ , \tag{3.82}$$

de sorte que les équations de champ prennent la forme

$$W_{\mu\nu} = \ominus_{\mu\nu} \tag{3.83}$$

cependant, pour le champ de connexion de spin la dérivation de l'équation n'est pas si simple, car par définition il doit être plat, $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = 0$ et compatible avec la métrique $\nabla g_{\mu\nu} = 0$. Une possibilité consiste à limiter explicitement les changements dans la connexion de spin afin que sa courbure et ses non-métriques ne soient pas affectées. C'est le cas si et seulement si le changement obéit à la forme :

$$\delta w^a{}_{\beta\mu} = D_{\mu}\xi^a{}_{\beta} = \partial_{\mu}\xi^a{}_{\beta} + w^a{}_{\rho\mu}\xi^{\rho}{}_{\beta} - w^{\rho}{}_{\beta\mu}\xi^a{}_{\rho} \tag{3.84}$$

où $\omega^a{}_{\beta}$ sont les composantes de la matrice antisymétrique, et $\omega^a{}_{\beta} = 0$.

3.4.2.2 Les degrés de liberté de la TEGR

Dans la théorie des champs où apparaissent des équations de champ d'ordre supérieur, il est bien connu que l'instabilité d'Ostrogradsky provoquera des degrés de liberté de type fantôme, ce qui crée un environnement favorable pour la formule gravitationnelle de second ordre. Cependant, même dans la théorie gravitationnelle de second ordre, il est important de déterminer si le DoF se propage, car ce dernier n'affectera pas les observations. Ce n'est pas une tâche triviale, et c'est toujours une question ouverte dans de nombreuses formules gravitationnelles. La façon la plus courante de calculer le nombre de DoF dans TEGR est d'utiliser la méthode d'analyse hamiltonienne, qui donne le nombre total de DoF locaux liés à la théorie des champs.

Dans cette configuration, DoF est associé à des paires de variables conjuguées, à savoir les coordonnées généralisées du système dynamique et son impulsion conjuguée.Ensuite, le nombre total de DoF peut être calculé en trouvant le nombre de contraintes irréductibles a du premier type et b contraintes du deuxième type et en utilisant la formule

$$\text{Nombre de DoF} = \frac{2N - 2a - b}{2} \quad , \tag{3.85}$$

où 2N est le nombre de coordonnées canoniques. Dans cette terminologie, chaque contrainte de premier type élimine un degré de liberté et deux contraintes de deuxième type sont nécessaires pour obtenir le même résultat.

3.4.2.3 Densité Lagrangienne et équations du champ

On a:

$$T = \frac{1}{4} T^{\alpha\beta\mu} T_{\alpha\beta\mu} + \frac{1}{2} T^{\mu\beta\alpha} T_{\alpha\beta\mu} - T^{\mu} T_{\mu} \quad , \tag{3.86}$$

où T_μ est le vecteur torsion

$$T_\mu \equiv T^{\gamma}_{\gamma\mu} = -T^{\gamma}_{\mu\gamma}, \tag{3.87}$$

le tenseur torsion est défini par:

$$T^{\alpha}{}_{\beta\nu} = \partial_\beta e^{\alpha}{}_{\nu} - \partial_\nu e^{\alpha}{}_{\beta}, \tag{3.88}$$

en termes d'espace-temps, nous avons

$$T^{\gamma}{}_{\beta\nu} = e_{\sigma}{}^{\gamma} T^{\sigma}_{\beta\nu}, \tag{3.89}$$

$$= e^{\gamma}_{\sigma} (\partial_\beta e^{\sigma}_{\nu} - \partial_\nu e^{\sigma}_{\beta} + w^{\sigma}_{\rho\beta} e^{\rho}_{\nu} - w^{\sigma}_{\nu\rho} e^{\rho}_{\beta}), \tag{3.90}$$

$$= e_{\sigma}{}^{\gamma} \partial_\beta e^{\sigma}_{\nu} + e_{\sigma}{}^{\gamma} w^{\sigma}_{\rho\beta} e^{\rho}_{\nu} - e_{\sigma}{}^{\gamma} \partial_\nu e^{\sigma}_{\beta} + e_{\sigma}{}^{\gamma} w^{\sigma}_{\nu\rho} e^{\rho}_{\beta}, \tag{3.91}$$

avec

$$T^{\sigma}{}_{\nu\beta} = \partial_\nu e^{\sigma}{}_{\beta} - \partial_\beta e^{\sigma}{}_{\nu} + w^{\sigma}{}_{\lambda\nu} e^{\lambda}{}_{\beta} - w^{\sigma}{}_{\lambda\beta} e^{\lambda}{}_{\nu}, \tag{3.92}$$

nous avons

$$\Gamma^{\gamma}{}_{\beta\nu} = e_{\sigma}{}^{\gamma} \partial_\beta e^{\sigma}_{\nu} + e_{\sigma}{}^{\gamma} w^{\sigma}_{\rho\beta} e^{\rho}_{\nu}, \tag{3.93}$$

le tenseur de torsion $T^{\gamma}_{\beta\nu}$ est la partie antisymétrique des coefficients connexion affine , soit :

$$T^{\gamma}_{\beta\nu} = \frac{1}{2} (\Gamma^{\gamma}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\gamma}{}_{\nu\beta}) \equiv \Gamma^{\gamma}{}_{|\beta\nu|}, \tag{3.94}$$

C'est une Convention d'appeler U_4 une variété d'espace-temps dotée de métrique et de torsion où le superpotentiel est:

$$S^{\alpha\mu\nu} = K^{\mu\alpha\nu} + g^{\alpha\mu}T^{\nu} - g^{\alpha\nu}T^{\mu}, \tag{3.95}$$

qui est antisymétrique $S^{\alpha}_{\ \mu\nu} = -S^{\alpha}_{\ \mu\nu}$ Plus tard, en gravité parallèle, nous utilisons la connexion de Weizenbock donnée par $w^{\alpha}_{\ \mu\nu} = 0$. Notons que cette définition brise l'invariance de Lorentz, car la connexion n'est pas un tenseur, et sa disparition n'est pas une condition covariante. Considérons l'action suivante pour la TEGR, qui inclut également la contribution de la matière (à la composante gravitationnelle dans l'équation (3.60) et le terme de divergence totale a été supprimé car il n'a pas de contribution dynamique:

$$S_{TEGR} = -\frac{1}{2k^2}\int d^4x \ eT + \int \partial^4x \ e\mathcal{L}_m \tag{3.96}$$

On introduit d'abord les quelques résultats suivants:

$$\delta\left|e\right| = ee^{\alpha}_{\mu}\delta e^{\mu}_{\alpha} \ , \tag{3.97}$$

$$\delta e^{\mu}_{\gamma} = -e^{\mu}_{b}e^{\nu}_{\gamma}\delta e^{b}_{\nu} \tag{3.98}$$

$$\delta g_{\mu\nu} = \eta_{ab}(e^{\gamma}_{\mu}\delta e^{b}_{\nu} + e^{\gamma}_{\nu}\delta e^{b}_{\mu}) \tag{3.99}$$

