REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MSBY - JIJEL
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Physique

N° d'ordre :
Série :

Mémoire

présenté pour obtenir le diplome de

Master en physique

Option : Physique Théorique

par

Bouzeraib Leyla

Thème
Théorie des champs avec contraintes

Soutenu le : 15/07/2021

Devant le Jury :

Président :	T. Boudjedaa	Prof.	Univ. Jijel
Rapporteur :	N. Ferkous	MCA	Univ. Jijel
Examinateur :	A. Bounames	Prof.	Univ. Jijel

Table des matières

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier Allah qui m'a donnée la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier particulièrement Monsieur ***Nourredine Ferkous****, Maître de conférences à l'université de Jijel, pour ces précieux conseils et sa disponibilité. Merci Monsieur pour la confiance que vous m'avez accordée au cours de ce travail. Je tiens aussi à exprimer ma gratitude à Monsieur le Professeur* ***T. Boudjedaa*** *qui m'a fait l'honneur d'avoir accepter de présider le jury. Mes remerciements sont également adressés* ***A. Bounames*** *pour avoir accepter d'examiner ce travail. Mes remerciements vont aussi à tous mes enseignants tout le long de ma formation.*

J'adresse mes plus sinsères remerciements à ***Lamri Houria,*** *la secritère du laboratoire de physique théorique, pour les services et l'encouragement.*

Enfin, j'adresse mes meilleurs remerciements à ma chère ***mère*** *qui m'a soutenue tout au long de ma formation, et à mon cher frère* ***Yassine*** *qui m' a été un guide dont l'aide et le soutien permanents sont inestimables, sans oublier mes sincères remerciements à mes proches et mes amies.*

Leyla

Chapitre 1

Introduction générale

L'approche habituelle pour trouver l'hamiltonien d'un système dynamique consiste à commencer par le lagrangien, effectuer une transformation de Legendre et supposer la validité des crochets de Poisson. Dans de nombreux cas, cela est suffisant. Cependant, lorsque le lagrangien est singulier, cette approche ne donne pas les bonnes équations de mouvement. Un système décrit par ce genre de lagrangien contient des contraintes inhérentes. Du point de vue classique, les moments conjugués définis à partir d'un lagrangien ne sont pas tous inversibles par rapport aux vitesses. Bien que la transformation de Legendre correspondante nous permet de déduire l'hamiltonien, les équations canoniques de mouvement doivent être modifiées de telle sorte qu'elles contiennent les contraintes en question.

Traditionnellement, la construction d'hamiltoniens à partir de lagrangiens singuliers est possible en utilisant la méthode de Dirac [1] développée ensuite par Bergmann [2]. La technique de Dirac est un mécanisme pour résoudre le problème via la réduction de l'espace des phases. Bien que le mécanisme fonctionne, il nécessite un effort important comme le classement de toutes les contraintes en contraintes primaires ou secondaires, ainsi que dans la première ou la seconde classe et d'introduire des concepts tels que l'égalité faible, l'égalité forte, etc. Par conséquent, d'autres approches plus " économiques " ont été développées et la plus connue d'entre elles est celle de Faddeev et Jackiw [3]. Cette technique est basée sur des lagrangiens linéaires et s'appuie essentiellement sur le théorème de Darboux. C'est une méthode plus simple comparée à l'approche de Dirac, mais bien sûr, il a été démontré que les deux méthodes permettent d'obtenir les mêmes résultats dans les cas physiques les plus importants [4]. Une autre différence majeure entre l'approche de Dirac et la technique de Faddeev-Jackiw est que celle de Dirac nécessite immédiatement une réduction de l'espace de phase, tandis que Faddeev-Jackiw agrandit l'espace de configuration.

Barcelos et Wotzasek [5] ont réussi à reformuler l'approche de Faddeev-Jackiw d'une manière assez simple pour éviter le défi de devoir trouver la transformation de Darboux.

Le but ultime de ce mémoire est de clarifier la transition des systèmes avec contraintes vers la théorie des champs. Cet objectif sera atteint en considérant la méthode de Dirac et celle de Fadeev-Jackiw. Mais avant d'arriver là, on est besoin de rappeler les notions essentielles des deux méthodes pour un système à une particule. Pour l'approche de Dirac, nous identifions toutes les contraintes émergentes au moyen d'un algorithme dit algorithme de Dirac-Bergmann. Leur classification en primaire et secondaire se réfère à l'origine de ces contraintes alors que la classification en première et deuxième classe se réfère à leurs propriétés. Nous exposons également la méthode Fadeev-Jackiw qui présente des caractéristiques distinctes par rapport à celle de Dirac. Il n'est pas nécessaire pour la méthode Faddeev-Jackiw de classer toutes les contraintes en contraintes primaires ou secondaires, ainsi que dans la première ou la seconde classe, il n'est pas non plus nécessaire d'introduire des concepts tels que l'égalité faible, l'égalité forte, etc. comme dans la méthode de Dirac.

Les crochets de poisson généralisés des variables dynamiques contenus dans la matrice symplectique inverse de Faddeev-Jackiw sont identiques aux crochets de Dirac. Ces crochets ainsi obtenus sont des outils principaux à une théorie quantique.

Pour passer à la théorie des champs c'est-à-dire aux degrés de liberté infinis on espère que notre formalisme sera toujours applicable en plus de quelques règles. Ainsi, l'algorithme de Dirac-Bergmann ne change pas lors du passage à la théorie des champs, de sorte que les formules résultantes sont assez similaires. On doit donc changer les variables d'espace des phases et les multiplicateurs de Dirac par des champs. Une fonction des variables de l'espace des phases, y compris les contraintes, devient une fonctionnelle des champs et de leurs moments conjugués. Comme application des ces règles de passage, on va considérer le champ de Maxwell libre par deux approches.

Outre la présente introduction, ce mémoire est organisé comme suit : le deuxième chapitre sera notamment un rappel de la notion du lagrangien singulier avec quelques outils de la mécanique analytique. Le troisième chapitre sera consacré à l'étude des systèmes avec contraintes par la méthode de Dirac. Cette approche sera appliquée sur une particule relativiste. Au quatrième chapitre, on expose la méthode de Faddeev et Jackiw où nous montrons sa simplicité et son efficacité. Au cinquième chapitre, nous passons à la théorie des champs où on expose l'extension des notions vues dans les chapitres précédents aux cas d'un système de degrés de liberté infinis. Après avoir donner quelques règles de passage, on va traiter l'exemple du champ de Maxwell libre. Nous terminons ce mémoire par une conclusion.

Chapitre 2

Lagrangien singulier

2.1 Introduction

Pour obtenir les équations du mouvement à partir d'un lagrangien, on doit calculer les équations d'Euler-Lagrange et obtenir toutes les accélérations en fonction des positions et des vitesses. Cela est possible si et seulement si ce lagrangien est non singulier [1, 7, 8, 9, 10, 11]. Cependant, si on arrive pas à exprimer toutes les accélérations comme fonctions des positions et des vitesses on dit que ce lagrangien est singulier (non standard). Dans ce cas, des contraintes sont générées et soumises sur les données initiales. Ces contraintes sont supposées généralement indépendantes du temps.

L'objectif de ce chapitre et de donner une introduction aux lagrangiens singuliers à travers des exemples simples et illustratifs, mais avant d'arriver là, il est très utile de rappeler les concepts et les méthodes de la mécanique analytique nécessaires.

Formalisme lagrangien

Soit un système avec un nombre fini de degré de liberté, décrit par le lagrangien $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ où q_i et $\dot{q}_i$ $(i = 1, ..., n)$ représentent les coordonnées et les vitesses généraliseés. On définit l'action S par l'expression

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt, \tag{2.1}$$

Les équations de mouvement sont obtenues par le principe de moindre action qui stipule que l'action S doit être stationnaire $(\delta S = 0)$ entre les deux instants t_1 et t_2 vérifiant les conditions aux $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. En effet, la variation de l'action s'écrit alors

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right) dt\end{aligned}$$

mais

$$\delta \dot{q}_i = \delta \frac{dq_i}{dt} = \frac{d}{dt}\delta q_i$$

intégrons par partie, on obtient

$$\delta S = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt$$

tenons compte des conditions aux bords, on arrive à

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt$$

cette variation doit être nulle quelque soit δq_i ceci n'est possible que si

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, ..., n \tag{2.2}$$

Ces équations, appelées équations d'Euler-Lagrange (EL), peuvent être écrites en fonction de p_i comme

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \tag{2.3}$$

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{2.4}$$

où les p_i sont appelées moments conjugués. Il est clair, que l'équation (2.3) définit p_i alors que (2.4) est la véritable équation du mouvement au sens de Newton et de Lagrange.

2.2 Formalisme hamiltonien

Dans l'approche hamiltonienne, un système physique à n degré de liberté est décrit en remplaçant les n vitesses généralisées $\dot{q}_i$ par les p_i définis par (2.3). Ainsi, le mouvement de ce système est complètement déterminé dans un espace à $2n$ dimensions appelé espace des phases correspondant aux paires (q_i, p_i), $i = 1, ..., n$. Pour déterminer les équations de mouvement dans cet espace, il faut définir une nouvelle fonction $H(q_i, p_i, t)$ appelée hamiltonien. En effet, cette fonction est déterminée par la transformation de Legendre comme suit

$$H(q_i, p_i, t) = p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) \tag{2.5}$$

L'action (2.1) donne

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} L dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t))\, dt, \end{aligned} \tag{2.6}$$

le principe de moindre action stipule que ($\delta S = 0$) entre les deux instants t_1 et t_2 :

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \delta (p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t))\, dt \quad = \int_{t_1}^{t_2} (\delta p_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i - \delta H(q_i, p_i, t))\, dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta p_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta p_i \dot{q}_i + \frac{d}{dt} (p_i \delta q_i) - \dot{p}_i \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt \end{aligned}$$

qu'on peut l'écrire

$$\delta S = (p_i \delta q_i)|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right) dt$$

comme $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ le premier terme est nul. De plus, les variations δp_i et δq_i sont indépendantes. Donc pour avoir $\delta S = 0$ il faut qu'on a

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad i = 1, ..., n \tag{2.7}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, ..., n \tag{2.8}$$

qui sont les équations d'Hamilton. Ces équations sont en principe équivalentes aux équations d'Euler-Lagrange (2.2).

On définit d'une manière générale le crochet de Poisson de deux fonctions $f(q_i, p_i, t)$ et g (q_i, p_i, t) comme suit

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \tag{2.9}$$

Les crochets de Poisson vérifient les propriétés

$$\begin{aligned}
\{f,g\} &= -\{g,f\} && \text{(Antisymétrie)}\\
\{f+h,g\} &= \{f,g\}+\{f,h\} && \text{(Linéarité)}\\
\{fh,g\} &= f\{h,g\}+\{f,g\}h && \text{(Identité de Leibniz)}\\
\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\} &= 0 && \text{(Identité de Jacobi)}
\end{aligned}$$

En particulier, les équations d'Hamilton peuvent s'écrire de la façon suivante

$$\dot{q}_i = \{q_i,H\}, \quad i=1,...,n \tag{2.10}$$

$$\dot{p}_i = \{p_i,H\}, \quad i=1,...,n \tag{2.11}$$

2.3 Lagrangien singulier

On considère, pour simplifier, un système avec un nombre fini de degrés de liberté, dont la dynamique est régie par un lagrangien qui ne dépend pas explicitement du temps $L(q_i,\dot{q}_i)$ avec $i=1,...,n$. Le moment conjugué p_i , définit par (2.3), dépend de q et de $\dot{q}$, ainsi on peut écrire la différentielle

$$dp_i = \sum_j \frac{\partial p_i}{\partial q_j}dq_j + \sum_j \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j}d\dot{q}_j \tag{2.12}$$

et par suite

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial p_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j \tag{2.13}$$

On remplace la relation (2.3) dans (2.13) on obtient

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial \dot{q}_j}\dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i}\ddot{q}_j \tag{2.14}$$

on utilise maintenant l'équation (2.4) on a l'égalité

$$\sum_j \frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial \dot{q}_j}\dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i}\ddot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

ou bien

$$\sum_j W_{ij}(q,\dot{q})\,\ddot{q}_j = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_j \frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial \dot{q}_j}\dot{q}_j \tag{2.15}$$

où W est *la matrice hessienne* définie par

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \tag{2.16}$$

Si $\det W \neq 0$ alors la matrice W est inversible c-à-d on peut exprimer toutes les $\ddot{q}_i$ comme fonctions de $\dot{q}_i$ et q_i. Ceci signifie qu'une solution unique des équations de E-L existe et on a un lagrangien non singulier. Par contre, si $\det W = 0$ alors la matrice W n'est pas inversible et le lagrangien est dit *singulier.*

Comme on le sait, pour passer de la formulation lagrangienne à la formulation hamiltonienne, il faut que toutes les vitesses $\dot{q}_i$ doivent être exprimées en fonction de q_i et p_i comme

$$\dot{q}_i = f\left(q_i, p_i\right) \tag{2.17}$$

et l'hamiltonien (2.5) devrait être construit au moyen de l'équation

$$H = \sum_i p_i f\left(q_i, p_i\right) - L\left(q_i, f\left(q_i, p_i\right)\right) \tag{2.18}$$

Il est claire que la procédure d'avoir l'hamiltonien (2.18) est basée, en particulier, sur la possibilité de résoudre $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ par rapport à $\dot{q}_i$. Cela nécessite que la matrice jacobienne $\partial p_i / \partial \dot{q}_j$ est inversible. Ceci nous conduit à

$$\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} = W_{ij} \tag{2.19}$$

Ainsi, dans le cas d'un lagrangien singulier, il est impossible de passer à la formulation hamiltonienne de manière standard. Nous allons illustrer ce point par l'exemple suivant

Exemple :

Soit le lagrangien à deux degrés de liberté

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{x} - y\right)^2 \tag{2.20}$$

La matrice hessienne W correspondante est

$$W = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x} \partial \dot{y}} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y} \partial \dot{x}} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y} \partial \dot{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

ce lagrangier est singulier puisque $\det W = 0$. Les relations suivantes

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - y \quad \text{et} \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0 \tag{2.22}$$

qui définissent les moments sont insolubles par rapport à $\dot{y}$.

2.4 Forme générale du crochet de Poisson

Avant de passer au chapitre suivant, il est intéréssant de donner la forme générale du crochet de Poisson

$$\{f,g\}_{GPB} = \sum_{ij} J_{ij} \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial g}{\partial \xi_j}, \qquad i,\ j = 1,2,.....,2n \tag{2.23}$$

où $J_{ij} = \left\{\xi_i, \xi_j\right\}$ est un élément de matrice antisymétrique appelée *matrice de structure* et GPB indique crochet de Poisson généralisé. Ainsi, l'équation de mouvement s'écrit

$$\dot{f} = \{f,H\}_{GPB}$$

Pour notre espace des phases, les variables dynamiques sont

$$\left(\xi_1,\ \xi_2, ..., \xi_n,\ \xi_{n+1}, ..., \xi_{2n}\right) = \left(q_1,\ q_2, ...,\ q_n,\ p_1, ..., p_n\right).$$

Pour la variable dynamique ξ_i on a

$$\{\xi_i, f\}_{GPB} = \sum_j J_{ij} \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \tag{2.24}$$

Chapitre 3

Système avec contraintes : Méthode de Dirac

3.1 Introduction

Dirac a été le premier qui a réussi à traiter les systèmes singuliers d'une manière standard et cohérente [1]. Dans le formalisme de Dirac, les contraintes inhérentes seraient générées et sont appelées contraintes primaires. Grâce aux conditions de consistances, ces contraintes primaires peut générer de nouvelles contraintes, appelées contraintes secondaires. Cette façon itérative de calculer les différentes contraintes dans le formalisme de Dirac est appelée algorithme de Dirac-Bergmann. Les crochets de Poisson doivent être remplacés par d'autres crochets, appelés crochets de Dirac qui sont plus adéquats en présence de contraintes et qui permettent de passer ensuite à la quantification canonique du système.

