

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE MOHAMED
SEDDIK BEN YAHIA



FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :

Série :.....

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de

Master en physique

Option : **Physique Théorique**

Par

Keroui Nadjah

THEME

*Equation de Duffin Kemmer-Petiau dans l'univers de
Friedmann-Robertson -Walker*

Soutenu le :16 /10/2020

Devant le Jury :

Président: D. Bouaziz

Rapporteur: R. Rekioua

Examineurs: B. Guettou

Prof.

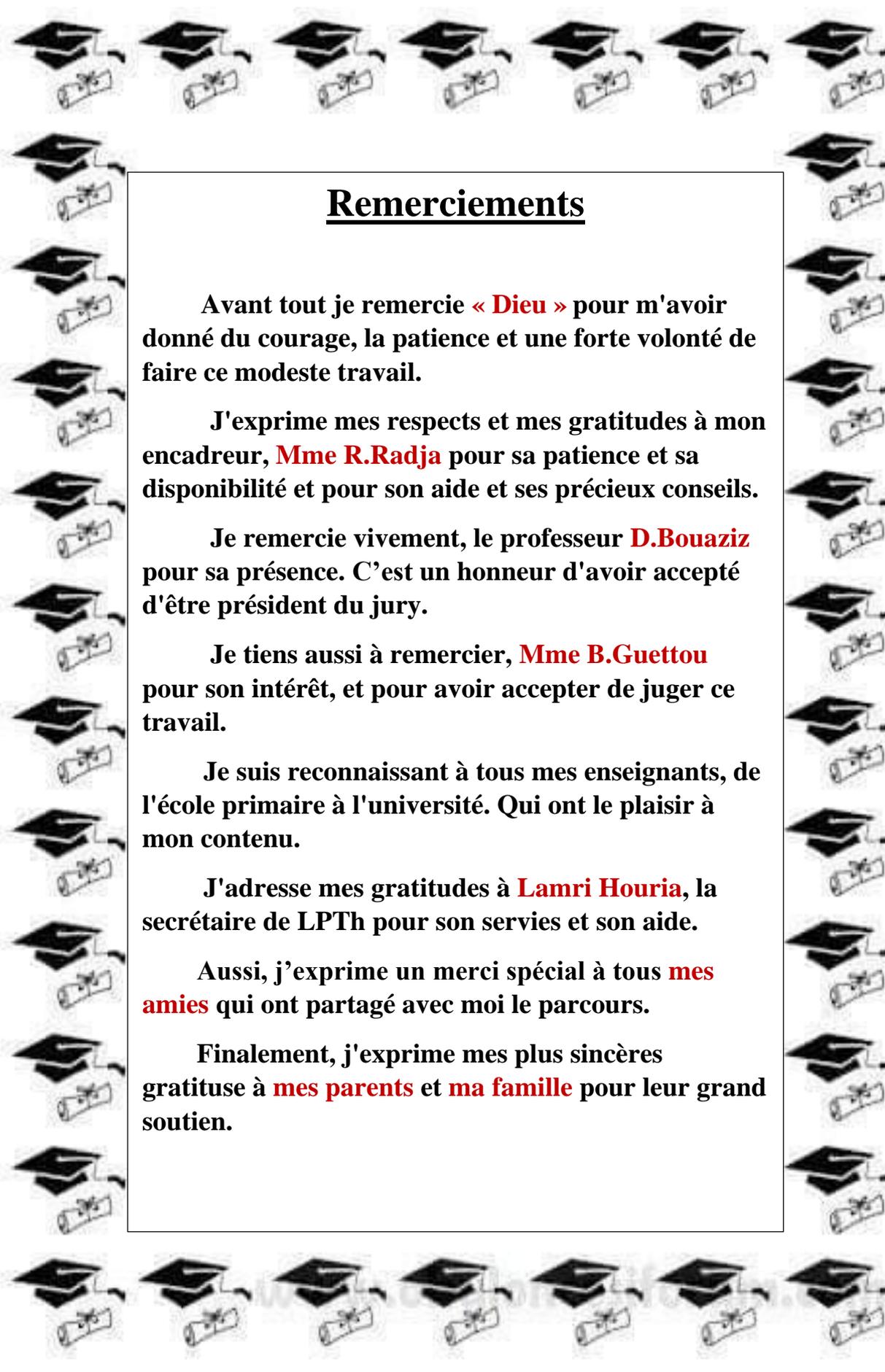
M.A.A.

M.A.A.

Univ. Jijel

Univ. Jijel

Univ. Jijel



Remerciements

Avant tout je remercie « **Dieu** » pour m'avoir donné du courage, la patience et une forte volonté de faire ce modeste travail.

J'exprime mes respects et mes gratitudes à mon encadreur, **Mme R.Radja** pour sa patience et sa disponibilité et pour son aide et ses précieux conseils.

Je remercie vivement, le professeur **D.Bouaziz** pour sa présence. C'est un honneur d'avoir accepté d'être président du jury.

Je tiens aussi à remercier, **Mme B.Guettou** pour son intérêt, et pour avoir accepté de juger ce travail.

Je suis reconnaissant à tous mes enseignants, de l'école primaire à l'université. Qui ont le plaisir à mon contenu.

J'adresse mes gratitudes à **Lamri Houria**, la secrétaire de LPTh pour son servies et son aide.

Aussi, j'exprime un merci spécial à tous **mes amies** qui ont partagé avec moi le parcours.

Finalement, j'exprime mes plus sincères gratituse à **mes parents** et **ma famille** pour leur grand soutien.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Equation de DPK dans l'univers de Friedmann-Robertson -Walker(FRW)	6
2.1	Introduction	6
2.2	Univers de Friedmann-Robertson-Walker(FRW)	7
2.2.1	a)Un univers dominé par la matière (matière non -relativiste) pour $\omega = 0$	10
2.2.2	b)Un univers dominé par le rayonnement (matière relativiste) pour $\omega = (\frac{1}{3})$	10
2.2.3	c)Un univers dominé par l'énergie du vide (modèle de Sitter) $\omega = -1$. .	11
2.3	Equation de DPK dans l'univers de Friedmann-Robertson -Walker(FRW) pour le spin 1	11
2.3.1	Formalisme de Dirac	11
2.3.2	Formalisme de DKP	13
2.3.3	Equation bidimensionnelle de DPK dans l'univers de (FRW)	13
2.4	Conclusion	17
3	Solution de l'équation bidimensionnelle de DKP dans un univers de de Sitter:	
	$a(\eta) = -\frac{1}{H\eta}$	18
3.1	Introduction	18
3.2	Solution de l'équation de DKP dans l'espace de de Sitter	18
3.2.1	Pour le cas $A_\mu = (0, 0)$	19
3.2.2	Pour le cas $A_\mu = \left(0, -\frac{E}{H^2\eta}\right)$	21
3.3	Conclusion	24

4	Solution de l'équation bidimensionnelle de DKP dans un univers dominé par radiation: $a(\eta) = \rho\eta$	25
4.1	Introduction	25
4.2	Solution de l'équation de DKP dans un univers dominé par radiation ($a(\eta) = \lambda\eta$)	25
4.2.1	Pour le cas $A_\mu = (0, 0)$	26
4.2.2	Pour le cas $A_\mu = (0, -E\eta)$	28
4.3	Conclusion	31
5	Solution de l'équation bidimensionnelle de DKP pour le facteur d'échelle: $a(\eta) = (A + B \tanh(\lambda\eta) + C \tanh^2(\lambda\eta))^{\frac{1}{2}}$	32
5.1	Introduction	32
5.2	Solution de l'équation de DKP	33
5.2.1	Pour le cas $A_\mu = (0, 0)$	33
5.2.2	Pour le cas $A_\mu = (0, \frac{E}{\lambda} \tanh \lambda\eta)$	38
5.3	Conclusion	41
6	Conclusion	42
A	Fonctions mathématiques utiles	44
A.1	-Fonctions de Bessel	44
A.1.1	Comportement asymptotique	44
A.1.2	Formules de dérivation	45
A.2	-Fonctions de Whittaker	45
A.2.1	Comportement asymptotique	45
A.2.2	Formules de dérivation	46
A.3	-Fonctions cylindro-paraboliques ou fonctions de Weber	46
A.3.1	Comportement asymptotique	46
A.3.2	Formules de dérivation	47
B	Équation différentielle de Riemann et fonctions hypergéométriques	48
B.1	Formule de dérivation	51
B.2	Valeurs particulières	51

Chapitre 1

Introduction

Depuis les années 1930, l'on sait, principalement grâce à Edwin Hubble, que l'Univers est en expansion, c'est-à-dire que les galaxies lointaines s'éloignent de nous d'autant plus vite qu'elles sont loin. Pour comprendre l'origine de ce phénomène, il faut appel à la relativité générale.

En 1915, Einstein a publié sa version définitive de la relativité générale qui associe la gravitation à la géométrie courbe et dynamique de l'espace-temps. Cette théorie a permis de rendre compte de nombreux phénomènes gravitationnels (l'avancée du périhélie de Mercure, la déviation de la lumière par des corps massifs, l'effet de la gravitation sur le temps). De plus, son formalisme s'est révélé bien adapté pour la construction des modèles d'espace-temps susceptibles de décrire l'univers. Un de ces modèles est l'espace-temps de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker qui rentre dans le cadre de la théorie du Big Bang développée avec la découverte accidentelle en 1964 du fond diffus cosmologique. Ce modèle permet de rendre compte de l'évolution de l'univers durant son expansion et de discuter sa composition (la matière du modèle standard de la physique des particules, la matière noire et l'énergie sombre). En particulier, il faut noter que la géométrie de de Sitter décrit l'univers très primordial et la période de l'inflation. Un autre succès remarquable de la relativité générale est la prédiction de l'existence des ondes gravitationnelles et des trous noirs dont la preuve indirecte date des années 1970 alors que la détection directe est récente. Il reste que la relativité générale est une théorie classique du champ gravitationnel décrivant les phénomènes astrophysiques à basse énergie pour les corps macroscopiques[1], [2].

Les premières études sur les effets de la gravitation quantique remontent aux travaux de Schrödinger de 1932. Depuis, cette approche semi-classique de la gravitation quantique a permis

aux physiciens théoriciens d'obtenir les résultats fascinants concernant la création de particules par des champs gravitationnels dans le domaine de la cosmologie de l'univers primordial ainsi dans la physique quantique des trous noirs. En particulier, il faut mentionner séparément la découverte de la création de particules dans des univers en expansion faite par Leonard Parker et l'émission spontanée des particules par des trous noirs et son caractère thermique faite par Stephen Hawking. Depuis le milieu des années soixante-dix, la théorie quantique des champs en espace-temps courbe a connu une avancée considérable sur des sujets comme la définition du vide quantique, le concept de particules et leur création en espace-temps courbe, l'étude des phénomènes quantiques dans divers espaces-temps importants en cosmologie (les espaces-temps de de Sitter ou Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker) ou en physique des trous noirs (les espaces-temps de Schwarzschild, Reissner-Nordstrom, Kerr ou Kerr-Newman)[7].

Dans ce mémoire, nous nous intéressons aux théories quantiques des champs massifs en espace-temps courbe. En particulier, nous nous considérons l'équation bidimensionnelle de Duffin-Kemmer-Petiau dans l'univers (FRW) pour une particule massive de spin 1 à la présence d'un champ électromagnétique. Cette équation est, de par sa forme, semblable à celle de Dirac où les matrices γ de Dirac ont été remplacées par les matrices β avec une algèbre plus compliquée que celle relative aux γ .

C'est à partir des années 70 qu'il y a eu un regain d'intérêt pour cette équation et notamment dans les études relatives à la brisure de symétrie ainsi qu'aux processus hadroniques. En se basant sur l'équation de DKP, il a été proposé des modèles d'interactions méson-noyau pour expliquer certains résultats expérimentaux[3], [4], [5]. De plus, des méthodes d'approximation développées dans le contexte du processus de diffusion nucléon-noyau ont été ainsi généralisées, de manière analogue à ce qui a été fait avec l'équation de Dirac, aux processus de diffusion méson-noyau.

En raison d'une forte motivation pour la théorie unifiée de la gravitation et la mécanique quantique (gravité quantique), l'extension de la théorie quantique des champs ordinaire dans l'espace-temps courbe a suscité un intérêt considérable. De ce fait, plusieurs problèmes ont été étudiés dans le cadre de cette version gravitationnelle de la mécanique quantique : l'équation non relativiste d'une particule de Schrödinger se mouvant dans un champ gravitationnel constant qui a été résolue exactement par le formalisme quantique d'hamiltonien, par le formalisme classique de Feynman, et les équations relativistes de KG, de Dirac et de DKP qui ont été étudiées intensivement dans un champ gravitationnel par Audretsch, Barut, Parker, Villalba, Moradi,

Haouat, Merad, Kangal... etc, dans des modèles différents de l'espace-temps de Robertson-Walker(RW) où ils ont élucidé le comportement de spin dans l'univers en expansion, par le calcul de la densité de création de particules scalaires, Spinorielles et vectorielles via la technique des transformations de Bogoliubov[8], [9], [10].

Dans ce mémoire nous nous proposons d'étudier le mouvement d'une particule vectorielle de spin 1 dans un univers en expansion avec ou sans un champ électrique en considérant l'Univers de Friedmann-Robertson-Walker avec des facteurs d'échelles qui mènent à des solutions analytiques et exactes pour l'équation des bosons massifs DKP.

En premier lieu nous commençons d'abord par une introduction générale. En deuxième chapitre, nous présentons un bref aperçu de l'univers de Friedman. À partir des équations de Friedman et l'équation de continuité nous traitons trois situations de notre univers qui jouent un rôle majeur en cosmologie (univers dominé par la matière, univers dominé par le rayonnement et univers dominé par l'énergie du vide). Ensuite, nous représentons l'équation bidimensionnelle de Duffin -Kemmer-Petiau dans l'univers (FRW) pour une particule massive de spin 1 à la présence d'un champ électromagnétique en utilisant le formalisme de tétrade.

Nous consacrons le troisième, quatrième et cinquième chapitre pour résoudre l'équation bidimensionnelle de DKP en déduisant les fonctions d'ondes correspondantes pour des différents facteurs d'expansion (univers de De Sitter, univers dominé par la radiation, univers de facteur d'échelle de forme tangente hyperbolique). Dans chaque chapitre nous étudions deux cas ; le champ gravitationnel pure, et le couplage des deux champs gravitationnel et électrique. Ces applications ont fait l'objet de quelques travaux réalisés auparavant pour des particules scalaires (spin 0) et de spin (spin -1/2) en considérant les mêmes expressions pour les champs externes[11], [12], [13], [14].

Dans le sixième chapitre, nous concluons par un récapitulatif des principaux résultats puis nous présentons une bibliographie complète principalement sur les sujets traités et ceux en relation.

Chapitre 2

Equation de DPK dans l'univers de Friedmann-Robertson -Walker(FRW)

2.1 Introduction

L'équation des bosons massifs DKP est une équation relativiste qu'a été d'abord proposée par Duffin–Kemmer–Petiau à la fin des années 1930. Elle définit le mouvement d'une particule vectorielle de spin 1. Elle est similaire à l'équation de Dirac où les matrices γ de Dirac ont été remplacées par les matrices β avec une algèbre plus compliquée que celle relative aux γ .

Dans le cas de $(1 + 3)$ dimensions, la fonction d'onde de la particule admet seize composantes Ψ_k ($k = 1, \dots, 16$), et à $(1 + 1)$ dimensions, le système est réduit à quatre composantes seulement trois composantes sont linéairement indépendantes.

Dans ce chapitre, nous commençons d'abord par une brève description de l'univers de Friedman-Robertson-Walker(FRW). Ensuite, nous passons à la représentation de l'équation de DKP à deux dimensions dans un espace -temps(FRW). Comme nous allons voir, nous étudions la mécanique quantique relativiste du DKP à $(1 + 1)$ dimensions pour une particule bosonique massive de spin 1 évoluant dans un espace-temps courbe, doté d'une métrique de Robertson-Walker en utilisant le formalisme de tetrade. et nous essayons de déduire les fonctions d'onde correspondantes en remplaçons les matrices de Kemmer par les matrices de Dirac et le spineur de Kemmer Ψ_k par le produit tensoriel de deux spineur de Dirac $\Psi_k = \Psi_D \otimes \Psi_D$.