La variation de l'action dans la gravité téléparallèle est :

$$\delta S = -\frac{1}{2k^2}\int d^4x\delta(eT) + \int d^4x\delta(e\mathcal{L}_m) \tag{3.100}$$

$$= -\frac{1}{2k^2}\int d^4x(e(\delta T) + \delta eT) + \int d^4x\delta(e\mathcal{L}_m) \tag{3.101}$$

$$T^{c}_{\ \mu\nu} = e^{c}_{\ k}(\partial_{\mu}e^{c}_{\ \nu} - \partial_{\nu}e^{c}_{\ \mu}) \tag{3.102}$$

$$T_{c}^{\ \mu\nu} = \eta_{cb}T^{b\mu\nu} \tag{3.103}$$

$$T^{\alpha\mu\nu} = e^{\alpha}_{\ a}(\partial^{\mu}(g^{\nu\gamma}e^{a}_{\ \gamma}) - \partial^{\nu}(g^{\mu\gamma}e^{a}_{\ \gamma})) \tag{3.104}$$

$$T_{\mu} = T^{\mu}_{\ \nu\mu} = e^{\mu}_{\ \beta}(\partial_{\nu}e^{\beta}_{\ \mu} - \partial_{\mu}e^{\beta}_{\ \nu}) \tag{3.105}$$

$$\mathcal{L}_T = \frac{e}{2k^2}T \tag{3.106}$$

On a l'équation d'euler lagrange:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial e^{a}_{\ \rho}} - \partial_{\sigma}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\sigma}e^{a}_{\ \rho})} = 0 \tag{3.107}$$

Calcul de $\partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\rho)}$. On utillise (3.86)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\rho)}(T_{\lambda\mu\nu}T^{\lambda\mu\nu}) &= \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\rho)}(g^{b\lambda}T_{\lambda\mu\nu}g_{b\lambda}T^{\lambda\mu\nu}) && (3.108)\\
&= \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\rho)}(T_b{}^{\mu\nu}T^b{}_{\mu\nu})\\
&= \frac{1}{2}T_b{}^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\rho)}T^b{}_{\mu\nu}\\
&= \frac{1}{2}T_b{}^{\mu\nu}\delta^b_a(\delta^\sigma_\mu\delta^\rho_\nu - \delta^\sigma_\nu\delta^\rho_\mu)\\
&= T_a{}^{\sigma\rho} && (3.109)\\
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\rho)}(T_{\lambda\mu\nu}T^{\mu\lambda\nu}) &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\rho)}(T^c{}_{\mu\nu}T^{\nu\mu}{}_c) && (3.110)\\
&= \frac{1}{2}T^{\nu\mu}{}_c\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\rho)}T^c{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}T^c{}_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\rho)}T^{\nu\mu}{}_c\\
&= \frac{1}{2}T^{\nu\mu}{}_c\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\rho)}T^c{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}T^c{}_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\rho)}(g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}\eta_{cd}T_{\alpha\beta}{}^d)\\
&= \frac{1}{2}T^{\rho\sigma}{}_a - \frac{1}{2}T^{\sigma\rho}{}_a + \frac{1}{2}T_d{}^{\beta\alpha}(\delta^\sigma_\alpha\delta^d_a\delta^\rho_\beta - \delta^\sigma_\beta\delta^\rho_\alpha\delta^d_a)\\
&= T^{\rho\sigma}{}_a - T^{\sigma\rho}{}_a && (3.111)\\
-\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\rho)}(T^\lambda{}_{\mu\lambda}T^{\nu\mu}{}_\nu) &= -\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\rho)}(T^\lambda{}_{\mu\lambda}g^{\alpha\nu}g_{\nu\beta}T_\alpha{}^{\mu\beta}) && (3.112)\\
&= -g^{\alpha\nu}g_{\nu\beta}\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\rho)}(T_\alpha{}^{\mu\beta}T^\lambda{}_{\mu\lambda})\\
&= -\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\rho)}(T_\alpha{}^{\mu\alpha}T^\lambda{}_{\mu\lambda})\\
&= -\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\rho)}(g_{\alpha\nu}T^{\nu\mu}{}_\gamma g^{\gamma\alpha}T^\lambda{}_{\lambda\mu})\\
&= -\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\rho)}(\delta^\gamma_\nu T^{\lambda\mu}{}_\gamma T^\lambda{}_{\lambda\mu})\\
&= -2T^{\nu\mu}{}_\nu\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\rho)}T^\lambda{}_{\lambda\mu}\\
&= -2T^{\nu\mu}{}_\nu\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\rho)}T^\lambda{}_{\lambda\mu}\\
&= -2T^{\nu\mu}{}_\nu\delta^\lambda_b\left(\delta^\sigma_\lambda\delta^\rho_\mu - \delta^\sigma_\mu\delta^\rho_\lambda\right)\\
&= -2T^{\nu\rho}{}_\nu\delta^\sigma_b + 2T^{\nu\sigma}{}_\nu\delta^\rho_b && (3.113)
\end{aligned}
$$

on a:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\rho)} = T_a{}^{\sigma\rho} + T^{\rho\sigma}{}_a - T^{\sigma\rho}{}_a + 2T^{\nu\sigma}{}_\nu \delta^\rho_b - 2T^{\nu\rho}{}_\nu \delta^\sigma_b \tag{3.114}$$

$$\partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\rho)} = e^{-1}\partial_\sigma(eS_a{}^{\sigma\rho}) \tag{3.115}$$

où:

$$S_a{}^{\sigma\rho} = \frac{1}{2}(T_a{}^{\rho\sigma} + T^{\sigma\rho}{}_a - T^{\rho\sigma}{}_a) - T^{\nu\rho}{}_\nu \delta^\sigma_b + T^{\nu\sigma}{}_\nu \delta^\rho_b \tag{3.116}$$

Calcul de $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e^a{}_\rho}$. On peut d'abord réécrire T sous la forme

$$T = \frac{e}{2k^2}\left(\frac{1}{4}\frac{\partial T^c{}_{\mu\nu}}{\partial e^a{}_\rho}T_c{}^{\mu\nu} + \frac{1}{4}T^c{}_{\mu\nu}\frac{\partial T_c{}^{\mu\nu}}{\partial e^a{}_\rho} + \frac{1}{4}T^c{}_{\mu\nu}\frac{\partial T^{\nu\mu}{}_c}{\partial e^a{}_\rho} + \frac{1}{2}\frac{T^c{}_{\mu\nu}}{\partial e^a{}_\rho}T^{\nu\mu}{}_c - T_{\lambda\mu}{}^\lambda \frac{\partial T^{\nu\mu}{}_\nu}{\partial e^a{}_\rho} - \frac{\partial T_{\lambda\mu}{}^\lambda}{\partial e^a{}_\rho}T^{\nu\mu}{}_\nu\right). \tag{3.117}$$

