République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'enseignement Supérieur
Et de La Recherche Scientifique
Université de Jijel

Faculté des Sciences Exactes
et informatique

Département de Physique

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de
Master

Spécialité : **Physique Théorique**

Par

Bouchlouh Bouchra

intitulé

Résolution de l'équation de Langevin pour Quelques problèmes quantiques par la Méthode des perturbations

Soutenu le : 16/09/2021

<u>Devant le Jury :</u>

Président :	Dj. Bouaziz	Prof	Univ. Jijel
Rapporteur :	N. Chine	MCB	Univ. Jijel
Examinatrice :	R. Radja	MAA	Univ. Jijel

Remerciements

Je tien d'abord à exprimer mes gratitudes et reconnaissances à madame *Chine Nadia* ***,maitre de conférences au laboratoires de physique théorique pour sa disponibilité tout au long du ce projet et surtout ses pécieuses aides ,sa dévouement et ses conseils .***

J'addresse mes vifs remerciements aux membre de jury le professeur *Dj.Bouaziz* ***et madame*** *R.Radja* ***qui ont accepter de jurer ce modeste travail ,***

Table des matières

Chapitre 1

Intoduction générale

Au dernier siècle (1981), Parisi et Wu ont introduit une nouvelle méthode de quantification, équivalente à la mécanique quantique standard et proche à celle de Feynman, il s'agit de la mécanique quantique stochastique (MQS) [1].

Ce formalisme récent-à cheval sur les intégrales de chemins et les équations différentielles stochastiques et aussi un outil de compréhension de la mécanique quantique.

Bien que sa formulation soit simple, il n'a pas eu cependant le mérite d'être développé comme le sont actuellement les autres approches comme celles de Schwinger, Feynmann, Heisenberg...

Brièvement le principe sur lequel est bâti la MQS est le suivant : on se donne un système physique qui interagit avec son environnement. L'interaction est en général modélisée par un bruit choisi blanc de manière à faire émerger les résultats de la mécanique quantique standard. Sa variable dynamique devient alors aléatoire et son évolution est décrite par une équation dite de Langevin. C'est ainsi que des quantités physiques s'obtiennent à partir de la solution de cette équation.

En ce qui concerne la formulation de Parisi et Wu, qui est beaucoup plus utile en théorie des champs, elle est basée d'abord sur l'introduction d'un temps supplémentaire qui est fictif [2]. En prenant la $lim \longrightarrow \infty$, ce temps fictif permet du point de vue statistique de trouver un certain équilibre. En principe, les résultats de la MQ habituelle doivent émerger naturellement puisque à l'équilibre la probabilité prend la forme standard de Feynman de poids en $exp(Action)$.

Dans ce mémoire, nous avons refait les calculs déja existants dans la littérature [3, 4].

Nous donnons d'abord au chapitre 2, les notions fondamentales du formalisme de la mécanique quantique stochastique de Parisi et Wu[3]. Au chapitre 3, nous utilisons l'espace des phases pour calculer l'action classique ainsi que le facteur de fluctuation en utilisant deux équations de Langevin relatives à la position et à l'impulsion. Le calcul est effectué pour une particule : libre non relativiste, soumise à une force harmonique et à un potentiel linéaire.

Le calcul utilise la voie directe de résolution d'équations.

Les même problèmes est encore repris au chapitre 4 mais cette fois ci dans l'espace de configuration. Le Lagrangien remplace l'hamiltonien du chapitre 3 comme moyen de description du mouvement. Nous avons ainsi une seule équation de Langevin à considèrer.

Ensuite le chap.5 est consacré au calcul de la fonction de Green relative à un oscillateur anharmonique [4] en utilisant la formulation du propagateur par la MQS donnée par [3].

Le calcul est d'abord fait dans l'espace de configuration, le mouvement étant régi par Le lagrangien. Ce cas non exact nécessité un traitement perturbatif, Nakazato à donné la méthode.

Grâce aux caractéristiques du bruit blanc, le traitement perturbatif [4] se simplifie énormément. Avec quelques itérations l'action ainsi que le facteur de fluctuation sont déterminés. Nous obtenons la fonction de corrélation de l'oscillateur anharmonique qui se reduit à la fonction de Green à la limite d'équilibre. Le mémoire se termine par une conclusion.

Chapitre 2

Formalisme de la mécanique stochastique

2.1 Equation de Langevin

L'équation de base de la mécanique quantique stochastique est l'équation de Langevin. C'est une équation différentielle au premier ordre par rapport au temps t.

$$\frac{\partial}{\partial t}x(t) = f\ (x(t)) + \eta(t), \tag{2.1}$$

où $\eta(t)$ est un bruit.

Si le bruit η satisfait les deux propriétés suivantes :

a- moyenne nulle

$$\langle \eta(t) \rangle = 0, \tag{2.2}$$

b- et le produit de corrélation de deux bruits aux instant t et $t\prime$ égal à une fonction de Dirac

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \Omega\delta(t - t'), \tag{2.3}$$

il est dit " blanc".

La solution de cette équation avec la condition initiale $x(0) = x_0$ à l'instant $t = 0$ (2.1) est simple

$$x(t) = x_0 + \int_0^t d\tau f(x(\tau)) + \int_0^t d\tau \eta(\tau). \tag{2.4}$$

elle est évidement fonction du bruit.

C'est ainsi que la position moyenne de la particule est donnée par

$$\langle x(t) \rangle = x_0 + \int_0^t d\tau \, \langle f(x(\tau)) \rangle \, . \tag{2.5}$$

2.2 Quantification Stochastique de Parisi-Wu

la méthode de quantification stochastique de Parisi-Wu [1] est basé sur le principe suivant :

- associer au temps réel t un temps s fictif. La variable dynamique devient alors une fonction de 2 variables : $x(t) \to x(t, s)$.

- régir l'évolution de cette variable au moyen de ce temps fictif s L'évolution est maintenant décrite par l'équation de Langevin

$$\frac{\partial}{\partial s} x(t, s) = f(x(t, s)) + \eta(t, s), \tag{2.6}$$

avec

$$f(x(t, s)) = i \frac{\delta S}{\delta x(t, s)}, \tag{2.7}$$

où S représente l'action relative au système et $\eta(t, s))$ un bruit choisi encore blanc à cause de ses deux propriétés :

a- moyenne nulle

$$\langle \eta(t, s) \rangle = 0. \tag{2.8}$$

b- le produit de corrélation égal au produit de deux fonctions δ

$$\langle \eta(t, s) \eta(t', s') \rangle = \Omega \delta(t - t') \delta(s - s^{'}). \tag{2.9}$$

La moyenne $\langle(*)\rangle$ se calculant comme d'habitude : c'est une somme sur tous les bruits possibles que nous affectons d'un poids gaussien

$$\langle(*)\rangle = \int D\eta \; (*) \exp\left[\frac{-1}{2\Omega}\int \eta^2(t,s)dtds\right], \tag{2.10}$$

Sous forme discrète

$$\langle(*)\rangle = \lim_{N\to\infty} \mathcal{N} \int \prod_n^N d\eta\,(t_n, s_n) \exp\left[\frac{-1}{2\Omega}\sum_n^N \varepsilon\sigma\eta^2(t_n, s_n)\right], \tag{2.11}$$

$\mathcal{N}$ étant une constante fixée de façon à avoir $\langle 1\rangle = 1$.

- pour $s \longrightarrow \infty$, on dit que nous sommes à l'équilibre et nous obtenons alors les quantités physiques de la mécanique quantique.