2.2 Univers de Friedmann-Robertson-Walker(FRW)

La théorie quantique des champs dans l'univers de Friedman-Robertson-Walker est une théorie approximative de la gravitation quantique dans laquelle les champs de la matière sont quantifiés et le champ gravitationnel généré par la courbure de l'espace est traité classiquement. Dans notre travail nous nous intéressons au modèle cosmologique standard qui se repose essentiellement sur l'hypothèse suivante ; l'univers est localement homogène, isotrope et en expansion lorsqu'on le décrit dans le système des coordonnées comobiles (principe cosmologique). La modélisation mathématique de cette hypothèse nous amène à décrire l'espace-temps par une métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) dont la forme générale s'écrit

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (2.1)$$

où (t, r, θ, ϕ) représente le système des coordonnées comobiles (les coordonnées comobiles veulent dire que pour un observateur à l'origine $r = 0$, une galaxie aura les coordonnées r, θ, ϕ constantes. Ainsi, dans chaque direction d'observation $\theta = \theta_0, \phi = \phi_0$, les galaxies qui s'y trouvent auront chacune une coordonnée radiale r constante). La métrique (FLRW) nous permet de décrire la géométrie globale de l'univers en fonction de deux paramètres cosmologiques ; le facteur d'échelle $a(t)$ qui représente l'expansion de l'univers (temps, on peut le déterminer par les équations d'Einstein) et le scalaire k qui représente la courbure spatiale. Suivant la valeur donnée à k , il est possible de postuler trois familles d'univers

$$\left\{ \begin{array}{ll} k = +1 & \text{univers fermé} \\ k = 0 & \text{univers plat} \\ k = -1 & \text{univers ouvert} \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Les équations d'Einstein liant la courbure de l'univers à la présence de la matière s'écrivent

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\lambda\kappa} R_{\lambda\kappa} = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

où $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci défini par

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} \Gamma_{\nu\kappa}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} \Gamma_{\lambda\kappa}^{\lambda} \quad (2.4)$$

Les connexions affines (symboles de Christoffel) sont définis par

$$\Gamma_{\nu\kappa}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (g_{\lambda\nu,\kappa} + g_{\lambda\kappa,\nu} - g_{\nu\kappa,\lambda}) \quad (2.5)$$

Sans difficulté nous obtenons $\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{00}^i = 0$. Ce qui signifie qu'une particule qui est au repos reste toujours au repos dans ce système de coordonnées. Il résulte donc que le système de coordonnées comobiles suit le mouvement de l'observateur. Les symboles de Christoffel non nulles sont

$$\Gamma_{ij}^0 = a\dot{a} \tilde{g}_{ij} \quad (2.6)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_{ij} \quad (2.7)$$

$$\Gamma_{lj}^i = k \tilde{g}_{lj} x^i \quad (2.8)$$

où

$$\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij} + k \frac{x^i x^j}{1 - kr^2} \quad (2.9)$$

En particulier, si nous choisissons l'univers plat ($k = 0$), alors les symboles de Christoffel peuvent être réécrits

$$\Gamma_{ij}^0 = a\dot{a} \delta_{ij} \quad (2.10)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i \quad (2.11)$$

$$\Gamma_{lj}^i = 0 \quad (2.12)$$

Dans la représentation conforme (η, x) , ces symboles deviennent

$$\Gamma_{\eta\eta}^\eta = \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.13)$$

$$\Gamma_{ij}^\eta = \frac{\dot{a}}{a} \delta_{ij} \quad (2.14)$$

$$\Gamma_{\eta j}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i \quad (2.15)$$

où la prime désigne la dérivation par rapport à η .

Les différentes composantes de $R_{\mu\nu}$ sont

$$R_{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{ij} = -(2\dot{a} + a\ddot{a}) \tilde{g}_{ij} \quad \text{et} \quad R_{0i} = 0 \quad (2.16)$$

En prenant la trace des équations d'Einstein nous arrivons à

$$R = 8\pi GT. \quad (2.17)$$

Ce qui donne

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right), \quad (2.18)$$

où G est la constante de Newton et $T_{\mu\nu}$ le tenseur énergie-impulsion du fluide cosmologique. Sous l'hypothèse d'un fluide parfait, ce tenseur prend la forme suivante

$$T_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu} + (p + \rho) u_\mu u_\nu \quad (2.19)$$

où u_μ désigne le quadri-vitesse du gaz . Ici p et ρ sont respectivement la pression et la densité dépendante du temps. Le fluide est choisi parfait car c'est la plus simple réalisation d'un tenseur énergie-impulsion diagonal et qui, par isotropie à toutes ses composantes spatiales égales.

$$T^{00} = \rho(t), \quad T^{0i} = 0, \quad T^{ij} = a^{-2} p(t) \delta_{ij} \quad (2.20)$$

avec

$$T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = -\rho + 3p \quad (2.21)$$

En substituant les derniers résultats (2.16)et (2.20) et (2.21) dans l'équation d'Einstein pour obtenir les équations fondamentales de la cosmologie

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} G (\rho + 3p) \quad (2.22)$$

$$4\pi G (\rho - p) = \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2} \quad (2.23)$$

En combinant ces deux dernières équations, nous arrivons à

$$8\pi G \rho(t) = 3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \quad (2.24)$$

Cette équation est dénommée l'équation fondamentale de Friedmann qui gouverne l'expansion de l'univers et elle permet de déterminer la structure de l'univers selon son contenu.

À partir de la loi de conservation de l'énergie $\nabla_\mu T^{\mu 0}$, nous obtenons l'équation différentielle du premier ordre

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} (p + \rho) = 0. \quad (2.25)$$

La dernière équation va permettre de déterminer totalement l'évolution de $a(t)$. Pour cela nous postulons une équation d'état reliant la densité et la pression

$$p = \omega \rho. \quad (2.26)$$

avec ω constant, car l'univers primordial est suffisamment homogène, pour cela, on trouve que

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+\omega)}, \quad (2.27)$$

où $\rho_0 = \rho(t_0)$ et $a_0 = a(t_0)$ sont respectivement la densité du fluide cosmique et le rayon de l'univers observé actuellement (dans la suite, l'indice 0 est réfère à l'instant présent). Suivant la valeur ω on distingue différentes situations

2.2.1 a) Un univers dominé par la matière (matière non –relativiste) pour $\omega = 0$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3}. \quad (2.28)$$

En cosmologie, la matière est souvent appelée poussière et sa pression peut être considérée comme négligeable. Elle se compose de la matière baryonique et probablement de la matière non baryonique de nature encore inconnue. Dans un univers plat et d'après l'équation Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3 a^3} \quad (2.29)$$

Le facteur d'expansion devient

$$a(t) \sim t^{\frac{2}{3}} \quad (2.30)$$

A l'aide de la définition de la constante de Hubble $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ on peut déduire l'âge d'un univers plat dominé par la matière non relativiste $t_0 = \frac{2}{3H(t_0)}$.

2.2.2 b) Un univers dominé par le rayonnement (matière relativiste) pour $\omega = \left(\frac{1}{3}\right)$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-4} \quad (2.31)$$

Le rayonnement est constitué de rayonnement électromagnétique (photons), neutrinos (si $k_B T \geq mc^2$) et ondes gravitationnelles . Pour $k=0$, nous avons

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3 a^3}, \quad (2.32)$$

ce qui réduit $a(t)$ à

$$a(t) \sim \sqrt{t} \quad (2.33)$$

2.2.3 c) Un univers dominé par l'énergie du vide (modèle de Sitter)

$$\omega = -1$$

L'Univers est en accélération et correspond à un espace de de Sitter tel que

$$\rho = \Lambda = cste \quad (2.34)$$

Λ est la constante cosmologique. Dans un univers plat, l'équation de Friedmann étant

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\Lambda}{3} \quad (2.35)$$

Le facteur d'échelle devient alors $a(t) = e^{Ht}$ avec $H = \sqrt{\frac{8\pi G\Lambda}{3}}$.

2.3 Equation de DPK dans l'univers de Friedmann-Robertson -Walker(FRW) pour le spin 1

En mécanique quantique relativiste, l'équation de Duffinn-Kemmer-Petiau (DKP) décrit la dynamique des particules scalaires et vectorielles de spin respectivement 0 et 1 : Elle est covariante, du premier degré par rapport au temps et similaire à celle de Dirac. Elle obéit à une algèbre plus compliquée possédant trois représentations irréductibles respectivement, une représentation triviale à une dimension, cinq dimensions associées au spin 0 et à 10 dimensions associées au spin 1.

Avant d'étudier le formalisme de DKP dans un espace-temps courbe, nous commençons d'abord par définir le formalisme de Dirac.

2.3.1 Formalisme de Dirac

Dans le système d'unités où la constante de Planck \hbar et la vitesse de la lumière c sont égales à 1. Il est bien connu que la densité lagrangienne d'un champ spinoriel s'écrit comme

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi \quad (2.36)$$

L'action correspondant à ce champ se note alors

$$S = \int d^4x \{ \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi \} \quad (2.37)$$

où $d^4x = dt d^3x$ est la mesure d'intégration sur le 4-volume d'espace-temps.

Calculons la variation de l'action et imposons qu'au premier ordre la variation s'annule ($\delta S = 0$ principe de moindre action), on obtient l'équation de Dirac habituelle en présence d'un champ électromagnétique

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi = 0 \quad (2.38)$$

avec $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ est le spineur conjugué de Dirac.

Passons maintenant de l'espace de Minkowski de métrique $\eta_{\mu\nu}$ à l'espace-temps courbe de métrique $g_{\mu\nu}$ en utilisant le formalisme des tétrades. Nous y apporterons donc les modifications suivante

► Il faut remplacer la métrique de Minkowski par une métrique arbitraire

$$\eta_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu}(x) \quad (2.39)$$

► Changer les dérivées D_μ en dérivées covariantes en termes des connexion de spin Γ_μ

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu - \Gamma_\mu \quad (2.40)$$

► Utiliser un élément de volume covariant

$$d^4x \longrightarrow d^4x \sqrt{-g} \quad (2.41)$$

► Remplacer les matrices habituelles de Dirac par les matrices $\tilde{\gamma}^\mu$

$$\tilde{\gamma}^\mu = e^\mu_\nu \gamma^\nu \quad (2.42)$$

L'action résultante de cette procédure décrit un champ spinoriel couplé au champ gravitationnel

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \{ \bar{\psi} (i\tilde{\gamma}^\mu D_\mu - m) \psi \} \quad (2.43)$$

L'équation de Dirac est alors

$$(i\tilde{\gamma}^\mu D_\mu - m) \psi = 0 \quad (2.44)$$

2.3.2 Formalisme de DKP

A l'aide des résultats précédents, nous pouvons maintenant déduire l'expression de l'équation de DKP dans l'espace temps courbe en suivant les mêmes étapes précédentes et remplaçons les matrices de Dirac par les matrices de Kemmer.

Nous commençons par la densité lagrangienne de DKP dans l'espace de Minkowski et qui est connue sous la forme

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\beta^\mu D_\mu - m) \psi \quad (2.45)$$

Pour passer de l'espace de Minkowski de métrique $\eta_{\mu\nu}$ à l'espace-temps courbe de métrique $g_{\mu\nu}$ en utilisant de nouveau les changements

$$\left\{ \begin{array}{l} D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu - \Sigma_\mu \\ d^4x \longrightarrow d^4x\sqrt{-g} \\ \tilde{\beta}^\mu = e^\mu_\nu \beta^\nu \end{array} \right. \quad (2.46)$$

L'action correspondant à ce champ est alors

$$S = \int d^4x\sqrt{-g} \left\{ \bar{\psi} \left(i\tilde{\beta}^\mu D_\mu - m \right) \psi \right\} \quad (2.47)$$

Une application directe du principe de moindre d'action donne alors l'équation suivante

$$\left[i\tilde{\beta}^\nu (\partial_\nu - \Sigma_\nu - ieA_\nu) - m \right] \Psi_k(x) = 0 \quad (2.48)$$

avec $\bar{\psi} = \psi^+ (\gamma^0 \otimes \gamma^0)$ est le spineur conjugué de Kemmer.

2.3.3 Equation bidimensionnelle de DPK dans l'univers de (FRW)

L'équation covariante de DKP dans un espace-temps courbe est[[15]]

$$\left[i\tilde{\beta}^\nu (\partial_\nu - \Sigma_\nu - ieA_\nu) - m \right] \Psi_k(x) = 0 \quad (2.49)$$

où m est la masse de la particule, et β sont les matrices de Kemmer qui vérifient les relations de commutation

$$\beta^a \beta^b \beta^c + \beta^c \beta^b \beta^a = \beta^a \delta^{bc} + \beta^c \delta^{ba} \quad (2.50)$$

Dans notre étude, on adopte nos calculs suivant la représentation de Belinfante [16] qui a montré qu'on peut présenter les matrices de Kemmer pour le cas de spin 1 sous la forme

$$\beta^\mu = \gamma^\mu \otimes I + I \otimes \gamma^\mu \quad (2.51)$$

Les matrices $\tilde{\beta}^\mu$ peuvent s'écrire en fonction des matrices β^μ comme suit :

$$\tilde{\beta}^\mu = e^\mu_\alpha(x) \beta^\mu \quad (2.52)$$

où le tilde est utilisé pour désigner les matrices β dans l'espace-temps courbe et $e^\mu_i(x)$ sont des tétrades satisfaisant

$$g_{\mu\nu} = e^\alpha_\mu e^\beta_\nu \eta_{\alpha\beta} \quad (2.53)$$

Notons que η_{ij} est la métrique habituelle de Minkowski

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

et les indices Grec et Latin représentent respectivement l'espace-temps courbe et plat. Les connexions de spin pour les particules de spin-1 données dans l'équation(2.48) sont écrites comme

$$\Sigma_\nu = \Gamma_\nu \otimes I + I \otimes \Gamma_\nu \quad (2.55)$$

où Γ_μ sont les connexions de spin pour les particules de spin-1/2 vérifiant la relation

$$\Gamma_\lambda = -\frac{1}{2} g_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha [\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu] \quad \text{avec} \quad \tilde{\gamma}^\nu = e^\nu_\alpha \gamma^\alpha \quad (2.56)$$

Ici $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ se sont les symboles de Christoffel

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (\partial_\beta g_{\sigma\gamma} + \partial_\gamma g_{\beta\sigma} - \partial_\sigma g_{\beta\gamma}) \quad (2.57)$$

En considérant un FRW-univers plat donné par l'élément de ligne

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) dx^2 \quad (2.58)$$

$$\text{donc} \quad \tilde{\beta}^0 = \beta^0 \quad , \quad \tilde{\beta}^1 = \frac{1}{a(t)} \beta \quad \text{et} \quad \tilde{\gamma}^0 = \gamma^0 \quad \tilde{\gamma}^1 = \frac{1}{a(t)} \gamma^1 \quad (2.59)$$

L'équation(2.48) peut se réécrire comme suit

$$\left[\beta^0 (\partial_0 - ieA_0) + \frac{\beta^1}{a} (\partial_1 - ieA_1 - \Sigma_1) + im \right] \Psi(x) = 0 \quad (2.60)$$

D'où l'on remplace les matrices de Dirac γ par les matrices de Pauli $\gamma^\alpha = (\sigma^3, -i\sigma^2)$

$$\beta^\mu = \gamma^\mu \otimes I + I \otimes \gamma^\mu \implies \left\{ \begin{array}{l} \beta^0 = \sigma^3 \otimes I + I \otimes \sigma^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \beta^1 = -i(\sigma^2 \otimes I + I \otimes \sigma^2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (2.61)$$