Ce qui a conduit Dirac à proposer que les homologues quantiques $\hat{f}$, $\hat{g}$ aux classiques f, g satisfont :

$$\left[\hat{f}, \hat{g}\right] = i\hbar\widehat{\{f, g\}}_D$$

Ainsi, l'objectif de ce chapitre est d'exposer cet algorithme étape par étape. Puis, on va appliquer le formalisme de Dirac sur une particule relativiste libre comme un premier exemple qui présente une invariance de jauge.

3.2 Formalisme hamiltonien et égalité faible

Pour un lagrangien singulier, on ne pourra pas exprimer toutes les vitesses (les $\dot{q}_i$) en fonction des coordonnées et des moments conjugués en utilisant les relations $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$, $i = 1, ..., n$. Ainsi, si $M = \dim(W) - rang\,(W)$ on fait apparaitre M relations notées comme

$$\phi_m\,(q,p) = 0,\ m = 1,..,M \tag{3.1}$$

qui dépendent uniquement des q et des p sans faire intervenir les vitesses. Ces relations sont appelées *contraintes primaires* selon la terminologie de Dirac. En présence des contraintes primaires $\phi_m\,(q,p) = 0,\ m = 1,..,M$, on procède par analogie au formalisme lagrangien avec contraintes en remplaçant l'hamiltonien canonique $H_c = p_i\dot{q}_i - L$ par l'hamiltonien total H_T comme suit

$$H_T\,(p,q) = H_c\,(p,q) + \lambda_m\phi_m\,(p,q)\,, \tag{3.2}$$

où les quantités λ_m seront appelées les multiplicateurs de Dirac.

Par suite, le lagrangien L devient

$$L \to \tilde{L} = p_i\dot{q}_i - H_T\,(p,q) \tag{3.3}$$

Ainsi, pour déterminer les équations de mouvement relatives à $\tilde{L}$, on utilise le principe de moindre action comme on a déjà fait, donc on a

$$\begin{aligned}
\delta S &= \delta\int_{t_i}^{t_f}\tilde{L}dt = \delta\int_{t_i}^{t_f}(p_i\dot{q}_i - H_T)\,dt \\
&= \int_{t_i}^{t_f}\delta\left[(p_i\dot{q}_i - H_c) - \lambda_m\phi_m\right]dt \\
&= \int_{t_i}^{t_f}\left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H_c}{\partial q_i}\right)\delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H_c}{\partial q_i}\right)\delta q_i - \delta\lambda_m\phi_m - \lambda_m\frac{\partial\phi_m}{\partial q_i}\delta q_i - \lambda_m\frac{\partial\phi_m}{\partial p_i}\delta p_i\right]dt
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f}\left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H_c}{\partial q_i} - \lambda_m\frac{\partial\phi_m}{\partial p_i}\right)\delta p_i + \left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H_c}{\partial q_i} - \lambda_m\frac{\partial\phi_m}{\partial q_i}\right)\delta q_i - \delta\lambda_m\phi_m\right]dt \tag{3.4}$$

pour un $\delta S \to 0\ \forall\ \delta p_i$, δq_i et $\delta\lambda_m$ il est nécéssaire donc de poser

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_c}{\partial q_i} + \lambda_m\frac{\partial\phi_m}{\partial p_i},\quad i = 1,..,n \tag{3.5}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_c}{\partial q_i} - \lambda_m\frac{\partial\phi_m}{\partial q_i},\quad i = 1,..,n \tag{3.6}$$

$$\phi_m = 0,\qquad m = 1,..,M \tag{3.7}$$

on obtient les équations de Hamilton qui tiennent compte des contraintes primaires ϕ_m.

Si on considère maintenant une fonction $F(p,q)$ dans l'espace de phase. On peut écrire son évolution comme

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i \tag{3.8}$$

au moyen des équations (3.5), (3.6) et (3.7) on a

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H_c}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H_c}{\partial q_i} + \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial \phi_m}{\partial q_i}\right)\lambda_m \quad ; \quad \phi_m = 0.$$

et en terme de crochets de Poisson $\dot{F}$ prend la forme

$$\dot{F} = \{F, H_c\} + \lambda_m \{F, \phi_m\} \quad ; \quad \phi_m = 0. \tag{3.9}$$

Selon Dirac, il est nécéssaire de calculer tous les crochets de poisson avant d'utiliser les contraintes $\phi_m = 0$. Il est donc commode de réecrire l'équation précédente sous la forme

$$\dot{F} = \left(\{F, H_c\} + \lambda_m \{F, \phi_m\}\right)\Big|_{\phi_m=0} \tag{3.10}$$

Calculons le crochet de poisson

$$\begin{aligned} \{F, H_T\} &= \{F, H_c + \lambda_m \phi_m\} \\ &= \{F, H_c\} + \lambda_m \{F, \phi_m\} + \{F, \lambda_m\}\phi_m \end{aligned}$$

quelque soit la valeur du crochet $\{F, \lambda_m\}$ le trosième terme $\{F, \lambda_m\}\phi_m$ va s'annuler puisque $\phi_m = 0$. Ainsi, on tire l'égalité

$$\{F, H_T\}\big|_{\phi_m=0} = \{F, H_c\} + \lambda_m \{F, \phi_m\}\big|_{\phi_m=0} \tag{3.11}$$

Comparons (3.10) et (3.11) on déduit la relation

$$\dot{F} = \{F, H_T\}\big|_{\phi_m=0} \tag{3.12}$$

Pour tenir compte des contraintes, Dirac a introduit la notion d'égalité faible (" $\approx$ ") de manière d'être valable seulement sur la surface des contraintes, c'est-à-dire valable sur le sous-espace défini par $\phi_m = 0$, alors que l'égalité forte ("$=$") est valable dans tout l'espace des phases. Ainsi, les équations d'évolutions s'écrivent

$$\dot{F} \approx \{F, H_T\} \approx \{F, H_c\} + \lambda_m \{F, \phi_m\}, \tag{3.13}$$

Ainsi, les équations d'évolution des variables canoniques seront

$$\dot{q}_i \approx \{q_i, H_T\}, \quad \dot{p}_i \approx \{p_i, H_T\}. \tag{3.14}$$

Exemple : Soit le lagrangien

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + x\dot{y} + f(x, y).$$

D'abord calculons les équations d'E-L :

$$\dot{y} + \tfrac{\partial f}{\partial x} - \ddot{x} = 0, \qquad \tfrac{\partial f}{\partial y} - \dot{x} = 0, \tag{3.15}$$

et les moments conjugués

$$p_x = \tfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x}, \quad p_y = \tfrac{\partial L}{\partial \dot{y}} = x$$

on a une contrainte primaire $\phi_1 = p_y - x = 0$. Formons l'hamiltonien canonique

$$H_c = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - L = \tfrac{1}{2}p_x^2 - f(x, y)$$

Si on tente de calculer les équations de Hamilton à partir de H_c on va obtenir des équations qui ne sont pas équivalentes aux équations d'E-L. En effet, on obtient les équations

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{x} = p_x \\ \dot{p}_x = \frac{\partial f}{\partial x}. \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{c} \dot{y} = 0 \\ \dot{p}_y = \frac{\partial f}{\partial y}. \end{array} \right. \tag{3.16}$$

Il faut donc "hamiltoniser" H_c , c-à-d ; trouver H_T pour lequel les équations de Hamilton correspondantes soient équivalentes aux équations d'E-L. Ecrivons H_T comme

$$H_T = H_c + \lambda_1\phi_1 = \frac{1}{2}p_x^2 - f(x, y) + \lambda_1 (p_y - x)$$

Ainsi, les équations de Hamilton sont

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{x} = p_x \\ \dot{p}_x = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{c} \dot{y} = \lambda_1 \\ \dot{p}_y = \frac{\partial f}{\partial y} \end{array} \right. , \text{ et } \; p_y - x = 0 \tag{3.17}$$

3.3 Contraintes secondaires et Algorithme de Dirac-Bergmann

Les contraintes primaires doivent être conservées au cours du temps lors d'une évoultion, on écrit

$$\tfrac{d\phi_{m'}}{dt} = \dot{\phi}_{m'} \approx 0, \quad m' = 1, ...M \tag{3.18}$$

mais d'aprés (3.13) on aura

$$\dot{\phi}_{m'} = \{\phi_{m'}, H_T\} \approx 0 \Leftrightarrow \{\phi_{m'}, H_c\} + \lambda_m \{\phi_{m'}, \phi_m\} \approx 0, \qquad m', m = 1, ...M. \tag{3.19}$$

qu'on appelle *conditions de consistances (les CC).* Le système (3.19) est un système d'équations algébriques non homogènes, qui va nous aider à déterminer (si possible) les multiplicateurs de Dirac λ_m. En réalité, l'étude de ce système va nous amener à une des quatre situations suivantes :

1) Les CC donnent au moins une équation érronée comme par exemple $1 = 0$. Dans ce cas, il y a certainement une anomalie donc inutile d'aller plus loin avant de modifier le lagrangien lui même.

2) Les CC déterminent toutes les multiplicateurs de Dirac λ_m avec $m = 1, ...M$. Dans ce cas, l'itération s'arrête.

3) Les CC permettront de déterminer seulement quelques paramètres λ_m (pas tous), en plus de quelques équations qui sont identiquement vraies telles que $0 \approx 0$, là aussi l'itération s'arrête.

4) Les CC peuvent donner des nouvelles relations entre les p et les q sans faire intervenir les multiplicateurs λ_m qu'on note par $\varphi_k(q, p) \approx 0$, $k = 1, ..., K$. Ces relations sont les *contraintes secondaires* et elles sont indépendantes des contraintes primaires ϕ_m.

Les contraintes secondaires $\varphi_k(q, p) \approx 0$ doivent aussi être preservées dans le temps c-à-d $\dot{\varphi}_k(q, p) \approx 0$ et on obtient là aussi les conditions de consistances

$$\dot{\varphi}_k \approx 0 \Leftrightarrow \{\varphi_k, H_c\} + \lambda_m \{\varphi_k, \phi_m\} \approx 0, \quad k = 1, ...K. \tag{3.20}$$

L'analyse va nous conduire à nouveau vers l'une des quatre situations précédentes. Nous répétons cette itération, en exigeant que la dérivée des contraintes secondaires doit s'annuler et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les contraintes avec un certain nombre de multiplicateurs λ_m soient déterminées. Ce processus est connu comme *l'algorithme de Dirac-Bergmann.*

3.4 Classification des contraintes

Soit $\{\phi_j \approx 0\}$ avec $j = 1, ..., J = M + K$, l'ensemble des contraintes (secondaire et primaires) tels que : M est le nombre des contraintes primaires et K celui des contraintes secondaires. Selon Dirac on dit que la fonction $F(q, p)$ est de *première classe* si son crochet de Poisson avec chacune des contraintes (primaires, secondaires) $\phi_j \approx 0$, $j = 1, ..., J$ est nul sur la surface des contraintes c-à-d $\{F, \phi_j\} \approx 0$.On dit que la fonction $F(q, p)$ est de *deuxième classe*, si $\{F, \phi_j\} \not\approx 0$ (au moins pour un seul j).

3.5 Crochet de Dirac

On va supposer que toutes les contraintes de notre système (primaires et secondaires) sont de deuxième classe. On note ϕ_m, $m = 1, ..., M$ les contraintes primaires et ϕ_s , $s = 1, ..., K$ les contraintes secondiares. Ecrivons les CC

$$\{\phi_k, H_c\} + \lambda_m \{\phi_k, \phi_m\} \approx 0, \quad m = 1, ..., M \quad \text{et} \quad k = 1, ..., J$$

avec

$$H_T = H_c + \lambda_m \phi_m, \quad m = 1, ..., M$$

Réécrivons les CC sous forme matricielle de la façon suivante

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \{\phi_1, \phi_1\} & .... & \{\phi_1, \phi_M\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\phi_J, \phi_1\} & .... & \{\phi_J, \phi_M\} \end{pmatrix}}_{=\Omega} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_M \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{\lambda}} \approx \underbrace{\begin{pmatrix} -\{\phi_1, H_c\} \\ \vdots \\ -\{\phi_J, H_c\} \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{\eta}} \tag{3.21}$$

ou bien $\Omega\lambda \approx \eta$ avec Ω est une matrice de J lignes et M colonnes. Formons maintenant la matrice carrée Δ définit par

$$\Delta_{\alpha,\alpha'} = \{\phi_\alpha, \phi_{\alpha'}\} \quad , \quad \alpha, \alpha' = 1, ..., J \tag{3.22}$$

Cette matrice est antisymétrique et contient la matrice Ω comme bloc ; explicitement

$$\Delta = \begin{pmatrix} \{\phi_1, \phi_1\} & .... & \{\phi_1, \phi_M\} & \{\phi_1, \phi_{M+1}\} & .... & \{\phi_1, \phi_J\} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\phi_J, \phi_1\} & .... & \{\phi_J, \phi_M\} & \{\phi_J, \phi_{M+1}\} & .... & \{\phi_J, \phi_J\} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 0 & .... & \{\phi_1, \phi_M\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\phi_J, \phi_1\} & .... & \{\phi_J, \phi_M\} \end{matrix}}_{=\Omega} & \underbrace{\begin{matrix} \{\phi_1, \phi_{M+1}\} & .... & \{\phi_1, \phi_J\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\phi_J, \phi_{M+1}\} & .... & 0 \end{matrix}}_{=\omega} \end{pmatrix}$$

où ω est une matrice avec J lignes et $J - M$ colonnes. Dirac a montré que det $(\Delta) \neq 0$ (pour la démonstration P. A. M. Dirac : "Lectures on Quantum Mechanics", 1964) [1], en plus la matrice Δ doit être de dimension paire car le déterminant d'une matrice antisymétrique impaire est nul. Considérons maintenant le vecteur colonne θ à J composante

$$\theta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & .... & \lambda_M & \underbrace{0 \quad .... \quad 0}_{J-M} \end{pmatrix}^t \tag{3.23}$$

ou autrement écrit

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

Calculons le produit $\Delta\theta$ par bloc comme suit

$$\Delta\boldsymbol{\theta} = (\Omega\omega) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \Omega\boldsymbol{\lambda} \tag{3.25}$$

puis comparons avec la relation $\Omega\lambda \approx \eta$, on aura

$$\Delta\boldsymbol{\theta} \approx \boldsymbol{\eta} \tag{3.26}$$

comme Δ est inversible on obtient ainsi

$$\boldsymbol{\theta} \approx \Delta^{-1}\boldsymbol{\eta}$$

ou bien

$$\boldsymbol{\theta}_\alpha \approx \Delta^{-1}_{\alpha,\alpha'}\eta_{\alpha'} \quad , \quad \alpha, \alpha' = 1, ..., J$$

mais comme $\theta = (\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{0})^t$ on déduit que

$$\theta_m = \lambda_m \approx \Delta^{-1}_{m,\alpha'}\eta_{\alpha'} \quad , \quad m = 1, ..., M \quad \text{et } \alpha' = 1, ..., J \tag{3.27}$$

$$\text{et } \theta_\alpha = 0 \approx \Delta^{-1}_{\alpha,\alpha'}\eta_{\alpha'} \quad , \quad \alpha = M+1, ..., J \text{ et } \alpha' = 1, ..., J \tag{3.28}$$

Comme les éléments de matrice Δ sont les crochets $\Delta_{\alpha,\alpha'} = \{\phi_\alpha, \phi_{\alpha'}\}$, $\alpha, \alpha' = 1, ..., J$, les éléments de la matrice inverse Δ^{-1} seront notés par $\Delta^{-1}_{\alpha,\alpha'} = \{\phi_\alpha, \phi_{\alpha'}\}^{-1}$, $\alpha, \alpha' = 1, ..., J$. Au moyen des équations (3.27) et (3.21), on écrit

$$\lambda_m \approx -\{\phi_m, \phi_{\alpha'}\}^{-1}\{\phi_{\alpha'}, H_c\} \; , \; m = 1, ..., M \quad \text{et } \alpha' = 1, ..., J \tag{3.29}$$

$$0 \approx \{\phi_\alpha, \phi_{\alpha'}\}^{-1}\{\phi_{\alpha'}, H_c\} \quad , \; \alpha = M+1, ..., J \text{ et } \alpha' = 1, ..., J \tag{3.30}$$