En utilisant ensuite la définition de la torsion, la dérivée fonctionnelle qui apparaît dans les premier et quatrième termes de l'équation (3.117) sont données par:

$$\frac{\partial T^c{}_{\mu\nu}}{\partial e^a{}_\rho} = 0 \tag{3.118}$$

Pour calculer le reste des dérivées fonctionnelles, on utilise

$$\frac{\partial e_c{}^\nu}{\partial e^a{}_\rho} = -e_a{}^\nu e_c{}^\rho \tag{3.119}$$

et

$$\frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial e^a{}_\rho} = -g^{\rho\alpha}e_a{}^\mu - g^{\mu\rho}e_a{}^\alpha \tag{3.120}$$

on peut écrire la deuxième term de (3.117) comme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_c{}^{\mu\nu}}{\partial e^a{}_\rho} &= \eta_{cb}\frac{\partial}{\partial e^a{}_\rho}(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}T^b{}_{\alpha\beta}) \\
&= \left(\frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial e^a{}_\rho}g^{\nu\beta} + g^{\mu\alpha}\frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial e^a{}_\rho}\right)T_{c\alpha\beta} + \eta_{cb}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\frac{\partial T^b{}_{\alpha\beta}}{\partial e^a{}_\rho} \\
&= \left(-g^{\nu\beta}g^{\alpha\rho}e_a{}^\mu - g^{\nu\beta}g^{\mu\rho}e_a{}^\alpha - g^{\mu\alpha}g^{\nu\rho}e_a{}^\beta - g^{\mu\alpha}g^{\beta\rho}e_a{}^\nu\right)T_{c\alpha\beta} \qquad (3.121) \\
&= -e_a{}^\mu T_c{}^{\rho\nu} - g^{\mu\rho}T_{ca}{}^\nu - g^{\nu\rho}T_c{}^\mu{}_a - e_a{}^\nu T_c{}^{\mu\rho} \qquad (3.122)
\end{aligned}$$

et le troisième term de (3.117) s'écrit:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T^{\nu\mu}{}_c}{\partial e^a{}_\rho} &= \eta_{cb}\frac{\partial}{\partial e^a{}_\rho}(e^b{}_\sigma T^{\nu\mu\sigma}) \\
&= \eta_{ca}T^{\nu\mu\rho} + \eta_{cb}e^b{}_\sigma\frac{\partial T^{\nu\mu\sigma}}{\partial e^a{}_\rho} \qquad (3.123)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T^{\nu\mu\sigma}}{\partial e^a{}_\rho} &= \frac{\partial}{\partial e^a{}_\rho}(\eta^{bc} e_b{}^\nu T_c{}^{\mu\sigma}) \\
&= -\eta^{bc} e_a{}^\nu e_b{}^\rho T_c{}^{\mu\sigma} + \eta^{bc} e_b{}^\nu \frac{\partial T_c{}^{\mu\sigma}}{\partial e^a{}_\rho} \\
&= -e_a{}^\nu T^{\rho\mu\sigma} - \eta^{bc} e_b{}^\nu (e_a{}^\mu T_c{}^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} T_{ca}{}^\sigma + g^{\sigma\rho} T_c{}^\mu{}_a + e_a{}^\sigma T_c{}^{\mu\rho}) \\
&= -e_a{}^\nu T^{\rho\mu\sigma} - e_a^\mu T^{\nu\rho\sigma} - g^{\mu\rho} T^\nu{}_a{}^\sigma - g^{\sigma\rho} T^{\nu\mu}_a - e_a{}^\sigma T^{\nu\mu\rho}
\end{aligned}$$

En remplaçant dans (3.123) on obtient:

$$\frac{\partial T^{\nu\mu}_c}{\partial e^a{}_\rho} = -e_a{}^\nu T^{\rho\mu}{}_c - e_a{}^\mu T^{\nu\rho}{}_c - e_c{}^\rho T^{\nu\mu}{}_a - g^{\mu\rho} T^\nu{}_{ac}.. \tag{3.124}$$

La dérivée fonctionnelle apparaissant dans le cinquième terme de (3.117) est:

$$\frac{\partial T_{\lambda\mu}{}^\lambda}{\partial e^a{}_\rho} = \frac{\partial}{\partial e^a{}_\rho}(e_c{}^\lambda T^c{}_{\mu\lambda})$$

$$= -e_a{}^\lambda e_c{}^\rho T^c{}_{\mu\lambda} \tag{3.125}$$

$$= -T^\rho{}_{\mu a} \tag{3.126}$$

Compte tenu de tous les résultats ci-dessus et

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e^a{}_\rho} = -e e_a{}^\lambda S_c{}^{\nu\rho} T^c{}_{\nu\lambda} - e_a{}^\rho T \tag{3.127}$$

on obtient les équations de mouvement de la TEGR

$$e^{-1}\partial_\sigma(e S_a{}^{\sigma\rho}) - e e_a{}^\lambda S_c{}^{\nu\rho} T^c{}_{\nu\lambda} - \frac{1}{k} e_a{}^\rho T = 0. \tag{3.128}$$

Chapter 4

Le Trou de Reissner-Nordstrom en gravité téléparallèle modifiée

4.1 Introduction

La théorie téléparallèle est une théorie gravitationnelle alternative, qui équivaut à la relativité générale (GR) et a une torsion non nulle. Quelques modifications de cette théorie, le modèle dit la $f(T)$gravité, dans lequel nous utilisons la densité lagrangienne gravitationnelle est une fonction du tenseur de torsion. De manière générale, les équations du champ de ces modèles sont plus simples que celles obtenues dans la $f(R)$ gravité, et fournissent des solutions cosmologiques et astrophysiques intéressantes [19]. La théorie $f(T)$ est proposée comme une généralisation de de la TEGR depuis plus de dix ans [17]

Le but dans ce chapitre est l'étude de la solution des équations d'Einsteine présence de matière sous forme du champ de Maxwell à quatre dimensions. Nous choisissons un référentiel non radial et essayons de récupérer la solution de Reissner-Nordstrom. La caractéristique principale de la théorie est d'utiliser le critère de Schwarzschild $g_{tt}g_{rr} = -1$. Récemment, cette spécification a été utilisée comme élément fondamental pour trouver une solution de trou noir dans le cadre de la $f(T)$ [14]. Nous allons prouver que $g_{tt}g_{rr} = -1$ uniquement pour les variétés où $T = T_0$ ou lorsque la géométrie est décrite par la TEGR. Cependant, pour la forme générale de $f(T)$, et $T \neq T_0$ ou $f(T) \neq T + C$, il n'y a aucune raison d'utiliser $g_{tt}g_{rr} = -1$.