D'autre part, les connexions de spin(2.55) deviennent

$$\Sigma_\mu = \lim_{\gamma \rightarrow \sigma} \Sigma_\mu = \Gamma_\mu \otimes I + I \otimes \Gamma_\mu \implies \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_0 = \Gamma_0 \otimes I + I \otimes \Gamma_0 \\ \Sigma_1 = \Gamma_1 \otimes I + I \otimes \Gamma_1 \end{array} \right. \quad (2.62)$$

et les connexions de spin (2.59) peut se réécrire comme suit

$$\Gamma_0 = -\frac{1}{8}g_{\alpha\nu}\Gamma_{\nu 0}^\alpha [\tilde{\gamma}^\nu, \tilde{\gamma}^0] \quad (2.63)$$

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{8}g_{\alpha\nu}\Gamma_{\nu 1}^\alpha [\tilde{\gamma}^\nu, \tilde{\gamma}^1] \quad (2.64)$$

Les symboles de Christoffel (2.57)deviennent

$$\Gamma_{\nu 0}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma} (\partial_\nu g_{\sigma 0} + \partial_0 g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu 0})$$

donc les connexions de spin sont égales à

$$\Sigma_0 = 0 \quad (2.65)$$

$$\Sigma_1 = -\frac{\dot{a}(t)}{2} (\gamma^0 \gamma^1 \otimes I + I \otimes \gamma^0 \gamma^1) \quad (2.66)$$

avec

$$\gamma^0 \gamma^1 = -\sigma_1 \implies \Sigma_1 = \frac{\dot{a}(t)}{2} (\sigma^1 \otimes I + I \otimes \sigma^1) \quad (2.67)$$

L'équation(2.60) peut se réécrire comme suit :

$$\left[\beta^0 (\partial_0 - ieA_0) + \frac{\beta^1}{a} \left[(\partial_1 - ieA_1) + \frac{\dot{a}}{2} (\sigma^1 \otimes I + I \otimes \sigma^1) \right] + im \right] \Psi(x) = 0 \quad (2.68)$$

La relation générale de la métrique se réduit en fonction de temps conforme η

$$ds^2 = a^2(\eta) (d\eta^2 - dx^2) \quad (2.69)$$

Cela donne

$$\partial_\eta = a(t) \partial_0 \Rightarrow \dot{a}(\eta) = \frac{\dot{a}(\eta)}{a(\eta)} \text{ avec } \dot{a}(\eta) = \partial_\eta a(\eta)$$

donc l'équation(2.68) se réduit :

$$\left[\beta^0 (\partial_\eta - ieA_0) + \beta^1 (\partial_1 - ieA_1) + \beta^1 \frac{\dot{a}(\eta)}{2a(\eta)} (\sigma^1 \otimes I + I \otimes \sigma^1) + ima(\eta) \right] \Psi(x) = 0 \quad (2.70)$$

Basée sur [15], les fonctions d'onde de DKP se laissent exprimer comme produit tensoriel des deux fonctions d'onde de Dirac.

$$\Psi_k = \Psi_D \otimes \Psi_D \quad (2.71)$$

A (1 + 1) dimensions, Ψ_D est un spineur à deux composantes ce qui donne un spineur de Ψ_k à quatre composantes

$$\Psi_k = \Psi_D \otimes \Psi_D = \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\rho \\ \rho\varphi \\ \varphi\rho \\ \varphi\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \\ \Psi_{\bar{0}} \\ \Psi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.72)$$

Pour déterminer les composantes $\Psi_1, \Psi_0, \Psi_{\bar{0}}$ et Ψ_2 , il suffit de chercher des solutions sous la forme

$$\Psi_k(\eta, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(ik_x x)} \chi(\eta) \quad (2.73)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(ik_x x)} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_0 \\ \chi_{\bar{0}} \\ \chi_2 \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

où la fonction $\chi(\eta)$ ne dépend que de temps. Par cet changement, on réduit (2.70) à l'équation

$$\left[\beta^0 (\partial_\eta - ieA_0) + \beta^1 \left(ik_x - ieA_1 + \frac{\dot{a}(\eta)}{2a(\eta)} (\sigma^1 \otimes I + I \otimes \sigma^1) \right) + ima(\eta) \right] \chi(\eta) = 0 \quad (2.75)$$

En vertu des relations (2.61) et (2.73), cette équation peut s'écrire comme des quatre équations différentielles couplées

$$\left((\partial_\eta - ieA_0) + \frac{\dot{a}(\eta)}{2a(\eta)} + i \frac{ma(\eta)}{2} \right) \chi_1 - \frac{(ik_x - ieA_1)}{2} (\chi_0 + \chi_{\bar{0}}) + \frac{\dot{a}(\eta)}{2a(\eta)} \chi_2 = 0 \quad (2.76)$$

$$(k_x - eA_1)(\chi_1 - \chi_2) + ma(\eta)\chi_0 = 0 \quad (2.77)$$

$$(k_x - eA_1)(\chi_1 - \chi_2) + ma(\eta)\chi_{\tilde{0}} = 0 \quad (2.78)$$

$$\left((\partial_\eta - ieA_0) + \frac{\dot{a}(\eta)}{2a(\eta)} - i\frac{ma(\eta)}{2} \right) \chi_2 - \frac{(ik_x - ieA_1)}{2} (\chi_0 + \chi_{\tilde{0}}) + \frac{\dot{a}(\eta)}{2a(\eta)} \chi_1 = 0 \quad (2.79)$$

avec

$$\chi_0 = \chi_{\tilde{0}}$$

On obtient à partir de ce système des nouvelles équations différentielles

$$(2.76) - (2.79) \Rightarrow (\chi_1 + \chi_2) = \frac{2i}{ma(\eta)} (\partial_\eta - ieA_0) (\chi_1 - \chi_2) \quad (2.80)$$

$$(2.77) \text{ et } (2.78) \Rightarrow \chi_0 = -\frac{(k_x - eA_1)(\chi_1 - \chi_2)}{ma(\eta)} \quad (2.81)$$

$$(2.76) + (2.79) \Rightarrow \left((\partial_\eta - ieA_0) + \frac{\dot{a}(\eta)}{a(\eta)} \right) (\chi_1 + \chi_2) + i\frac{ma(\eta)}{2} (\chi_1 - \chi_2) - 2(ik_x - ieA_1)\chi_0 = 0 \quad (2.82)$$

Remplaçons les équations(2.80)et(2.81)dans l'équation(2.82),on obtient

$$\left((\partial_\eta - ieA_0) + \frac{\dot{a}(\eta)}{a(\eta)} \right) \left(\frac{2i}{ma(\eta)} \partial_\eta (\chi_1 - \chi_2) \right) + i\frac{ma(\eta)}{2} (\chi_1 - \chi_2) + \frac{2i(k_x - eA_1)^2}{ma(\eta)} (\chi_1 - \chi_2) = 0 \quad (2.83)$$

Après un calcul simple, nous obtenons l'équation différentielle

$$\left(\partial_\eta^2 + \frac{a^2(\eta)m^2}{4} + eA_0\partial_\eta + (k_x - eA_1)^2 \right) (\chi_1 - \chi_2) = 0 \quad (2.84)$$

C'est une équation différentielle de deuxième ordre dont ces solutions dépendent des expressions du champ électromagnétique A_ν et du facteur d'échelle $a(\eta)$.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, un bref aperçu de l'espace de Friedman a été fourni. De plus, nous avons représenté l'équation bidimensionnelle de DKP dans l'univers (FRW) pour une particule massive de spin 1 à la présence d'un champ électromagnétique en utilisant le formalisme de tétrade.

Chapitre 3

Solution de l'équation bidimensionnelle de DKP dans un univers de de

Sitter: $a(\eta) = -\frac{1}{H\eta}$

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous proposons de montrer avec un certain détail comment dériver les fonctions d'ondes des particules de spin 1 en considérant un espace-temps de de Sitter Minkowskien à $t=0$ où le facteur d'échelle est donnée par

$$a(t) = e^{2Ht} \quad (3.1)$$

où H est la constante de Hubble. Ce choix est fait car l'espace (dS) joue un rôle très important en cosmologie, il peut décrire la phase d'inflation et les premières ères de l'univers ainsi que l'expansion actuelle [17], [18], [19].

3.2 Solution de l'équation de DKP dans l'espace de de Sitter

La métrique générale de de Sitter s'écrit

$$ds^2 = dt^2 - e^{2Ht} dx^2 \quad (3.2)$$

A la représentation conforme

$$\eta = -\frac{1}{H}e^{-Ht}, \quad (3.3)$$

la métrique se réduit à la forme

$$ds^2 = \frac{1}{H^2\eta^2} (d\eta^2 - dx^2) \quad (3.4)$$

avec

$$a(\eta) = -\frac{1}{H\eta} \quad (3.5)$$

3.2.1 Pour le cas $A_\mu = (0, 0)$

Dans ce cas particulier $A_\mu = 0$, l'équation de DKP (2.84)s'écrit

$$\left(\partial_\eta^2 + \frac{m^2}{4H^2\eta^2} + k_x^2 \right) (\chi_1 - \chi_2) = 0 \quad (3.6)$$

Par le changement $\chi = \sqrt{\eta}\varphi$, on réduit (3.6) à l'équation

$$\left[\partial_\eta^2 + \frac{1}{\eta}\partial_\eta + k_x^2 - \left(\frac{1}{4} - \frac{m^2}{4H^2} \right) \frac{1}{\eta^2} \right] (\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \quad (3.7)$$

de type Bessel

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z}\partial_z + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) \right] (\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \quad (3.8)$$

D'où ces solutions peuvent être écrites sous la forme

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = N_1 J_\nu(z) + N_2 J_{-\nu}(z) \quad (3.9)$$

où

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = N_3 H_\nu^{(1)}(z) + N_4 H_\nu^{(2)}(z) \quad (3.10)$$

avec les N_i se sont des constantes arbitraires et z et ν sont donnés par

$$\begin{aligned} z &= k_x \eta, \\ \nu &= i|\tilde{\nu}| = i\sqrt{\frac{m^2}{4H^2} - \frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

A l'aide des équations(2.80) , (2.81)et(2.82)

$$\begin{cases} (\chi_1 + \chi_2) = \frac{2i}{ma(\eta)}\partial_\eta(\chi_1 - \chi_2) \\ \chi_0 = -\frac{k_x(\chi_1 - \chi_2)}{ma(\eta)} \\ (\chi_1 - \chi_2) = N_4\sqrt{\eta}H_\nu^{(2)}(z) \end{cases} \quad (3.11)$$

et la relation de récurrence des fonctions Bessel

$$z \frac{d}{dz} H_\nu^{(2)}(z) - \nu H_\nu^{(2)}(z) = -z H_{\nu+1}^{(2)}(z), \quad (3.12)$$

on détermine aisément

$$\chi_1 = N_4 \frac{\sqrt{\eta}}{2} \left\{ \left(-\frac{iH}{m} (1+2\nu) + 1 \right) H_\nu^{(2)}(z) + \frac{2iHk_x}{m} \eta H_{\nu+1}^{(2)}(z) \right\} \quad (3.13)$$

$$\chi_0 = N_4 \frac{\sqrt{\eta}}{2} \left(\frac{2Hk_x}{m} \eta \right) H_\nu^{(2)}(z) \quad (3.14)$$

$$\chi_2 = N_4 \frac{\sqrt{\eta}}{2} \left\{ \left(-\frac{iH}{m} (1+2\nu) - 1 \right) H_\nu^{(2)}(z) + \frac{2iHk_x}{m} \eta H_{\nu+1}^{(2)}(z) \right\} \quad (3.15)$$

Donc, la solution régulière de l'équation(3.6) à l'infinie est

$$\Psi_k(\eta, x) = \frac{N_\infty}{\sqrt{2\pi}} e^{(ik_x x)} \frac{\sqrt{\eta}}{2} \begin{pmatrix} \left[-\frac{iH}{m} (1+2\nu) + 1 \right] H_\nu^{(2)}(k_x \eta) + \frac{2iHk_x}{m} \eta H_{\nu+1}^{(2)}(k_x \eta) \\ \left(\frac{2Hk_x}{m} \eta \right) H_\nu^{(2)}(k_x \eta) \\ \left(\frac{2Hk_x}{m} \eta \right) H_\nu^{(2)}(k_x \eta) \\ \left[-\frac{iH}{m} (1+2\nu) - 1 \right] H_\nu^{(2)}(k_x \eta) + \frac{2iHk_x}{m} \eta H_{\nu+1}^{(2)}(k_x \eta) \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Constante de normalisation

Afin de déterminer les constantes de normalisation, il suffit d'étudier le comportement asymptotique des fonctions Bessel $H_\nu^{(2)}(z)$ et $H_{\nu+1}^{(2)}(z)$ à la limite $|z| \rightarrow \infty$

$$H_\nu^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})}, \quad -2\pi + \delta \leq \arg z \leq \pi - \delta, \quad (3.17)$$

$$H_{\nu+1}^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z - \frac{\pi}{2}(\nu+1) - \frac{\pi}{4})}, \quad -2\pi + \delta \leq \arg z \leq \pi - \delta, \quad (3.18)$$

$$\text{avec } \delta \text{ est un petit constant arbitraire positif.} \quad (3.19)$$

et de faire appliquer la condition de normalisation

$$\int a(\eta) \Psi_k^+ (\gamma^0 \otimes \gamma^0) \beta^0 \Psi_{\hat{k}} dx = \delta(k - \hat{k}) \quad (3.20)$$

En utilisant la relation(3.17) la fonction d'onde (3.16) se réduit à la forme simple comme suit

$$\Psi_{\hat{k}}(\eta, x) \underset{|\eta| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{N_\infty}{2\pi \sqrt{\hat{k}_x}} e^{(i\hat{k}_x x)} e^{-i(\hat{k}_x \eta - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})} \begin{pmatrix} -\frac{iH}{m} (1+2\nu) - \frac{2H\hat{k}_x}{m} \eta + 1 \\ \frac{2H\hat{k}_x}{m} \eta \\ \frac{2H\hat{k}_x}{m} \eta \\ -\frac{iH}{m} (1+2\nu) - \frac{2H\hat{k}_x}{m} \eta - 1 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

et la conjuguée complexe de $\Psi_k(\eta, x)$

$$\Psi_k^*(\eta, x) = \frac{N_\infty^*}{2\pi\sqrt{k_x}} e^{(-ik_x x)} e^{i(k_x \eta - \frac{\pi}{2}\nu^* - \frac{\pi}{4})} \begin{pmatrix} \frac{iH}{m}(1+2\nu^*) - \frac{2Hk_x}{m}\eta + 1 \\ \frac{2Hk_x}{m}\eta \\ \frac{2Hk_x}{m}\eta \\ \frac{iH}{m}(1+2\nu^*) - \frac{2Hk_x}{m}\eta - 1 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Compte tenu des propriétés

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{-i(k_x - \dot{k}_x)x} = \delta(k_x - \dot{k}_x) \quad (3.23)$$

$$(\gamma^0 \otimes \gamma^0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

et les relations(3.21),(3.22) et (3.20)on déduit sans difficulté la constante de normalisation

$$N_\infty = \sqrt{\frac{\pi m}{8}} e^{-\frac{i\pi\nu}{2}} \quad \text{avec} \quad \nu = i\sqrt{\frac{m^2}{4H^2} - \frac{1}{4}} \quad (3.26)$$

Dans ce cas la fonction d'onde normalisée s'écrit

$$\Psi_k(\eta, x) = \frac{\sqrt{m\eta}}{8} \begin{pmatrix} [-\frac{iH}{m}(1+2\nu) + 1] H_\nu^{(2)}(k_x\eta) + \frac{2iHk_x}{m}\eta H_{\nu+1}^{(2)}(k_x\eta) \\ (\frac{2Hk_x}{m}\eta) H_\nu^{(2)}(k_x\eta) \\ (\frac{2Hk_x}{m}\eta) H_\nu^{(2)}(k_x\eta) \\ [-\frac{iH}{m}(1+2\nu) - 1] H_\nu^{(2)}(k_x\eta) + \frac{2iHk_x}{m}\eta H_{\nu+1}^{(2)}(k_x\eta) \end{pmatrix} e^{(ik_x x - \frac{i\pi\nu}{2})} \quad (3.27)$$