Rappelons que l'équation d'évolution d'une grandeur $F(q,p)$ est donnée par (3.13) comme

$$\dot{F} \approx \{F, H_c\} + \lambda_m \{F, \phi_m\},$$

tenons compte de (3.29) on a

$$\dot{F} \approx \{F, H_c\} - \{F, \phi_m\}\{\phi_m, \phi_{\alpha'}\}^{-1}\{\phi_{\alpha'}, H_c\} \tag{3.31}$$

$$\text{avec} \quad m = 1, ..., M \quad \text{et } \alpha' = 1, ..., J$$

mais d'aprés (3.30) on $\{\phi_\alpha, \phi_{\alpha'}\}^{-1}\{\phi_{\alpha'}, H_c\} \approx 0$ avec $\alpha = M+1, ..., J$ et par conséquent on peut écrire également

$$\dot{F} \approx \{F, H_c\} - \{F, \phi_\alpha\}\{\phi_\alpha, \phi_{\alpha'}\}^{-1}\{\phi_{\alpha'}, H_c\} \quad \text{avec} \quad \alpha,\ \alpha' = 1, ..., J \tag{3.32}$$

Dirac a défini le crochet

$$\{F, H_c\}_D = \{F, H_c\} - \{F, \phi_\alpha\}\{\phi_\alpha, \phi_{\alpha'}\}^{-1}\{\phi_{\alpha'}, H_c\} \tag{3.33}$$

pour obtenir une équation avec une forme plus réduite

$$\dot{F} \approx \{F, H_c\}_D \tag{3.34}$$

La généralisation du crochet de Dirac au cas de deux fonction f et g de l'espace des phase est

$$\{f, g\}_D = \{f, g\} - \{f, \phi_\alpha\}\{\phi_\alpha, \phi_{\alpha'}\}^{-1}\{\phi_{\alpha'}, g\} \tag{3.35}$$

Les conditions de consistances $\{\phi_\alpha, H_T\} \approx 0$ permettent d'écrire

$$\{F, H_T\}_D = \{F, H_T\} - \{F, \phi_\alpha\}\{\phi_\alpha, \phi_{\alpha'}\}^{-1}\underbrace{\{\phi_{\alpha'}, H_T\}}_{\approx 0}$$

on obtient l'égalité

$$\{F, H_T\}_D \approx \{F, H_T\} \approx \dot{F}$$

Dans le cas spécial où $F = q$ et $F = p$, on obtient les equations de Hamilton

$$\dot{q} \approx \{q, H_T\}_D \tag{3.36}$$

$$\dot{p} \approx \{p, H_T\}_D \tag{3.37}$$

Les crochets de Dirac ont des propriétés similaires à celles de Poisson, en plus de ces deux propriétés

$$\{f, \phi_\alpha\}_D = 0 \qquad (\phi_\alpha \text{ contrainte de deuxième classe})$$

$$\{f, G\}_D \approx \{f, G\} \qquad (G \text{ fonction de première classe})$$

où f dépend de q et p.

L'équation d'évolution d'une grandeur $F(q, p)$ est donnée en fonction de ces nouveaux crochets comme

$$\dot{F} \approx \{F, H_c\}_D \tag{3.38}$$

Les crochets de Dirac ont une interpretation simple : l'information sur un système avec contraintes est incluse dans ces nouveaux crochets de Dirac. On pourrait dire autrement que la méthode de Dirac prend l'information sur la contrainte à partir du lagrangien en la donnant aux crochets canoniques de Dirac.

3.6 Application : Particule relativiste

On considére relativiste de masse m. L'action S est proportionnelle à la longueur du chemin

$$S = -m\int_1^2 ds = -m\int_1^2 \sqrt{-dx^\mu dx_\mu} \tag{3.39}$$

on suppose $c = 1$ et la métrique de Minkowski $\eta^{\mu\nu} = diag\left(-1, 1, 1, 1\right)$. Ainsi, on choisit le paramètre arbitraire τ qui indique la position de la particule sur sa ligne d'univers, et définissons la 4-vitesse

$$u^\mu = \frac{dx^\mu\left(\tau\right)}{d\tau} \tag{3.40}$$

donc le Lagrangien est

$$L = -m\sqrt{-u^\mu u_\mu} \tag{3.41}$$

et l'action

$$S = \int d\tau L\left(x^\mu\left(\tau\right), u^\mu\left(\tau\right)\right) \tag{3.42}$$

est invariante sous une reparamétrisation $\tau \to \tau'\left(\tau\right)$ (invariance de jauge locale). Il est facile de s'assurer que $\det\left(\partial^2 L/\partial u_\mu \partial u_\nu\right) = 0$, c'est-à-dire que L en effet un lagrangien singulier. On a donc besoin d'utiliser la méthode de Dirac pour définir la dynamique de cette particule.

Les moments conjugués

$$P^\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} = \frac{\partial L}{\partial u_\mu} = \frac{m u^\mu}{\sqrt{-u^2}} = m\frac{dx^\mu}{ds} \tag{3.43}$$

Les équations d'Euler et leurs solutions sont

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = 0 \quad , \quad P^\mu\left(\tau\right) = P^\mu\left(0\right) \tag{3.44}$$

ou d'une manière équivalente

$$m\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = 0 \quad , \quad x^\mu\left(s\right) = x^\mu\left(0\right) + \frac{P^\mu\left(0\right)}{m}s \tag{3.45}$$

où s est la longueur du chemin définie par (3.39).

Les crochets de Poisson à temps égal sont définis comme suit

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial x_\mu}\frac{\partial B}{\partial P^\mu} - \frac{\partial A}{\partial P^\mu}\frac{\partial B}{\partial x_\mu}$$

de façon qu'on a

$$\begin{aligned} \{P^\mu(\tau), x_\nu(\tau)\} &= -\delta^\mu_\nu && (3.46)\\ \{P^\mu(\tau), P^\nu(\tau)\} &= 0 && (3.47)\\ \{x^\mu(\tau), x^\nu(\tau)\} &= 0 && (3.48)\end{aligned}$$

Comme nous connaissons les solutions (3.45) des équations de mouvement, on peut considérer les derniers crochets pour $\tau = s = 0$ et calculons les crochets de Poisson pour des points différents. Seulement le dernier crochet change

$$\{x^\mu(0), x^\nu(s)\} = \eta^{\mu\nu}\frac{s}{m}. \qquad (3.49)$$

Maintenant on remarque que l'Hamiltonien canonique est nul

$$H_c = P^\mu u_\mu - L = 0$$

$H_c = 0$ est en relation avec le fait que le lagrangien est de première degré en vitesses, et par conséquent P^μ est de degré zéro. Ce résultat indique aussi que les moments canoniques ne sont pas indépendants. En peut donc déduire à partir de (3.43) la contrainte primaire

$$P^\mu P_\mu = m^2\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx_\mu}{ds} = -m^2$$

c-à-d

$$\phi_1 = P^2 + m^2 \approx 0 \qquad (3.50)$$

L'hamiltonien total est alors

$$\begin{aligned} H_T &= H_c + \lambda(\tau)\phi_1 && (3.51)\\ &= \lambda(\tau)\phi_1 \approx 0 && (3.52)\end{aligned}$$

Ainsi, H_T est correctement généré les équations de mouvement d'Hamilton

$$u^\mu = \dot{x}^\mu = \{x^\mu, H_T\} = \frac{\partial H_T}{\partial P_\mu}$$

c-à-d

$$u^{\mu}=2\lambda P^{\mu}=\frac{2\lambda m u^{\mu}}{\sqrt{-u^{2}}} \tag{3.53}$$

et

$$\begin{aligned}\dot{P}^{\mu} &= \{P^{\mu},H_{T}\}=-\frac{\partial H_{T}}{\partial x_{\mu}} \\ &= -\frac{\partial \lambda}{\partial x_{\mu}}\left(P^{2}+m^{2}\right)\approx 0\end{aligned} \tag{3.54}$$

de (3.53) on peut remarque qu'on peut exprimer λ en fonction des vitesses u^{μ}, de façon que H_T devient

$$H_{T}=\frac{\sqrt{-u^{2}}}{2m}\left(P^{2}+m^{2}\right) \tag{3.55}$$

Cependant, il existe toujours une fonction arbitraire dans le système puisque l'échelle de τ (et par conséquent l'échelle de u^{μ}) n'a pas été fixé par rapport à x^{μ}.

Maintenant, utilisons la liberté de jauge dans l'action pour fixer l'échelle de τ et éliminer toutes fonctions arbitraire du système. On choisit

$$\phi_{2}=x^{0}-\tau\approx 0 \tag{3.56}$$

Notons ici qu'on peut choisir d'autre jauge [12]. L'ensemble $\{\phi_1,\phi_2\}$ est maintenant du seconde classe. On calcul alors la matrice

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{pmatrix} 0 & \{\phi_{1},\phi_{2}\} \\ \{\phi_{2},\phi_{1}\} & 0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2P^{0} \\ 2P^{0} & 0\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{3.57}$$

son inverse est

$$\Delta^{-1}=\frac{1}{2P^{0}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}. \tag{3.58}$$

Calculons maintenant les crochets de Dirac des variables dynamiques en utilisant la formule (3.35) à savoir

$$\{f,g\}_{D}=\{f,g\}-\{f,\phi_{A}\}\,\Delta^{AB}\,\{\phi_{B},g\} \tag{3.59}$$

par exemple, on peut calculer les crochets de Dirac entre les variables fondamentales

$$\begin{aligned}\{x^{\mu},x^{\nu}\}_{D} &= \{x^{\mu},x^{\nu}\}-\{x_{\mu},\phi_{A}\}\,\Delta^{AB}\,\{\phi_{B},x_{\nu}\}, \\ &= \{x^{\mu},x^{\nu}\}=0\end{aligned}$$

De même

$$\{P^\mu, P^\nu\}_D = \{P^\mu, P^\nu\} = 0 \tag{3.60}$$

où on a utilisé les équations (3.46)-(3.48). Alors que

$$\{P^\mu, x^\nu\}_D = -\eta^{\mu\nu} + \eta^{\mu 0}\frac{P^\nu}{P^0} \tag{3.61}$$

Chapitre 4

Système avec contraintes : Méthode de Faddeev-Jackiw

4.1 Introduction

L'approche Faddeev-Jackiw [3] est une autre méthode importante pour traiter les systèmes avec ou sans contraintes. Notons que la méthode originale de Faddeev-Jackiw a été réservée aux systèmes sans contraintes. Afin de traiter un système qui a également des contraintes par cette même méthode, une extension avait été proposée par Barcelos et Wotzasek, qui ont formulé un algorithme symplectique [5, 6].

Cette méthode présente des caractéristiques distinctes par rapport à celle de Dirac. Il n'est pas nécessaire dans la méthode Faddeev-Jackiw de classer toutes les contraintes en contraintes primaires ou secondaires, ainsi que dans la première ou la seconde classe, il n'est pas non plus nécessaire d'introduire des concepts tels que l'égalité faible, l'égalité forte, etc. comme dans la méthode de Dirac.

Dans ce chapitre, on va exposer la méthode Faddeev-Jackiw en donnant quelques exemples illustratifs.

4.2 Linéarisation du lagrangien

Comme déjà évoqué dans le chapitre précédent, on ne pourra pas exprimer pour un lagrangien singulier toutes les vitesses (les $\dot{q}_i$) en fonction des coordonnées (les q_i) et des moments conjugués (les p_i) en utilisant les relations $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i,\ i = 1, ..., n$. Dans ce cas la matrice hessienne W n'est pas inversible. Soit $R = rang\,(W)$, cela veut dire qu'il est possible d'inverser les équations $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$ seulement par rapport à R vitesses généralisées $\dot{q}_a$ avec $a = 1, ..., R$ en les écrivant comme fonctions des autres vitesses, des coordonnées généralisées et des moments conjugués ; $\dot{q}_a = f_a\,(q_i, p_b, \dot{q}_s)$, $a, b = 1, ..., R$, $i = 1, .., n$, $s = R + 1, ..., n$

Ainsi, si $M = n - R$ on fait apparaitre M relations notées comme

$$\phi_s = p_s - g_s\,(q_i, p_b)\,, \ b = 1, ..., \ R, \ s = R + 1, ..., n, \quad i = 1, .., n \tag{4.1}$$

qui sont les $n - R$ contraintes.

L'hamiltonien H associé au lagrangien $L\,(q_i, \dot{q}_i)$ prend alors la forme

$$\begin{aligned} H &= p_i\dot{q}_i - L \\ &= p_a\dot{q}_a + p_s\dot{q}_s - L \\ &= p_a f_a\,(q_i, p_b, \dot{q}_s) + g_s\,(q_i, p_b)\,\dot{q}_s - L \end{aligned} \tag{4.2}$$

en final H ne dépend pas des vitesses généralisées malgré leur présence apparente.

Très souvent, un lagrangien est non-linéaire par rapport aux vitesses. *La linéarisation* consiste à passer de ce lagrangien vers un hamiltonien canonique indépendant des vitesses, pour revenir ensuite à un lagrangien linéaire par rapport aux vitesses généralisées. Il suffit donc d'utiliser la transformation de Legendre inverse

$$L = p_i\dot{q}_i - H$$

ainsi que les contraintes (4.1), ce qui donne

$$L\,(q_i, \dot{q}_i, p_a) = p_a\dot{q}_a + g_s\,(q_i, p_a)\,\dot{q}_s - H\,(q_i, p_a) \tag{4.3}$$

La méthode de Faddeev et Jackiw consiste à traiter les q_i et les p_a , pour le lagrangien ainsi construit, comme étant des variables indépendantes comme on va voir dans la prochaine section.

Pour bien expliquer ce point, considérons le lagrangien non linéaire suivant

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + x\dot{y} - y\dot{z} \tag{4.4}$$

les moments conjugués sont

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = x \qquad \text{(contrainte)} \\ p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = -y \quad \text{(contrainte)} \end{aligned}$$

on a deux contraintes $p_y - x = 0$ et $p_z + y = 0$. L'hamiltonien aura l'expression

$$\begin{aligned} H &= p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - L \\ &= p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - \frac{1}{2}\dot{x}^2 - x\dot{y} + y\dot{z} \\ &= p_x^2 + (p_y - x)\,\dot{y} + (p_z + y)\,\dot{z} - \frac{1}{2}p_x^2 \\ &= \frac{1}{2}p_x^2 + (p_y - x)\,\dot{y} + (p_z + y)\,\dot{z} \end{aligned}$$

utilisons les contraintes, on obtient

$$H = \frac{1}{2}p_x^2 \tag{4.5}$$

H ne dépend pas des vitesses. Maintenant, le lagrangien linéaire est

$$\begin{aligned} L &= p_i \dot{q}_i - H \\ &= p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - \frac{1}{2}p_x^2 \\ &= p_x \dot{x} + x\dot{y} - y\dot{z} - \frac{1}{2}p_x^2 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Les variables indépendantes sont alors x, y, z et p_x tandis que les moments p_y et p_z dépendent des autres variables à travers les relations $p_y - x = 0$ et $p_z + y = 0$. Comme on va voir ci-dessous, les équations d'E-L s'appliquent sur les variables indépendantes x, y, z et p_x .

4.3 Méthode de Faddeev et Jackiw

La méthode Faddeev-Jackiw repose sur deux manœuvres principales i) la linéarisation du lagrangien par rapport aux vitesses généralisées ii) l'inversion de la matrice de Faddeev-Jackiw obtenue en utilisant les équations d'E-L. Cette méthode permet de dériver les crochets de Dirac sans avoir besoin de calculer aucun crochet de Poisson.