La moyenne en mécanique quantique se définit par

$$\langle x(t_1)x(t_2)\rangle = \frac{\langle x_f, t_f \mid T(x(t_1)x(t_2)) \mid x_i, t_i\rangle}{\langle x_f, t_f \mid x_i, t_i\rangle}, \tag{2.12}$$

qui est exactement la moyenne en mécanique stochastique

$$\frac{\langle x_f, t_f \mid T(x(t_1)x(t_2)) \mid x_i, t_i\rangle}{\langle x_f, t_f \mid x_i, t_i\rangle} = \lim_{s\longrightarrow\infty} \langle x(t_1, s)x(t_2, s)\rangle\,, \tag{2.13}$$

2.3 Formulation Stochastique du Propagateur

La détermination de la section efficace, spectre des énergies, fonctions d'onde, ... en mécanique quantique, par exemple nécessite la connaissance de l'amplitude de transition ou propagateur. Sa détermination est donc essentielle, puisque il contient toutes les informations importantes sur la dynamique d'un système.

Le but de ce chapitre est de voir comment le déterminer par l'utilisation de la méthode de quantification stochastique (SQM) de Parisi-Wu [1] [2]

Suivant [3] le propagateur se construit à partir de l'équation d'évolution suivante

$$|x_i, t_i\rangle = T\exp\left[i\int_{t_0}^{t_i} H(t)dt\right] |x_i, t_0\rangle\,, \tag{2.14}$$

où $H(t)$ est l'hamiltonien qui régit la dynamique du système.

Par dérivation par rapport au temps t on reconnaît l'équation de Schrödinger

$$\frac{\partial}{\partial t_i} |x_i, t_i\rangle = iH(t_i) |x_i, t_i\rangle . \tag{2.15}$$

En multipliant à gauche par le bra $\langle x_f, t_f|$

$$\frac{\partial}{\partial t_i} \ln \langle x_f, t_f \mid x_i, t_i\rangle = i\frac{\langle x_f, t_f| H(t_i) |x_i, t_i\rangle}{\langle x_f, t_f \mid x_i, t_i\rangle}, \tag{2.16}$$

et en intégrant, l'amplitude se calcule

$$\langle x_f, t_f \mid x_i, t_i\rangle = c \exp\left[i\int^{t_i} \lim_{s\longrightarrow\infty} \langle H(t_i, s)\rangle\, dt_i\right] . \tag{2.17}$$

Nous voyons qu'elle se calcule en déterminant la moyenne stochastique $\langle H(t_i, s)\rangle$. La constante c étant indépendante de s_i que nous fixons par la condition

$$\lim_{T\longrightarrow 0} \langle x_f, t_f \mid x_i, t_i\rangle = \delta(x_f - x_i), \qquad T = (t_f - t_i) . \tag{2.18}$$

Résumons la procédure :

1- A l'opérateur hamiltonien $\hat{H}$, est associé un hamiltonien classique.

2- Si on choisit l'ordre de Weyl, le calcul des intégrales stochastiques se fait suivant Stratanovich

3- les variables stochastiques dépendent en outre d'un temps fictif.

suivant [3] l'Hamiltonien $H(t, s)$,

$$H(t, s) = H_{cl}(t) + H_Q(t, s), \tag{2.19}$$

se décompose de 2 parties.

Si on effectue la séparation suivante

$$\begin{cases} x = x_{cl} + x_Q \\ p = p_{cl} + p_Q \end{cases} , \tag{2.20}$$

la moyenne (sur les bruits) se sépare en 2 parties

$$\langle H(t, s)\rangle = \langle H_{cl}(t)\rangle + \langle H_Q(t, s)\rangle . \tag{2.21}$$

- une classique (1èr terme) indépendante du temps fictif s est reliée à l'action classique (calculée suivant le chemin classique)

$$\frac{\partial S_{cl}}{\partial t_i} = H_{cl}(t_i). \tag{2.22}$$

- et une 2ème (2ème terme) qui va déterminer un facteur dit de fluctuation.

Le propagateur est alors égal à

$$\langle x_f, t_f \mid x_i, t_i \rangle = c \exp\left[iS_{cl}\right] \exp\left[i \int^{t_i} \lim_{s \longrightarrow \infty} \langle H_Q(t_i, s) \rangle \, dt_i\right]. \tag{2.23}$$

Finalement la détermination du propagateur passe par

a- le calcul de la partie classique dont le calcul nous utilisons le chemin classique

b- et de la partie $\langle H_Q(t_i, s) \rangle$ relative aux fluctuations quantiques.

Chapitre 3

Formulation dans l'espace des phases

Le mouvement nous l'étudions dans l'espace des phases. Il est donc naturel d'utiliser le formalisme hamiltonien

avec évidemment les deux variables $(x_Q\ , p_Q)$ qui deviennent des variables aléatoires dans l'approche de la MQS.

3.1 Propagateur d'une particule libre

Au chapitre deux, nous montrons que l'expression du propagateur à calculer

$$\langle x_f, t_f \mid x_i, t_i \rangle = c \exp\left[iS_{cl}\right] \exp\left[i \int_0^{t_i} \lim_{s \longrightarrow \infty} \langle H_Q(t_i, s) \rangle \, dt_i\right], \tag{3.1}$$

passe par la détermination de

a- la partie classique

b- et de la partie relative aux fluctuations quantiques $\langle H_Q(t_i, s) \rangle$.

Commençons par la partie classique.

3.1.1 Calcul de l'action classique S_{cl}

Notre but dans dans cette partie, est de calculer le propagateur d'une particule libre.

Considérons une particule libre non relativiste dont le mouvement est régi par l'équation de Schrodinger, son hamiltonien et son action classique sont respectivement

$$H = \frac{p^2(t)}{2M} \tag{3.2}$$

et

$$\begin{aligned} S_{cl} &= \int_{t_i}^{t_f} dt(p\dot{x} - H_{cl}) \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left[p_{cl} \frac{dx(t)}{dt} - \frac{p_{cl}^2(t)}{2M} \right] \end{aligned} \tag{3.3}$$

en utilisant les équations d'Hamilton, nous pouvons déterminer le chemin classique x_{cl}

$$\begin{cases} \dot{p}_{cl} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_{cl}} = 0 \\ \\ \dot{x}_{cl} = \dfrac{\partial H_{cl}}{\partial p_{cl}} = \dfrac{p_{cl}}{M} \end{cases} \tag{3.4}$$

En éliminant l'impulsion, respectivement

- l'équation qui donne la trajectoire classique est

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{cl}(t) &= 0 \Rightarrow \dot{x}_{cl}(t) = C^{te} = \alpha \\ &\Rightarrow x_{cl}(t) = \alpha t + \beta \end{aligned}$$

En utilisant les conditions aux limites

$$\begin{cases} x_i = \alpha t_i + \beta \\ x_f = \alpha t_f + \beta \end{cases}, \tag{3.5}$$

nous pouvons tirer la valeur de la constante α

$$\alpha = \frac{(x_f - x_i)}{t_f - t_i} = \frac{(x_f - x_i)}{T} / \qquad \dot{x}_{cl}(t_f) = \dot{x}_{cl}(t_i) = \alpha$$

ainsi que celle de β.

$$\beta = \frac{x_i t_f - x_f t_i}{T}$$

$x_{cl}\,(t)$ s'écrit aussi

$$x_{cl}=\frac{1}{T}\left[x_f(t-t_i)+x_i\,(t_f-t)\right] \tag{3.6}$$

et après quelques simplifications nous obtenons pour l'action classique l'expression suivante :

$$S_{cl}=\frac{M}{2}\frac{(x_f-x_i)^2}{t_f-t_i}. \tag{3.7}$$

Cette action est une fonction de x_i,t_i,x_f,t_f.