4.2 Les équations du champ de la théorie f(T)

En prenant comme règle générale la constrution de la TEGR, on peut construire la gravité modifiée en généralisant l'action gravitationnelle T à la fonction $f(T)$, inspirée de l'éxtension faite en RG conduisant à la $f(R)$-gravité. Pour $f(T)$ on a plus plus de degrés de liberté que la théorie $f(R)$. La théorie de la gravitation $f(T)$ est alors décrite par l'action:

$$S = \frac{1}{2k^2} \int (ef(T) + \mathcal{L}_m) d^4x. \tag{4.1}$$

4.2.1 Équations de base

Les variétés différentiables ont une structure dans laquelle les éléments de base de la théorie de la gravitation peuvent être dérivés de sa géométrie différentielle, à travers le vecteur défini dans l'espace tangent de la variété, et les éléments duaux et co-vecteurs du vecteur défini dans l'éspace cotangent à la variété, nous pouvons définir les types d'éléments de ligne, tels que

$$dS^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{ab} \theta^a \theta^b \tag{4.2}$$

$$\theta^a = e^a{}_\mu dx^\mu \ , \quad dx^\mu = e_a{}^\mu \theta^a \tag{4.3}$$

où $g_{\mu\nu}$ est la métrique de l'espace-temps, η_{ab} la métrique de Minkowski et la tétrade $e^a{}_\mu$ et leurs inverses $e_a{}^\mu$. Les matrices de tétrades satisfaisant les relations $e^a{}_b e_a{}^\nu = \delta^\nu_b$ et $e^a{}_b e_\nu{}^b = \delta^a_\nu$. Au regard de ces matrices, la racine du déterminant de la métrique est donnée par $\sqrt{-g} = det[e^a{}_\mu]$ $= e$. On peut définir la forme géométrique où la courbure doit être égale à zéro. Ainsi, nous devons définir une connexion dans laquelle toutes les composantes du tenseur de Riemann sont complètement libres. Cela peut être fait via la connexion de Weitzenbock

$$\Gamma^\alpha_{\ \mu\nu} = e_\lambda{}^\alpha \partial_\nu e^\lambda{}_\mu = -e^\lambda{}_\alpha \partial_\nu e_\lambda{}^\mu \tag{4.4}$$

On peut maintenant définir la torsion et la contorsion

$$T^\alpha_{\ \mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\ \nu\mu} - \Gamma^\alpha_{\ \mu\nu} = e^\alpha_\lambda (\partial_\mu e^\lambda{}_\nu - \partial_\nu e^\lambda{}_{,\mu}) \tag{4.5}$$

$$K^{\mu\nu}{}_\alpha = -\frac{1}{2}(T^{\mu\nu}_{\ \ \alpha} - T^{\nu\mu}_{\ \ \alpha} - T_\alpha{}^{\mu\nu}) \tag{4.6}$$

nous définissons un nouveau tenseur, à partir de la torsion et de la torsion

$$S_\alpha{}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(K^{\mu\nu}{}_\alpha + \delta^\mu_\alpha T^{\beta\nu}{}_\beta - \delta^\nu_\alpha T^{\beta\mu}{}_\beta) \tag{4.7}$$

et le scalaire de torsion est alors défini par:

$$T = T^\alpha_{\ \mu\nu} S_\alpha{}^{\mu\nu} \tag{4.8}$$

4.2.2 Les équations du champ dans la $f(T)$ Gravité

la densité lagrangienne est donnée par

$$\mathcal{L} = ef(T) + \mathcal{L}_m \tag{4.9}$$

Les équations de champ pour cette théorie sont obtenues par les équations d'Euler-Lagrange, on a donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e^a{}_\mu} &= \frac{\partial e}{\partial e^a{}_\mu} f(T) + e\frac{\partial f(T)}{\partial e^a{}_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial e^a{}_\mu} \\
&= \frac{\partial e}{\partial e^a{}_\mu} f(T) + e\frac{\partial f(T)}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial e^a{}_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial e^a{}_\mu} \\
&= ee_a{}^\mu f(T) + ef_T(T) 4e_a{}^\sigma T^\gamma{}_{\nu\sigma} S_\gamma{}^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial e^a{}_\mu}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\mu)} &= \partial_\sigma \frac{\partial e}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\mu)} f(T) + e\partial_\sigma[\frac{\partial f(T)}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\mu)}] + \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\mu)} \\
\partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\mu)} &= -4f_T(T)\partial_\sigma(ee_a{}^\gamma S_\gamma{}^{\mu\nu}) - 4ee_a{}^\gamma S_\gamma{}^\sigma \partial_\sigma T f_{TT}(T) + \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\mu)}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

où $\frac{\partial f(T)}{\partial T} = f_T(T)$,$f_{TT}(T) = \frac{\partial^2 f(T)}{\partial^2 T}$, et aprés le chapitre 3 on a:

$$\frac{\partial T}{\partial e^a{}_\mu} = 4e_a{}^\sigma T^\gamma{}_{\nu\sigma} S_\gamma{}^{\mu\nu}. \tag{4.12}$$

à travers les expressions ci-dessus et celles d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e^a{}_\mu} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\mu)} = 0 \tag{4.13}$$

donc

$$\begin{aligned}
0 &= ee_a{}^\mu f(T) + ef_T(T) 4e_a{}^\sigma T^\gamma{}_{\nu\sigma} S_\gamma{}^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial e^a{}_\mu} \\
&- \left[-4f_T(T)\partial_\sigma(ee_a{}^\gamma S_\gamma{}^{\mu\nu}) - 4ee_a{}^\gamma S_\gamma{}^\sigma \partial_\sigma T f_{TT}(T) + \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\mu)}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ee_a{}^\mu f(T) + 4ee_a{}^\sigma T^\gamma{}_{\nu\sigma} S_\gamma{}^{\mu\nu} f_T(T) + 4\partial_\sigma\left(ee_a{}^\gamma S_\gamma{}^{\mu\nu}\right) f_T(T) \\
+4ee_a{}^\gamma S_\gamma{}^\sigma \partial_\sigma T f_{TT}(T) = -\left[\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial e^a{}_\mu} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\mu)}\right]
\end{aligned}$$