3.2.2 Pour le cas $A_\mu = \left(0, -\frac{E}{H^2\eta}\right)$

D'une façon analogue au cas précédent, en posant dans l'équation (2.84)

$$A_\mu = \left(0, -\frac{E}{H^2\eta}\right) \quad \text{et} \quad a(\eta) = -\frac{1}{H\eta}$$

on retrouve l'équation différentielle suivante

$$\left(\partial_\eta^2 + \frac{m^2}{4H^2\eta^2} + \left(k_x + e\frac{E}{H^2\eta} \right)^2 \right) (\chi_1 - \chi_2) = 0 \quad (3.28)$$

de type Whittaker

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2} \right] W_{\lambda,\mu}(z) = 0, \quad (3.29)$$

D'où ces solutions peuvent être écrites sous la forme

$$(\chi_1 - \chi_2) = N_1 W_{\lambda,\mu}(z) + N_2 M_{\lambda,\mu}(z) \quad (3.30)$$

où

$$(\chi_1 - \chi_2) = N_3 W_{-\lambda,-\mu}(-z) + N_4 M_{-\lambda,-\mu}(-z) \quad (3.31)$$

avec

$$\lambda = \frac{ieE_0}{H^2}, \quad (3.32)$$

$$\mu = i \left[\left(\frac{e^2 E_0^2}{H^4} + \frac{m^2}{4H^2} \right) - \frac{1}{4} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.33)$$

$$\text{et } z = 2ik_x\eta. \quad (3.34)$$

A l'aide des équations(2.80) , (2.81)et(2.82)

$$\begin{cases} (\chi_1 + \chi_2) = \frac{2i}{ma(\eta)} \partial_\eta (\chi_1 - \chi_2) \\ \chi_0 = -\frac{(k_x - eA_1)(\chi_1 - \chi_2)}{ma(\eta)} \\ (\chi_1 - \chi_2) = N_1 W_{\lambda,\mu}(z) \end{cases} \quad (3.35)$$

et la relation de récurrence des fonctions Whittaker

$$z \frac{d}{dz} W_{\lambda,\mu}(z) + W_{\lambda+1,\mu}(z) = \left(\frac{1}{2}z - \lambda \right) W_{\lambda,\mu}(z), \quad (3.36)$$

on détermine aisément

$$\chi_1 = N_1 \left(\frac{k_x H \eta}{m} + i \frac{H \lambda}{m} + \frac{1}{2} \right) W_{\lambda,\mu}(z) + N_1 \frac{iH}{m} W_{\lambda+1,\mu}(z) \quad (3.37)$$

$$\chi_0 = N_1 \left(\frac{k_x H \eta}{m} - \frac{eE_0}{mH} \right) W_{\lambda,\mu}(z) \quad (3.38)$$

$$\chi_2 = N_1 \left(\frac{k_x H \eta}{m} + i \frac{H \lambda}{m} - \frac{1}{2} \right) W_{\lambda,\mu}(z) + N_1 \frac{iH}{m} W_{\lambda+1,\mu}(z) \quad (3.39)$$

Donc, la solution régulière de l'équation(3.28) à l'infinie est

$$\Psi_\kappa(\eta, x) = \frac{N_\infty}{\sqrt{2\pi}} e^{(ik_x x)} \begin{pmatrix} \left(\frac{k_x H \eta}{m} + \frac{iH\lambda}{m} + \frac{1}{2} \right) W_{\lambda, \mu}(z) + \frac{iH}{m} W_{\lambda+1, \mu}(z) \\ \left(\frac{k_x H \eta}{m} - \frac{eE_0}{mH} \right) W_{\lambda, \mu}(z) \\ \left(\frac{k_x H \eta}{m} - \frac{eE_0}{mH} \right) W_{\lambda, \mu}(z) \\ \left(\frac{k_x H \eta}{m} + i \frac{H\lambda}{m} - \frac{1}{2} \right) W_{\lambda, \mu}(z) + \frac{iH}{m} W_{\lambda+1, \mu}(z) \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Constante de normalisation

Pour évaluer les constantes de normalisation N_∞ , il est commode d'étudier le comportement asymptotique des fonctions Whittaker quand $|z| \rightarrow \infty$

$$W_{\lambda, \mu}(z) \sim z^\lambda e^{-\frac{z}{2}}, \quad (3.41)$$

$$W_{\lambda+1, \mu}(z) \sim z^{\lambda+1} e^{-\frac{z}{2}} \quad (3.42)$$

Donc $\Psi_k(\eta, x)$ et $\Psi_k^*(\eta, x)$ se réduisent comme suit

$$\Psi_{\dot{k}}(\eta, x) \sim \frac{N_\infty}{\sqrt{2\pi}} e^{(ik_x x - \frac{2ik_x \eta}{2})} (2ik_x \eta)^\lambda \begin{pmatrix} -\frac{k_x H \eta}{m} + \frac{iH\lambda}{m} + \frac{1}{2} \\ \frac{k_x H \eta}{m} - \frac{eE_0}{mH} \\ \frac{k_x H \eta}{m} - \frac{eE_0}{mH} \\ -\frac{k_x H \eta}{m} + \frac{iH\lambda}{m} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

$$\Psi_k^*(\eta, x) = \frac{N_\infty^*}{\sqrt{2\pi}} e^{-(ik_x x - \frac{2ik_x \eta}{2})} (-2ik_x \eta)^{\lambda^*} \begin{pmatrix} -\frac{k_x H \eta}{m} - \frac{iH\lambda^*}{m} + \frac{1}{2} \\ \frac{k_x H \eta}{m} - \frac{eE_0}{mH} \\ \frac{k_x H \eta}{m} - \frac{eE_0}{mH} \\ -\frac{k_x H \eta}{m} - \frac{iH\lambda^*}{m} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

En faisant intervenir les équations(3.23) , (3.20) , (3.43)et(3.44)on aboutit à la constante de normalisation

$$N_\infty = \sqrt{\frac{m}{4k_x}} e^{i\frac{\lambda}{2}\pi} \text{ avec } \lambda = \frac{ieE_0}{H^2} \quad (3.45)$$

Dans ce cas la fonction d'onde normalisée s'écrit

$$\Psi_\kappa(\eta, x) = \sqrt{\frac{m}{8k_x \pi}} \begin{pmatrix} \left(\frac{k_x H \eta}{m} + \frac{iH\lambda}{m} + \frac{1}{2} \right) W_{\lambda, \mu}(z) + \frac{iH}{m} W_{\lambda+1, \mu}(z) \\ \left(\frac{k_x H \eta}{m} - \frac{eE_0}{mH} \right) W_{\lambda, \mu}(z) \\ \left(\frac{k_x H \eta}{m} - \frac{eE_0}{mH} \right) W_{\lambda, \mu}(z) \\ \left(\frac{k_x H \eta}{m} + i \frac{H\lambda}{m} - \frac{1}{2} \right) W_{\lambda, \mu}(z) + \frac{iH}{m} W_{\lambda+1, \mu}(z) \end{pmatrix} e^{i(k_x x + \frac{\lambda}{2}\pi)} \quad (3.46)$$

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons trouvé des solutions exactes pour l'équation covariante de DKP dans un univers en expansion. L'application de la méthode algébrique de séparation de variables a permis d'obtenir une simple équation différentielle de second ordre qui a admet deux solutions linéairement indépendantes. Par un changement de variables adéquat, nous avons pu déterminer les fonctions d'ondes de type Bessel pour un champ gravitationnel pure. Alors que le couplage des deux champs gravitationnel et électrique nous a donné des solutions de type Whittaker.

Chapitre 4

Solution de l'équation bidimensionnelle de DKP dans un univers dominé par radiation: $a(\eta) = \rho\eta$

4.1 Introduction

Ici dans ce chapitre, nous allons faire la même chose que le travail précédent où; nous essayons de résoudre l'équation (DKP) pour les particules massives de spin-1 dans un univers dominé par radiation en considérant le facteur d'échelle

$$a(\eta) = \rho\eta$$

Cet univers peut être une bonne description des premières ères de notre univers. Il est caractérisé par un paramètre de Hubble asymptotiquement nul. En fait, il se contracte pour $\eta \rightarrow -\infty$ et se dilate pour $\eta \rightarrow +\infty$ [11], [9], [13], [22].

4.2 Solution de l'équation de DKP dans un univers dominé par radiation ($a(\eta) = \lambda\eta$)

Pour le facteur d'échelle $a(\eta) = \rho\eta$ la métrique se réduit à la forme

$$ds^2 = (\rho\eta)^2 (d\eta^2 - dx^2) \tag{4.1}$$

et l'équation de DKP(2.84) devient

$$\left(\partial_\eta^2 + \frac{m^2 \rho^2}{4} \eta^2 + eA_0 \partial_\eta + (k_x - eA_1)^2 \right) (\chi_1 - \chi_2) = 0 \quad (4.2)$$

4.2.1 Pour le cas $A_\mu = (0, 0)$

Dans ce cas particulier $A_\mu = (0, 0)$, l'équation de DKP (4.2) s'écrit

$$\left(\partial_\eta^2 + \frac{m^2 \rho^2}{4} \eta^2 + k_x^2 \right) (\chi_1 - \chi_2) = 0 \quad (4.3)$$

Pour résoudre cette équation nous faisons le changement de variable

$$y = \sqrt{\frac{m\rho}{2}} \eta \quad (4.4)$$

et par un simple calcul on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \eta} = \sqrt{\frac{m\rho}{2}} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} = \frac{m\rho}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{cases} \quad (4.5)$$

Remplaçons les équation(4.5) et (4.4) dans l'équation(4.3), nous obtenons l'équation différentielle

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + y^2 + \lambda \right) (\chi_1 - \chi_2) = 0 \quad (4.6)$$

avec

$$\lambda = \frac{2k_x^2}{m\rho} \quad (4.7)$$

L'équation(4.6) a deux ensembles de solutions. Le premier ensemble est donné par

$$\begin{aligned} (\chi_1 - \chi_2)_1 &= N_1 D_\nu((1+i)y) \\ (\chi_1 - \chi_2)_2 &= N_2 D_\nu(-(1+i)y) \end{aligned} \quad (4.8)$$

où $D_\nu(y)$ sont les fonction de Weber et

$$\nu = -\frac{1+i\lambda}{2} \quad (4.9)$$

Pour le deuxieme ensemble, nous avons

$$(\chi_1 - \chi_2)_3 = N_3 D_{\nu^*}((1-i)y) \quad (4.10)$$

$$(\chi_1 - \chi_2)_4 = N_4 D_{\nu^*}(-(1-i)y) \quad (4.11)$$

A l'aide des équations(2.80) , (2.81)

$$\begin{cases} (\chi_1 + \chi_2) = \frac{2i}{ma(\eta)}\partial_\eta (\chi_1 - \chi_2) \\ \chi_0 = -\frac{k_x}{ma(\eta)} (\chi_1 - \chi_2) \\ (\chi_1 - \chi_2) = N_4 D_{\nu^*} (-(1-i)y) \end{cases} \quad (4.12)$$

et la relation de dérivation de fonction de Weber

$$\frac{d}{dy} D_\nu(y) - \frac{1}{2}y D_\nu(y) + D_{\nu+1}(y) = 0 \quad (4.13)$$

on détermine aisément

$$\begin{cases} \chi_1 = D_{\nu^*} (-(1-i)y) + \frac{(1+i)}{\eta} \sqrt{\frac{1}{2m\rho}} D_{\nu^*+1} (-(1-i)y) \\ \chi_0 = -\frac{k_x}{m\rho\eta} D_{\nu^*} (-(1-i)y) \\ \chi_2 = \frac{(1+i)}{\eta} \sqrt{\frac{1}{2m\rho}} D_{\nu^*+1} (-(1-i)y) \end{cases} \quad (4.14)$$

Donc, la solution régulière de l'équation(4.3) à moins l'infinie est

$$\Psi_k(\eta, x) = \frac{N_\infty}{\sqrt{2\pi}} e^{(ik_x x)} \begin{pmatrix} D_{\nu^*} (-(1-i)\sqrt{\frac{m\rho}{2}}\eta) + \frac{(1+i)}{\sqrt{2m\rho\eta}} D_{\nu^*+1} (-(1-i)\sqrt{\frac{m\rho}{2}}\eta) \\ -\frac{k_x}{m\rho\eta} D_{\nu^*} (-(1-i)\sqrt{\frac{m\rho}{2}}\eta) \\ -\frac{k_x}{m\rho\eta} D_{\nu^*} (-(1-i)\sqrt{\frac{m\rho}{2}}\eta) \\ \frac{(1+i)}{\sqrt{2m\rho\eta}} D_{\nu^*+1} (-(1-i)\sqrt{\frac{m\rho}{2}}\eta) \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Constante de normalisation

Pour évaluer les constantes de normalisation N_∞ , il est commode d'étudier le comportement asymptotique des fonctions de Weber quand $y \rightarrow \infty$.

La représentation asymptotique des fonctions D_ν montre que pour $|arg y| < \frac{3\pi}{4}$ on peut écrire

$$D_\nu(y) \underset{y \rightarrow -\infty}{\sim} e^{-\frac{y^2}{4}} y^\nu \quad (4.16)$$

Ce qui conduit à

$$D_{\nu^*} (-(1-i)y) \sim e^{i\frac{y^2}{2}} (-(1-i)y)^{\nu^*} \quad (4.17)$$

$$D_{\nu^*+1} (-(1-i)y) \sim e^{i\frac{y^2}{2}} (-(1-i)y)^{\nu^*+1} \quad (4.18)$$

De ces dernières équations, nous déduisons les expressions des fonctions d'ondes

$$\Psi_k(\eta, x) \underset{y \rightarrow -\infty}{=} \frac{N_\infty}{\sqrt{2\pi}} e^{(ik_x x)} e^{i\frac{m\rho\eta^2}{4}} (i-1)^{\nu^*} \left(\sqrt{\frac{m\rho}{2}}\eta \right)^{\nu^*} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{k_x}{m\rho\eta} \\ -\frac{k_x}{m\rho\eta} \\ -1 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

$$\Psi_k^+(\eta, x) = \frac{N_\infty^*}{\sqrt{2\pi}} e^{-ik_x x} e^{i\frac{m\rho\eta^2}{4}} (-i-1)^\nu \left(\sqrt{\frac{m\rho}{2}}\eta \right)^\nu \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k_x}{m\rho\eta} & -\frac{k_x}{m\rho\eta} & -1 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Remplaçons $\Psi_k^+(\eta, x)$ et $\Psi_k(\eta, x)$ dans la condition de normalisation

$$\int a(\eta) \Psi_k^+(\gamma^0 \otimes \gamma^0) \beta^0 \Psi_k dx = \delta(k - \acute{k}) \quad (4.21)$$

on détermine la constante de normalisation $N_{-\infty}$

$$N_{-\infty} = \left(\frac{m}{4\rho} \right)^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{2}(-\frac{3i\lambda}{4}+1)} \quad (4.22)$$

avec

$$\lambda = \frac{2k_x^2}{m\rho} \quad (4.23)$$

Danc, la fonction d'onde normalisée est

$$\Psi_k(\eta, x) = \left(\frac{m}{16\rho\pi^2} \right)^{\frac{1}{4}} e^{i(k_x x - \frac{3i\lambda\pi}{8} + \frac{\pi}{2})} \times \begin{pmatrix} D_{\nu^*}(- (1-i) \sqrt{\frac{m\rho}{2}}\eta) + \frac{(1+i)}{\sqrt{2m\rho\eta}} D_{\nu^*+1}(- (1-i) \sqrt{\frac{m\rho}{2}}\eta) \\ -\frac{k_x}{m\rho\eta} D_{\nu^*}(- (1-i) \sqrt{\frac{m\rho}{2}}\eta) \\ -\frac{k_x}{m\rho\eta} D_{\nu^*}(- (1-i) \sqrt{\frac{m\rho}{2}}\eta) \\ \frac{(1+i)}{\sqrt{2m\rho\eta}} D_{\nu^*+1}(- (1-i) \sqrt{\frac{m\rho}{2}}\eta) \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