Passons au calcul du facteur de fluctuation $\langle H_Q(t_i,s)\rangle$.

3.1.2 Calcul du Facteur de Fluctuation

Désignons par

- x_Q la déviation de x par rapport à la trajectoire classique x_{cl}
- p_Q est la déviation par rapport à l'impulsion classique p_{cl}

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=x_{cl}(t)+x_Q(t) \\ \\ p(t)=p_{cl}(t)+p_Q(t)\end{array}\right. . \tag{3.8}$$

Avec cette décomposition l'action S se décompose

$$\begin{aligned}
S &= \int_{t_i}^{t_f} dt\,[p\,(t)\,\dot{x}\,(t)-H]) \\
&= \int_{t_i}^{t_f} dt\left[p\,(t)\,\dot{x}\,(t)-\frac{1}{2M}p^2\,(t)\right] \\
&= \int_{t_i}^{t_f} dt\ \left[(p_{cl}+p_Q)\frac{\partial}{\partial t}(x_{cl}+x_Q)-\frac{(p_{cl}+p_Q)^2}{2M}\right] \\
&= \int_{t_i}^{t_f} dt\ \left[(p_{cl}\frac{\partial x_{cl}}{\partial t}-\frac{p_{cl}^2}{2M}\right]+\int_{s_i}^{s_f} dt\ \left[p_{cl}\frac{\partial x_Q}{\partial t}+p_Q\frac{\partial x_{cl}}{\partial t}+p_Q\frac{\partial x_Q}{\partial t}-\frac{p_Q^2}{2M}-\frac{p_{cl}p_Q}{M}\right] \\
&= S_{cl}+S_Q
\end{aligned}$$

une partie classique S_{cl} qui a pour expression

$$S_{cl} = \int_{t_i}^{t_f} dt \ \left[(p_{cl} \frac{\partial x_{cl}}{\partial t} - \frac{p_{cl}^2}{2M} \right] \tag{3.9}$$

$$S_{cl} = \frac{M}{2} \frac{(x_f - x_i)^2}{t_f - t_i} \tag{3.10}$$

- et une autre partie qui regroupe les termes relatifs aux déviations

$$\begin{aligned} S_Q &= \int_{t_i}^{t_f} dt \ \left[p_{cl} \frac{\partial x_Q}{\partial t} + p_Q \frac{\partial x_{cl}}{\partial t} + p_Q \frac{\partial x_Q}{\partial t} - \frac{p_Q^2}{2M} - \frac{p_{cl} p_Q}{M} \right] \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left[p_{cl} \frac{\partial x_Q}{\partial t} + p_Q \frac{\partial x_Q}{\partial t} - \frac{p_Q^2}{2M} \right] \end{aligned} \tag{3.11}$$

Avec les conditions aux bords $x_Q(t_i) = x_Q(t_f) = 0$ et (3.4) cette partie se simplifie

$$S_Q = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\ p_Q \frac{\partial x_Q}{\partial t} - \frac{p_Q^2(t)}{2M} \right]. \tag{3.12}$$

Décomposons de la même façon l'hamiltonien. Il a aussi deux parties

$$H = H_{cl} + H_Q \tag{3.13}$$

- une partie classique donnée par

$$H_{cl} = \frac{p_{cl}^2}{2M} \tag{3.14}$$

-et une autre partie qui regroupe aussi tous les termes restants

$$H_Q = \frac{p_Q^2}{2M} + \frac{p_{cl}}{M} p_Q. \tag{3.15}$$

Ajoutons, à ce niveau un temps fictif s au temps réel t, afin de passer à la MQS. Nous avons alors

- pour les positions

$$x_Q(t) \longrightarrow x_Q(t, s), \tag{3.16}$$

avec les conditions aux bords

$$x_Q(t_i, s) = x_Q(t_f, s) = 0, \tag{3.17}$$

- et pour les impulsions

$$p_Q(t) \longrightarrow p_Q(t, s). \tag{3.18}$$

sans aucune conditions aux limites.

Leurs évolutions sont sujettes aux deux équations de Langevin suivantes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_Q(t,s)}{\partial s} = i\dfrac{\delta S_Q}{\delta x_Q(t,s)} + \eta(t,s) \\ \\ \dfrac{\partial p_Q(t,s)}{\partial s} = i\dfrac{\delta S_Q}{\delta p_Q(t,s)} + \xi(t,s) \end{cases}, \tag{3.19}$$

avec les condition aux limites

$$x_Q(t_i,s) = x_Q(t_f,s) = 0, \tag{3.20}$$

et les propriétés des bruits blancs suivantes

$$\begin{cases} \langle \eta(s)\xi(s')\rangle = 0, \\ \\ \langle \eta_n(t,s)\eta_m(t',s')\rangle = \langle \xi_n(t,s)\xi_m(t',s')\rangle = 2\delta_{nm}\delta(t-t')\delta(s-s'). \end{cases} \tag{3.21}$$

$$\begin{cases} \langle x_n(t,s)\eta(t,s)\rangle = \langle p_n(t,s)\xi(t,s)\rangle = \delta_{nm}, \\ \\ \langle x_n(t,s)\xi(t,s)\rangle = \langle p_n(t,s)\eta(t,s)\rangle = 0. \end{cases} \tag{3.22}$$

Utilisant la décomposition en serie de Fourier

$$\begin{cases} x_Q(t,s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n(s)\sin\frac{n\ \pi}{T}(t-t_i), \\ \\ p_Q(t,s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n(s)\cos\frac{n\ \pi}{T}(t-t_i) + \frac{p_0}{2}, \qquad T = t_f - t_i. \end{cases} \tag{3.23}$$

pour séparer les deux variable temporelles t et s, et reportons dans l'expression de l'action (3.12). il vient

$$\begin{aligned} S_Q \;=\; & \int_{t_i}^{t_f}\left\{\left[\sum_{n=1}^{\infty} p_n(s)\cos\frac{n\ \pi}{T}(t-t_i) + \frac{p_0}{2}\right]\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l\ \pi}{T}x_l(s)\cos\frac{l\ \pi}{T}(t-t_i)\right]\right. \\ & \left. -\frac{1}{2M}\left[\sum_{n=1}^{\infty} p_n(s)\cos\frac{n\ \pi}{T}(t-t_i) + \frac{p_0}{2}\right]\left[\sum_{l=1}^{\infty} p_l(s)\cos\frac{l\ \pi}{T}(t-t_i) + \frac{p_0}{2}\right]\right\} dt. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Utilisons le resultat de l'integration suivant

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \cos\frac{n\pi}{T}(t-t_i)\cos\frac{l\pi}{T}(t-t_i) = \frac{T}{2}\delta_{l,n}, \tag{3.25}$$

l'action S_Q prend la forme

$$S_Q = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{T}x_n(s)p_n(s) - \frac{p_n^2(s)}{2M}\right)\frac{T}{2} - p_0^2\frac{T}{8M}. \tag{3.26}$$

aprés avoir remplacer dans (3.19), les équations de Langevin relatives aux composantes des impulsions et positions sont alors

$$\begin{cases} \dfrac{dx_n}{ds} = \dfrac{in\pi}{2}p_n + \eta_n(s) \\ \\ \dfrac{dp_n}{ds} = i(\dfrac{n\pi}{T}x_n - \dfrac{p_n}{M})\dfrac{T}{2} + \xi_n(s) \\ \\ \dfrac{dp_0}{ds} = -i\dfrac{T}{4M}p_0 + \xi_0(s) \end{cases} . \tag{3.27}$$