En multipliant par $e^{-1}e^a{}_\rho/4$, on obtient les équations du mouvement suivantes de la TEGR modifiée:

$$S_\rho{}^{\mu\sigma}\partial_\sigma T f_{TT}(T) + [e^{-1}e^a{}_\rho \partial_\sigma(ee_a{}^\gamma S_\gamma{}^{\mu\sigma}) + T^\gamma{}_{\nu\rho} S_\gamma{}^{\mu\nu}] f_T(T) + \frac{1}{4}\delta^\mu_\rho f(T) = 4\pi T_\rho{}^\mu\ , \tag{4.14}$$

où T_ρ^μ est le tenseur énergie-impulsion de la source qui est dans nôtre cas le champ de Maxwell:

$$T_\rho{}^\mu = -\frac{e^{-1}e^a{}_\rho}{16\pi}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial e^a{}_\mu} - \partial_\sigma\left[\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial(\partial_\sigma e^a{}_\mu)}\right]\right\}\ , \tag{4.15}$$

4.2.3 Modèle de trou noir chargé

Nous considérons d'abord la métrique suivante stationnaire et possédant la symétrie sphérique:

$$dS^2 = e^{a(r)}dt^2 - e^{-b(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{4.16}$$

où $a(r)$ et $b(r)$ ne dependent que de r. c'est le résultat du théorème Birkhoff, qui contrôle la gravitation généralisée en sélectionnant au hasard des quadrilatères. Dans notre cas, on obtient une solution sphérique symétrique et stationnaire, il faut donc systématiquement choisir des quadrilatères de quadrilatères diagonaux tels que $[e^a{}_\mu] = diag[e^{a(r)/2}, e^{b(r)/2}, r, r\sin\theta]$. Nous avons différentes options pour le quadrilatère: Le quadrant diagonal restreint l'éxpréssion algébrique de f(T) aux formes linéaires téléparallèles [20]. Nous avons différentes options pour le quaternion, le quaternion diagonal limite l'éxpression algébrique de f(T) à la forme linéaire à distance parallèle Par conséquent, selon la suggestion précédente, nous choisissons la base de quartile non diagonale suivante dans laquelle nous effectuons la transformée de Lorentz locale sur une base diagonale [20]. De manière appropriée:

$$\{e^\alpha{}_\mu\} = \begin{bmatrix} e^{\frac{a(r)}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{b(r)}{2}}\sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ 0 & e^{\frac{b(r)}{2}}\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ 0 & e^{\frac{b(r)}{2}}\cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

L'inverse de $e^\alpha{}_\mu$ est :

$$\{e_\alpha{}^\mu\} = \begin{bmatrix} e^{\frac{-a(r)}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{-b(r)}{2}}\cos\phi\sin\theta & e^{\frac{-b(r)}{2}}\sin\theta\sin\phi & e^{\frac{-b(r)}{2}}\cos\theta \\ 0 & \frac{\cos\theta\cos\phi}{r} & \frac{\cos\theta\sin\phi}{r} & \frac{-\sin\theta}{r} \\ 0 & \frac{-\sin\phi}{r\sin\theta} & \frac{\cos\phi}{r\sin\theta} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

où $e = \det[e^\alpha{}_\mu] = e^{\frac{(a+b)}{2}}r^2\sin\theta$.

On a les expressions suivantes des composantes non nulles du tenseur de torsion:

$$\begin{aligned}
T^0{}_{10} &= \Gamma^0{}_{01} - \Gamma^0{}_{10} = e_\lambda{}^0(\partial_1 e^\lambda{}_0 - \partial_0 e^\lambda{}_1) \\
&= e_0{}^0(\partial_1 e^0{}_0 - \partial_0 e^0{}_1) + e_1{}^0(\partial_1 e^1{}_0 - \partial_0 e^1{}_1) + e_2{}^0(\partial_1 e^2{}_0 - \partial_0 e^2{}_1) + e_3{}^0(\partial_1 e^3{}_0 - \partial_0 e^3{}_1) \\
&= \frac{a'}{2} \\
&= -T^0{}_{01} \qquad (4.19)\\
T^2{}_{21} &= \Gamma^2{}_{12} - \Gamma^2{}_{21} = e_\lambda{}^2(\partial_2 e^\lambda{}_1 - \partial_1 e^\lambda{}_{,2}) \\
&= e_0{}^2(\partial_2 e^0{}_1 - \partial_1 e^0{}_{,2}) + e_1{}^2(\partial_2 e^1{}_1 - \partial_1 e^1{}_{,2}) + e_2{}^2(\partial_2 e^2{}_1 - \partial_1 e^2{}_{,2}) + e_3{}^2(\partial_2 e^3{}_1 - \partial_1 e^3{}_{,2}) \\
&= \frac{e^{\frac{b}{2}} - 1}{r} \\
&= T^3{}_{31} = -T^2{}_{12} \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

et pour le tenseur de contorsion on obtient:

$$K^{10}{}_0 = -K^{01}{}_0 = -\frac{a' e^{-b(r)}}{2}, \quad K^{21}{}_2 = K^{31}{}_3 = -\frac{e^{-b}(e^{\frac{b}{2}} - 1)}{r}, \qquad (4.21)$$

et on a aussi:

$$S_0{}^{01} = -S_0{}^{10} = \frac{e^{-b}(e^{\frac{b}{2}} - 1)}{r}, \; S_2{}^{12} = S_3{}^{13} = \frac{e^{-b}(a'r - 2e^{\frac{b}{2}} + 2)}{4r}, \qquad (4.22)$$

Le scalaire de torsion est alors donné par:

$$\begin{aligned}
T &= T^\alpha{}_{\mu\nu} S_\alpha{}^{\mu\nu} \\
&= T^0{}_{\mu\nu} S_0{}^{\mu\nu} + T^1{}_{\mu\nu} S_1{}^{\mu\nu} + T^2{}_{\mu\nu} S_2{}^{\mu\nu} + T^3{}_{\mu\nu} S_3{}^{\mu\nu} \\
&= T^0{}_{10} S_0{}^{10} + T^0{}_{01} S_0{}^{01} + T^2{}_{12} S_2{}^{12} + T^2{}_{21} S_2{}^{21} + T^3{}_{31} S_3{}^{31} + T^3{}_{13} S_3{}^{13} \\
&= 2T^0{}_{01} S_0{}^{01} + 4T^2{}_{21} S_2{}^{21} \qquad (4.23)\\
&= 2\left(\frac{a'}{2}\right)\left(\frac{e^{-b}(e^{b/2} - 1)}{r}\right) + 4\left(\frac{e^{\frac{b}{2}} - 1}{r}\right)\left(\frac{e^{-b}(a'r - 2e^{b/2} + 2)}{4r}\right) \\
&= \frac{2}{r}\left[-(a' + \frac{2}{r})e^{-b/2} + (a' + \frac{1}{r})e^{-b} + \frac{1}{r}\right]
\end{aligned}$$

Pour les configurations de trous noirs chargés, nous avons besoin d'un champ de Maxwell décrit par le tenseur énergie-impulsion:

$$T_\rho{}^\mu = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{4}\delta^\mu_\rho F^{\gamma\lambda} F_{\gamma\lambda} - F^{\mu\gamma} F_{\rho\gamma}\right] \,, \qquad (4.24)$$

où $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ est le tenseur de maxwell et A_μ le 4-vecteur potentiel. Ici on fait le choix suivant $A_\mu = [A_0, 0, 0, 0]$, où $A_0(r)$ est le potentiel éléctrique.