L'idée est de traiter les variables indépendantes (les q_i , $i = 1, .., n$ et les p_a , $a = 1, ...,$ R) sur le même pied d'égalité en introduisant de nouvelles variables $\xi_i = q_i$, $i = 1, .., n$ et $\xi_{n+a} = p_a$ avec $a = 1, ..., R$, de manière que le lagrangien (4.3) s'écrit

$$L = A_J \, \dot{\xi}_J - H \quad , \quad J = 1, ..., n + R \tag{4.7}$$

de façon que

$$\begin{aligned} A_a &= p_a \ , \ \ a = 1, ..., \ R. \\ A_s &= g_s\left(q_i, p_a\right) \ , \ s = R+1, ..., n \\ A_{n+a} &= 0 \end{aligned}$$

Ecrivons les équations d'Euler-Lagrange relatives aux variables dynamiques $(\xi_J, \dot{\xi}_J)$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_J}\right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_J} = 0 \tag{4.8}$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_J}\right) &= \frac{d}{dt}A_J = \frac{\partial A_J}{\partial \xi_I}\frac{d\xi_I}{dt} = \frac{\partial A_J}{\partial \xi_I}\ \dot{\xi}_I \\ \frac{\partial L}{\partial \xi_J} &= \frac{\partial A_I}{\partial \xi_J}\ \dot{\xi}_I - \frac{\partial H}{\partial \xi_J} \end{aligned}$$

Ainsi, (4.8) donne

$$\left(\frac{\partial A_I}{\partial \xi_J} - \frac{\partial A_J}{\partial \xi_I}\right)\ \dot{\xi}_I = \frac{\partial H}{\partial \xi_J} \tag{4.9}$$

ou bien

$$f_{IJ}\ \dot{\xi}_I = \frac{\partial H}{\partial \xi_J} \quad , \ \ I, J = 1, ..., n+R \tag{4.10}$$

où

$$f_{IJ} = \frac{\partial A_I}{\partial \xi_J} - \frac{\partial A_J}{\partial \xi_I} \tag{4.11}$$

est l'élément de la matrice de Faddeev-Jackiw notée f. Cette matrice est antisymétrique. Ainsi, deux cas se présentent

i) si la matrice f est inversible, on peut donc déduire de (4.10) l'expression

$$\dot{\xi}_I = f_{IJ}^{-1}\frac{\partial H}{\partial \xi_J} \tag{4.12}$$

D'autre part, les équations d'Hamilton doivent être de la forme

$$\dot{\xi}_I = \{\xi_I, H\} \tag{4.13}$$

rappelons la forme générale du crochet de Poisson donnée par l'équation (2.24) comme

$$\{\xi_I, H\} = \{\xi_I, \xi_J\}\ \frac{\partial H}{\partial \xi_J} \tag{4.14}$$

il s'ensuit que

$$f_{IJ}^{-1} = \{\xi_I, \xi_J\} \tag{4.15}$$

Le crochet $\{\xi_I, \xi_J\}$ n'est rien d'autre que le crochet de Dirac de I et J obtenu par l'approche de Faddeev-Jackiw.

Exemple : Soit le lagrangien non linéaire

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)$$

le moment conjugué

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q}$$

l'hamiltonien canonique

$$\begin{aligned} H &= p\dot{q} - L \\ &= p\dot{q} - \frac{1}{2}\dot{q}^2 + V(q) \\ &= \frac{1}{2}p^2 + V(q) \end{aligned}$$

Ainsi, le lagrangien linéaire sera

$$\begin{aligned} L &= p\dot{q} - H \\ &= p\dot{q} - \frac{1}{2}p^2 - V(q) \end{aligned}$$

Les variables indépendantes sont q et p. Les équations d'E-L sont

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\right) - \frac{\partial L}{\partial p} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{p} + \frac{\partial V}{\partial q} = 0 \\ p - \dot{q} = 0 \end{cases}$$

sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial q} \\ p \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

d'où f est

$$f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

f est inversible, son inverse est donc

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{q,q\} & \{q,p\} \\ -\{q,p\} & \{p,p\} \end{pmatrix}$$

Comme on n'a pas de contraintes, on obtient à partir f^{-1} les crochets canonique de poisson

$$\{q,q\}=0,\ \ \{q,p\}=1,\quad \{p,p\}=0$$

ii) si la matrice f n'est pas inversible, c'est-à-dire $rang(f)<n+R$ alors cette matrice admet $n+R-rang(f)$ *mode zéro* indépendants υ^m , $m=1,...,n+R-rang(f)$. Ces modes sont des vecteurs lignes vérifiant la relation

$$\upsilon^m f=0 \tag{4.17}$$

ou explicitement

$$\upsilon_I^m f_{IJ}=0 \tag{4.18}$$

Multiplions à droite par υ_I^m l'équation (4.10) va en principe donner naissance aux contraintes

$$\phi_m=\upsilon_I^m\frac{\partial H}{\partial \xi_J}=0,\quad m=1,...,n+R-rang(f) \tag{4.19}$$

Il se peut qu'on n'obtient pas de contraintes, mais seulement des identités de type $(0=0)$. Cela est dû au présence de symétrie de jauge. Ces contraintes ϕ_m sont des relations entre les ξ_J qui doivent se conserver dans le temps

$$\dot{\phi}_m=\frac{d\phi_m}{dt}=\frac{\partial \phi_m}{\partial \xi_J}\dot{\xi}_J=0$$

A ce stade, on doit ajouter au lagrangien (5.66) des termes de la forme $\left(\lambda_m\frac{\partial\phi_m}{\partial\xi_J}\dot{\xi}_J\right)$ ou bien de la forme $\left(\dot{\lambda}_m\phi_m\right)$. On obtient un nouveau lagrangien linéaire par rapport $\dot{\xi}_J$ et $\dot{\lambda}_m$ ayant l'expression

$$L=A_J\dot{\xi}_J+\dot{\lambda}_m\phi_m-H \tag{4.20}$$

les λ_m sont traités comme des nouvelles variables indépendantes. Ainsi, les équations d'E-L dans ce cas seront

$$\xi_I\to\left(\frac{\partial A_I}{\partial \xi_J}-\frac{\partial A_J}{\partial \xi_I}\right)\ \dot{\xi}_I+\frac{\partial\phi_m}{\partial\xi_J}\dot{\lambda}_m=\frac{\partial H}{\partial \xi_J} \tag{4.21}$$

$$\lambda_m\to\frac{d\phi_m}{dt}=\frac{\partial\phi_m}{\partial\xi_J}\dot{\xi}_J=0\ \ \text{(conservation des } \phi_m \text{ au cours du temps.)} \tag{4.22}$$

Sous forme matricielle, ces équations sont

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\partial A_I}{\partial \xi_J}-\frac{\partial A_J}{\partial \xi_I} & \frac{\partial\phi_m}{\partial\xi_J}\\ \frac{\partial\phi_m}{\partial\xi_J} & 0\end{pmatrix}}_{\text{la matrice } f^{(1)}}\begin{pmatrix}\dot{\xi}_I\\ \dot{\lambda}_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial H}{\partial \xi_J}\\ 0\end{pmatrix}$$

Cette nouvelle matrice $f^{(1)}$ est une matrice carrée antisymétrique de dimension $n+R+\left(n+R-rang(f^{(1)})\right)=2\left(n+R\right)-rang(f^{(1)})$. A ce niveau, trois cas peuvent se présenter :

i) $f^{(1)}$ est inversible et les crochets s'obtiennent à l'aide de $\left(f^{(1)}\right)^{-1}$ et l'algorithme se termine ici.

ii) $f^{(1)}$ est n'est pas inversible et les modes zéro donnent de nouvelles contraintes. Il faut alors les ajouter au lagrangien (4.20) avec des multiplicateurs, et refaire la procédure du zéro.

Exemple : Soit le lagrangien non linéaire

$$L=\frac{1}{2}\dot{x}^2-ax\dot{y},\qquad a=cte\neq 0. \tag{4.23}$$

les moment conjugués

$$\begin{aligned}p_x&=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=\dot{x}\\ p_y&=\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}=-ax\end{aligned}$$

d'où on a une contrainte $p_y+ax=0$. L'hamiltonien canonique

$$\begin{aligned}H&=p_x\dot{x}+p_y\dot{y}-L\\ &=p_x\dot{x}+p_y\dot{y}-\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2-ax\dot{y}\right)\\ &=p_x^2+p_y\dot{y}-\frac{1}{2}p_x^2+ax\dot{y}\\ &=\frac{1}{2}p_x^2+\left(p_y+ax\right)\dot{y}\end{aligned} \tag{4.24}$$

on introduire maintenant la contrainte $p_y+ax=0$, l'hamiltonien devient

$$H=\frac{1}{2}p_x^2$$

Ainsi, le lagrangien linéaire sera

$$\begin{aligned}L&=p_x\dot{x}+p_y\dot{y}-H\\ &=p_x\dot{x}+p_y\dot{y}-\frac{1}{2}p_x^2\\ &=p_x\dot{x}-ax\dot{y}-\frac{1}{2}p_x^2\end{aligned} \tag{4.25}$$

les variables indépendantes ici sont x, y et p_x. Les équations d'E-L correspondantes :

$$\begin{aligned}\dot{p}_x+a\dot{y}&=0\\ -a\dot{x}&=0\\ -\dot{x}+p_x&=0\end{aligned}$$

vont donner le système

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ -a & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{f^{(0)}}\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{p}_x \end{pmatrix}}_{\dot{\xi}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_x \end{pmatrix}}_{\partial H/\partial \xi} \tag{4.26}$$

$f^{(0)}$ est singulière (n'est pas inversible) de $rang\left(f^{(0)}\right) = 2$. Alors cette matrice admet un seul mode zéro ; $n + R - rang(f^{(0)}) = 2 + 1 - 2 = 1$ qui est (voir annexe)

$$\upsilon = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

multiplions à gauche le système précédent par ce mode zéro, on obtient la contrainte

$$p_x = 0$$

cette contrainte doit être préservée dans le temps. On doit donc ajouter à notre lagrangien linéaire le terme $\dot{\lambda} p_x$

$$L = p_x \dot{x} - ax\dot{y} - \frac{1}{2}p_x^2 + \dot{\lambda} p_x$$

Les variables indépendantes sont maintenant x, y , p_x et λ. Les équations d'E-L correspondantes :

$$\begin{aligned} \dot{p}_x + a\dot{y} &= 0 \\ -a\dot{x} &= 0 \\ -\dot{x} + p_x - \dot{\lambda} &= 0 \\ \dot{p}_x &= 0 \end{aligned}$$

ou bien

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{f^{(1)}}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{p}_x \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_x \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

Cette fois-ci $f^{(1)}$ est inversible où l'inverse est

$$\left(f^{(1)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{a} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & -\frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{a} & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

les crochets de poisson généralisés (qui sont, sans doute, égaux aux crochets de Dirac) entre les variables dynamiques du lagrangien du départ sont alors

$$\begin{aligned}
\{x,x\} &= \{y,y\} = \{p_x,p_x\} = 0 \\
\{x,y\} &= -\frac{1}{a}, \quad \{x,p_x\} = 0, \;\; \{y,p_x\} = 0.
\end{aligned}$$

iii) $f^{(1)}$ est n'est pas inversible mais les modes zéro ne donnent aucune nouvelle contrainte. On obtient en général des identités, c'est un signe de présence de symétrie de jauge. Dans ce cas, des conditions supplémentaires $\zeta_n(\xi) = 0$ sont nécessaires afin de fixer la jauge et avoir une matrice symplectique inversible. On les ajoute au lagrangien (4.20) comme $\dot{\omega}_n \zeta_n(\xi)$ avec ω_n sont des multiplicateurs. Ensuite, il faut écrire les equations d'E-L par rapport aux variables ξ_I , λ_m et ω_n.

Chapitre 5

Théorie des champs avec contraintes

5.1 Introduction

On est arrivé à notre but ultime de ce mémoire qui est la clarification de la transition des systèmes avec contraintes vers la théorie des champs. Cet objectif sera atteint en considérant la méthode de Dirac et celle de Fadeev-Jackiw. Ainsi, jusqu'à présent, on a étudié un système singulier avec un nombre fini de degrés de liberté. En théorie des champs, on a affaire à un nombre infini de degrés de liberté. L'extension des notions vues dans les chapitres précédents en théorie des champs sont assez évidentes en respectant quelques règles. Mais avant d'étudier ces particularités de la théorie des champs pour un système singulier, on va développer le formalisme de Lagrange et d'Hamilton pour des systèmes réguliers. Alors la généralisation prenant en compte les contraintes ne posera pas de difficultés. Comme application, on traite par deux méthodes l'exemple du champ de Maxwell libre qui présente une invariance de jauge.

5.2 Formalisme lagrangien

On considère que chaque point d'une région de l'espace-temps (finie ou infinie) est associé à un certain champ variable continu que le note par $\psi(x)$ où $x = (\mathbf{x}, t)$. Cela constitue un système à un nombre infini de degrés de liberté. La variable dynamique est maintenant les valeurs de ce champ $\psi(x)$ à chaque point de l'espace au lieu de la variable discrète q_i vue précédemment. Ainsi, $\psi(x)$ peut être un champ scalaire $\phi(x)$, un champ vectoriel $A_\mu(x)$, le tenseur métrique $g_{\mu\nu}(x)$ où un champ fermionique $\psi(x)$.

Les équations de mouvement de ce champ $\psi(x)$ sont déterminées par une densité lagrangienne $\mathcal{L}$ qui est une fonction de ce champ lui même ψ et de ses dérivées $\partial_\mu\psi(x)$. Alors, l'action S est définie comme

$$S = \int_\Omega d^4x\mathcal{L}\left(\psi(x), \partial_\mu\psi(x)\right) \tag{5.1}$$

Les équations de mouvement sont obtenues par le principe de moindre action qui stipule que l'action S doit être stationnaire ($\delta S = 0$), la variation de l'action s'écrit alors

$$\delta S(\psi) = \int_\Omega d^4x \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta(\partial_\mu\psi)\right) \tag{5.2}$$

avec

$$\delta(\partial_\mu\psi) = \partial_\mu(\delta\psi), \tag{5.3}$$

et on a

$$\int_\Omega d^4x\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta\psi\right) = \int_\Omega d^4x\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right)\delta\psi + \int_\Omega d^4x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right)\partial_\mu(\delta\psi)$$

donc

$$\int_\Omega d^4x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right)\partial_\mu(\delta\psi) = \int_\Omega d^4x\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta\psi\right) - \int_\Omega d^4x\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right)\delta\psi$$

Appliquons le théorème de Gauss suivant

$$\int_\Omega (\partial_\mu f^\mu)\, d^Dx = \oint_{\partial\Omega}(f^\mu n_\mu)\, dS \tag{5.4}$$

où $\partial\Omega = S$ et $(f^\mu n_\mu)$ est la composante de f suivant une direction n. Ainsi, en supposons que la variation $\delta\psi = 0$ sur la surface, il vient

$$\begin{aligned}\delta S(\psi) &= \int_\Omega d^4x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right)\right)\delta\psi \\ &= 0 \quad \forall\ \delta\psi\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right) = 0. \tag{5.5}$$

qui sont les équations d'Euler-Lagrange.