Comme

$$H_Q = \frac{p_Q^2}{2M} + \frac{p_{cl}}{M}p_Q, \tag{3.28}$$

sa valeur moyenne est

$$\langle H_Q\rangle = \frac{\langle p_Q^2\rangle}{2M} + \frac{p_{cl}}{M}\langle p_Q\rangle, \tag{3.29}$$

Utitisons les relations de transformations (3.23)dans la dernière expréssion

$$\begin{aligned} H_Q(t_i,s) &= \frac{1}{2M}\left(\sum_{n=1}^{\infty}p_n(s)\cos\frac{n\ \pi}{T}(t-t_i) + \frac{p_0}{2}\right) \\ &\quad\times\left(\sum_{l=1}^{\infty}p_l(s)\cos\frac{l\ \pi}{T}(t-t_i) + \frac{p_0}{2}\right) && (3.30) \\ &\quad+\frac{p_{cl}}{M}\left(\sum_{n=1}^{\infty}p_n(s)\cos\frac{n\ \pi}{T}(t-t_i) + \frac{p_0}{2}\right) && (3.31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle H_Q(t_i,s)\rangle &= \frac{1}{2M}\sum_{n,l}^{\infty}\cos\frac{n\,\pi}{T}(t-t_i)\cos\frac{l\,\pi}{T}(t-t_i)\left\langle p_n(s)p_l(s)\right\rangle+\frac{1}{2M}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\,\pi}{T}(t-t_i)\left\langle p_n(s)p_0\right\rangle\\ &+\frac{\langle p_0^2\rangle}{8M}+\frac{p_{cl}}{M}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\,\pi}{T}(t-t_i)\left\langle p_n(s)\right\rangle+\frac{p_{cl}}{M}\left\langle\frac{p_0}{2}\right\rangle.\end{aligned}\tag{3.32}$$

Apartir de (3.27) Il est facile de s'assurer que dans le produit $\left\langle p_m(s)\frac{dx_n(s)}{ds}\right\rangle$

$$\left\langle p_m(s)\frac{dx_n(s)}{ds}\right\rangle=\frac{in\pi}{2}\left\langle p_m(s)p_n\left(s\right)\right\rangle+\left\langle p_m(s)\xi_n\right\rangle$$

le premier terme est nul à la limite $s\rightarrow\infty$, ainsi que le 3ème terme (propriété standard du bruit blanc $\langle p_m(u)\xi_n\rangle=0$)

donc

$$\langle p_mp_n\rangle=\lim_{s\rightarrow\infty}\left\langle p_m(s)p_n\left(s\right)\right\rangle=0\tag{3.33}$$

de même pour les deux produits $\left\langle p_m(s)\frac{dp_0(s)}{ds}\right\rangle$ *et* $\left\langle p_0(s)\frac{dp_0(s)}{ds}\right\rangle$, il vient

$$\langle p_mp_0\rangle=0\tag{3.34}$$

et

$$\left\langle p_0^2\right\rangle=-\frac{4iM}{T}.\tag{3.35}$$

Raportons les résultats suivants (3.33),(3.34) et (3.35) dans l'hamiltonien qui regroupe les termes stochastiques (3.32) et grâce aux propriétés standard des bruits blancs (2.8),(3.21) et (3.22), nous avons a l'équilibre $s\rightarrow\infty$

$$\lim_{s\rightarrow\infty}\left\langle H_Q(t_i,s)\right\rangle=\frac{\langle p_0^2\rangle}{8M}=\frac{-i}{2T}.\tag{3.36}$$

l'intégration par rapport à t_i conduit à

$$i\int^{t_i}\lim_{s\rightarrow\infty}\left\langle H_Q(t_i,s)\right\rangle dt_i=-i\int^{T}(-\frac{i}{2T})dT=-\frac{1}{2}\ln T,\tag{3.37}$$

Donc l'expression du propagateur est la suivante

$$\langle x_f, s_f \mid x_i, s_i\rangle = c\frac{1}{\sqrt{T}}\exp iS_{cl} \tag{3.38}$$

la constant c se détermine à la limite$(T \to 0)$. Insérons l'expression de l'action classique libre (3.7), intégrons sur x_f sur la gaussienne et de la fonction δ, nous pouvons voir que

$$\begin{aligned}\int dx_f \frac{c}{\sqrt{T}} \exp\left[i\frac{M}{2T}(x_f - x_i)^2\right] &= \int dx_f \delta(x_f - x_i) \\ &= 1,\end{aligned} \tag{3.39}$$

ainsi que la règle connue

$$\int dx \exp\left(-ax^2 + bx\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right). \tag{3.40}$$

Nous obtenons successivement

$$c = \sqrt{\frac{M}{2i\pi}}. \tag{3.41}$$

et finalement le propagateur d'une particule libre est le suivant :

$$\langle x_f, t_f \mid x_i, t_i\rangle = \sqrt{\frac{m}{2iT\pi}} \exp i\frac{m}{2T}(x_f - x_i)^2. \tag{3.42}$$

3.2 Propagateur du potentiel linéaire

3.2.1 Calcul de l'action Classique $S_{\mathbf{cl}}$

L'hamiltonien qui régie le mouvement dans ce cas est donné par

$$H = \frac{p^2(t)}{2M} + kx \tag{3.43}$$

et l'action est la suivante

$$\begin{aligned} S_{cl} &= \int_{t_i}^{t_f} dt \ (p\,\dot{x} - H_{cl}) \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left(p_{cl}\frac{dx(t)}{dt} - \frac{p_{cl}^2(t)}{2M} - kx_{cl}(t)\right)\end{aligned} \tag{3.44}$$

Soit maintenant la trajectoire classique d'équation x_{cl}. Cette équation se détermine par les 2 équations d'Hamilton, puisque nous somme dans l'espace des phases.

$$\begin{aligned} \dot{p}_{cl} &= -\frac{\partial H_{cl}}{\partial x_{cl}} = -k \\ \dot{x}_{cl} &= \frac{\partial H_{cl}}{\partial p_{cl}} = \frac{p_{cl}}{M} \end{aligned} \tag{3.45}$$

En éliminant l'impulsion, respectivement. Alors l'équation qui donne le chemin classique est

$$\ddot{x}_{cl} = -\frac{K}{M} \tag{3.46}$$

$$\dot{x}_{cl} = -\frac{k}{M}t + \alpha \tag{3.47}$$

et

$$x_{cl} = -\frac{k}{2M}t^2 + \alpha t + \beta \tag{3.48}$$

En utilisant les conditions aux limites

$$\begin{cases} x_i = -\dfrac{k}{2M}t_i^2 + \alpha t_i + \beta \\ \\ x_f = -\dfrac{k}{2M}t_f^2 + \alpha t_f + \beta \end{cases}, \tag{3.49}$$

nous pouvons tirer les valeurs des constantes α et β

$$\alpha = \frac{x_f - x_i}{T} + \frac{k}{2M}(t_f + t_i) \tag{3.50}$$

$$\beta = \frac{x_i t_f - x_f t_i}{T} - \frac{k}{2M}t_f\ t_i \tag{3.51}$$

Ayant déterminé complètement la trajectoire classique, calculons l'action qui lui est relative

$$\begin{aligned} S_{cl} &= \int_{t_i}^{t_f} dt\ \left(p_{cl}\,\frac{dx(t)}{dt} - \frac{p_{cl}^2(t)}{2M} - kx_{cl}(t)\right) \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{M}{2}\,\dot{x}_{cl}^2 - kx_{cl}(t)\right] dt \end{aligned} \tag{3.52}$$