4.2.2 Pour le cas $A_\mu = (0, -E\eta)$

A la présence du champ électrique, l'équation (4.2) s'écrit

$$\left(\partial_\eta^2 + \frac{m^2\rho^2}{4}\eta^2 + (k_x + eE\eta)^2 \right) (\chi_1 - \chi_2) = 0 \quad (4.25)$$

Après le développement du terme $(k_x + eE\eta)^2$, l'équation(4.25) se réécrit sous la forme

$$\left(\partial_\eta^2 + \left(\frac{m^2\rho^2}{4} + e^2 E^2 \right) \eta^2 + 2eEk_x\eta + k_x^2 \right) (\chi_1 - \chi_2) = 0 \quad (4.26)$$

Posant

$$A = \left(\frac{m^2\rho^2}{4} + e^2 E^2 \right) \quad (4.27)$$

$$B = 2eEk_x \quad (4.28)$$

On obtient alors

$$\left(\partial_\eta^2 + A \left(\eta + \frac{B}{2A} \right)^2 - \frac{B^2}{4A} + k_x^2 \right) (\chi_1 - \chi_2) = 0 \quad (4.29)$$

Pour résoudre cette équation nous faisons le changement de variable

$$\tilde{y} = A^{\frac{1}{4}} \left(\eta + \frac{B}{2A} \right) \quad (4.30)$$

Ce qui nous donne

$$\partial_\eta = A^{\frac{1}{4}} \partial_{\tilde{y}} \quad (4.31)$$

et

$$\partial_\eta^2 = A^{\frac{1}{2}} \partial_{\tilde{y}}^2 \quad (4.32)$$

On remplace les équations(4.32) et (4.30) dans l'équation(4.26), nous obtenons l'équation différentielle

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} + \tilde{y}^2 + \tilde{\lambda} \right) (\chi_1 - \chi_2) = 0 \quad (4.33)$$

qui a une forme analogue à l'équation(4.6) avec

$$\tilde{\lambda} = A^{-\frac{1}{2}} \left(k_x^2 - \frac{B^2}{4A} \right) \quad (4.34)$$

Donc, on s'assure sans peine que ces solutions sont

$$(\chi_1 - \chi_2)_1 = N_1 D_{\tilde{\nu}} ((1+i)\tilde{y}) \quad (4.35)$$

$$(\chi_1 - \chi_2)_2 = N_2 D_{\tilde{\nu}} (-(1+i)\tilde{y})$$

et

$$(\chi_1 - \chi_2)_3 = N_3 D_{\tilde{\nu}^*} ((1-i)\tilde{y}) \quad (4.36)$$

$$(\chi_1 - \chi_2)_4 = N_4 D_{\tilde{\nu}^*} (-(1-i)\tilde{y})$$

où $D_\nu(y)$ sont les fonctions de Weber et

$$\tilde{\nu} = -\frac{1+i\tilde{\lambda}}{2} \quad (4.37)$$

En utilisant les résultats obtenus au premier cas et les équations de couplage

$$\begin{cases} (\chi_1 + \chi_2) = \frac{2i}{ma(\eta)} \partial_\eta (\chi_1 - \chi_2) \\ \chi_0 = -\frac{(k_x - eA_1)(\chi_1 - \chi_2)}{ma(\eta)} \\ (\chi_1 - \chi_2) = N_4 D_{\tilde{\nu}^*} (-(1-i)\tilde{y}) \end{cases} \quad (4.38)$$

nous déduisons directement la solution régulière de l'équation(4.3) à l'infinie pour le deuxième cas comme suit

$$\Psi_k(\eta, x) = \frac{N_\infty}{\sqrt{2\pi}} e^{(ik_x x)} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2} + \frac{A^{\frac{1}{4}} \tilde{y}}{ma(\eta)} \right) D_{\tilde{\nu}^*} (-(1-i)\tilde{y}) + \frac{(1+i)A^{\frac{1}{4}}}{ma(\eta)} D_{\tilde{\nu}^*+1} (-(1-i)\tilde{y}) \\ - \frac{(k_x + eE\eta)}{m\rho\eta} D_{\tilde{\nu}^*} (-(1-i)\tilde{y}) \\ - \frac{(k_x + eE\eta)}{m\rho\eta} D_{\tilde{\nu}^*} (-(1-i)\tilde{y}) \\ \left(-\frac{1}{2} + \frac{A^{\frac{1}{4}} \tilde{y}}{ma(\eta)} \right) D_{\tilde{\nu}^*} (-(1-i)\tilde{y}) + \frac{(1+i)A^{\frac{1}{4}}}{ma(\eta)} D_{\tilde{\nu}^*+1} (-(1-i)\tilde{y}) \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

avec

$$\tilde{y} = A^{\frac{1}{4}} \left(\eta + \frac{B}{2A} \right)$$

Constante de normalisation

Pour connaitre le coefficient de normalisation N_∞ , il suffit d'exprimer les fonctions d'ondes $\Psi_k(\eta, x)$ et $\Psi_k^+(\eta, x)$ à la limite $y \rightarrow \infty$ et d'appliquer ensuite la condition de normalisation.

À l'aide des équations(4.17), (4.18), les expressions prises par $\Psi_k(\eta, x)$ et $\Psi_k^+(\eta, x)$ sont

$$\Psi_k(\eta, x) \underset{y \rightarrow \infty}{=} \frac{N_\infty}{\sqrt{2\pi}} e^{(ik_x x)} e^{i\frac{m\rho\eta^2}{4}} (i-1)^{\tilde{\nu}^*} (\tilde{y})^{\nu^*} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{A^{\frac{1}{4}} \tilde{y}}{ma(\eta)} \\ - \frac{(k_x + eE\eta)}{m\rho\eta} \\ - \frac{(k_x + eE\eta)}{m\rho\eta} \\ -\frac{1}{2} - \frac{A^{\frac{1}{4}} \tilde{y}}{ma(\eta)} \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

et

$$\Psi_k^+(\eta, x) \underset{\eta \rightarrow \infty}{=} \frac{N_\infty}{\sqrt{2\pi}} e^{(-ik_x x)} e^{-i\frac{m\rho\eta^2}{4}} (-i-1)^{\tilde{\nu}} (\tilde{y})^\nu \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{A^{\frac{1}{4}} \tilde{y}}{ma(\eta)} \\ - \frac{(k_x + eE\eta)}{m\rho\eta} \\ - \frac{(k_x + eE\eta)}{m\rho\eta} \\ -\frac{1}{2} - \frac{A^{\frac{1}{4}} \tilde{y}}{ma(\eta)} \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

À partir de ces relations et la condition

$$\int a(\eta) \Psi_k^+ (\gamma^0 \otimes \gamma^0) \beta^0 \Psi_{\hat{k}} dx = \delta(k - \hat{k}) \quad (4.42)$$

on détermine sans difficulté la constante de normalisation $N_{-\infty}$ comme suit

$$N_{-\infty} = \sqrt{\frac{m}{4A^{\frac{1}{4}}}} e^{i\frac{\pi}{2} \left(-\frac{3i\tilde{\lambda}}{4} + 1 \right)} \quad (4.43)$$

Dans ce cas la fonction d'onde normalisée s'écrit

$$\Psi_k(\eta, x) = \sqrt{\frac{m}{8\pi A^{\frac{1}{4}}}} e^{i\frac{\pi}{2}(-\frac{3i\tilde{\lambda}}{4}+1)} e^{(ik_x x)} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2} + \frac{A^{\frac{1}{4}}\tilde{y}}{ma(\eta)}\right) D_{\tilde{\nu}^*}(-(1-i)\tilde{y}) + \frac{(1+i)A^{\frac{1}{4}}}{ma(\eta)} D_{\tilde{\nu}^*+1}(-(1-i)\tilde{y}) \\ -\frac{(k_x+eE\eta)}{m\rho\eta} D_{\tilde{\nu}^*}(-(1-i)\tilde{y}) \\ -\frac{(k_x+eE\eta)}{m\rho\eta} D_{\tilde{\nu}^*}(-(1-i)\tilde{y}) \\ \left(-\frac{1}{2} + \frac{A^{\frac{1}{4}}\tilde{y}}{ma(\eta)}\right) D_{\tilde{\nu}^*}(-(1-i)\tilde{y}) + \frac{(1+i)A^{\frac{1}{4}}}{ma(\eta)} D_{\tilde{\nu}^*+1}(-(1-i)\tilde{y}) \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

avec

$$A = \left(\frac{m^2\rho^2}{4} + e^2E^2\right) \quad (4.45)$$

$$B = 2eEk_x \quad (4.46)$$

et

$$\tilde{\lambda} = A^{-\frac{1}{2}} \left(k_x^2 - \frac{B^2}{4A}\right) \quad (4.47)$$

Pour tester nos résultats, nous supprimons le champ électrique($E = 0$), il vient

$$A = \frac{m^2\rho^2}{4} \quad (4.48)$$

$$B = 0 \quad (4.49)$$

et

$$\tilde{\lambda} = \frac{2k_x^2}{m\rho} \quad (4.50)$$

$$\tilde{y} = \sqrt{\frac{m\rho}{2}}\eta \quad (4.51)$$

En substituant ces équations dans la relation(4.44).Après un simple calcul nous obtenons la même fonction d'onde précédente pour le champ gravitationnel pur(4.24).

4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons résolue l'équation covariante de DKP pour un univers dominé par radiation, en tenant compte d'abord un champ gravitationnel pur, puis en considérant à la fois les deux champs électrique et gravitationnel. Nous avons utilisé un changement de variable pour reformuler l'équation de DKP en une équation bien connu de type Weber qui admet deux solutions linéairement indépendantes. A la fin, nous avons pu déterminer les fonctions d'ondes pour les deux cas.

Chapitre 5

Solution de l'équation bidimensionnelle de DKP pour le facteur d'échelle:

$$a(\eta) = \left(A + B \tanh(\lambda\eta) + C \tanh^2(\lambda\eta) \right)^{\frac{1}{2}}$$

5.1 Introduction

Dans cette partie, nous essayons de résoudre l'équation (DKP) pour les particules massives de spin-1 dans un univers dominé par radiation en considérant le facteur d'échelle

$$a(\eta) = \left(A + B \tanh(\lambda\eta) + C \tanh^2(\lambda\eta) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.1)$$

où A , B et C sont des paramètres positifs.

D'abord, nous commençons de mettre l'équation différentielle correspondante sous une forme bien connue au moyen d'un changement de variable

$$\xi = \frac{1 + \tanh(\lambda\eta)}{2}, \quad (5.2)$$

Ce choix nous permettra d'obtenir une équation du type Riemannienne et ses solutions, des fonctions du type hypergéométriques. Ayant établi les propriétés de ses fonctions, nous déterminons la fonction d'onde qui correspond à notre système. De cette dernière fonction, en étudiant le comportement asymptotique, nous déduisons les constantes de normalisation en appliquant la condition de normalisation[20], [21], [23].

5.2 Solution de l'équation de DKP

Pour le facteur d'échelle $a(\eta) = (A + B \tanh(\lambda\eta) + C \tanh^2(\lambda\eta))^{\frac{1}{2}}$ la métrique se réduit à la forme

$$ds^2 = (A + B \tanh(\lambda\eta) + C \tanh^2(\lambda\eta)) (d\eta^2 - dx^2) \quad (5.3)$$

et l'équation de DKP(2.84) devient

$$\left(\partial_\eta^2 + \frac{m^2}{4} (A + B \tanh(\lambda\eta) + C \tanh^2(\lambda\eta)) + eA_0 \partial_\eta + (k_x - eA_1)^2 \right) (\chi_1 - \chi_2) = 0 \quad (5.4)$$

5.2.1 Pour le cas $A_\mu = (0, 0)$

Dans ce cas particulier, la dernière équation (5.4) s'écrit

$$\left(\partial_\eta^2 + k_x^2 + \frac{m^2}{4} A + \frac{m^2}{4} B \tanh(\lambda\eta) + \frac{m^2}{4} C \tanh^2(\lambda\eta) \right) (\chi_1 - \chi_2) = 0 \quad (5.5)$$

Pour résoudre cette équation nous faisons le changement de variable

$$\xi = \frac{1 + \tanh(\lambda\eta)}{2}, \quad (5.6)$$

et par un simple calcul on obtient

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = 2\lambda\xi(1-\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (5.7)$$

Basé sur cette dernière équation nous trouvons

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} = 4\lambda^2 \xi^2 (1-\xi)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 4\lambda^2 \xi (1-\xi) (1-2\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (5.8)$$

Remplaçons les équations(5.8)dans l'équation(5.5),et après un calcul simple, nous obtenons l'équation différentielle

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{1-\xi} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} + \left(\frac{\omega_{in}^2}{4\lambda^2 \xi} - \frac{m^2 C}{4\lambda^2} + \frac{\omega_{out}^2}{4\lambda^2 (1-\xi)} \right) \frac{1}{\xi(1-\xi)} \right] (\chi_1 - \chi_2) = 0 \quad (5.9)$$

avec

$$\omega_{in} = \left(\frac{m^2}{4} (A - B + C) + k_x^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.10)$$

$$\omega_{out} = \left(\frac{m^2}{4} (A + B + C) + k_x^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.11)$$

L'équation(5.9) est une équation différentielle de type Riemann(voir annexe)

$$\left\{ \frac{d^2}{d\xi} + \left[\frac{1 - \alpha - \dot{\alpha}}{\xi - a} + \frac{1 - \beta - \dot{\beta}}{\xi - b} + \frac{1 - \gamma - \dot{\gamma}}{\xi - c} \right] \frac{d}{d\xi} + \left[\frac{\alpha \dot{\alpha} (a - b) (a - c)}{\xi - a} + \frac{\dot{\beta} \beta (b - c) (b - a)}{\xi - b} + \frac{\dot{\gamma} \gamma (c - a) (c - b)}{\xi - c} \right] \frac{1}{(\xi - a) (\xi - b) (\xi - c)} \right\} (\chi_1 - \chi_2) = 0 \quad (5.12)$$

Cette équation a des pôles aux points a , b , et c , et les nombres $\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}, \gamma$ et $\dot{\gamma}$ sont les indices correspondants à ces pôles. Les $\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}, \gamma$ et $\dot{\gamma}$ sont liés par la condition suivante

$$\alpha + \dot{\alpha} + \beta + \dot{\beta} + \gamma + \dot{\gamma} = 1 \quad (5.13)$$

L'équation différentielle (5.12) peut s'écrire sous forme d'un diagramme comme suit (voir annexe)

$$(\chi_1 - \chi_2) = P \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \dot{\alpha} & \dot{\beta} & \dot{\gamma} \end{array} \right\} \quad (5.14)$$

Par comparaison des deux équations(5.12) et (5.9), nous trouvons

$$1 - \alpha - \dot{\alpha} = 1 \Rightarrow \alpha = -\dot{\alpha} \quad (5.15)$$

$$1 - \gamma - \dot{\gamma} = 1 \Rightarrow \gamma = -\dot{\gamma}$$

$$\alpha + \dot{\alpha} + \beta + \dot{\beta} + \gamma + \dot{\gamma} = 1 \Rightarrow \beta = 1 - \dot{\beta} \quad (5.16)$$

et

$$\frac{\alpha \dot{\alpha} (a - b) (a - c)}{(\xi - a) (\xi - a) (\xi - b) (\xi - c)} = \frac{\omega_{in}^2}{4\lambda^2 \xi^2 (1 - \xi)} \Rightarrow \alpha \dot{\alpha} = \frac{\omega_{in}^2}{4\lambda^2} \quad (5.17)$$

$$\frac{\dot{\gamma} \gamma (c - a) (c - b)}{(\xi - c) (\xi - a) (\xi - b) (\xi - c)} = \frac{\omega_{out}^2}{4\lambda^2 \xi (1 - \xi)^2} \Rightarrow \dot{\gamma} \gamma = \frac{\omega_{out}^2}{4\lambda^2}$$

$$\frac{\dot{\beta} \beta (b - c) (b - a)}{(\xi - b) (\xi - a) (\xi - b) (\xi - c)} = -\frac{m^2 C}{4\lambda^2} \Rightarrow \dot{\beta} \beta = \frac{m^2 C}{4\lambda^2} \quad (5.18)$$