Pour la métrique covariante et contravariante on a:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} e^{a(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{b(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}, \qquad g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} e-^{a(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-b(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{bmatrix}$$

et ainsi on montre que:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu \\ A^\mu &= g^{\mu\alpha} A_\alpha = g^{\mu 0} A_0 \\ &= (g^{00}A_0, g^{10}A_0, g^{20}A_0, g^{30}A_0) \\ F_{10} &= \partial_1 A_0 - \partial_0 A_1 = \partial_1 A_0 \\ F_{01} &= \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = -\partial_1 A_0 && (4.25) \\ F^{01} &= g^{00} g^{11} F_{01} \\ &= e^{-a(r)} e^{-b(r)} \partial_1 A_0 && (4.26) \\ F^{10} &= g^{11} g^{00} F_{10} \\ &= -e^{-b(r)} e^{-a(r)} \partial_1 A_0 \end{aligned}$$

et les autres composantes sont nulles. Il faut d'abord resoudre les équations de Maxwell pout trouver A_0. On a:

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} + \Gamma^\mu{}_{\mu\lambda} F^{\lambda\nu} + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda} = 0 \tag{4.27}$$

où

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda}(g_{\beta\lambda,\gamma} + g_{\gamma\lambda,\beta} - g_{\beta\gamma,\lambda}) \\
\Gamma^{1}{}_{00} &= \frac{1}{2} g^{11}(g_{01,0} + g_{01,0} - g_{00,1}) \\
&= -\frac{1}{2} e^{-b(r)}(-\partial_r e^{a(r)}) \\
&= \frac{a'}{2} e^{a-b} && (4.28) \\
\Gamma^{1}{}_{10} &= \frac{1}{2} g^{11}(g_{11,0} + g_{01,1} - g_{10,1}) \\
&= \frac{1}{2} e^{-b} \partial_t (e^{b(r)}) \\
&= 0 && (4.29) \\
\Gamma^{0}{}_{00} &= \frac{1}{2} g^{00}(g_{00,0} + g_{00,0} - g_{00,0}) \\
&= 0 \\
\Gamma^{1}{}_{11} &= \frac{1}{2} g^{11}(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}) \\
&= \frac{1}{2} e^{-b}(\partial_r e^{b}) \\
&= \frac{b'}{2} && (4.30) \\
\Gamma^{0}{}_{10} &= \frac{1}{2} g^{00}(g_{10,0} + g_{00,1} - g_{10,0}) \\
&= \frac{1}{2} e^{-a}(\partial_r e^{a}) \\
&= \frac{a'}{2}. && (4.31)
\end{aligned}
$$

et alors

$$
\begin{aligned}
\nabla_0 F^{01} &= \partial_0 F^{01} + \Gamma^{0}{}_{0\lambda} F^{\lambda 1} + \Gamma^{1}{}_{0\lambda} F^{0\lambda} \\
&= \partial_0(-\partial_1 A_0) + \Gamma^{0}{}_{00} F^{01} + \Gamma^{1}{}_{01} F^{01} \\
&= 0 && (4.32) \\
\nabla_1 F^{10} &= \partial_1 F^{10} + \Gamma^{1}{}_{1\lambda} F^{\lambda 0} + \Gamma^{0}{}_{1\lambda} F^{1\lambda} \\
0 &= \partial_1(-e^{-b(r)} e^{-a(r)} \partial_1 A_0) + \Gamma^{1}{}_{11} F^{10} + \Gamma^{0}{}_{10} F^{10} \\
0 &= \partial_1(-e^{-b(r)} e^{-a(r)} \partial_1 A_0) + \frac{b'}{2}(-e^{-b(r)} e^{-a(r)} \partial_1 A_0) + \frac{a'}{2}(-e^{-b(r)} e^{-a(r)} \partial_1 A_0) && (4.33)
\end{aligned}
$$

Quelques manipulations simples conduisent au résultat recherché:

$$A_0(r) = \frac{q}{r} e^{(a(r)+b(r))/2} \tag{4.34}$$

où q est la charge éléctrique. Pour le tenseur énérgie-impulsion du champ de Maxwell on obtient:

$$\begin{aligned}
T_0{}^0 &= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{4}\delta_0^0 F^{\gamma\lambda}F_{\gamma\lambda} - F^{0\gamma}F_{0\gamma}\right] \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{4}F^{10}F_{10} - \frac{3}{4}F^{01}F_{01}\right] \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{2}\frac{q^2}{r^4}\right]. \qquad (4.35) \\
T_1{}^1 &= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{4}\delta_1^1 F^{\gamma\lambda}F_{\gamma\lambda} - F^{1\gamma}F_{1\gamma}\right] \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{3}{4}F^{10}F_{10} + \frac{1}{4}F^{01}F_{01}\right] \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{2}\frac{q^2}{r^4}\right]. \qquad (4.36) \\
T_2{}^2 &= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{4}\delta_2^2 F^{\gamma\lambda}F_{\gamma\lambda} - F^{2\gamma}F_{2\gamma}\right] \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{4}F^{10}F_{10} + \frac{1}{4}F^{01}F_{01}\right] \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{1}{2}\frac{q^2}{r^4}\right]. \qquad (4.37)
\end{aligned}$$

Maintenat on remplace dans les équations de movements.

pour $\mu = \rho = 0$, on a:

$$\begin{aligned}
S_0{}^{0\sigma}\partial_\sigma T f_{TT}(T) + [e^{-1}e^a{}_0\partial_\sigma(ee_a{}^\gamma S_\gamma{}^{0\sigma}) + T^\gamma{}_{\nu 0}S_\gamma{}^{0\nu}]f_T(T) + \frac{1}{4}\delta_0^0 f(T) &= 4\pi\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{2}\frac{q^2}{r^4}\right] \\
S_0{}^{01}T' f_{TT}(T) + [e^{-1}e^a{}_0\partial_\sigma(ee_a{}^0 S_0{}^{01}) + T^0{}_{10}S_0{}^{01}]f_T(T) + \frac{1}{4}f(T) &= \frac{1}{2}\frac{q^2}{r^4} \\
2\frac{e^{-b}}{r}\left(e^{b/2}-1\right)T' f_{TT}(T) + \left[\frac{e^{-b}}{r^2}b'r + (e^{b/2}-1)(a'r+2)\right]f_T + \frac{f}{2} &= \frac{q^2}{r^4}, \qquad (4.38)
\end{aligned}$$

$$\frac{e^{-b}}{r^2}\left[(e^{b/2}-2)a'r + 2(e^{b/2}-1)\right]f_T + \frac{f}{2} = \frac{q^2}{r^4}, \tag{4.39}$$

$$\frac{e^{-b}}{2r}\left[a'r+2(1-e^{b/2})\right]T'f_{TT}+\frac{e^{-b}}{4r^2}[(a'b'-2a"-a'^2)r^2+(2b'+4a'e^{b/2}-6a')r \tag{4.40}$$

$$-4e^b+8e^{b/2}-4]f_T+\frac{f}{2}=-\frac{q^2}{r^4},$$

4.3 Le trou noir de Reissner-Nordstrom-de Sitter (RN-dS)

Reissner est une solution stationnaire des équations de champ d'Einstein-Maxwell. Il correspond au champ gravitationnel d'un corps chargé et est à symétrie sphérique. En coordonnées sphériques (t, r, θ, φ) on a:

$$ds^2=-f(r)dt^2+\frac{1}{f(r)}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2), \tag{4.41}$$