Après avoir utilisé l'intégrale par partie le 1er terme (énergie cinétique) est simplement égal à

$$\begin{aligned}\int_{t_i}^{t_f}\frac{M}{2}\,\dot{x}_{cl}^2dt &= \frac{M}{2}x_{cl}\,\dot{x}_{cl}\Big|_{t_i}^{t_f}-\int_{t_i}^{t_f}\frac{M}{2}x_{cl}\,\ddot{x}_{cl}\\ &= \frac{M}{2}x_{cl}\,\dot{x}_{cl}\Big|_{t_i}^{t_f}+\int_{t_i}^{t_f}\frac{k}{2}x_{cl}\,dt\\ &= \frac{M}{2}\frac{(x_f-x_i)^2}{T}+\frac{kT}{4}(x_f+x_i)+\int_{t_i}^{t_f}\frac{k}{2}x_{cl}\,dt \qquad (3.53)\end{aligned}$$

reportons (3.53) dans l'action classique (3.52), nous obtenons

$$S_{cl}=\frac{M}{2}\frac{(x_f-x_i)^2}{T}+\frac{k}{4}(t_f-t_i)(x_f+x_i)-\int_{t_i}^{t_f}\frac{k}{2}x_{cl}\,dt \qquad (3.54)$$

reste à calculer le 2ème terme

$$\begin{aligned}\int_{t_i}^{t_f}\frac{k}{2}x_{cl}dt &= \int_{t_i}^{t_f}\frac{k}{2}\left[-\frac{k}{2M}t^2+\alpha t+\beta\right]dt\\ &= \frac{k}{2}\left[-\frac{k}{6M}\left(t_f^3-t_i^3\right)+\frac{\alpha}{2}\left(t_f^2-t_i^2\right)+\beta\left(t_f-t_i\right)\right]\\ &= \frac{-k^2}{12M}\left(t_f^3-t_i^3\right)+\frac{k}{4}\left[\frac{x_f-x_i}{T}+\frac{k}{2M}(t_f+t_i)\right]\left(t_f^2-t_i^2\right)+T\left[\frac{x_it_f-x_ft_i}{T}-\frac{k}{2M}t_f\,t_i\right]\\ &= \frac{k^2}{24M}\left(t_f^3-t_i^3\right)+\frac{k}{4}(x_f-x_i)(t_f+t_i)+\frac{k^2}{8M}\left(t_f^2t_i-t_i^2t_f\right)+(x_it_f-x_ft_i)-\frac{kT}{2M}t_f\,t_i\end{aligned}\qquad (3.55)$$

substituons (3.55) dans (3.54) , et après quelques simplifications, nous obtenons pour l'action classique le résultat suivant

$$S_{cl}=\frac{M}{2}\frac{(x_f-x_i)^2}{T}-\frac{kT}{2}\,(x_f+x_i)-\frac{k^2T^3}{24M}$$

3.2.2 Calcul du terme de fluctuation $\left\langle H_{Q(t_i,s)} \right\rangle$

Désignons par x_Q et par p_Q respectivement la déviation de x par rapport à la trajectoire classique x_{cl} et de l'impulsion p par rapport à p_{cl}

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_{cl} + x_Q \\ \\ p = p_{cl} + p_Q \end{array} \right. . \tag{3.56}$$

L'action se décompose aussi :

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt \;\; [p \; \dot{x} - H] \tag{3.57}$$

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt \;\; \left[(p_{cl} + p_Q) \frac{\partial \left(x_{cl} + x_Q \right)}{\partial t} - \frac{\left(p_{cl} + p_Q \right)^2}{2M} - k \left(x_{cl} + x_Q \right) \right] \tag{3.58}$$

- une partie classique S_{cl} peut être extraite

$$\begin{aligned} S_{cl} &= \int_{t_i}^{t_f} \left[p_{cl} \frac{\partial x_{cl}}{\partial t} - \frac{p_{cl}^2}{2M} - k x_{cl} \right] dt \\ &= \frac{M}{2} \frac{\left(x_f - x_i \right)^2}{T} - \frac{kT}{2} \;\; (x_f + x_i) - \frac{k^2 T^3}{24M} \end{aligned} \tag{3.59}$$

et une autre partie S_Q qui regroupe les termes relatifs aux déviations

$$\begin{aligned} S_Q &= \int_{t_i}^{t_f} dt \;\; \left[p_Q \frac{\partial x_{cl}}{\partial t} + p_Q \frac{\partial x_{cl}}{\partial t} - \frac{p_Q^2}{2M} - \frac{p_{cl} p_Q}{M} - k x_Q \right] \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \;\; \left(p_Q \; \dot{x}_Q - \frac{1}{2M} p_Q^2 - k x_Q \right) \end{aligned} \tag{3.60}$$

Décomposons de la même façon l'hamiltonien

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2M} + kx \\ &= H_{cl} + H_Q \end{aligned} \tag{3.61}$$

$$H_{cl} = \frac{p_{cl}^2}{2M} + k x_{cl} \tag{3.62}$$

$$H_Q = \frac{P_Q^2}{2M} + \frac{P_{cl}}{M} P_Q + k x_Q \tag{3.63}$$

pour passer à la mécanique quantique stochastique nous ajoutons au temps réel t le temps fictif s ,

pour les positions

$$x_Q(t) \longrightarrow x_Q(t,s), \tag{3.64}$$

avec les conditions aux bords

$$x_Q(t_i,s) = x_Q(t_f,s) = 0, \tag{3.65}$$

- et pour les impulsions

$$p_Q(t) \longrightarrow p_Q(t,s). \tag{3.66}$$

sans aucune conditions aux limites.

Leurs évolutions sont sujettes aux deux équations de Langevin suivantes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_Q(t,s)}{\partial s} = i\dfrac{\delta S_Q}{\delta x_Q(t,s)} + \eta(t,s) \\ \\ \dfrac{\partial p_Q(t,s)}{\partial s} = i\dfrac{\delta S_Q}{\delta p_Q(t,s)} + \xi(t,s) \end{cases} \tag{3.67}$$

avec les propriétés des bruits blancs suivantes

$$\begin{cases} \langle \eta(s)\xi(s') \rangle = 0, \\ \\ \langle \eta_n(t,s)\eta_m(t',s') \rangle = \langle \xi_n(t,s)\xi_m(t',s') \rangle = 2\delta_{nm}\delta(t-t')\delta(s-s') \end{cases} . \tag{3.68}$$

$$\begin{cases} \langle x_n(t,s)\eta(t,s) \rangle = \langle p_n(t,s)\xi(t,s) \rangle = \delta_{nm} \\ \\ \langle x_n(t,s)\xi(t,s) \rangle = \langle p_n(t,s)\eta(t,s) \rangle = 0 \end{cases} . \tag{3.69}$$

Utilisant la décomposition en serie de Fourier

$$\begin{cases} x_Q(t,s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n(s) \sin \frac{n\ \pi}{T}(t-t_i), \\ \\ p_Q(t,s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n(s) \cos \frac{n\ \pi}{T}(t-t_i) + \frac{p_0}{2}, \qquad T = t_f - t_i. \end{cases}$$