En utilisant la relation (5.15) et(5.17) nous trouvons

$$\alpha = -\dot{\alpha} = i \frac{\omega_{in}}{2\lambda} \quad (5.19)$$

$$\gamma = -\dot{\gamma} = i \frac{\omega_{out}}{2\lambda} \quad (5.20)$$

$$\beta = 1 - \dot{\beta} = \frac{1}{2} + i \sqrt{\frac{m^2}{4\lambda^2} - \frac{1}{4}} \quad (5.21)$$

Donc le diagramme de notre équation différentielle se représente comme suit

$$(\chi_1 - \chi_2) = P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \infty & 1 \\ i \frac{\omega_{in}}{2\lambda} & \frac{1}{2} + i \sqrt{\frac{m^2}{4\lambda^2} - \frac{1}{4}} & i \frac{\omega_{out}}{2\lambda} \\ -i \frac{\omega_{in}}{2\lambda} & \frac{1}{2} - i \sqrt{\frac{m^2}{4\lambda^2} - \frac{1}{4}} & -i \frac{\omega_{out}}{2\lambda} \end{array} \right\} \xi \quad (5.22)$$

Suivant (la table)un ensemble de solutions linéairement indépendantes à cette équation peut être écrit en termes des fonctions hypergéométriques

$$\begin{aligned} (\chi_1 - \chi_2) = & N_1 \xi^{-i \frac{\omega_{in}}{2\lambda}} (1 - \xi)^{i \frac{\omega_{out}}{2\lambda}} F \left(\frac{1}{2} + i \frac{\omega_-}{\lambda} + i\delta, \frac{1}{2} + i \frac{\omega_-}{\lambda} - i\delta, 1 - i \frac{\omega_{in}}{2\lambda}, \xi \right) \\ & + N_2 \xi^{i \frac{\omega_{in}}{2\lambda}} (1 - \xi)^{-i \frac{\omega_{out}}{2\lambda}} F \left(\frac{1}{2} - i \frac{\omega_-}{\lambda} + i\delta, \frac{1}{2} - i \frac{\omega_-}{\lambda} - i\delta, 1 + i \frac{\omega_{in}}{2\lambda}, \xi \right) \end{aligned} \quad (5.23)$$

où

$$\omega_- = \frac{\omega_{out} - \omega_{in}}{2} \quad (5.24)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{m^2}{4\lambda^2} - \frac{1}{4}} \quad (5.25)$$

avec les N_i se sont des constantes arbitraires.

L'équation (5.9)est invariante sous le changement

$$\omega_{in} \longrightarrow \omega_{out} \quad (5.26)$$

$$\xi \longrightarrow 1 - \xi \quad (5.27)$$

ce qui nous permet d'écrire un autre ensemble des solutions

$$\begin{aligned} (\chi_1 - \chi_2) = & N_3 \xi^{-i \frac{\omega_{in}}{2\lambda}} (1 - \xi)^{i \frac{\omega_{out}}{2\lambda}} F \left(\frac{1}{2} + i \frac{\omega_-}{\lambda} + i\delta, \frac{1}{2} + i \frac{\omega_-}{\lambda} - i\delta, 1 + i \frac{\omega_{out}}{2\lambda}, 1 - \xi \right) \\ & + N_4 \xi^{i \frac{\omega_{in}}{2\lambda}} (1 - \xi)^{-i \frac{\omega_{out}}{2\lambda}} F \left(\frac{1}{2} - i \frac{\omega_-}{\lambda} + i\delta, \frac{1}{2} - i \frac{\omega_-}{\lambda} - i\delta, 1 - i \frac{\omega_{out}}{2\lambda}, 1 - \xi \right) \end{aligned} \quad (5.28)$$

A l'aide des équations(2.80) , (2.81)

$$\begin{cases} (\chi_1 + \chi_2) = \frac{2i}{ma(\eta)} \partial_\eta (\chi_1 - \chi_2) \\ \chi_0 = -\frac{k_x(\chi_1 - \chi_2)}{ma(\eta)} \\ (\chi_1 - \chi_2) = N_1 \xi^{-i\frac{\omega_{in}}{2\lambda}} (1 - \xi)^{i\frac{\omega_{out}}{2\lambda}} F(\mu, \nu, \sigma, \xi) \end{cases} \quad (5.29)$$

et la relation de dérivation des fonctions hypergéométrique

$$\frac{dF(\mu, \nu, \sigma, \xi)}{d\xi} = \frac{\mu\nu}{\sigma} F(\mu + 1, \nu + 1, \sigma + 1, \xi) \quad (5.30)$$

on détermine

$$\begin{cases} \chi_1 = \frac{N_1}{ma(\eta)} \xi^{-i\frac{\omega_{in}}{2\lambda}} (1 - \xi)^{i\frac{\omega_{out}}{2\lambda}} \{ [\omega_{in}(1 - \xi) + \omega_{out}\xi + \frac{1}{2}ma(\eta)] \phi_1(\eta) + 2\lambda i \frac{\mu\nu}{\sigma} \xi(1 - \xi) \phi_2(\eta) \} \\ \chi_0 = -\frac{N_1 k_x}{ma(\eta)} \xi^{-i\frac{\omega_{in}}{2\lambda}} (1 - \xi)^{i\frac{\omega_{out}}{2\lambda}} \phi_1(\eta) \\ \chi_2 = \frac{N_1}{ma(\eta)} \xi^{-i\frac{\omega_{in}}{2\lambda}} (1 - \xi)^{i\frac{\omega_{out}}{2\lambda}} \{ [\omega_{in}(1 - \xi) + \omega_{out}\xi - \frac{1}{2}ma(\eta)] \phi_1(\eta) + 2\lambda i \frac{\mu\nu}{\sigma} \xi(1 - \xi) \phi_2(\eta) \} \end{cases} \quad (5.31)$$

avec

$$\begin{cases} \mu = \frac{1}{2} + i\frac{\omega_-}{\lambda} + i\delta \\ \nu = \frac{1}{2} + i\frac{\omega_-}{\lambda} - i\delta \\ \sigma = 1 - i\frac{\omega_{in}}{2\lambda} \end{cases} \quad (5.32)$$

et

$$\begin{cases} \phi_1(\eta) = F(\mu, \nu, \sigma, \xi) \\ \phi_2(\eta) = F(\mu + 1, \nu + 1, \sigma + 1, \xi) \end{cases} \quad (5.33)$$

Donc, la solution régulière de l'équation(5.9) à moins l'infinie est

$$\Psi_k(\eta, x) = \frac{N_{-\infty}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{(ik_x x)}}{ma(\eta)} \xi^{-i\frac{\omega_{in}}{2\lambda}} (1 - \xi)^{i\frac{\omega_{out}}{2\lambda}} \times \begin{pmatrix} [\omega_{in}(1 - \xi) + \omega_{out}\xi + \frac{1}{2}ma(\eta)] \phi_1(\eta) + 2i\lambda \frac{\mu\nu}{\sigma} \xi(1 - \xi) \phi_2(\eta) \\ -k_x \phi_1(\eta) \\ -k_x \phi_1(\eta) \\ [\omega_{in}(1 - \xi) + \omega_{out}\xi - \frac{1}{2}ma(\eta)] \phi_1(\eta) + 2i\lambda \frac{\mu\nu}{\sigma} \xi(1 - \xi) \phi_2(\eta) \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

avec

$$\begin{cases} \xi = \frac{1 + \tanh(\lambda\eta)}{2} \\ \phi_1(\eta) = F(\mu, \nu, \sigma, \xi) \\ \phi_2(\eta) = F(\mu + 1, \nu + 1, \sigma + 1, \xi) \end{cases} \quad (5.35)$$

Constante de normalisation

L'étude du comportement asymptotique des termes $\xi^{-i\frac{\omega_{in}}{2\lambda}}$, $(1-\xi)^{i\frac{\omega_{out}}{2\lambda}}$ et des fonctions hypergéométriques $\phi_1(\eta)$, $\phi_2(\eta)$ à l'infini ($\eta \rightarrow -\infty$ c.à.d. $\xi \rightarrow 0$) nous permet de déduire

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^{-i\frac{\omega_{in}}{2\lambda}} &= e^{-i\frac{\omega_{in}}{2\lambda}\eta} \\ \lim_{\xi \rightarrow 0} (1-\xi)^{i\frac{\omega_{out}}{2\lambda}} &= 1 \\ \lim_{\xi \rightarrow 0} \phi_1(\eta) &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \phi_2(\eta) = 1 \\ \lim_{\xi \rightarrow 0} a(\eta) &= (A - B + C)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{m} (\omega_{in}^2 - k_x^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5.36)$$

La solution de l'équation(5.9) sera écrite pour $\eta \rightarrow -\infty$ comme suit

$$\Psi_{\kappa}(\eta, x) = \frac{N_{-\infty}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{(ik_x x)}}{2(\omega_{in}^2 - k_x^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-i\frac{\omega_{in}}{2\lambda}\eta} \times \begin{pmatrix} \omega_{in} + (\omega_{in}^2 - k_x^2)^{\frac{1}{2}} \\ -k_x \\ -k_x \\ \omega_{in} - (\omega_{in}^2 - k_x^2)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

et $\Psi_k^+(\eta, x)$ s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} \Psi_k^+(\eta, x) &= \frac{N_{-\infty}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{(-ik_x x)}}{2(\omega_{in}^2 - k_x^2)^{\frac{1}{2}}} e^{i\frac{\omega_{in}}{2\lambda}\eta} \\ &\times \begin{pmatrix} \omega_{in} + (\omega_{in}^2 - k_x^2)^{\frac{1}{2}} & -k_x & -k_x & \omega_{in} - (\omega_{in}^2 - k_x^2)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.38)$$

Remplaçons les équations(3.23), (5.38), (5.37) et utilisons la condition de normalisation

$$\int a(\eta) \Psi_k^+(\gamma^0 \otimes \gamma^0) \beta^0 \Psi_{\dot{k}} dx = \delta(k - \dot{k}) \quad (5.39)$$

on détermine

$$\frac{N_{-\infty} N_{-\infty}^*}{2m (\omega_{in}^2 - k_x^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\left(\omega_{in} + (\omega_{in}^2 - k_x^2)^{\frac{1}{2}} \right)^2 - \left(\omega_{in} - (\omega_{in}^2 - k_x^2)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right] = 1 \quad (5.40)$$

Il vient alors

$$\frac{2N_{-\infty} N_{-\infty}^*}{m} \omega_{in} = 1 \quad (5.41)$$

Donc, la constante de normalisation $N_{-\infty}$ est donné par

$$N_{-\infty} = \sqrt{\frac{m}{2\omega_{in}}} \quad (5.42)$$

et la fonction d'onde normalisée s'écrit comme suit

$$\Psi_k(\eta, x) = \sqrt{\frac{m}{4\pi\omega_{in}} \frac{e^{ik_x x}}{ma(\eta)}} \xi^{-i\frac{\omega_{in}}{2\lambda}} (1-\xi)^{i\frac{\omega_{out}}{2\lambda}} \times \begin{pmatrix} [\omega_{in}(1-\xi) + \omega_{out}\xi + \frac{1}{2}ma(\eta)] \phi_1(\eta) + 2i\lambda\frac{\mu\nu}{\sigma}\xi(1-\xi)\phi_2(\eta) \\ -k_x\phi_1(\eta) \\ -k_x\phi_1(\eta) \\ [\omega_{in}(1-\xi) + \omega_{out}\xi - \frac{1}{2}ma(\eta)] \phi_1(\eta) + 2i\lambda\frac{\mu\nu}{\sigma}\xi(1-\xi)\phi_2(\eta) \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

5.2.2 Pour le cas $A_\mu = (0, \frac{E}{\lambda} \tanh \lambda\eta)$

A la présence du champ électrique, l'équation (5.4) s'écrit

$$\left(\partial_\eta^2 + k_x^2 + \frac{m^2}{4}A + \left(\frac{m^2}{4}B - 2\frac{Ek_x e}{\lambda} \right) \tanh(\lambda\eta) + \left(\frac{m^2}{4}C + \frac{E^2 e^2}{\lambda^2} \right) \tanh^2(\lambda\eta) \right) (\chi_1 - \chi_2) = 0 \quad (5.44)$$

On peut poser dans ce cas

$$\begin{aligned} \dot{B} &= B - 8\frac{Ek_x e}{\lambda m^2} \\ \dot{C} &= C + \left(\frac{2Ee}{\lambda m} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.45)$$

Alors l'équation(5.44) se présente comme suit

$$\left(\partial_\eta^2 + k_x^2 + \frac{m^2}{4} \left(A + \dot{B} \tanh(\lambda\eta) + \dot{C} \tanh^2(\lambda\eta) \right) \right) (\chi_1 - \chi_2) = 0 \quad (5.46)$$

Pour résoudre cette équation, nous suivons les mêmes étapes que nous avons fait dans la partie une, après avoir changé $B \rightarrow \dot{B}$ et $C \rightarrow \dot{C}$. Dans ce cas, nous aurons le diagramme

$$(\chi_1 - \chi_2) = P \begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 \\ i\frac{\dot{\omega}_{in}}{2\lambda} & \frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{m^2\dot{C}}{4\lambda^2} - \frac{1}{4}} & i\frac{\dot{\omega}_{out}}{2\lambda} \xi \\ -i\frac{\dot{\omega}_{in}}{2\lambda} & \frac{1}{2} - i\sqrt{\frac{m^2\dot{C}}{4\lambda^2} - \frac{1}{4}} & -i\frac{\dot{\omega}_{out}}{2\lambda} \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

où

$$\begin{cases} \dot{\omega}_{in} = \left[\frac{m^2}{4} (A - \dot{B} + \dot{C}) + k_x^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ \dot{\omega}_{out} = \left[\frac{m^2}{4} (A + \dot{B} + \dot{C}) + k_x^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (5.48)$$

L'équation(5.46) admettra alors les solutions suivantes

$$(\chi_1 - \chi_2) = N_1 \xi^{-i\frac{\dot{\omega}_{in}}{2\lambda}} (1 - \xi)^{i\frac{\dot{\omega}_{out}}{2\lambda}} F\left(\frac{1}{2} + i\frac{\dot{\omega}_-}{\lambda} + i\delta, \frac{1}{2} + i\frac{\dot{\omega}_-}{\lambda} - i\delta, 1 - i\frac{\dot{\omega}_{in}}{2\lambda}, \xi\right) \quad (5.49)$$

$$+ N_2 \xi^{i\frac{\dot{\omega}_{in}}{2\lambda}} (1 - \xi)^{-i\frac{\dot{\omega}_{out}}{2\lambda}} F\left(\frac{1}{2} - i\frac{\dot{\omega}_-}{\lambda} + i\delta, \frac{1}{2} - i\frac{\dot{\omega}_-}{\lambda} - i\delta, 1 + i\frac{\dot{\omega}_{in}}{2\lambda}, \xi\right)$$

et

$$(\chi_1 - \chi_2) = N_3 \xi^{-i\frac{\dot{\omega}_{in}}{2\lambda}} (1 - \xi)^{i\frac{\dot{\omega}_{out}}{2\lambda}} F\left(\frac{1}{2} + i\frac{\dot{\omega}_-}{\lambda} + i\delta, \frac{1}{2} + i\frac{\dot{\omega}_-}{\lambda} - i\delta, 1 + i\frac{\dot{\omega}_{out}}{2\lambda}, 1 - \xi\right) \quad (5.50)$$

$$+ N_4 \xi^{i\frac{\dot{\omega}_{in}}{2\lambda}} (1 - \xi)^{-i\frac{\dot{\omega}_{out}}{2\lambda}} F\left(\frac{1}{2} - i\frac{\dot{\omega}_-}{\lambda} + i\delta, \frac{1}{2} - i\frac{\dot{\omega}_-}{\lambda} - i\delta, 1 - i\frac{\dot{\omega}_{out}}{2\lambda}, 1 - \xi\right)$$

où

$$\dot{\omega}_- = \frac{\dot{\omega}_{out} - \dot{\omega}_{in}}{2} \quad (5.51)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{m^2}{4\lambda^2} - \frac{1}{4}} \quad (5.52)$$

avec les N_i se sont des constantes arbitraires.