5.3 Formalisme Hamiltonien

On définit le moment conjugué π de ψ comme

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi)}, \tag{5.6}$$

alors la densité hamiltoniene $\mathcal{H}$ est définie comme

$$\mathcal{H}\left(\psi, \boldsymbol{\nabla}\psi, \pi, \boldsymbol{\nabla}\pi\right) = \pi.\partial_0\psi - \mathcal{L} \tag{5.7}$$

donc l'hamiltonien H, qui est défini comme une intégrale spatiale de $\mathcal{H}$, est

$$H = \int_v \mathcal{H}\left(\psi, \boldsymbol{\nabla}\psi, \pi, \boldsymbol{\nabla}\pi\right) d^3x \tag{5.8}$$

écrivons l'action S

$$S = \int_\Omega \left(\pi.\partial_0\psi - \mathcal{H}\right) d^4x$$

pour obtenir les équations de mouvement, on doit calculer la variation δS

$$\delta S = \int_\Omega \left[\delta\left(\pi.\partial_0\psi\right) - \delta\mathcal{H}\right] d^4x$$

soit

$$\begin{aligned} \delta\left(\pi.\partial_0\psi\right) &= \pi.\delta\left(\partial_0\psi\right) + \delta\pi.\partial_0\psi \\ &= \pi.\partial_0\left(\delta\psi\right) + \delta\pi.\partial_0\psi \end{aligned}$$

ou bien

$$\delta\left(\pi.\partial_0\psi\right) = \partial_0\left(\pi.\delta\psi\right) - \partial_0\pi.\delta\psi + \delta\pi.\partial_0\psi \tag{5.9}$$

et comme la variation $\delta\mathcal{H}$ est donnée par

$$\delta\mathcal{H} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\left(\boldsymbol{\nabla}\psi\right)}\delta\left(\boldsymbol{\nabla}\psi\right) + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi}\delta\pi + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\left(\boldsymbol{\nabla}\pi\right)}\delta\left(\boldsymbol{\nabla}\pi\right)$$

c'est-à-dire

$$\delta\mathcal{H} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\boldsymbol{\nabla}\psi}\boldsymbol{\nabla}\left(\delta\psi\right) + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi}\delta\pi + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\left(\boldsymbol{\nabla}\pi\right)}\boldsymbol{\nabla}\left(\delta\pi\right)$$

notons que

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\left(\boldsymbol{\nabla}\psi\right)}\delta\left(\boldsymbol{\nabla}\psi\right) = \boldsymbol{\nabla}.\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\left(\boldsymbol{\nabla}\psi\right)}\left(\delta\psi\right)\right) - \boldsymbol{\nabla}.\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\left(\boldsymbol{\nabla}\psi\right)}\right)\delta\psi$$

et

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\left(\boldsymbol{\nabla}\pi\right)}\delta\left(\boldsymbol{\nabla}\pi\right) = \boldsymbol{\nabla}.\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\left(\boldsymbol{\nabla}\pi\right)}\left(\delta\pi\right)\right) - \boldsymbol{\nabla}.\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\left(\boldsymbol{\nabla}\pi\right)}\right)\delta\pi$$

on obtient

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{H} &= \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi}\delta\pi + \boldsymbol{\nabla}.\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\left(\boldsymbol{\nabla}\psi\right)}\left(\delta\psi\right)\right) - \boldsymbol{\nabla}.\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\left(\boldsymbol{\nabla}\psi\right)}\right)\delta\psi \\ &\quad +\boldsymbol{\nabla}.\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\left(\boldsymbol{\nabla}\pi\right)}\left(\delta\pi\right)\right) - \boldsymbol{\nabla}.\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\left(\boldsymbol{\nabla}\pi\right)}\right)\delta\pi \end{aligned} \tag{5.10}$$

La variation δS devient

$$
\begin{aligned}
\delta S = & \int_{\Omega}\{\partial_0(\pi.\delta\psi) - \partial_0\pi.\delta\psi + \delta\pi.\partial_0\psi \\
& -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\psi}\delta\psi - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi}\delta\pi - \boldsymbol{\nabla}.\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\psi)}(\delta\psi)\right) + \boldsymbol{\nabla}.\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\psi)}\right)\delta\psi \\
& -\boldsymbol{\nabla}.\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\pi)}(\delta\pi)\right) + \boldsymbol{\nabla}.\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\pi)}\right)\delta\pi\Big\} d^4x
\end{aligned}
$$

arrangeons les termes

$$
\begin{aligned}
\delta S = & \int_{\Omega}\left\{\left[-\partial_0\pi - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\psi} + \boldsymbol{\nabla}.\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\psi)}\right)\right]\delta\psi\right. \\
& \left[\partial_0\psi - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi} + \boldsymbol{\nabla}.\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\pi)}\right)\right]\delta\pi \\
& \left.-\boldsymbol{\nabla}.\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\psi)}(\delta\psi)\right) - \boldsymbol{\nabla}.\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\pi)}(\delta\pi)\right) + \partial_0(\pi.\delta\psi)\right\} d^4x
\end{aligned}
$$

On applique le théorème de Gauss (5.4) avec $\delta\psi = 0$ et $\delta\pi = 0$ sur la surface, on obtient

$$
\begin{aligned}
\delta S = & \int_{\Omega}\left\{\left[-\partial_0\pi - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\psi} + \boldsymbol{\nabla}.\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\psi)}\right)\right]\delta\psi\right. \\
& \left.+\left[\partial_0\psi - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi} + \boldsymbol{\nabla}.\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\pi)}\right)\right]\delta\pi\right\} d^4x
\end{aligned}
$$

δS doit être nulle quelque soit $\delta\psi$ et $\delta\pi$, on aura

$$
\begin{aligned}
\partial_0\psi &= \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi} - \boldsymbol{\nabla}.\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\pi)}\right) \\
\partial_0\pi &= -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\psi} + \boldsymbol{\nabla}.\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\psi)}\right)
\end{aligned}
$$

Donc, d'aprèrs (5.8) on déduit que (voir appendice)

$$\partial_0\psi = \frac{\delta H}{\delta\pi} \tag{5.11}$$

$$\partial_0\pi = -\frac{\delta H}{\delta\psi} \tag{5.12}$$

qui sont les équations d'Hamilton pour un champ classique ψ.

Soit F et G deux fonctionnelles quelconques dépendantes des ψ et π. Le crochet de Poisson entre F et G est définit comme

$$\{F, G\} = \int d^3x\left(\frac{\delta F}{\delta\psi}\frac{\delta G}{\delta\pi} - \frac{\delta F}{\delta\pi}\frac{\delta G}{\delta\psi}\right) \tag{5.13}$$

ces crochets vérifient les propriétés

$$\begin{aligned}
\{F,G\} &= -\{G,F\} \qquad \text{(Antisymétrie)} \\
\{F_1+F_2,G\} &= \{F_1,G\}+\{F_2,G\} \qquad \text{(Linéarité)} \\
\{F_1F_2,G\} &= F_1\{F_2,G\}+\{F_2,G\}F_2 \qquad \text{(Identité de Leibniz)} \\
\{F,\{G,H\}\}+\{G,\{H,F\}\}+\{H,\{F,G\}\} &= 0 \qquad \text{(Identité de Jacobi)}
\end{aligned}$$

Si on pose $G = H$ et introduisons les relations (5.11)et (5.12), on aura

$$\{F,H\} = \int d^3x \left(\frac{\delta F}{\delta\psi}\partial_0\psi + \frac{\delta F}{\delta\pi}\partial_0\pi\right)$$

Si de plus une fonctionnelle $F[\psi,\pi,t]$ dépend explicitement du temps, la variation de F par rapport au temps, est donc

$$\frac{\delta F}{\delta t} = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \int d^3x \left(\frac{\delta F}{\delta\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\delta F}{\delta\pi}\frac{\partial\pi}{\partial t}\right)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\delta F}{\delta t} = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F,H\} \tag{5.14}$$

Il est important de noter qu'on peut également écrire une fonction ψ comme fonctionnelle dépendante d'elle même

$$\psi(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{y}\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\psi(\mathbf{y}) \tag{5.15}$$

ainsi

$$\frac{\delta\psi(\mathbf{x})}{\delta\psi(\mathbf{y})} = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{5.16}$$

ce résultat plausible découle de la définition (voir Annexe B) comme

$$\delta\psi(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{y}\frac{\delta\psi(\mathbf{x})}{\delta\psi(\mathbf{y})}\delta\psi(\mathbf{y})$$

de même on aura

$$\frac{\delta\pi(\mathbf{x})}{\delta\pi(\mathbf{y})} = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{5.17}$$

et comme ψ et π sont des fonctionnelles indépendantes, on a

$$\frac{\delta\psi(\mathbf{x})}{\delta\pi(\mathbf{y})} = \frac{\delta\pi(\mathbf{x})}{\delta\psi(\mathbf{y})} = 0 \tag{5.18}$$

au moyen des équations (5.14), (5.13) et (5.16), on peut avoir l'équations de mouvement

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}(\mathbf{x}) &= \{\psi, H\} \\
&= \int d^3\mathbf{y} \frac{\delta\psi(\mathbf{x})}{\delta\psi(\mathbf{y})} \frac{\delta H}{\delta\pi(\mathbf{y})} \\
&= \int d^3\mathbf{y}\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \frac{\delta H}{\delta\pi(\mathbf{y})}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\dot{\psi}(\mathbf{x}) = \frac{\delta H}{\delta\pi(\mathbf{x})} \tag{5.19}$$

et de même

$$\begin{aligned}
\dot{\pi}(\mathbf{x}) &= \{\pi(\mathbf{x}), H\} \\
&= -\int d^3\mathbf{y} \frac{\delta\pi(\mathbf{x})}{\delta\pi(\mathbf{y})} \frac{\delta H}{\delta\psi(\mathbf{y})} \\
&= -\int d^3\mathbf{y}\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \frac{\delta H}{\delta\psi(\mathbf{y})}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\dot{\pi}(\mathbf{x}) = -\frac{\delta H}{\delta\psi(\mathbf{x})} \tag{5.20}$$

Les crochets de Poisson des champs $\{\psi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)\}$, $\{\psi(\mathbf{x},t), \psi(\mathbf{y},t)\}$ et $\{\pi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)\}$ à temps égal ont une importance particulière et on les calculs comme suit

$$\begin{aligned}
\{\psi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)\} &= \int d^3\mathbf{z} \frac{\delta\psi(\mathbf{x},t)}{\delta\psi(\mathbf{z},t)} \frac{\delta\pi(\mathbf{y},t)}{\delta\pi(\mathbf{z},t)} \\
&= \int d^3\mathbf{z}\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{z})\,\delta^3(\mathbf{y}-\mathbf{z})
\end{aligned}$$

et donc

$$\{\psi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)\} = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{5.21}$$

Enfin, en raison de (5.18), on aura

$$\{\psi(\mathbf{x},t), \psi(\mathbf{y},t)\} = \{\pi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)\} = 0 \tag{5.22}$$

Jusqu'à présent, rien n'a changé dans le passage des degrés de liberté finis aux degrés infinis. Par conséquent, nous pouvons espérer que notre formalisme sera toujours applicable aux théories des champs. Désormais les contraintes sont prises en compte. Nous devons faire face maintenant au fait que les contraintes ne sont plus des relations algébriques. Lors du passage à la théorie des champs, ils deviennent des fonctionnelles des champs, de leurs moments conjuguées

$$\phi(\psi, \pi) = 0 \tag{5.23}$$

L'algorithme de Dirac-Bergmann pour identifier les contraintes secondaires, ainsi que la classification en première et deuxième classe ne changeront pas lors du passage à la théorie des champs, de sorte que les formules résultantes sont assez similaires. Par conséquent, nous n'écrivons pas tous les résultats de manière explicite, mais mentionnons simplement les "règles" de passage vers la théorie des champs :

i) Les variables d'espace des phases et les multiplicateurs de Dirac deviennent des champs.

ii) Une fonction des variables de l'espace des phases devient une fonctionnelle des champs et de leurs moments conjugués ; c'est-dire $F(q,p) \rightarrow F[\psi,\pi]$.

iii) Chaque fois qu'il y a une sommation sur les variables canoniques ou les multiplicateurs, on doit y avoir une intégrale de volume tridimensionnelle sur la somme des champs.

Ainsi, le crochet de Dirac vu précédemment pour deux fonctions des variables canoniques de l'espace des phases à savoir

$$\{f,g\}_D = \{f,g\} - \sum_{i,j=1}^{4} \{f,\phi_i\} \Delta^{ij} \{\phi_j, g\} \tag{5.24}$$

devient en théorie des champs pour deux fonctionnelles F et G comme suit

$$\{F,G\}_D = \{F,G\} - \int\int d^3\mathbf{u} d^3\boldsymbol{v} \{F,\phi_i(\mathbf{u})\} \Delta^{ij}(\mathbf{u},\boldsymbol{v}) \{\phi_j(\boldsymbol{v}), G\} \tag{5.25}$$

où $\Delta^{ij} = \Delta_{ij}^{-1}$ avec

$$\Delta_{ij}(\mathbf{u},\boldsymbol{v}) = \{\phi_i(\mathbf{u}), \phi_j(\boldsymbol{v})\} \tag{5.26}$$

avec la convention de sommation sur les indices répétés.

5.4 Champ de Maxwell libre : Méthode de Dirac

Dans cette section, on va appliquer les notions vues ci-dessus à un système physique simple qui est le champ de Maxwell libre. On va montrer d'abord que ce système singulier puis en va traiter l'algorithme de Dirac-Bergman correspondant.

5.4.1 Le champ de Maxwell comme un système singulier

La densité lagrangienne qui décrit ce champ est

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad , \; \mu,\nu = 0,3 \tag{5.27}$$

avec le tenseur champ éléctromagnétique

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu} \tag{5.28}$$

Ainsi

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left(\partial_{\mu} A_{\nu} \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial_{\mu} A_{\nu} \partial^{\nu} A^{\mu} \right) \tag{5.29}$$

Choisissons comme variable dynamique du système le champ vectoriel A_{μ}. Les composantes de ce tenseur $F^{\mu\nu}$ sont liées aux composantes des champs électrique et magnétique par

$$\begin{aligned} F^{0i} &= \partial^{0} A^{i} - \partial^{i} A^{0} = \partial_{0} A^{i} + \partial_{i} A^{0} \\ &= \dot{A}^{i} + \partial_{i} A^{0} = -E^{i} \end{aligned} \tag{5.30}$$

et

$$F^{ij} = \partial^{i} A^{j} - \partial^{j} A^{i} \tag{5.31}$$

$$= -\partial_{i} A^{j} + \partial_{j} A^{i} \tag{5.32}$$

$$= -\varepsilon^{ijk} B_{k} \quad ; \quad i, j, k = 1, 2, 3 \tag{5.33}$$

où ε^{ijk} est le tenseur de Levi-Civita.