Aprés avoir remplacer la décomposition en serie de Fourier (3.23) dans l'expression de S_Q , nous obtenons

$$\begin{aligned} S_Q &= \int_{t_i}^{t_f} dt \Bigg\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos \frac{n\pi}{T} (t - t_i) + \frac{p_0}{2} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\ \pi}{T} x_n \cos \frac{n\pi}{T} (t - t_i) \right) \\ & -\frac{1}{2M} \left(\sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos \frac{n\pi}{T} (t - t_i) + \frac{p_0}{2} \right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} p_l \cos \frac{l\pi}{T} (t - t_i) + \frac{p_0}{2} \right) \\ & - k \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sin \frac{n\pi}{T} (t - t_i) \Bigg\} \end{aligned} \tag{3.70}$$

$$\begin{aligned} S_Q &= \int_{t_i}^{t_f} dt \ \Bigg\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos \frac{n\pi}{T} (t - t_i) \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\ \pi}{T} x_n \cos \frac{n\pi}{T} (t - t_i) \right) \\ & + \frac{p_0}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\ \pi}{T} x_n \cos \frac{n\pi}{T} (t - t_i) \right) \\ & -\frac{1}{2M} \left(\sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos \frac{n\pi}{T} (t - t_i) \right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} p_l \cos \frac{l\pi}{T} (t - t_i) \right) \\ & -\frac{p_0}{2M} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos \frac{n\pi}{T} (t - t_i) - \frac{p_0^2}{8M} T - k \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sin \frac{n\pi}{T} (t - t_i) \Bigg\} \end{aligned} \tag{3.71}$$

Avec les résultat de l'intégration suivants

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \ \cos \frac{n\pi}{T} (t - t_i) \cos \frac{l\pi}{T} (t - t_i) = \frac{T}{2} \delta_{n,l} \tag{3.72}$$

et

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \ \cos \frac{n\pi}{T} (t - t_i) = T \delta_{n,0} \tag{3.73}$$

En remplaçant dans la dernière expression de S_Q, nous avons

$$S_Q = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\ \pi}{2} p_n x_n - \frac{T}{4M} p_n^2 \right) - \frac{p_0^2}{8M} T \tag{3.74}$$

les équations de Langevin relatives aux composantes des impulsions et positions sont alors

$$\begin{cases} \dfrac{dx_n}{ds} = i\ \dfrac{n\ \pi}{2} p_n + \eta_n \\ \\ \dfrac{dp_n}{ds} = i\ \left(\dfrac{n\ \pi}{2} x_n - \dfrac{T}{2M} p_n\right) + \xi_n \quad . \\ \\ \dfrac{dp_0}{ds} = -i\ \dfrac{T}{4M} p_0 + \eta_0 \end{cases} \tag{3.75}$$

Comme

$$H_Q = \frac{P_Q^2}{2M} + \frac{P_{cl}}{M} P_Q + k x_Q \tag{3.76}$$

$$H_Q = \frac{P_Q^2}{2M} + \frac{P_{cl}}{M} P_Q + k x_Q \tag{3.77}$$

sa valeur moyenne est

$$\langle H_Q \rangle = \frac{\langle P_Q^2 \rangle}{2M} + \frac{P_{cl}}{M} \langle P_Q \rangle + k \langle x_Q \rangle \tag{3.78}$$

Utilisons les relations de transformations de Fourier(3.23), nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle H_Q \rangle &= \frac{1}{2M} \left\langle \left(\sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos \frac{n\pi}{T} (t - t_i) + \frac{p_0}{2} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} p_l \cos \frac{n\pi}{T} (t - t_i) + \frac{p_0}{2} \right) \right\rangle \\ &+ \frac{P_{cl}}{M} \left\langle \left(\sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos \frac{n\pi}{T} (t - t_i) + \frac{p_0}{2} \right) \right\rangle + k \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sin \frac{n\pi}{T} (t - t_i) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2M} \sum_{n,l=1}^{\infty} \langle p_n p_l \rangle \cos \frac{n\pi}{T} (t - t_i) \cos \frac{n\pi}{T} (t - t_i) \\ &+ \frac{1}{2M} \sum_{n=1}^{\infty} \langle p_n p_0 \rangle \cos \frac{n\pi}{T} (t - t_i) + \frac{\langle p_0 \rangle^2}{8M} \\ &+ \frac{P_{cl}}{M} \sum_{n=1}^{\infty} \langle p_n \rangle \cos \frac{n\pi}{T} (t - t_i) + \frac{P_{cl}}{2M} \langle p_0 \rangle + k \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n \rangle \sin \frac{n\pi}{T} (t - t_i) \end{aligned} \tag{3.79}$$

Apartir de(3.75) , Il est facile de s'assurer que dans le produit $\left\langle p_m \dfrac{d}{ds} x_n \right\rangle$

$$\left\langle p_m \frac{d}{ds} x_n \right\rangle = i \frac{n\ \pi}{2} \langle p_n p_m \rangle + \langle p_m \xi_n \rangle \tag{3.80}$$

le premier terme est nul à la limite $s \to \infty$ ainsi que le 3ème terme (propriété standard du bruit blanc $\langle p_m \xi_n \rangle = 0$

donc

$$\langle p_n p_m \rangle = \lim_{s \to \infty} \langle p_n (s)\, p_m (s) \rangle = 0 \tag{3.81}$$

de même pour les deux produits $\left\langle p_m \frac{d}{ds} p_0 \right\rangle$et$\left\langle p_0 \frac{d}{ds} p_0 \right\rangle$ il vient donc

$$\langle p_m p_0 \rangle = 0 \tag{3.82}$$

et

$$\left\langle p_0^2 \right\rangle = \frac{-4iM}{T} \tag{3.83}$$

Raportons les résultats(3.81) , (3.82) et(3.83) dans l'hamiltonien (3.79) qui regroupe les termes stochastiques et grâce aux propriétés standard des bruits blancs(3.68) et(3.69), nous avons a l'équilibre $s \to \infty$

$$\lim_{s \to \infty} \langle H_Q (t_i, s) \rangle = \frac{\langle p_0^2 \rangle}{8M} = \frac{-i}{2T} \tag{3.84}$$

Le propagateur dans ce cas est

$$\begin{aligned} \langle x_f\ t_f \mid x_i\ t_i \rangle &= c \exp [iS_{cl}] \exp \left[i \int_0^{t_i} \lim_{s \longrightarrow \infty} \langle H_Q(t_i, s) \rangle \, dt_i \right] \\ &= c \exp [iS_{cl}] \exp \left[-i \int^T \frac{-i}{2T} dT \right] \\ &= c \exp [iS_{cl}] \exp \left[\ln \left(\frac{1}{T} \right)^{1/2} \right] \\ &= \frac{c}{\sqrt{T}} \exp \left[i \left(\frac{M}{2} \frac{(x_f - x_i)^2}{T} - \frac{kT}{2} (x_f + x_i) - \frac{k^2 T^3}{24M} \right) \right] \end{aligned} \tag{3.85}$$

Fixons la constante c. Comme elle est indépendante de t_i et t_f.