En utilisant les équations(2.80),(2.81) et (5.30), on obtient les composantes cherchées

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_1 = \frac{N_1}{ma(\eta)} \xi^{-i\frac{\dot{\omega}_{in}}{2\lambda}} (1 - \xi)^{i\frac{\dot{\omega}_{out}}{2\lambda}} \left\{ [\dot{\omega}_{in} (1 - \xi) + \dot{\omega}_{out} \xi + \frac{1}{2} ma(\eta)] \tilde{\phi}_1(\eta) + 2i\lambda \frac{\dot{\mu}}{\sigma} \xi (1 - \xi) \tilde{\phi}_2(\eta) \right\} \\ \chi_0 = -\frac{N_1 k_x}{ma(\eta)} \xi^{-i\frac{\dot{\omega}_{in}}{2\lambda}} (1 - \xi)^{i\frac{\dot{\omega}_{out}}{2\lambda}} \tilde{\phi}_1(\eta) \\ \chi_2 = \frac{N_1}{ma(\eta)} \xi^{-i\frac{\dot{\omega}_{in}}{2\lambda}} (1 - \xi)^{i\frac{\dot{\omega}_{out}}{2\lambda}} \left\{ [\dot{\omega}_{in} (1 - \xi) + \dot{\omega}_{out} \xi - \frac{1}{2} ma(\eta)] \tilde{\phi}_1(\eta) + 2i\lambda \frac{\dot{\mu}}{\sigma} \xi (1 - \xi) \tilde{\phi}_2(\eta) \right\} \end{array} \right. \quad (5.53)$$

Finalement, nous déduisons la solution régulière de l'équation(5.44) à moins l'infinie comme suit

$$\Psi_k(\eta, x) = \frac{N_{-\infty}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{(ik_x x)}}{ma(\eta)} \xi^{-i\frac{\dot{\omega}_{in}}{2\lambda}} (1 - \xi)^{i\frac{\dot{\omega}_{out}}{2\lambda}} \times$$

$$\left(\begin{array}{l} [\dot{\omega}_{in} (1 - \xi) + \dot{\omega}_{out} \xi + \frac{1}{2} ma(\eta)] \tilde{\phi}_1(\eta) + 2i\lambda \frac{\dot{\mu}}{\sigma} \xi (1 - \xi) \tilde{\phi}_2(\eta) \\ -k_x \tilde{\phi}_1(\eta) \\ -k_x \tilde{\phi}_1(\eta) \\ [\dot{\omega}_{in} (1 - \xi) + \dot{\omega}_{out} \xi - \frac{1}{2} ma(\eta)] \tilde{\phi}_1(\eta) + 2i\lambda \frac{\dot{\mu}}{\sigma} \xi (1 - \xi) \tilde{\phi}_2(\eta) \end{array} \right) \quad (5.54)$$

avec

$$\begin{cases} \xi = \frac{1+\tanh(\lambda\eta)}{2} \\ \tilde{\phi}_1(\eta) = F(\dot{\mu}, \dot{\nu}, \dot{\sigma}, \xi) \\ \tilde{\phi}_2(\eta) = F(\dot{\mu} + 1, \dot{\nu} + 1, \dot{\sigma} + 1, \xi) \end{cases} \quad (5.55)$$

et

$$\begin{cases} \dot{\mu} = \frac{1}{2} + i\frac{\dot{\omega}_-}{\lambda} + i\delta \\ \dot{\nu} = \frac{1}{2} + i\frac{\dot{\omega}_-}{\lambda} - i\delta \\ \dot{\sigma} = 1 - i\frac{\dot{\omega}_{in}}{2\lambda} \end{cases} \quad (5.56)$$

Constante de normalisation

Pour connaître le coefficient de normalisation $N_{-\infty}$, il suffit d'exprimer les fonctions d'ondes $\Psi_k(\eta, x)$ et $\Psi_k^+(\eta, x)$ à la limite $\eta \rightarrow -\infty$ et d'appliquer ensuite la condition de normalisation.

A l'aide des équations (5.37), (5.38), les expressions prises par $\Psi_k(\eta, x)$ et $\Psi_k^+(\eta, x)$ sont

$$\Psi_k(\eta, x) \underset{\eta \rightarrow -\infty}{=} \frac{N_{-\infty}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{(ik_x x)}}{ma(\eta)} e^{-i\frac{\dot{\omega}_{in}}{2\lambda}\eta} \times \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{in} + \frac{1}{2}ma(\eta) \\ -k_x \\ -k_x \\ \dot{\omega}_{in} - \frac{1}{2}ma(\eta) \end{pmatrix} \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} \Psi_k^+(\eta, x) \underset{\eta \rightarrow -\infty}{=} & \frac{N_{-\infty}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{(-ik_x x)}}{ma(\eta)} e^{i\frac{\dot{\omega}_{in}}{2\lambda}\eta} \\ & \times \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{in} + \frac{1}{2}ma(\eta) & -k_x & -k_x & \dot{\omega}_{in} - \frac{1}{2}ma(\eta) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.58)$$

A partir de ces relations et la condition

$$\int a(\eta) \Psi_k^+(\gamma^0 \otimes \gamma^0) \beta^0 \Psi_k dx = \delta(k - \dot{k}) \quad (5.59)$$

on détermine sans difficulté la constante de normalisation $N_{-\infty}$ comme suit

$$N_{-\infty} = \sqrt{\frac{m}{2\dot{\omega}_{in}}} \quad (5.60)$$

avec

$$\dot{\omega}_{in} = \left(\frac{m^2}{4} (A - \dot{B} + \dot{C}) + k_x^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.61)$$

Finalement, la fonction d'onde normalisée s'écrit

$$\Psi_k(\eta, x) = \sqrt{\frac{m}{4\pi\dot{\omega}_{in}} \frac{e^{(ik_x x)}}{ma(\eta)}} \xi^{-i\frac{\dot{\omega}_{in}}{2\lambda}} (1-\xi)^{i\frac{\dot{\omega}_{out}}{2\lambda}} \times \begin{pmatrix} [\dot{\omega}_{in}(1-\xi) + \dot{\omega}_{out}\xi + \frac{1}{2}ma(\eta)] \tilde{\phi}_1(\eta) + 2i\lambda\frac{\dot{\mu}}{\sigma}\xi(1-\xi) \tilde{\phi}_2(\eta) \\ -k_x \tilde{\phi}_1(\eta) \\ -k_x \tilde{\phi}_1(\eta) \\ [\dot{\omega}_{in}(1-\xi) + \dot{\omega}_{out}\xi - \frac{1}{2}ma(\eta)] \tilde{\phi}_1(\eta) + 2i\lambda\frac{\dot{\mu}}{\sigma}\xi(1-\xi) \tilde{\phi}_2(\eta) \end{pmatrix} \quad (5.62)$$

5.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons résolu l'équation DKP dans un univers dominé par radiation pour deux cas : d'abord dans un champ gravitationnel pure, et puis pour le couplage des deux champs gravitationnel et électrique. Moyennant un changement de variable adéquat, l'équation de Dkp se reformule à une équation différentielle de type Riemann et ses solutions, des fonctions du type hypergéométriques. En faisant intervenir la dérivée des fonctions hypergéométriques, on en déduit les composantes du spineur de DKP et la fonction d'onde correspondante. A la fin, on a pu déterminer les constantes de normalisation en servant la condition de normalisation et les propriétés des fonctions hypergéométriques aux limites.

Chapitre 6

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons représenté l'équation Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) pour les particules massives de spin-1 dans l'univers de Friedmann-Robertson-Walker à la présence de champ gravitationnel avec un champ électromagnétique en considérant trois modèles cosmologiques différents : univers de De Sitter, univers dominé par la radiation, univers du facteur d'échelle de forme tangente hyperbolique .

Au début, on a fait un bref rappel sur l'univers de (FRW) en traitant trois types d'univers qui jouent un rôle majeur en cosmologie : univers dominé par la matière, univers dominé par le rayonnement et univers dominé par l'énergie du vide.

Puis, nous avons représenté l'équation bidimensionnelle de DKP dans l'univers (FRW) pour une particule massive de spin 1 à la présence d'un champ électromagnétique en utilisant le formalisme de tétrade. Ensuite, nous avons solutionné l'équation de DKP dans l'univers de De Sitter à (1+1) dimensions en exprimant ces solutions par les fonctions de Bessel. A l'aide de comportement asymptotique des fonctions de Bessel, nous avons pu déterminer les constantes de normalisation.

Dans une autre étape, nous avons fait la même étude pour l'équation de DKP en présence du champ électrique où les fonctions d'onde sont exprimées par les fonctions de Whittaker.

Suivant les mêmes étapes auparavant, nous avons déterminé les fonctions d'ondes pour les deux autres cas. À partir de la condition de normalisation et le comportement asymptotique des fonctions de Weber et les fonctions hypergéométriques, nous avons pu déduire les constantes de normalisation.

Les résultats essentiels de cette étude sont :

- A (1+1) dimensions, nous avons reformulé l'équation Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) au cas de spin-1 dans l'univers (FRW).

- Moyennant un changement de variable adéquat, nous avons déterminé les fonctions d'ondes normalisées pour les trois cas étudiés en servant la condition de normalisation et les propriétés des fonctions spéciales aux limites (Bessels, Webers, hypergéométriques).

Finalement, nous pouvons dire que l'étude de l'équation de DKP pour les bosons dans un espace-temps courbe est très importante à la compréhension de notre univers et nous espérons que nos résultats seront exploités pour obtenir des quantités physiques intéressante en cosmologie telles que la probabilité de création une paire, le nombre des particules créées, l'entropie, la fonction de Green. . . etc

Annexe A

Annexe A

Fonctions mathématiques utiles

Dans cette annexe, nous avons représentés les propriétés des fonctions mathématiques nécessaires dans ce mémoire[24].

A.1 -Fonctions de Bessel

L'équation différentielle de Bessel est

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \partial_z + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) \right] \chi(z) = 0. \quad (\text{A.1})$$

Elle a deux solutions linéairement indépendantes, à savoir, $J_\nu(z)$ et $J_{-\nu}(z)$ où $[H_\nu^{(1)}(z)$ et $H_\nu^{(2)}(z)]$.

A.1.1 Comportement asymptotique

Le comportement asymptotique des fonctions de Bessel quand $|z| \rightarrow 0$ est donné par

$$J_{\pm\nu}(z) \sim \frac{1}{2^{\pm\nu} \Gamma(\nu + 1)} (z)^{\pm\nu}, \quad \nu \neq -1, -2, -3... \quad (\text{A.2})$$

$$H_\nu^{(1)}(z) \sim -H_\nu^{(2)}(z) \sim \frac{-i}{\pi} \Gamma(\nu) \left(\frac{1}{2} z \right)^{-\nu}, \quad \text{Re}(\nu) > 0 \quad (\text{A.3})$$

A la limite $|z| \rightarrow \infty$, le comportement asymptotique est donné par

$$J_{\pm\nu}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z \mp \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right), \quad |\arg z| < \pi \quad (\text{A.4})$$

$$H_{\nu}^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad -\pi + \delta \leq \arg z \leq 2\pi - \delta \quad (\text{A.5})$$

$$H_{\nu}^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad -2\pi + \delta \leq \arg z \leq \pi - \delta, \quad (\text{A.6})$$

$$\text{avec } \delta \text{ est un petit constant arbitraire positif.} \quad (\text{A.7})$$

A.1.2 Formules de dérivation

Les dérivés des fonctions de Bessel

$$\frac{d}{dz}\chi_{\nu}(z) = \frac{\nu}{z}\chi_{\nu}(z) - \chi_{\nu+1}(z), \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{d}{dz}\chi_{\nu}(z) = \chi_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z}\chi_{\nu}(z) \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{d}{dz}\chi_{\nu}(z) = \frac{1}{2}(\chi_{\nu-1}(z) - \chi_{\nu+1}(z)) \quad (\text{A.10})$$

On désignons par $\chi_{\nu}(z)$ l'une des fonctions $J_{\nu}(z)$ ou $H_{\nu}^{(1,2)}(z)$.

A.2 -Fonctions de Whittaker

L'équation différentielle de Whittaker est

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2} \right] \varphi(z) = 0, \quad (\text{A.11})$$

Elle a deux solutions linéairement indépendantes, à savoir, $W_{\lambda,\mu}(z)$ et $M_{\lambda,\mu}(z)$ [où $W_{-\lambda,-\mu}(-z)$ et $M_{-\lambda,\mu}(-z)$].

A.2.1 Comportement asymptotique

Le comportement asymptotique des fonctions de Whittaker quand $|z| \rightarrow \infty$ est donné par

$$W_{\lambda,\mu}(z) \sim z^{\lambda} e^{-\frac{z}{2}}, \quad (\text{A.12})$$

$$M_{\lambda,\mu}(z) \sim \frac{\Gamma(1+2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} e^{\frac{z}{2}} z^{-\lambda} + \frac{\Gamma(1+2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu + \lambda)} e^{-\frac{z}{2} \pm i\pi(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} z^{\lambda}, \quad (\text{A.13})$$

$$-\frac{\pi}{2} + \delta \leq \pm \arg z \leq \frac{3\pi}{2} - \delta, \text{ avec } \delta \text{ est un petit constant arbitraire positif.}$$

A la limite $|z| \rightarrow 0$, le comportement asymptotique est donné par

$$M_{\lambda,\mu}(z) \sim z^{\mu+\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.14})$$

$$W_{\lambda,\mu}(z) \sim \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} z^{\frac{1}{2}-\mu} + \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \lambda)} z^{\frac{1}{2}+\mu}, \quad 0 \leq \text{Re}(\mu) \leq \frac{1}{2}, \quad \mu \neq 0. \quad (\text{A.15})$$

A.2.2 Formules de dérivation

Il existe plusieurs relations de dérivation des fonctions de Whittaker qui peuvent être utilisées par exemple

$$\left(z \frac{d}{dz}\right)^n (e^{-\frac{z}{2}} z^{k-1} W_{k,\mu}(z)) = (-1)^n e^{-\frac{z}{2}} z^{k+n-1} W_{k+n,\mu}(z). \quad (\text{A.16})$$

Pour $n = 1$, on a

$$z \frac{d}{dz} W_{\lambda,\mu}(z) + W_{\lambda+1,\mu}(z) = \left(\frac{1}{2}z - \lambda\right) W_{\lambda,\mu}(z), \quad (\text{A.17})$$

A.3 -Fonctions cylindro-paraboliques ou fonctions de Weber

La fonction cylindro-parabolique est une solution de l'équation différentielle suivante

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + (z^2 + \lambda) u = 0 \quad (\text{A.18})$$

Cette équation a deux solutions linéairement indépendantes, à savoir, $D_{-\frac{1+i\lambda}{2}}((1+i)z)$ et $D_{-\frac{1+i\lambda}{2}}(-(1+i)z)$ où $[D_{-\frac{1-i\lambda}{2}}((1-i)z)$ et $D_{-\frac{1-i\lambda}{2}}(-(1-i)z)]$.