Trouvons les équations de mouvement d'E-L en commençant par calculer

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\nu} A_{\mu} \right)} &= -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial \left(\partial_{\nu} A_{\mu} \right)} F^{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta} \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial \left(\partial_{\nu} A_{\mu} \right)} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial \left(\partial_{\nu} A_{\mu} \right)} F^{\alpha\beta} + \eta_{\alpha a} \eta_{\beta b} F^{ab} \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial \left(\partial_{\nu} A_{\mu} \right)} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial \left(\partial_{\nu} A_{\mu} \right)} F^{\alpha\beta} + F^{ab} \frac{\partial \left(\eta_{\alpha a} \eta_{\beta b} F^{\alpha\beta} \right)}{\partial \left(\partial_{\nu} A_{\mu} \right)} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial \left(\partial_{\nu} A_{\mu} \right)} F^{\alpha\beta} + F^{ab} \frac{\partial F_{ab}}{\partial \left(\partial_{\nu} A_{\mu} \right)} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial \left(\partial_{\nu} A_{\mu} \right)} F^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

et par (5.28), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial \left(\partial_{\nu} A_{\mu} \right)} &= \frac{\partial}{\partial \left(\partial_{\nu} A_{\mu} \right)} \left(\partial_{\alpha} A_{\beta} - \partial_{\beta} A_{\alpha} \right) \\ &= \delta_{\alpha}^{\nu} \delta_{\beta}^{\mu} - \delta_{\beta}^{\nu} \delta_{\alpha}^{\mu} \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\nu A_\mu\right)} &= -\frac{1}{2}\left(\delta_\alpha^\nu \delta_\beta^\mu-\delta_\beta^\nu \delta_\alpha^\mu\right) F^{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{2}\left(F^{\nu\mu}-F^{\mu\nu}\right)\end{aligned}$$

et comme $F^{\mu\nu}$ est anti-symétrique, on aura

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\nu A_\mu\right)}=F^{\mu\nu} \tag{5.34}$$

puisque $\partial\mathcal{L}/\partial\left(A_\mu\right)=0$, les équations de mouvement pour le champ libre de Maxwell sont

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=0 \tag{5.35}$$

La nature singulière de l'électrodynamique devient apparente par la définition des moments conjugués

$$\pi^\mu=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 A_\mu\right)}=F^{\mu 0} \tag{5.36}$$

où on a utilisé (5.34) et donc

$$\pi^0=F^{00}=0 \tag{5.37}$$

c'est la contrainte primaire du système et la preuve que le champ de Maxwell est bien un système avec contraintes. De plus, on peut idendifier le moment conjugué avec le champ électrique

$$\pi^i=F^{i0}=E^i \tag{5.38}$$

5.4.2 Algorithme de Dirac-Bergman

Considérons la décomposition (5.27) comme

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F^{ij}F_{ij}\ -\frac{1}{2}F^{i0}F_{i0} \tag{5.39}$$

introduisons (5.38) on aura

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F^{ij}F_{ij}\ -\frac{1}{2}\pi^i\pi_i \tag{5.40}$$

et la transformation de Legendre définie dans (5.7) donne la densité Hamiltonienne

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \pi^\mu.\dot{A}_\mu-\mathcal{L} \\ &= \pi^i\dot{A}_i+\frac{1}{4}F^{ij}F_{ij}\ +\frac{1}{2}\pi^i\pi_i\end{aligned} \tag{5.41}$$

les vitesses $\dot{A}_i$ peuvent être exprimées en termes de moments comme

$$\dot{A}_i = -\pi_i + \partial_i A^0$$

on remplace dans (5.41) on a

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\pi^i \pi_i + \pi^i \partial_i A^0 + \frac{1}{4}F^{ij}F_{ij} \tag{5.42}$$

Construisons l'hamiltonien canonique qui est

$$\begin{aligned} H_c &= \int d^3\mathbf{x}\mathcal{H} \\ &= \int d^3\mathbf{x}\left(-\frac{1}{2}\pi^i\pi_i + \pi^i\partial_i A^0 + \frac{1}{4}F^{ij}F_{ij}\right) \\ &= \int d^3\mathbf{x}\left(-\frac{1}{2}\pi^i\pi_i + \partial_i\left(\pi^i A^0\right) - A^0\partial_i\pi^i + \frac{1}{4}F^{ij}F_{ij}\right) \end{aligned} \tag{5.43}$$

on peut supprimer le terme $\partial_i\left(\pi^i A^0\right)$ au moyen du théorème de Gauss en supposant que les champs et les moments sont nuls à l'infini (surface).

$$H_c = \int d^3\mathbf{x}\left(-\frac{1}{2}\pi^i\pi_i - A^0\partial_i\pi^i + \frac{1}{4}F^{ij}F_{ij}\right) \tag{5.44}$$

L'hamiltonien total est donc

$$H_T = H_c + \int d^3\mathbf{x}\lambda\phi_1 \tag{5.45}$$

où λ est un champ multiplicateur et

$$\phi_1 = \pi^0 \approx 0 \tag{5.46}$$

est la contrainte primaire. La condition de consistance pour ϕ_1 donne

$$\dot{\phi}_1 = \{\phi_1, H_T\} = \left\{\pi^0(\mathbf{x}), H_T(\mathbf{y})\right\} \approx 0$$

c'est-à-dire

$$\int d^3\mathbf{z}\left(\frac{\delta\pi^0(\mathbf{x})}{\delta A^\mu(\mathbf{z})}\frac{\delta H_T(\mathbf{y})}{\delta\pi^\mu(\mathbf{z})} - \frac{\delta\pi^0(\mathbf{x})}{\delta\pi^\mu(\mathbf{z})}\frac{\delta H_T(\mathbf{y})}{\delta A^\mu(\mathbf{z})}\right) \approx 0$$

par rapport aux variables $\{A^\mu, \pi^\mu\}$ donc

$$-\int d^3\mathbf{z}\frac{\delta\pi^0(\mathbf{x})}{\delta\pi^\mu(\mathbf{z})}\frac{\delta H_T(\mathbf{y})}{\delta A^\mu(\mathbf{z})} \approx 0$$

d'aprés (5.17) on aura

$$-\int d^3\mathbf{z}\delta_0^\mu\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{z})\frac{\delta H_T(\mathbf{y})}{\delta A^\mu(\mathbf{z})} \approx 0$$

c'est-à-dire

$$-\frac{\delta H_T(\mathbf{y})}{\delta A^0(\mathbf{x})} \approx 0$$

et par (5.45) il vient

$$-\int d^3\mathbf{y}\left(-\delta^3(\mathbf{y}-\mathbf{x})\,\partial_i\pi^i(\mathbf{y})\right) \approx 0$$

donc

$$\partial_i\pi^i(\mathbf{x}) \approx 0 \tag{5.47}$$

qui est notre contraitre secondaire et qui n'est rien d'autre que $\partial_i E^i = 0$; c'est l'équation de Maxwell Gauss dans le vide. Donc écrivons

$$\phi_2 = \partial_i\pi^i(\mathbf{x}) \approx 0 \tag{5.48}$$

de même ϕ_2 doit vérifier la condition de consistance

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_2 &= \{\phi_2, H_T\}\\ &= \left\{\partial_i\pi^i(\mathbf{x}), H_T(\mathbf{y})\right\} \approx 0\end{aligned}$$

explicitement

$$\int d^3\mathbf{z}\left(\frac{\delta\left(\partial_i\pi^i(\mathbf{x})\right)}{\delta A^\mu(\mathbf{z})}\frac{\delta H_T(\mathbf{y})}{\delta\pi^\mu(\mathbf{z})} - \frac{\delta\left(\partial_i\pi^i(\mathbf{x})\right)}{\delta\pi^\mu(\mathbf{z})}\frac{\delta H_T(\mathbf{y})}{\delta A^\mu(\mathbf{z})}\right) \approx 0$$

comme $\delta\left(\partial_i\pi^i\right) = \partial_i\left(\delta\pi^i\right)$ on aura donc

$$\int d^3\mathbf{z}\left(-\partial_i\frac{\left(\delta\pi^i(\mathbf{x})\right)}{\delta\pi^\mu(\mathbf{z})}\frac{\delta H_T(\mathbf{y})}{\delta A^\mu(\mathbf{z})}\right) \approx 0$$

alors

$$\int d^3\mathbf{z}\left(-\partial_i\left(\delta^i_\mu\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{z})\right)\frac{\delta H_T(\mathbf{y})}{\delta A^i(\mathbf{z})}\right) \approx 0$$

ainsi on obtient l'identité

$$0 \approx 0 \tag{5.49}$$

et l'algorithme se termine.

5.4.3 Fixation de jauge et crochets de Dirac

Comme on a vu, l'algorithme de Dirac-Bergmann donne les deux contraintes indépendantes suivantes

$$\phi_1 = \pi^0 \approx 0 \tag{5.50}$$

$$\phi_2 = \partial_i\pi^i \approx 0 \tag{5.51}$$

ces deux contraintes sont de première classe puisque

$$\begin{aligned} \{\phi_1, \phi_2\} &= \int d^3\mathbf{z} \left(\frac{\delta (\pi^0 (\mathbf{x}))}{\delta A^\mu (\mathbf{z})} \frac{\delta (\partial_i \pi^i (\mathbf{y}))}{\delta \pi^\mu (\mathbf{z})} - \frac{\delta (\pi^0 (\mathbf{x}))}{\delta \pi^\mu (\mathbf{z})} \frac{\delta (\partial_i \pi^i (\mathbf{y}))}{\delta A^\mu (\mathbf{z})} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme prévu, nous devons faire face à la liberté de jauge générée par ces contraintes de première classe. En effet, afin d'arriver à une théorie quantique, nous devons supprimer cette liberté de jauge en ajoutant des conditions de fixation de jauge " à la main ". Ces contraintes de jauge convertissent les contraintes en seconde classe. Il existe plusieurs jauges disponibles dans la théorie de Maxwell. La jauge de Coulomb $\partial_i A^i = 0$ est la plus adaptée à notre formalisme de fixation de jauge. Cependant, cette condition ne supprime pas toute la liberté de jauge. Il reste une condition à imposer, puisque nous avons besoin d'autant de conditions de jauge qu'il y a de contraintes de première classe. Nous choisisssons de plus $A_0 = 0$. Ainsi, on pose

$$\phi_3 = \partial_i A^i \approx 0 \tag{5.52}$$

$$\phi_4 = A_0 \approx 0 \tag{5.53}$$

En combinant les contraintes de première classe (ϕ_1, ϕ_2) ainsi que les conditions de fixation des jauges dans (ϕ_3, ϕ_4) nous pouvons calculer la matrice des contraintes. En effet, comme on montre ci-dessous l'ensemble $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ est de deuxième classe. Calculons

$$\begin{aligned} \{\phi_1, \phi_3\} &= \left\{\pi^0 (\mathbf{x}), \partial_i A^i (\mathbf{y})\right\} = \int d^3\mathbf{z} \left(\frac{\delta (\pi^0 (\mathbf{x}))}{\delta A^\mu (\mathbf{z})} \frac{\delta (\partial_i A^i (\mathbf{y}))}{\delta \pi^\mu (\mathbf{z})} - \frac{\delta (\pi^0 (\mathbf{x}))}{\delta \pi^\mu (\mathbf{z})} \frac{\delta (\partial_i A^i (\mathbf{y}))}{\delta A^\mu (\mathbf{z})} \right) \\ &= \int d^3\mathbf{z} \left(- \frac{\delta (\pi^0 (\mathbf{x}))}{\delta \pi^\mu (\mathbf{z})} \frac{\partial_i \delta (A^i (\mathbf{y}))}{\delta A^\mu (\mathbf{z})} \right) \\ &= - \int d^3\mathbf{z} \delta^0_\mu \delta^3 (\mathbf{x} - \mathbf{z}) \delta^i_\mu \partial_i \delta^3 (\mathbf{y} - \mathbf{z}) = - \int d^3\mathbf{z} \delta^3 (\mathbf{x} - \mathbf{z}) \delta^i_0 \partial_i \delta^3 (\mathbf{y} - \mathbf{z}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \{\phi_1, \phi_4\} &= \left\{\pi^0 (\mathbf{x}), A_0 (\mathbf{y})\right\} = \int d^3\mathbf{z} \left(\frac{\delta (\pi^0 (\mathbf{x}))}{\delta A^\mu (\mathbf{z})} \frac{\delta (A_0 (\mathbf{y}))}{\delta \pi^\mu (\mathbf{z})} - \frac{\delta (\pi^0 (\mathbf{x}))}{\delta \pi^\mu (\mathbf{z})} \frac{\delta (A_0 (\mathbf{y}))}{\delta A^\mu (\mathbf{z})} \right) \\ &= - \int d^3\mathbf{z} \frac{\delta (\pi^0 (\mathbf{x}))}{\delta \pi^\mu (\mathbf{z})} \frac{\delta (A_0 (\mathbf{y}))}{\delta A^\mu (\mathbf{z})} = - \int d^3\mathbf{z} \delta^0_\mu \delta^3 (\mathbf{x} - \mathbf{z}) \delta^0_\mu \delta^3 (\mathbf{y} - \mathbf{z}) \\ &= -\delta^3 (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}
\{\phi_2,\phi_3\} &= \left\{\partial_i\pi^i(\mathbf{x}),\partial_i A^i(\mathbf{y})\right\}\\
&= \int d^3\mathbf{z}\left(\frac{\delta\left(\partial_i\pi^i(\mathbf{x})\right)}{\delta A^\mu(\mathbf{z})}\frac{\delta\left(\partial_i A^i(\mathbf{y})\right)}{\delta\pi^\mu(\mathbf{z})}-\frac{\delta\left(\partial_i\pi^i(\mathbf{x})\right)}{\delta\pi^\mu(\mathbf{z})}\frac{\delta\left(\partial_i A^i(\mathbf{y})\right)}{\delta A^\mu(\mathbf{z})}\right)\\
&= \int d^3\mathbf{z}\left(\frac{\partial_i\delta\left(\pi^i(\mathbf{x})\right)}{\delta A^\mu(\mathbf{z})}\frac{\partial_i\delta\left(A^i(\mathbf{y})\right)}{\delta\pi^\mu(\mathbf{z})}-\frac{\partial_i\delta\left(\pi^i(\mathbf{x})\right)}{\delta\pi^\mu(\mathbf{z})}\frac{\partial_i\delta\left(A^i(\mathbf{y})\right)}{\delta A^\mu(\mathbf{z})}\right)\\
&= -\int d^3\mathbf{z}\left(\frac{\partial_i\delta\left(\pi^i(\mathbf{x})\right)}{\delta\pi^\mu(\mathbf{z})}\frac{\partial_i\delta\left(A^i(\mathbf{y})\right)}{\delta A^\mu(\mathbf{z})}\right)\\
&= -\int d^3\mathbf{z}\partial_i(\mathbf{x})\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{z})\,\partial_i(\mathbf{y})\,\delta^3(\mathbf{y}-\mathbf{z})\\
&= -\partial_i(\mathbf{x})\,\partial_i(\mathbf{y})\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = -\nabla^2(\mathbf{x})\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\{\phi_2,\phi_4\} &= \left\{\partial_i\pi^i(\mathbf{x}),A_0(\mathbf{y})\right\}\\
&= \int d^3\mathbf{z}\left(\frac{\delta\left(\partial_i\pi^i(\mathbf{x})\right)}{\delta A^\mu(\mathbf{z})}\frac{\delta\left(A_0(\mathbf{y})\right)}{\delta\pi^\mu(\mathbf{z})}-\frac{\delta\left(\partial_i\pi^i(\mathbf{x})\right)}{\delta\pi^\mu(\mathbf{z})}\frac{\delta\left(A_0(\mathbf{y})\right)}{\delta A^\mu(\mathbf{z})}\right)\\
&= \int d^3\mathbf{z}\left(\frac{\partial_i\delta\pi^i(\mathbf{x})}{\delta A^\mu(\mathbf{z})}\frac{\delta\left(A_0(\mathbf{y})\right)}{\delta\pi^\mu(\mathbf{z})}-\frac{\partial_i\left(\delta\pi^i(\mathbf{x})\right)}{\delta\pi^\mu(\mathbf{z})}\frac{\delta\left(A_0(\mathbf{y})\right)}{\delta A^\mu(\mathbf{z})}\right)\\
&= -\int d^3\mathbf{z}\left(\frac{\partial_i\left(\delta\pi^i(\mathbf{x})\right)}{\delta\pi^\mu(\mathbf{z})}\frac{\delta\left(A_0(\mathbf{y})\right)}{\delta A^\mu(\mathbf{z})}\right)\\
&= -\int d^3\mathbf{z}\partial_i(\mathbf{x})\,\delta^i_\mu\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{z})\,\delta^0_\mu\delta^3(\mathbf{y}-\mathbf{z}) = 0
\end{aligned}$$

$$\Delta(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -\nabla^2(\mathbf{x}) & 0\\ 0 & \nabla^2(\mathbf{x}) & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

en notant que

$$\nabla^{-2}(\mathbf{x})\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \tag{5.54}$$

on peut arriver à la matrice inverse

$$\Delta^{-1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\Delta)^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\\ 0 & 0 & -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} & 0\\ 0 & \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} & 0 & 0\\ -\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