Afin de confirmer la cohérence de la théorie, nous proposons de rechercher si la situation générale de Reissner-Nordstrom-de Sitter (ou RN-AdS) peut être récupérée à partir de la théorie téléparallèle, à savoir $f(T)=T-2\Lambda$. Pour le cas particulier de $TEGR$, où $f(r)=T(r)$, $f_T(r)=1$ et $f_{TT}(r)=0$. Pour cela, éffectuons d'abord la soustraction de (4.38) de (4.39):

$$\begin{aligned}
&2\frac{e^{-b}}{r}\left(e^{b/2}-1\right)T'f_{TT}(T)+\left[\frac{e^{-b}}{r^2}b'r+(e^{b/2}-1)(a'r+2)\right]f_T+\frac{f}{2}\\
&=\frac{e^{-b}}{r^2}\left[(e^{b/2}-2)a'r+2(e^{b/2}-1)\right]f_T+\frac{f}{2}\\
&=\frac{q^2}{r^4}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

aprés la simplification on a :

$$\frac{e^{-b}}{r}(a'+b')=0, \tag{4.43}$$

Sans perte de généralité, on peut poser $a(r)=-b(r)$. En fait, on peut écrire $a(r)=-b(r)+a_0$, mais il est simple de combiner a_0 dans la redéfinition de la coordonnée temporelle t. Par conséquent, sans perte de généralité, nous posons $a_0=0$. La signification physique de cette équation est liée au fait que si nous utilisons un système non relativiste, nous pouvons interpréter la fonction métrique a comme une forme newtonienne de l'énergie potentielle, où nous avons approximativement $g_{00} \sim 1 - 2\Phi_G/c^2$, Φ est le potentiel newtonien. Si on change $a \to a + a_0$, il n'y a pas de changement car le potentiel newtonien scalaire a des degrés de liberté normatifs. Donc, l'équation (4.40) devient:

$$e^a \left[\frac{a'^2 + a"}{2} + \frac{a'}{r} \right] - \frac{q^2}{r^4} + \Lambda = 0, \tag{4.44}$$

qui est l'unique équation indépendante. En résolvant l'équation. (4.44), on obtient aprés intégration:

$$a(r) = \ln \left(\frac{q^2}{r^2} + \frac{C_1}{r} + C_2 - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right), \tag{4.45}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes. La constante C_1 est trouvée en linéarisant la métrique et en la comparant à la limite de Newton, ce qui donne $C_1 = -2M$, tandis que la constante C_2 est obtenue en supposant la limite de Minkowski ce qui donne $C_2 = 1$. On obtient donc:

$$a(r) = -b(r) = \ln \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right), \tag{4.46}$$

où M est la masse du trou noir. Notons que Wang a obtenu la même solution, mais différente du choix des tétrades non diagonales. La différence entre l'analyse faite ici et l'analyse de Wang est que le choix fait par Wang conduit à une restriction sur la forme de la fonction $f(T)$, lorsque le scalaire de torsion dépend de la coordonnée radiale r, il est linéaire en T . On peut voir à partir de $f_{TT}T' = 0$ que la solution du trou noir est donnée. Le problème avec cette analyse est que l'équation de contrainte impose deux possibilités : $f_{TT} = 0$, conduisant à une situation linéaire ; $T' = 0$, conduisant à une torsion constante. Pour $f_{TT} = 0$, nous obtenons une version téléparallèle de la solution de Reissner-Nordstrom de RG, car

$$R = -T - 2\nabla^{\mu} T^{\nu}{}_{\mu\nu}, \tag{4.47}$$

4.4 Reconstruction pour les trous noirs dans la f(T)

Il éxiste divers éxemples de théories modifiées, à savoir, $f(R)$, $f(G)$, $f(R,T)$, où R, G et T sont le scalaire de courbure, le scalaire de Gauss-Bonnet et le scalaire de torsion, respectivement. Comme les équations du mouvement (4.38),(4.40) sontt fortement non linéaires et couplées, les méthodes habituelles de résolution ne s'appliquent pas ici. Une considération trés typique pour obtenir des solutions de la théorie $f(T)$ est de considérer le contenu de la matière comme étant directement proportionnel à la fonction algébrique $f(T)$ et sa dérivée. Cette caractéristique peut être vue directement à partir des équations (4.14). Par conséquent, on prend le premier terme entre parenthèses à gauche de (4.39), étant identiquement nul. Cela donne

$$\left(e^{b/2}-2\right)a'r+2\left(e^{b/2}-1\right)=0, \tag{4.48}$$

$$f(T)=8\pi T_1{}^1=2\frac{q^2}{r^4}. \tag{4.49}$$

Nous déterminons $b(r)$ en fonction de la dérivée de $a(r)$, en utilisant (4.48), et obtenons:

$$b(r)=2\ln\left[\frac{2(1+ra')}{(2+ra')}\right]. \tag{4.50}$$

On peut alors trouver (f_T, f_{TT}) en fonction de r et $a'(r)$, dans (4.38) et (4.40), tels qu'il satisfont ces équations. On peut se servir de l'ansatz suivant:

$$a(r)=\ln\left[1-\frac{2M}{r}+\frac{q^2}{r^2}-\frac{\Lambda}{3}r^2+a_1(r)\right]\ , \tag{4.51}$$

qui, pour $a_1(r)=0$, donne lieu à

$$\begin{aligned}
a(r)&=\ln\left[1-\frac{2M}{r}+\frac{q^2}{r^2}-\frac{\Lambda}{3}r^2\right]\\
a'(r)&=\frac{\frac{2M}{r^2}-\frac{2q^2}{r^3}-\frac{2\Lambda}{3}r}{1-\frac{2M}{r}+\frac{q^2}{r^2}-\frac{\Lambda}{3}r^2} &(4.52)\\
\exp[b(r)]&=\exp\left[2\ln\left(\frac{2(1+ra')}{(2+ra')}\right)\right]\\
&=\frac{9(q^2-r^2+\Lambda r^4)^2}{r^2(3M-3r+2\Lambda r^3)^2} &(4.53)\\
T(r)&=\frac{2(3q^2-3Mr+\Lambda r^4)^2}{3r^2(q^2-r^2+\Lambda r^4)[-3q^2+r(6M-3r+\Lambda r^3)]}. &(4.54)
\end{aligned}$$