A la limite $T = t_f - t_i \longrightarrow 0$

$$\lim_{T \to 0} \langle x_f \ t_f \mid x_i \ t_i \rangle = \delta \left(x_f - x_i \right) \tag{3.86}$$

Par intégration sur x_b sur la gaussienne et de la fonction δ, Nous obtenons successivement

$$c = \sqrt{\frac{M}{2i\pi}} \tag{3.87}$$

D'où le propagateur

$$\langle x_f \ t_f \mid x_i \ t_i \rangle = \sqrt{\frac{M}{2 \ \pi i T}} \exp \left[i \left(\frac{M}{2} \frac{\left(x_f - x_i \right)^2}{T} - \frac{kT}{2} \left(x_f + x_i \right) - \frac{k^2 T^3}{24M} \right) \right]. \tag{3.88}$$

Cette expression a la même forme exacte que celle obtenue par l'approche path integral [5]

3.3 Propagateur de l'oscillateur harmonique

3.3.1 Calcul de l'action classique S_{cl}

L'hamiltonien d'un oscillateur harmonique est défini par

$$H = \frac{p^2 (t)}{2M} + \frac{M\omega^2}{2} x^2 (t)$$

et l'action est la suivante

$$S_{cl} = \int_{t_i}^{t_f} \left[p \frac{dx (t)}{dt} - \frac{p^2 (t)}{2M} - \frac{M\omega^2}{2} x^2 (t) \right] dt \tag{3.89}$$

Soit maintenant la trajectoire classique d'équation x_{cl}. Cette équation se détermine par les 2 équations d'Hamilton

$$\begin{cases} \dot{p}_{cl} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_{cl}} = -M\omega^2 x (t) \\ \\ \dot{x}_{cl} = \dfrac{\partial H_{cl}}{\partial p_{cl}} = \dfrac{p_{cl}}{M} \end{cases} \tag{3.90}$$

En éliminant l'impulsion, respectivement

- l'équation qui donne la trajectoire classique est

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \tag{3.91}$$

la solution de cette équation est de la forme

$$x_{cl}(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \tag{3.92}$$

En utilisant les conditions aux limites pour trouver les valeurs des constantes A et B

$$\begin{cases} A = \dfrac{x_f\cos\omega t_i - x_i\cos\omega t_f}{\sin\omega T} \\ \\ B = -\dfrac{x_f\sin\omega t_i - x_i\sin\omega t_f}{\sin\omega T} \end{cases}. \tag{3.93}$$

Alors $x_{cl}(t)$ s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} x_{cl}(t) &= A\sin\omega t + B\cos\omega t \\ &= x_f\frac{\sin\omega(t-t_i)}{\sin\omega(t_f-t_i)} + x_i\frac{\sin\omega(t_f-t)}{\sin\omega(t_f-t_i)} \\ &= \frac{1}{\sin\omega T}\left[x_f\sin\omega(t-t_i) + x_i\sin\omega(t_f-t)\right] \end{aligned} \tag{3.94}$$

$\dot{x}_{cl}(t)$ s'écrit aussi

$$\dot{x}_{cl}(t) = \omega x_f\frac{\cos\omega(t-t_i)}{\sin\omega T} + \omega x_i\frac{\cos\omega(t_f-t)}{\sin\omega T} \tag{3.95}$$

$$\dot{x}_i = \frac{\omega x_f - \omega x_i\cos\omega T}{\sin\omega T} \tag{3.96}$$

$$\dot{x}_f = \frac{\omega x_f\cos\omega T - \omega x_i}{\sin\omega T} \tag{3.97}$$

et après quelques simplifications nous obtenons l'action classique

$$S_{cl} = \frac{M\omega}{2\sin\omega T}\left[\left(x_f^2 + x_i^2\right)\cos\omega T - 2x_i x_f\right] \tag{3.98}$$

Passons au calcul du facteur de fluctuation.

3.3.2 Calcul du terme de fluctuation $\left\langle H_{Q(t_i,s)}\right\rangle$

Désignons par x_Q et par p_Q respectivement la déviation de x par rapport à la trajectoire classique x_{cl} et de l'impulsion p par rapport à p_{cl}

$$\begin{cases} x = x_{cl} + x_Q \\ \\ p = p_{cl} + p_Q \end{cases} . \tag{3.99}$$

L'action se décompose aussi :

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[(p_{cl} + p_Q)\frac{\partial\left(x_{cl} + x_Q\right)}{\partial t} - \frac{(p_{cl} + p_Q)^2}{2M} - \frac{1}{2}M\omega^2\left(x_{cl} + x_Q\right)^2\right] \tag{3.100}$$

- une partie classique S_{cl} peut être extraite

$$S_{cl} = \int_{t_i}^{t_f}\left[p_{cl}\frac{\partial x_{cl}}{\partial t} - \frac{p_{cl}^2}{2M} - \frac{1}{2}M\omega^2 x_{cl}^2\right] dt \tag{3.101}$$

et une autre S_Q

$$\begin{aligned} S_Q &= S - S_{cl} \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt\left[p_{cl}\frac{\partial x_Q}{\partial t} + p_Q\frac{\partial x_{cl}}{\partial t} + p_Q\frac{\partial x_Q}{\partial t} - \frac{p_Q^2}{2M} - \frac{p_{cl}p_Q}{M} - \frac{1}{2}M\omega^2 x_Q^2 - M\omega^2 x_{cl}x_Q\right] \\ &= \int_{t_i}^{t_f}\left[p_Q\frac{\partial x_Q}{\partial t} - \frac{p_Q^2}{2M} - \frac{M\omega^2}{2}x_Q^2 + \underbrace{\left(p_Q\frac{\partial x_{cl}}{\partial t} - \frac{p_{cl}p_Q}{M}\right)}_{=0}\underbrace{\left(m\frac{\partial x_{cl}}{\partial t}\frac{\partial x_Q}{\partial t} - M\omega^2 x_{cl}x_Q\right)}_{=0\ (\textit{intégration par parties})}\right] dt \end{aligned} \tag{3.102}$$

$$S_Q = \int_{t_i}^{t_f}\left[p_Q\frac{\partial x_Q}{\partial t} - \frac{p_Q^2}{2M} - \frac{M\omega^2}{2}x_Q^2\right] dt \tag{3.103}$$

avec évidemment les conditions aux bords

$$x_Q(s_f) = x_Q(s_i) = 0. \tag{3.104}$$

L'hamiltonien, se décompose lui aussi en 2 parties

$$H = H_{cl} + H_Q, \tag{3.105}$$

- un hamiltonien classique

$$H_{cl} = \frac{p_{cl}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2 x_{cl}^2 \tag{3.106}$$

- et un 2ème hamiltonien

$$H_Q = \frac{P_Q^2}{2M} + \frac{P_{cl}P_Q}{M} + \frac{1}{2}M\omega^2 x_Q^2 + M\omega^2 x_{cl} x_Q \tag{3.107}$$

Ajoutons, à ce niveau un temps fictif s au temps réel t, afin de passer à la MQS. Nous avons alors

- pour les positions avec les conditions aux limites

$$x(t) \longrightarrow x(t,s), \tag{3.108}$$

$$x(t_f, s) = x(t_i, s) = 0, \tag{3.109}$$

- et pour les impulsions

$$p(t) \longrightarrow p(t,s). \tag{3.110}$$

Leurs évolutions sont sujettes aux 2 équations de Langevin

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial x_Q(t,s)}{\partial s} = i\dfrac{\delta S_Q}{\delta x_Q(t,s)} + \eta(t,s) \\ \\ \dfrac{\partial p_Q(t,s)}{\partial s} = i\dfrac{\delta S_Q}{\delta p_Q(t,s)} + \xi(t,s) \end{array} \right. , \tag{3.111}$$

avec toujours les propriétés standard pour les bruits

$$\left\{ \begin{array}{c} \langle \eta(t,s)\xi(t',s')\rangle = 0 \\ \\ \langle \eta(t,s)\eta(t',s')\rangle = \langle \xi(t,s)\xi(t',s')\rangle \ = 2\delta(t-t')\delta(s-s') \end{array} \right. . \tag{3.112}$$