A.3.1 Comportement asymptotique

Le comportement asymptotique des fonctions de Weber quand $|y| \rightarrow \infty$ est donné par

$$D_\gamma(y) \sim e^{-\frac{z^2}{4}} y^\gamma, \quad |\text{arg} y| < \frac{3\pi}{4} \quad (\text{A.19})$$

$$D_\gamma(y) \sim e^{-\frac{z^2}{4}} y^\gamma - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\gamma)} e^{i\pi\gamma} e^{\frac{z^2}{4}} y^{-\gamma-1}, \quad \frac{\pi}{4} < \text{arg} y < \frac{5\pi}{4} \quad (\text{A.20})$$

$$D_\gamma(y) \sim e^{-\frac{z^2}{4}} y^\gamma - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\gamma)} e^{-i\pi\gamma} e^{\frac{z^2}{4}} y^{-\gamma-1}, \quad -\frac{\pi}{4} > \text{arg} y > -\frac{5\pi}{4} \quad (\text{A.21})$$

A.3.2 Formules de dérivation

Les dérivés des fonctions de Weber

$$\frac{dD_\gamma(y)}{dy} + \frac{1}{2}yD_\gamma(y) - \gamma D_{\gamma-1}(y) = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{dD_\gamma(y)}{dy} - \frac{1}{2}yD_\gamma(y) + \gamma D_{\gamma+1}(y) = 0 \quad (\text{A.23})$$

Annexe B

Équation différentielle de Riemann et fonctions hypergéométriques

Une série hypergéométrique est une série de la forme[24]

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha.\beta}{\gamma.1}z + \frac{\alpha(\alpha+1).\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1).1.2}z^2 + \dots \quad (\text{B.1})$$

Les fonctions hypergéométriques satisfont aux formules de transformation importantes suivantes

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, z) \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, z) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma, 1-z) \\ &+ (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, z) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

L'équation différentielle de Riemann est donnée par

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{d^2}{dz^2} + \left[\frac{1-\alpha-\dot{\alpha}}{z-a} + \frac{1-\beta-\dot{\beta}}{z-b} + \frac{1-\gamma-\dot{\gamma}}{z-c} \right] \frac{d}{dz} \right. \\ &\left. + \left[\frac{\alpha\dot{\alpha}(a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{\dot{\beta}\beta(b-c)(b-a)}{z-b} + \frac{\dot{\gamma}\gamma(c-a)(c-b)}{z-c} \right] \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)} \right\} u = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Elle peut s'écrire sous forme d'un diagramme comme suit

$$u = P \begin{Bmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \dot{\alpha} & \dot{\beta} & \dot{\gamma} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Exemples.

$$u = P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \infty & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 - \gamma & \beta & \gamma - \alpha - \beta \end{array} \right. z$$

C'est l'équation hypergéométrique

$$z(1-z) \frac{d^2u}{dz^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)] \frac{du}{dz} - \alpha\beta u = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$u = P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \infty & \infty \\ \frac{1}{2} + m & -c & c - k \\ \frac{1}{2} - m & 0 & k \end{array} \right. z \quad (\text{B.7})$$

C'est l'équation de la forme

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{du}{dz} + \left(\frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2} \right) u = 0 \quad (\text{B.8})$$

Par le changement $u = e^{-\frac{z}{2}}W$, on réduit cette dernière équation à type Whittaker

$$\frac{d^2W}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2} \right) W = 0 \quad (\text{B.9})$$

L'équation de Riemann a des pôles aux points a, b , et c , et les paramètres $\alpha, \acute{\alpha}, \beta, \acute{\beta}, \gamma$ et $\acute{\gamma}$ sont les indices correspondants à ces pôles. Les $\alpha, \acute{\alpha}, \beta, \acute{\beta}, \gamma$ et $\acute{\gamma}$ sont liés par la condition suivante

$$\alpha + \acute{\alpha} + \beta + \acute{\beta} + \gamma + \acute{\gamma} = 1 \quad (\text{B.10})$$

Leurs solutions peuvent être exprimées en termes de fonction hypergéométrique

$$u = \left(\frac{z-a}{z-b} \right)^\alpha \left(\frac{z-c}{z-b} \right)^\gamma F \left(\alpha + \beta + \gamma, \alpha + \acute{\beta} + \gamma, 1 + \alpha - \acute{\alpha}, \left(\frac{z-a}{z-b} \right) \left(\frac{c-b}{c-a} \right) \right) \quad (\text{B.11})$$

Si les indices $a, b, c; \alpha, \acute{\alpha}; \beta, \acute{\beta}; \gamma, \acute{\gamma}$ sont permutées de manière appropriée, l'équation de Riemann reste inchangée. Ainsi, on obtient un ensemble de 24 solutions ayant les formes suivantes (à condition qu'aucune des différences $\alpha - \acute{\alpha}, \beta - \acute{\beta}, \gamma - \acute{\gamma}$ ne soit un entier)

$$\begin{aligned}
u_1 &= \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^\alpha \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^\gamma F\left(\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\hat{\beta}+\gamma, 1+\alpha-\hat{\alpha}, \left(\frac{z-a}{z-b}\right) \left(\frac{c-b}{c-a}\right)\right) \\
u_2 &= \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\hat{\alpha}} \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^\gamma F\left(\hat{\alpha}+\beta+\gamma, \hat{\alpha}+\hat{\beta}+\gamma, 1+\hat{\alpha}-\alpha, \left(\frac{z-a}{z-b}\right) \left(\frac{c-b}{c-a}\right)\right) \\
u_3 &= \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^\alpha \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\hat{\gamma}} F\left(\alpha+\beta+\hat{\gamma}, \alpha+\hat{\beta}+\hat{\gamma}, 1+\alpha-\hat{\alpha}, \left(\frac{z-a}{z-b}\right) \left(\frac{c-b}{c-a}\right)\right) \\
u_4 &= \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\hat{\alpha}} \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\hat{\gamma}} F\left(\hat{\alpha}+\beta+\hat{\gamma}, \hat{\alpha}+\hat{\beta}+\hat{\gamma}, 1+\hat{\alpha}-\alpha, \left(\frac{z-a}{z-b}\right) \left(\frac{c-b}{c-a}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_5 &= \left(\frac{z-b}{z-c}\right)^\beta \left(\frac{z-a}{z-c}\right)^\alpha F\left(\beta+\gamma+\alpha, \beta+\hat{\gamma}+\alpha, 1+\beta-\hat{\beta}, \left(\frac{z-b}{z-c}\right) \left(\frac{a-c}{a-b}\right)\right) \\
u_6 &= \left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\hat{\beta}} \left(\frac{z-a}{z-c}\right)^\alpha F\left(\hat{\beta}+\gamma+\alpha, \hat{\beta}+\hat{\gamma}+\alpha, 1+\hat{\beta}-\beta, \left(\frac{z-b}{z-c}\right) \left(\frac{a-c}{a-b}\right)\right) \\
u_7 &= \left(\frac{z-b}{z-c}\right)^\beta \left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\hat{\alpha}} F\left(\beta+\gamma+\hat{\alpha}, \beta+\hat{\gamma}+\hat{\alpha}, 1+\beta-\hat{\beta}, \left(\frac{z-b}{z-c}\right) \left(\frac{a-c}{a-b}\right)\right) \\
u_8 &= \left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\hat{\beta}} \left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\hat{\alpha}} F\left(\hat{\beta}+\gamma+\hat{\alpha}, \hat{\beta}+\hat{\gamma}+\hat{\alpha}, 1+\hat{\beta}-\beta, \left(\frac{z-b}{z-c}\right) \left(\frac{a-c}{a-b}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_9 &= \left(\frac{z-c}{z-a}\right)^\gamma \left(\frac{z-b}{z-a}\right)^\beta F\left(\gamma+\alpha+\beta, \gamma+\alpha+\beta, 1+\gamma-\hat{\gamma}, \left(\frac{z-c}{z-a}\right) \left(\frac{b-a}{b-c}\right)\right) \\
u_{10} &= \left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{\hat{\gamma}} \left(\frac{z-b}{z-a}\right)^\beta F\left(\hat{\gamma}+\alpha+\beta, \hat{\gamma}+\alpha+\beta, 1+\hat{\gamma}-\gamma, \left(\frac{z-c}{z-a}\right) \left(\frac{b-a}{b-c}\right)\right) \\
u_{11} &= \left(\frac{z-c}{z-a}\right)^\gamma \left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\hat{\beta}} F\left(\gamma+\alpha+\hat{\beta}, \gamma+\alpha+\hat{\beta}, 1+\gamma-\hat{\gamma}, \left(\frac{z-c}{z-a}\right) \left(\frac{b-a}{b-c}\right)\right) \\
u_{12} &= \left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{\hat{\gamma}} \left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\hat{\beta}} F\left(\hat{\gamma}+\alpha+\hat{\beta}, \hat{\gamma}+\alpha+\hat{\beta}, 1+\hat{\gamma}-\gamma, \left(\frac{z-c}{z-a}\right) \left(\frac{b-a}{b-c}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{13} &= \left(\frac{z-a}{z-c}\right)^\alpha \left(\frac{z-b}{z-c}\right)^\beta F\left(\alpha+\gamma+\beta, \alpha+\acute{\gamma}+\beta, 1+\alpha-\acute{\alpha}, \left(\frac{z-a}{z-c}\right) \left(\frac{b-c}{b-a}\right)\right) \\
u_{14} &= \left(\frac{z-a}{z-c}\right)^\acute{\alpha} \left(\frac{z-b}{z-c}\right)^\beta F\left(\acute{\alpha}+\gamma+\beta, \acute{\alpha}+\acute{\gamma}+\beta, 1+\acute{\alpha}-\alpha, \left(\frac{z-a}{z-c}\right) \left(\frac{b-c}{b-a}\right)\right) \\
u_{15} &= \left(\frac{z-a}{z-c}\right)^\alpha \left(\frac{z-b}{z-c}\right)^\acute{\beta} F\left(\alpha+\gamma+\acute{\beta}, \alpha+\acute{\gamma}+\acute{\beta}, 1+\alpha-\acute{\alpha}, \left(\frac{z-a}{z-c}\right) \left(\frac{b-c}{b-a}\right)\right) \\
u_{16} &= \left(\frac{z-a}{z-c}\right)^\acute{\alpha} \left(\frac{z-b}{z-c}\right)^\acute{\beta} F\left(\acute{\alpha}+\gamma+\acute{\beta}, \acute{\alpha}+\acute{\gamma}+\acute{\beta}, 1+\alpha-\acute{\alpha}, \left(\frac{z-a}{z-c}\right) \left(\frac{b-c}{b-a}\right)\right) \\
\\
u_{17} &= \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^\gamma \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^\alpha F\left(\gamma+\alpha+\beta, \gamma+\alpha+\acute{\beta}, 1+\gamma-\acute{\gamma}, \left(\frac{z-c}{z-b}\right) \left(\frac{a-b}{a-c}\right)\right) \\
u_{18} &= \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^\acute{\gamma} \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^\alpha F\left(\acute{\gamma}+\alpha+\beta, \gamma+\alpha+\acute{\beta}, 1+\acute{\gamma}-\gamma, \left(\frac{z-c}{z-b}\right) \left(\frac{a-b}{a-c}\right)\right) \\
u_{19} &= \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^\gamma \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^\acute{\alpha} F\left(\gamma+\acute{\alpha}+\beta, \gamma+\acute{\alpha}+\acute{\beta}, 1+\gamma-\acute{\gamma}, \left(\frac{z-c}{z-b}\right) \left(\frac{a-b}{a-c}\right)\right) \\
u_{20} &= \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^\acute{\gamma} \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^\acute{\alpha} F\left(\acute{\gamma}+\acute{\alpha}+\beta, \acute{\gamma}+\acute{\alpha}+\acute{\beta}, 1+\acute{\gamma}-\gamma, \left(\frac{z-c}{z-b}\right) \left(\frac{a-b}{a-c}\right)\right)
\end{aligned}$$

B.1 Formule de dérivation

La dérivée d'une fonction de type hypergéométrique est une fonction de type hypergéométrique. Pour $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$,

$$\frac{dF(\alpha, \beta, \gamma, z)}{dz} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, z) \quad (\text{B.12})$$

Plus généralement, on a

$$\frac{d^n F(\alpha, \beta, \gamma, z)}{dz^n} = \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+n, z), \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{B.13})$$

où

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1) \quad (\text{B.14})$$

B.2 Valeurs particulières

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} \quad \text{Re}\gamma \succ \text{Re}(\alpha+\beta) \quad (\text{B.15})$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 \quad (\text{B.16})$$

Bibliographie

- [1] N.D.Birrell, P.C.W.Davies,Quantum Fields in Curved Space,Cambridge University Press,Cambridge,1982.
- [2] V. F. Mukhanov, S. Winitzki ; Introduction to Quantum Effects in Gravity, Cambridge University Press,Cambridge,2007.
- [3] G. Petiau, Acad. R. Belg. Cl. Sci. Mém. Collect. 8, 16 No. 2 (1936) ; R. J. Duffin, Phys. Rep, 54, 1114(1939).
- [4] R. A. Krajcik et M. M. Nieto Am. J. Phys, 45, 818 (1977). J. Géhéniau, Acad. R. Belg. Cl. Sci. Mém. Collect. 8, 18 No. 1 (1938).
- [5] N. Kemmer, Proc. Roy. Soc. A166, 127-53 (1938). N. Kemmer, Proc. Roy. Soc. A173, 91-116 (1939).
- [6] A. Boumali, Thèse de doctorat, Solutions de l'Equation de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) pour certaines formes d'interactions, Université de Tebessa, (2005).
- [7] A. Belokogne, Thèse de doctorat, Champs quantiques massifs en espace-temps courbe et tenseur d'impulsion-énergie renormalise, Université de Corse Pascal Paoli, 2016. France.
- [8] M. Falek, Thèse de doctorat, Traitement de certains problèmes via la théorie de Duffin-Kemmer-Petiau, Université de Jijel, 2011.
- [9] A.O. Barut, I.H. Duru, Phys. Rev. D 36 (1987) 3705.
- [10] J. Garriga, Phys. Rev. D 49 (1994) 6343.
- [11] K.H. Lotze, Class. Quant. Grav. 2 (1985) 351 ; Class. Quant. Grav. 2 (1985) 363 ; Ast. Phys. Spac. Sci. 120 (1986) 191.
- [12] V.M. Villalba, Phys. Rev. D 52 (1995) 3742 ; Phys. Rev. D 60 (1999) 127501 ; V.M. Villalba, W. Greiner, Phys. Rev. D 65 (2001) 025007.
- [13] J. Audretsch, G. Schafer, Phys. Lett. 66 (1978) 459.

-
- [14] D.M. Chitre, J.B. Hartle, *Phys. Rev. D* 16 (1977) 251.
- [15] K. Sogut and A. Havare *Class. Quantum Grav.* 23 (2006) 7129–7142.
- [16] Belinfante, *Nature. Lond*, 143, 201 (1939).
- [17] Y. Sucu, N. Unal, *Eur. Phys. J. C* 44, 287–291 (2005).
- [18] E.E. Kangal, *AKU J. Sci.Eng.*18 (2018) 011101 (774-779).
- [19] C. Bouguerra, Mémoire de Master en physique, Equation de Duffin-Kemmer-Petiau dans un espace-temps courbe, Université Mohamed Seddik Ben-Yahia, LPTH, Jijel (2020).
- [20] S. Haouat, R. Chekireb, *Eur. Phys. J. C.* 72 (2012) 2034.
- [21] S. Haouat, R. Chekireb, *Phys Rev D* 87 (2013) 088501.
- [22] R. Adjimi, Mémoire de Master en physique, Étude de quelques processus physiques en présence d'un champ électrique, Université Mohamed Seddik Ben-Yahia, LPTH, Jijel(2013).
- [23] R. Chekireb, These de doctorat, Creation des Particules en Cosmologie, Université Mohamed Seddik Ben-Yahia, LPTH, Jijel.
- [24] M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1974.
I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, New York, 1979).