On peut ajouter le terme $a_1(r)=a_0 r$ qui est interprété comme l'accélération de Rindler pour les grandes échelles , menant à

$$\begin{aligned}
a(r)&=\ln\left[1-\frac{2M}{r}+\frac{q^2}{r^2}-\frac{\Lambda}{3}r^2+a_0(r)\right]\\
\exp[b(r)]&=\frac{36[q^2+r^2(-1-2a_0r+\Lambda r^2)]^2}{r^2[6M+r(-6-9a_0r+4\Lambda r^2)]^2} &(4.55)\\
T(r)&=-\frac{[6q^2-6Mr+r^3(-3a_0+2\Lambda r)]^2}{6r^2[q^2+r^2(-1-2a_0r+\Lambda r^2)][-3q^2+r(6M-3r-3a_0r^2+\Lambda r^3)]} &(4.56)
\end{aligned}$$

ici, on voit qu'en fixant $a_0=0$ dans (4.55)(4.56 on trouve (4.53)et (4.54), ce qui signifie que la dernière solution est unee généralisation. Mais ils ont des caractéristiques complètement différentes, principalement sur la forme fonctionnelle de chaque modèle $f(T)$.

Chapter 5

Conclusion

Dans ce mémoire nous sommes intéréssée à l'une des formulations les plus prometteuse de la gravitation. Jusqu'a aujourd'hui la force gravitationnelle en particilier et en général la nature et la dynamique de l'espace-temsp en général sont très bien étudiés dans le cadre de la théorie de la relativité générale d'Einstein. Cette Théorie a passé avec succés et précision tous les tests astrophysiques, en particulier à l'échelle du système solaire. Mais recemment avec l'avenement de la cosmologie moderne de précision, certains failles ont commencé à apparaitre dans l'édifice plutôt très solide de la relativité générale. C'est ainsi que plusieurs modifications et généralisations de cette théories ont commencé à remplir la littérature scientifique. Cette thèse est dédiée à la gravité téléparallèle équivalente de la relativité générale (TEGR). Nous avons passé en revue les fondements théorique de cette théorie et sa relation avec la relativité générale. En particulier, nous nous sommes intéréssé à la solution des équations de mouvemsnt en présence du champ électromagnétique de Maxwell. Nous avons ainsi obtenu la solution de Reissner-Nordstrom et discuté ses propriétés dans la TEGR et sa modification. Nous avons aussi montré pourquoi la forme commune de Schwarzschild dans la formalise des tétrades ne peut pas être utilisée pour une gravité modifiée $f(T)$ sans $f_{TT} = 0$.

Bibliography

[1] Mathieu R.Beau ,theorie des champs des contraintes et des déformations en relativité générale et expansion cosmologique :arxiv:1209.0611v2[gr-qc] 26 sep 2014

[2] Gerad Clement .relativité générale: solutions exactes stationnaires: arxiv : 1109.0902v1 [gr-qc] 5 sep 2011

[3] S.Perlmutter et al."Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae." The Astrophysical Journal 517.2 (1999), 565. [astro-ph/9812133].

[4] A. G Riess et al. "Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant." The Astronomical Journal 116.3 (1998): 1009. [astroph/9805201].

[5] S .Weinberg. "Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity." (1972).

[6] C. G. B¨ohmer ,A. Mussa† and N. Tamanini‡ Existence of relativistic stars in f(T) gravity :arxiv1107.4455v2 [gr-qc] 18 Aug 2011

[7] D .Pützfeld. "Introduction to general relativity and cosmology." Iowa State University(2004)

[8] W. Israel, Phys. Rev. 164, 1776 (1967) .

[9] J. E. Chase, Commun. Math. Phys. 19, 276 (1970).

[10] G.W.Horndeski, Int. J. Theor. Phys. 10, 363 (1974).

[11] C. Deffayet, G. Esposito-Farese and A. Vikman,Phys. Rev. D79,084003(2009) [arXiv:0901.1314[hep-th]].

[12] E. Berti,V. Cardoso and C. M. Will, Phys. Rev. D 73, 064030 (2006) [gr-qe/0512160] ;P. Pani, V. Cardoso and L. Gaultiere, Phys. Rev. D 83, 104048 (2011) [arXiv:1104.1183[gr-qs]]

[13] C. Deffayet, G. Esposito-Farese and A. Vikman,Phys. Rev. D 79,084003(2009) [arXiv:0901.1314[hep-th]].

[14] M. E. Rodrigues(a,b)[1], M. J. S. Houndjo(c,d)[2], J. Tossa (c)[3], D. Momeni(e)[4] and R. Myrzakulov Charged Black Holes in Generalized Teleparallel Gravity arXiv:1306.2280v4 [gr-qc] 29 Oct 2013

[15] Black-Hole Solutions to Einstein's Equations in the Presence of Matter and Modi cations of Gravitation in Extra dimesions par Blaise Gout eraux Soutenue le Lundi 27 septembre 2010 devant la Commission d'examensions arXiv:1011.4941v1 [hep-th] 22 Nov 2010

[16] Dr. Christian G. Bohmer A thesis submitted in conformity with the requirements for the degree of PhD in Applied Mathematics Modi ed Teleparallel theories of gravity Department of Mathematics Faculty of Mathematical & Physical Sciences University College London September 06, 2018

[17] Jurgen Mifsud , Eleonora Di Valentino,Teleparallel Gravity: From Theory to Cosmology arXiv:2106.13793v1 [gr-qc] 25 Jun 2021

[18] Manuel Hohmann,a, Christian Pfeifer. Teleparallel axions and cosmology Laboratory of Theoretical Physics, Institute of Physics, University of Tartu, W. Ostwaldi 1, 50411 Tartu, Estonia Center of Applied Space Technology and Microgravity-ZARM, University of Bremen, Am Fallturm 2, 28359 Bremen, Germany

[19] José C. N. de Araujoa, Hemily G. M. Fortes. Solving Tolman-Oppenheimer-Volkoff equations in f (T) gravity: a novel

[20] approach applied to polytropic equations of state. arXiv:2105.09118v1 [gr-qc] 19 May 2021

[21] Ednaldo L. B. Juniora,e Manuel E. Rodriguesa,b Mahouton J. S.Houndjo Regular black holes in f(T) Gravity

[22] through a nonlinear electrodynamics source.arXiv:1503.07857v2 [gr-qc] 30 Oct 2015