On peut maintenant calculer les crochets de Dirac des variables dynamiques à temps égals en utilisant (5.25) à savoir

$$\begin{aligned}\{F(\mathbf{x}), G(\mathbf{y})\}_D &= \{F(\mathbf{x}), G(\mathbf{y})\} \\ &-\int\int d^3\mathbf{u}d^3\boldsymbol{v}\,\{F(\mathbf{x}), \phi_i(\mathbf{u})\}\,\Delta^{ij}(\mathbf{u},\boldsymbol{v})\left\{\phi_j(\boldsymbol{v}), G(\mathbf{y})\right\} \end{aligned}\tag{5.55}$$

ici $i, j = 1, .., 4$. Par exemple, calculons le crochet $\{A_\mu(\mathbf{x}), \pi^\nu(\mathbf{y})\}_D$ comme suit

$$\begin{aligned}\{A_\mu(\mathbf{x}), \pi^\nu(\mathbf{y})\}_D &= \{A_\mu(\mathbf{x}), \pi^\nu(\mathbf{y})\} \\ &-\int\int d^3\mathbf{u}d^3\boldsymbol{v}\,\{A_\mu(\mathbf{x}), \phi_i(\mathbf{u})\}\,\Delta^{ij}(\mathbf{u},\boldsymbol{v})\left\{\phi_j(\boldsymbol{v}), \pi^\nu(\mathbf{y})\right\} \end{aligned}\tag{5.56}$$

les élements non nuls de la matrice Δ^{-1} nous donnent

$$\begin{aligned}\{A_\mu(\mathbf{x}), \pi^\nu(\mathbf{y})\}_D &= \{A_\mu(\mathbf{x}), \pi^\nu(\mathbf{y})\} \\ &-\int\int d^3\mathbf{u}d^3\boldsymbol{v}\,\{A_\mu(\mathbf{x}), \phi_1(\mathbf{u})\}\,\Delta^{14}(\mathbf{u},\boldsymbol{v})\,\{\phi_4(\boldsymbol{v}), \pi^\nu(\mathbf{y})\} \\ &-\int\int d^3\mathbf{u}d^3\boldsymbol{v}\,\{A_\mu(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{u})\}\,\Delta^{23}(\mathbf{u},\boldsymbol{v})\,\{\phi_3(\boldsymbol{v}), \pi^\nu(\mathbf{y})\} \\ &-\int\int d^3\mathbf{u}d^3\boldsymbol{v}\,\{A_\mu(\mathbf{x}), \phi_3(\mathbf{u})\}\,\Delta^{32}(\mathbf{u},\boldsymbol{v})\,\{\phi_2(\boldsymbol{v}), \pi^\nu(\mathbf{y})\} \\ &-\int\int d^3\mathbf{u}d^3\boldsymbol{v}\,\{A_\mu(\mathbf{x}), \phi_4(\mathbf{u})\}\,\Delta^{41}\,\{\phi_1(\boldsymbol{v}), \pi^\nu(\mathbf{y})\} \end{aligned}\tag{5.57}$$

on a déjà

$$\begin{aligned}\{A_\mu(\mathbf{x}), \phi_4(\mathbf{u})\} &= \{A_\mu(\mathbf{x}), A_0(\mathbf{u})\} = 0 \\ \{A_\mu(\mathbf{x}), \pi^\nu(\mathbf{y})\} &= \delta_\mu^\nu\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ \left\{A_\mu(\mathbf{x}), \partial_i A^i(\mathbf{u})\right\} &= 0\end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned}\{A_\mu(\mathbf{x}), \pi^\nu(\mathbf{y})\}_D &= \delta_\mu^\nu\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ &-\int\int d^3\mathbf{u}d^3\boldsymbol{v}\,\delta_\mu^0\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{u})\,\delta^3(\mathbf{u}-\boldsymbol{v})\,\delta_0^\nu\delta^3(\boldsymbol{v}-\mathbf{y}) \\ &+\int\int d^3\mathbf{u}d^3\boldsymbol{v}\,\left\{A_\mu(\mathbf{x}), \partial_i\pi^i(\mathbf{u})\right\}\frac{1}{4\pi\,|\mathbf{u}-\boldsymbol{v}|}\left\{\partial_j A^j(\boldsymbol{v}), \pi^\nu(\mathbf{y})\right\}\end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned}
\left\{A_\mu(\mathbf{x}), \partial_i\pi^i(\mathbf{u})\right\} &= \int d^3\mathbf{z}\left(\frac{\delta(A_\mu(\mathbf{x}))}{\delta A^\mu(\mathbf{z})}\frac{\delta(\partial_i\pi^i(\mathbf{u}))}{\delta\pi^\mu(\mathbf{z})} - \frac{\delta(A_\mu(\mathbf{x}))}{\delta\pi^\mu(\mathbf{z})}\frac{\delta(\partial_i\pi^i(\mathbf{u}))}{\delta A^\mu(\mathbf{z})}\right) \\
&= \int d^3\mathbf{z}\left(\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{z})\,\delta^i_\mu\partial_i(\mathbf{u})\,\delta^3(\mathbf{u}-\mathbf{z})\right) \\
&= \partial_i(\mathbf{u})\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{u})\,\delta^i_\mu
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left\{\partial_j A^j(\boldsymbol{v}), \pi^\nu(\mathbf{y})\right\} &= \int d^3\mathbf{z}\left(\frac{\delta(\partial_j A^j(\boldsymbol{v}))}{\delta A^\mu(\mathbf{z})}\frac{\delta(\pi^\nu(\mathbf{y}))}{\delta\pi^\mu(\mathbf{z})}\right) \\
&= \int d^3\mathbf{z}\partial_j(\boldsymbol{v})\,\delta^j_\mu\delta^3(\boldsymbol{v}-\mathbf{z})\,\delta^\nu_\mu\delta^3(\mathbf{y}-\mathbf{z}) \\
&= \partial_j(\boldsymbol{v})\,\delta^j_\nu\delta^3(\boldsymbol{v}-\mathbf{y})
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\{A_\mu(\mathbf{x}), \pi^\nu(\mathbf{y})\}_D &= \delta^\nu_\mu\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&\quad -\int\!\!\int d^3\mathbf{u}d^3\boldsymbol{v}\delta^0_\mu\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{u})\,\delta^3(\mathbf{u}-\boldsymbol{v})\,\delta^\nu_0\delta^3(\boldsymbol{v}-\mathbf{y}) \\
&\quad +\int\!\!\int d^3\mathbf{u}d^3\boldsymbol{v}\partial_i(\mathbf{u})\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{u})\,\delta^i_\mu\frac{1}{4\pi|\mathbf{u}-\boldsymbol{v}|}\partial_j(\boldsymbol{v})\,\delta^j_\nu\delta^3(\boldsymbol{v}-\mathbf{y})
\end{aligned}$$

effectuons les intégrales

$$\{A_\mu(\mathbf{x}), \pi^\nu(\mathbf{y})\}_D = \left(\delta^\nu_\mu - \delta^0_\mu\delta^\nu_0\right)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \partial_i\partial_j\delta^i_\mu\delta^\nu_j\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \tag{5.58}$$

Ainsi on déduit les crochets de Dirac

$$\begin{aligned}
\left\{A_\mu(\mathbf{x}), \pi^0(\mathbf{y})\right\}_D &= 0 && (5.59)\\
\{A_0(\mathbf{x}), \pi^\mu(\mathbf{y})\}_D &= 0 && (5.60)\\
\left\{A_i(\mathbf{x}), \pi^j(\mathbf{y})\right\}_D &= \delta^j_i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \partial_i\partial_j\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \\
&= \delta^j_i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&= \left(\delta^j_i - \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}\right)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&= \delta^3_\perp(\mathbf{x}-\mathbf{y}) && (5.61)
\end{aligned}$$

5.5 Champ de Maxwell libre : Méthode de Faddeev-Jackiw

Dans cette section, on va considérer le même système (c-à-d le champ libre de Maxwell) mais cette fois-ci on va chercher les crochets de Dirac en utilisant la méthode de Faddeev-Jackiw.

5.5.1 Construction de la matrice symplectique

Rappelons que la densité lagrangien correspondante est

$$\mathcal{L} = \pi^{\mu}.\dot{A}_{\mu} - \mathcal{H}_c \tag{5.62}$$

comme le moment conjugués $\pi^0 = 0$ est une contrainte primaire qui doit être introduite directement, la densité lagrangienne est donc

$$\mathcal{L} = \pi^{i}.\dot{A}_{i} - \mathcal{H}_c \tag{5.63}$$

Par conséquent, la densité hamiltonienne aura l'expression

$$\mathcal{H}_c^{(0)} = -\frac{1}{2}\pi^i\pi_i - A^0\partial_i\pi^i + \frac{1}{4}F^{ij}F_{ij} \tag{5.64}$$

et la densité (5.63) devient

$$\mathcal{L}^{(0)} = \pi^{i}.\dot{A}_{i}+\frac{1}{2}\pi^i\pi_i + A^0\partial_i\pi^i - \frac{1}{4}F^{ij}F_{ij} \tag{5.65}$$

où l'indice (0) en haut représente l'étape initial de l'Algorithme de F-J. Ainsi, on choisi comme variables indépendantes l'ensemble symplectique $\{A_0, A_i, \pi_i\}$. Cela nous permet d'écrire la densité précédente comme

$$\mathcal{L}^{(0)}(\mathbf{y}) = a_I^{(0)}(\mathbf{y})\ \dot{\xi}_I(\mathbf{y}) - \mathcal{H}_c^{(0)}(\mathbf{y}) \quad , \tag{5.66}$$

de façon que $\xi_I(\mathbf{x}) \in \{A_0, A_i, \pi_i\}$. Par une analyse similaire à celle vue au chapitre 2, nous pouvons arriver à

$$f_{IJ}{}^{(0)}\dot{\xi}_J = \frac{\partial \mathcal{H}_c^{(0)}}{\partial \xi_I} \quad , \quad \xi_I(\mathbf{x}),\ \xi_J(\mathbf{x}) \in \{A_0,\ A_i,\ \pi_i\} \tag{5.67}$$

avec $f_{IJ}{}^{(0)}$ est un élément de matrice définit comme

$$f_{IJ}{}^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \{\xi_I(\mathbf{x}),\ \xi_J(\mathbf{x})\} = \frac{\delta a_J^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_I(\mathbf{x})} - \frac{\delta a_I^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_J(\mathbf{x})}, \tag{5.68}$$

Comme le but est de chercher une matrice symplectique inversible, il n'est pas nécéssaire ici d'écrire les équations de mouvements explicitement, comme on fait dans le chapitre 2, mais seulement de déterminer la matrice $f^{(0)}$. Alors, on a les coefficients

$$a_{(A_0)}^{(0)} = 0 \tag{5.69}$$

$$a_{(A_i)}^{(0)} = \pi^i \tag{5.70}$$

$$a_{(\pi_i)}^{(0)} = 0 \tag{5.71}$$

qui vont donner la matrice symplectique

$$f^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{ij} \\ 0 & -\delta_{ij} & 0 \end{pmatrix} \delta^3 (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{5.72}$$

5.5.2 Inversion de la matrice symplectique "Algorithme de Barcelos-Wotzasek"

$f^{(0)}$ est singulière (n'est pas inversible), de $rang\left(f^{(0)}\right) = 2$. Alors cette matrice admet un seul mode zéro ; $n + R - rang\left(f^{(0)}\right) = 2 + 1 - 2 = 1$ qui est

$$\upsilon^{(0)} (\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \upsilon (\mathbf{x}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^T \tag{5.73}$$

$\upsilon (\mathbf{x})$ est une fonction arbitraire. Multiplions (5.67) à gauche par ce mode zéro, on aura

$$\int d^3\mathbf{x} \upsilon_I^{(0)} (\mathbf{x}) \frac{\delta \int d^3\mathbf{y} \mathcal{H}_c^{(0)} (\mathbf{y})}{\delta \xi_I (\mathbf{x})} = \mathbf{0}, \quad \xi_I (\mathbf{x}) \in \{A_0, \ A_i, \ \pi_i\} \tag{5.74}$$

c'est-à-dire

$$\int d^3\mathbf{x} \upsilon (\mathbf{x}) \partial_i \pi^i (\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \upsilon (\mathbf{x}) \tag{5.75}$$

il en résult que

$$\partial_i \pi^i (\mathbf{x}) = 0 \tag{5.76}$$

qui est une nouvelle contrainte. A ce stade, on doit ajouter cette contrainte dans densité lagrangienne comme

$$\mathcal{L}^{(1)} = \pi^i . \dot{A}_i + \dot{\lambda} \left(\partial_i \pi^i\right) - \mathcal{H}_c^{(1)} (\mathbf{y}) \tag{5.77}$$

où la densité Hamiltonienne $\mathcal{H}_c^{(1)} (\mathbf{y})$ est maintenant

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c^{(1)} (\mathbf{y}) &= \mathcal{H}_c^{(0)} (\mathbf{y})\big|_{\partial_i \pi^i (\mathbf{x}) = 0} \\ &= -\frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} \end{aligned}$$

en terme des variables indépendantes ξ^I, l'expression (5.77) s'écrit

$$\mathcal{L}^{(1)} (\mathbf{y}) = a_I^{(1)} (\mathbf{y}) \ \dot{\xi}_I (\mathbf{y}) - \mathcal{H}_c^{(1)} (\mathbf{y}) \quad , \tag{5.78}$$

Notons ici que le champ A_0 disparait naturellement. Ainsi, on a

$$f_{IJ} \ {}^{(1)} \dot{\xi}_J = \frac{\partial \mathcal{H}_c^{(1)}}{\partial \xi_I} \quad , \tag{5.79}$$

avec l'ensemble symplectique $\{ A_i, \ \pi_i, \lambda\}$, et $f_{IJ}{}^{(1)}$ est

$$f_{IJ}{}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\delta a_J^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_I(\mathbf{x})} - \frac{\delta a_I^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_J(\mathbf{x})}, \text{ avec } \ \xi_I(\mathbf{x}) \in \{ A_i, \ \pi_i, \lambda\}$$

avec les coefficients

$$\begin{aligned} a^{(1)}_{(A_i)} &= \pi^i \\ a^{(1)}_{(\pi_i)} &= 0 \\ a^{(1)}_{(\lambda)} &= \partial_i \pi^i \end{aligned} \tag{5.80}$$

par un calcul simple on détermine la matrice $f^{(1)}$ de la façon suivante

$$f^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -\delta_{ij} & 0 & \partial_i(\mathbf{x}) \\ 0 & -\partial_j(\mathbf{x}) & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{5.81}$$

$f^{(1)}$ est singulière son mode zéro est

$$v_I^{(1)}(\mathbf{x}) = \left(v^{A_i}, 0, v^{\lambda}\right)^T$$

avec le relation suivante entre ses composantes

$$v^{A_i} = \partial_i v^{\lambda} \tag{5.82}$$

Multiplions (5.79) à gauche par ce mode zéro, on aura

$$\int d^3\mathbf{x} v_I^{(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta \int d^3\mathbf{y} \mathcal{H}_c^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_I(\mathbf{x})} = \mathbf{0}, \qquad \xi_I(\mathbf{x}) \in \{A_i, \ \pi_i, \lambda\} \tag{5.83}$$

ainsi

$$\int d^3\mathbf{x} v^{A_i} \frac{\int d^3\mathbf{y} \delta\left(F^{ij}(\mathbf{y}) F_{ij}(\mathbf{y})\right)}{\delta A_k(\mathbf{x})} = \mathbf{0}, \tag{5.84}$$

introduisons (5.82) on obtient

$$\int d^3\mathbf{x} \partial_i(\mathbf{x}) v^{\lambda} \frac{\int d^3\mathbf{y} \delta\left(\partial_i A_j \partial^i A^j - \partial_i A_j \partial^j A^i\right)}{\delta A_k(\mathbf{x})} = 0 \tag{5.85}$$

d'où

$$\int d^3\mathbf{x} v^{\lambda} \left(\partial_j \partial_j \partial_i A_i - \partial_i \partial_i \partial_j A_j\right)) = 0$$

qui est une identité de la forme

$$0 = 0 \tag{5.86}$$

Ainsi, le mode zéro ne donne aucune nouvelle contrainte et, par conséquent, la matrice $f^{(1)}$ reste singulière. C'est une caractéristique des théories de jauges. On est donc dans une situation similaire à celle de la méthode de Dirac où les contraintes sont toutes de première classe. Il faut alors fixer la jauge " à la main " on choisissons la jauge de Coulomb

$$\partial_i A^i = 0, \tag{5.87}$$

par conséquent, la densité lagrangienne(5.77) doit contient le terme $(\partial_i A^i)\dot{\eta}$ et s'écrit alors comme $\mathcal{L}^{(2)}$ de la façon suivante

$$\mathcal{L}^{(2)} = \pi^i.\dot{A}_i + \left(\partial_i \pi^i\right)\dot{\lambda} + \left(\partial_i A^i\right)\dot{\eta} - \mathcal{H}_c^{(2)}(\mathbf{y})$$

où

$$\mathcal{H}_c^{(2)}(\mathbf{y}) = -\frac{1}{2}\pi^i\pi_i + \frac{1}{4}F^{ij}F_{ij}$$

avec

$$f_{IJ}{}^{(2)}\dot{\xi}_J = \frac{\partial \mathcal{H}_c^{(2)}}{\partial \xi_I}\ , \tag{5.88}$$

$$f_{IJ}{}^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\delta a_J^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_I(\mathbf{x})} - \frac{\delta a_I^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_J(\mathbf{x})}, \tag{5.89}$$

où ici $\xi_I(\mathbf{x}) \in \{\ A_i,\ \pi_i, \lambda, \eta\}$. On a les coefficients

$$\begin{aligned} a^{(2)}_{(A_i)} &= \pi^i \\ a^{(2)}_{(\pi_i)} &= 0 \\ a^{(2)}_{(\lambda)} &= \partial_i \pi^i \\ a^{(2)}_{(\eta)} &= \partial_i A^i \end{aligned} \tag{5.90}$$

qui vont donner la matrice

$$f^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 & \partial_i(\mathbf{x}) \\ -\delta_{ij} & 0 & \partial_i(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & -\partial_j(\mathbf{x}) & 0 & 0 \\ -\partial_j(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{5.91}$$

Notons d'abord que la matrice $f^{(2)}$contient la matrice $f^{(1)}$ comme une sous matrice. Nous devons alors chercher son inverse $\left(f^{(2)}\right)^{-1}$ qui obéit à la relation

$$\int f^{(2)}_{\xi_I\xi_K}(\mathbf{x},\mathbf{z})\left(f^{(2)}\right)^{-1}_{\xi_K\xi_J}(\mathbf{z},\mathbf{y})\,d^3\mathbf{z} = \int \left(f^{(2)}\right)^{-1}_{\xi_K\xi_J}(\mathbf{z},\mathbf{y})\,f^{(2)}_{\xi_I\xi_K}(\mathbf{x},\mathbf{z})\,d^3\mathbf{z} = \delta_{\xi_I\xi_J}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{5.92}$$

avec une sommation sur ξ_K. Afin de simplifier le calcul, il est utile de noter que la matrice symplectique inverse $\left(f^{(2)}\right)^{-1}$ est aussi une matrice antisymétrique. Afin de calculer $\left(f^{(2)}\right)^{-1}$ on réécrit la matrice (5.91) comme

$$\left(f^{(2)}\right)(\mathbf{x},\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 0 & \left(f^{(2)}\right)_{A_i\pi_i} & 0 & \left(f^{(2)}\right)_{A_i\eta} \\ \left(f^{(2)}\right)_{\pi_i A_i} & 0 & \left(f^{(2)}\right)_{\pi_i\lambda} & 0 \\ 0 & \left(f^{(2)}\right)_{\lambda\pi_i} & 0 & 0 \\ \left(f^{(2)}\right)_{\eta A_i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.93}$$

montrons comment calculer les éléments de $\left(f^{(2)}\right)^{-1}$. En effet, appliquons (5.92) avec $\xi_I \in \{\ A_i,\ \pi_i, \lambda, \eta\}$. Par exemple, pour $\xi_I = A_i$ et $\xi_J = A_j$, la somme porte sur $\xi_K \in \{\ A_i,\ \pi_i, \lambda, \eta\}$ alors on a

$$\int \left(f^{(2)}\right)_{A_i\pi_i}(\mathbf{x},\mathbf{z})\left(f^{(2)}\right)^{-1}_{\pi_i A_j}(\mathbf{z},\mathbf{y})\,d^3\mathbf{z} + \int \left(f^{(2)}\right)_{A_i\eta}(\mathbf{x},\mathbf{z})\left(f^{(2)}\right)^{-1}_{\eta A_j}(\mathbf{z},\mathbf{y})\,d^3\mathbf{z} = \delta_{A_iA_j}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

où on a tenu compte la forme de la matrice $f^{(2)}$ (voir (5.93)). D'aprés (5.91) on aura

$$\int \delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{z})\left(f^{(2)}\right)^{-1}_{\pi_j A_j}(\mathbf{z},\mathbf{y})\,d^3\mathbf{z} + \int \partial_i(\mathbf{x})\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{z})\left(f^{(2)}\right)^{-1}_{\eta A_j}(\mathbf{z},\mathbf{y})\,d^3\mathbf{z} = \delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

intégrons

$$\delta_{ij}\left(f^{(2)}\right)^{-1}_{\pi_j A_j}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \partial_i(\mathbf{x})\left(f^{(2)}\right)^{-1}_{\eta A_j}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

c'est-à-dire

$$\left(f^{(2)}\right)^{-1}_{\pi_i A_i}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \partial_i(\mathbf{x})\left(f^{(2)}\right)^{-1}_{\eta A_j}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \tag{5.94}$$

on a besoin d'une autre équation. En effet, pour $\xi_I = \eta$ et $\xi_J = \eta$, la somme porte sur $\xi_K \in \{\ A_j,\ \pi_j, \lambda, \eta\}$ on a

$$\int f^{(2)}_{\xi_I\xi_K}(\mathbf{x},\mathbf{z})\left(f^{(2)}\right)^{-1}_{\xi_K\xi_J}(\mathbf{z},\mathbf{y})\,d^3\mathbf{z} = \delta_{\xi_I\xi_J}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{5.95}$$

$$\int f^{(2)}_{\eta A_j}(\mathbf{x},\mathbf{z})\left(f^{(2)}\right)^{-1}_{A_j\eta}(\mathbf{z},\mathbf{y})\,d^3\mathbf{z} = \delta_{\eta\eta}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

qui donne

$$-\int \partial_j(\mathbf{x})\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{z})\left(f^{(2)}\right)^{-1}_{A_j\eta}(\mathbf{z},\mathbf{y})\,d^3\mathbf{z} = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

c-à-d

$$-\partial_j(\mathbf{x})\left(f^{(2)}\right)^{-1}_{A_j\eta}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

et comme $\left(f^{(2)}\right)^{-1}_{A_j\eta}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\left(f^{(2)}\right)^{-1}_{\eta A_j}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ il vient

$$\partial_j(\mathbf{x})\left(f^{(2)}\right)^{-1}_{\eta A_j}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

introduisons la dérivée $\partial_j(\mathbf{x})$ des deux cotés on obtient

$$\left(f^{(2)}\right)^{-1}_{\eta A_j}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{\nabla^2(\mathbf{x})}\partial_j(\mathbf{x})\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

remplaçons dans (5.94), on a

$$\left(f^{(2)}\right)^{-1}_{\pi_i A_i}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i(\mathbf{x})\,\partial_j(\mathbf{x})}{\nabla^2}\right)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

Pour trouver les autres éléments de $\left(f^{(2)}\right)^{-1}$, on continu d'une manière similaire et on obtient finalement la matrice

$$\left(f^{(2)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} + \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2} & 0 & -\frac{\partial_j}{\nabla^2} \\ \delta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2} & 0 & -\frac{\partial_j}{\nabla^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial_i}{\nabla^2} & 0 & -\frac{1}{\nabla^2} \\ \frac{\partial_i}{\nabla^2} & 0 & \frac{1}{\nabla^2} & 0 \end{pmatrix}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{5.96}$$

Comme on le voit, les crochets de Poisson généralisés des variables dynamiques contenus dans cette matrice sont identiques à ceux de Dirac obtenus précédement. Par exemple, on tire le crochet

$$\{A_i, \pi_j\}_D = \left(-\delta_{ij} + \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}\right)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,. \tag{5.97}$$

Chapitre 6

Conclusion

Dans ce mémoire on a considéré principalement l'extension des systèmes avec contraintes vers la théorie des champs. Cet objectif est traité par la méthode de Dirac et celle de Fadeev-Jackiw. Cependant, il a été indispensable de rappeler les notions essentielles des deux méthodes pour un système à une particule.

Ainsi, pour passer à la théorie des champs c'est-à-dire aux degrés de liberté infinis on a appliqué les mêmes algorithmes en plus de quelques règles, à savoir :

i) Les variables d'espace des phases et les multiplicateurs de Dirac deviennent des champs.

ii) Une fonction des variables de l'espace des phases devient une fonctionnelle des champs et de leurs moments conjugués.

iii) Chaque fois qu'il y a une sommation sur les variables canoniques ou les multiplicateurs, on doit y avoir une intégrale de volume tridimensionnelle sur la somme des champs.

Comme application de ces règles de passage, on a considéré le champ de Maxwell libre par ces deux approches. Cet exemple présente une symétrie de jauge, par conséquent, les contraintes obtenues sont de première classe. Il a été nécessaire d'introduire des conditions supplémentaires pour fixer cette liberté de jauge. Les crochets de Dirac sont obtenus par la méthode de Dirac et Faddeev-Jackiw. Les résultats des deux méthodes sont équivalentes.

Comme perspective, il est naturel de penser à étendre ce travail :

- Au champs fermioniques.
- En théorie des champs dans un espace courbe.

Annexe

Annexe A

Modes zéro d'une matrice

Les modes zéro d'une matrice A sont les vecteurs de base de l'espace nul de cette matrice $nul\left(A\right)$. L'espace nul de A est définit comme

$$nul\left(A\right)=\left\{x,\ Ax=0\right\}$$

On peut trouver les vecteurs de base de $nul\left(A\right)$ facilement en utilisant le "scientific work place" en écrivant la matrice puis on met le curseur juste à coté de cette matrice et suivre le chemin suivant :

Compute → Matrices → Nullspace Basis

Exemple : soit la matrice
$\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ -a & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, nullspace basis : $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{a} \\ 1 \end{pmatrix}$

Annexe B

Soit la fonctionnelle $F\left[f\right]$ d'une certaine fonction $f(x)$. On définit la variation δF comme

$$\begin{aligned}\delta F &= F\left[f\left(x\right)+\delta f\left(x\right)\right]-F\left[f\left(x\right)\right]\\ &= \int dy\left(\frac{\delta F}{\delta f\left(y\right)}\right)\delta f\left(y\right)\end{aligned}$$

Si F est donnée par

$$F=\int_{\Omega}dxg\left(f,\nabla f\right)$$

alors

$$\begin{aligned}\delta F &= \int_{\Omega}dx\left[g\left(f+\delta f,\nabla f+\nabla\left(\delta f\right)\right)-g\left(f,\nabla f\right)\right]\\ &= \int_{\Omega}dx\left[\frac{\partial g}{\partial f}\delta f+\frac{\partial g}{\partial\left(\nabla f\right)}\nabla\left(\delta f\right)\right]\\ &= \int_{\Omega}dx\left[\frac{\partial g}{\partial f}-\nabla.\left(\frac{\partial g}{\partial\left(\nabla f\right)}\right)\right]\delta f\end{aligned}$$

où on a appliqué le théorème de Gauss en supposons que $\delta f = 0$ sur la surface. Ainsi, d'aprés la définition plus haut, on déduit que

$$\frac{\delta F}{\delta f} = \frac{\partial g}{\partial f} - \nabla . \left(\frac{\partial g}{\partial \left(\nabla f \right)} \right)$$

.

Bibliographie

[1] P. A. M. Dirac, Can. J. Math. 2, 129 (1950). "*Lectures on Quantum Mechanics*" (Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York 1964).

[2] J. L. Anderson and P. G. Bergmann, Phys. Rev. 83, 1018 (1951) ; P. G. Bergmann, I. Goldberg, Dirac bracket transformations in phase space, Phys. Rev., 98, 531 (1955).

[3] L. Faddeev and R. Jackiw,Phys. Rev. Lett.60, 1692 (1988).

[4] H. J. Rothe and K. D. Rothe, Journal of Physics A, **36,** 1671(2003) .

[5] J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek, Mod. Phys. Lett. **A 07**, 20 (1992).

[6] J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek, Mod. Phys. Lett. **A 07**, 19 (1992).

[7] H. J.Rothe, K. D. Rothe "*Classical and Quantum Dynamics of Constrained Hamiltonian Systems*".Instiut für Teoretische physik, Universität Heidelberg, Germany.

[8] A. Hanson, T. Regge and C. Teitelboim, *Constrained hamiltonian systems*, (Roma A. N. D. L, 1976).

[9] Z. Belhadi " *Application de la mécanique quantique non commutative en relativité et quantification des systèmes avec contraintes".* Thèse de Doctorat, Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou 2015.

[10] R. Zerimeche, *Etude classique et quantique d'une particule soumise à des contraintes*, *Mémoire de Master*, Université de Jijel (2019) ;

[11] M. Kamli, *Constraint systems treated by Dirac-Bergmann algorithm and Fadeev-Jackiw method, (*Master thesis, University of Jijel, 2020).

[12] P. A. M. Dirac, Rev. Mod. Phys. **21**, 392 (1949).

Résumé

Dans ce mémoire on a considéré l'extension des systèmes avec contraintes vers la théorie des champs. Cet objectif est traité par la méthode de Dirac et celle de Fadeev-Jackiw. Pour passer à la théorie des champs on a appliqué les mêmes algorithmes en plus de quelques règles. Comme application de ses règles de passage, on a considéré le champ de Maxwell libre par ces deux approches. cet exemple présente une symétrie de jauge, par conséquent, les contraintes obtenus sont de première classe. Il a été nécessaire l'introduire des conditions supplémentaires pour fixer cette liberté de jauge. Les crochets de Dirac obtenus par la méthode de Dirac et Fadeev-Jackiw, sont équivalents.

Mots clés : Contraintes, crochets de Dirac, Fddeev-Jackiw, champ de Maxwell.

Abstract

In this Master thesis we we considered the extension of constrained systems to field theory. This objective is treated by the method of Dirac and that of Fadeev-Jackiw. To switch to field Theory. We applied the same algorithms in addition to a few rules. As an application of this passage rules, we have considered the free Maxwell filed by these two approaches. This example has jauge symmetry, therefore the obtained constraints are first class. It was necessary to introduce additionals conditions to fix this jauge freedom. The Dirac brackets, obtained by the Dirac and Fadeev-Jackiw method, are equivalent.

Key words : Constraints, the Dirac brackets, Fddeev-Jackiw, the free Maxwell.

الملخص

في مذكره الماستر هذه قمنا بدراسة توسع الأنظمة المقيدة إلى نظرية الحقول. هذا الهدف تم انجازه بطريقه ديراك و طريقة فادياف-جاكوي. للتحويل لنظريه الحقول نطبق نفس الخوارزميات بالإضافة إلى بضعه قوانين. كتطبيق لقواعد المرور هذه, قمنا بدراسة حقل ماكسويل الحر بواسطة هاتين الطريقتين.
هذا المثال لديه تناظر معياري لذلك القيود التي وجدناها من الرتبة الأولى. كان من الضروري إدخال قيود إضافية من اجل إصلاح الحرية المعيارية. أقواس ديراك التي وجدناها كانت متكافئة بطريقه ديراك وطريقه فادياف-جاكوي.

الكلمات المفتاحية : القيود، أقواس ديراك، فادياف-جاكوي، حقل ماكسويل.