Aprés avoir remplacer dans l'expression de S_Q (3.103) la décomposition en serie de Fourier (3.23),

$$\begin{cases} x_Q(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(s) \sin \frac{n\ \pi}{T}(t-t_i), \\ \\ p_Q(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(s) \cos \frac{n\ \pi}{T}(t-t_i) + \frac{p_0}{2}, \qquad T = t_f - t_i. \end{cases} \quad . \tag{3.113}$$

Ainsi

$$\frac{\partial x_Q\left(t,s\right)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{n\pi}{T} \cos \frac{n\pi}{T}\left(t-t_i\right) \tag{3.114}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} S_Q \quad = \quad & \int_{t_i}^{t_f} \Bigg\{ \left[\sum_{n=1}^{\infty} p_n(s) \cos \frac{n\ \pi}{T}(t-t_i) + \frac{p_0}{2} \right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{l\ \pi}{T} x_l(s) \cos \frac{l\ \pi}{T}(t-t_i) \right] \\ & - \frac{1}{2M} \left[\sum_{n=1}^{\infty} p_n(s) \cos \frac{n\ \pi}{T}(t-t_i) + \frac{p_0}{2} \right] \left[\sum_{l=1}^{\infty} p_l(s) \cos \frac{l\ \pi}{T}(t-t_i) + \frac{p_0}{2} \right] \\ & - \frac{M\omega^2}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n(s) \sin \frac{n\ \pi}{T}(t-t_i) \right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} x_l \sin \frac{l\pi}{T}\left(t-t_i\right) \right) \Bigg\} dt. \end{aligned} \tag{3.115}$$

Avec le résultat de l'intégration suivant

$$\int_{t_i}^{t_f} dt\ \ \cos \frac{n\pi}{T}\left(t-t_i\right) \cos \frac{l\pi}{T}\left(t-t_i\right) = \frac{T}{2} \delta_{n,l} \tag{3.116}$$

et comme

$$\int_{t_i}^{t_f} dt\ \ \cos \frac{n\pi}{T}\left(t-t_i\right) = T\delta_{n,0}$$

Alors

$$\int_{t_i}^{t_f} dt\ \ \sin \frac{n\pi}{T}\left(t-t_i\right) \sin \frac{l\pi}{T}\left(t-t_i\right) = \frac{T}{2} \delta_{n,l} \tag{3.117}$$

l'action S_Q prend la forme

$$S_Q = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\ \pi}{T} x_n\left(s\right) p_n\ \ \left(s\right) - \frac{p_n^2\left(s\right)}{2M} - \frac{M\omega^2}{42} x_n^2 \right) \frac{T}{2} - \frac{T}{8M} p_0^2 \tag{3.118}$$

les équations de Langevin relatives aux composantes des impulsions et positions sont alors

$$\begin{cases} \dfrac{dx_n}{ds} = i\left(\dfrac{n\ \pi}{T} p_n - M\omega^2 x_n\right)\dfrac{T}{2} + \eta_n \\ \\ \dfrac{dp_n}{ds} = i\ \left(\dfrac{n\ \pi}{T} x_n - \dfrac{p_n}{M}\right)\dfrac{T}{2} + \xi_n \\ \\ \dfrac{dp_0}{ds} = -i\ \dfrac{T}{4M} p_0 + \eta_0 \end{cases} \quad . \tag{3.119}$$

Comme

$$H_Q = \frac{P_Q^2}{2M} + \frac{P_Q P_{cl}}{M} + \frac{1}{2} M\omega^2 x_Q^2 + M\omega^2 x_{cl} x_Q \tag{3.120}$$

sa valeur moyenne est

$$\langle H_Q \rangle = \frac{\left\langle P_Q^2 \right\rangle}{2M} + \frac{P_{cl}}{M} \langle P_Q \rangle + \frac{1}{2} M\omega^2 \left\langle x_Q^2 \right\rangle + M\omega^2 x_{cl} \langle x_Q \rangle \tag{3.121}$$

Utitisons les relations de transformations (3.23)dans la dernière expréssion, il vient

$$\begin{aligned} \langle H_Q \rangle \quad = \quad & \frac{1}{2M} \sum_{n,l=1}^{\infty} \langle p_n p_l \rangle \cos \frac{n\pi}{T}(t - t_i) \cos \frac{l\pi}{T}(t - t_i) \\ & + \frac{1}{2M} \sum_{n=1}^{\infty} \langle p_n p_0 \rangle \cos \frac{n\pi}{T}(t - t_i) + \frac{\langle p_0 \rangle^2}{8M} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \langle p_n \rangle \frac{P_{cl}}{M} \cos \frac{n\pi}{T}(t - t_i) + \langle p_0 \rangle \frac{P_{cl}}{2M} \\ & + \frac{1}{2} M\omega^2 \sum_{n,l=1}^{\infty} \langle x_n x_l \rangle \sin \frac{n\pi}{T}(t - t_i) \sin \frac{l\pi}{T}(t - t_i) \\ & + M\omega^2 x_{cl} \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sin \frac{n\pi}{T}(t - t_i) \end{aligned} \tag{3.122}$$

Apartir de (3.119) Il est facile de s'assurer que dans les produits $\left\langle p_n(s) \dfrac{dp_0(s)}{ds} \right\rangle$ et $\left\langle p_0(s) \dfrac{dp_0(s)}{ds} \right\rangle$ à la limite $s \to \infty$, nous obtenons

$$\langle p_n p_0 \rangle = 0 \tag{3.123}$$

et

$$\left\langle p_0^2 \right\rangle = -i\frac{4M}{T}$$

de même pour les deux produits $\left\langle p_m(s)\frac{dx_n(s)}{ds}\right\rangle$ et $\left\langle p_m(s)\frac{dp_n(s)}{ds}\right\rangle$ à la limite $s \to \infty$, nous obtenons

$$\langle p_m p_n \rangle = \frac{2iM}{T}\frac{\delta_{nm}}{\left(\frac{n\pi}{\omega T}\right)^2 - 1} \tag{3.124}$$

Alors

$$\begin{aligned} \langle H_Q \rangle &= \frac{\langle p_0 \rangle^2}{8M} + \frac{1}{2M}\sum_{n,l=1}^{\infty} \langle p_n p_l \rangle \cos\frac{n\pi}{T}(t-t_i)\cos\frac{l\pi}{T}(t-t_i) \\ &= \frac{-i}{2T} + \sum_{n,l=1}^{\infty} \frac{i}{T\left(\frac{n\pi}{\omega T}\right)^2 - 1}\cos\frac{n\pi}{T}(t-t_i)\cos\frac{l\pi}{T}(t-t_i) \end{aligned} \tag{3.125}$$

Nous pouvons à l'aide de la table ([9]), montrer que

$$\lim_{s\to\infty} \langle H_Q(t_i, s) \rangle = -\frac{i\omega}{2}\cot T\omega \tag{3.126}$$

Le propagateur dans ce cas est

$$\begin{aligned} \langle x_f\ t_f \mid x_i\ t_i \rangle &= c\exp[iS_{cl}]\exp\left[i\int_0^{t_i} \lim_{t\longrightarrow\infty} \langle H_Q(t_i, s)\rangle\, dt_i\right] \\ &= c\exp[iS_{cl}]\exp\int^{t_i} \frac{\omega}{2}\frac{\cos\omega(t_f - t_i)}{\sin\omega(t_f - t_i)} dt_i \\ &= c\exp[iS_{cl}]\exp\left[\ln\frac{1}{\sqrt{\sin\omega(t_f - t_i)}}\right] \\ &= \frac{c}{\sqrt{\sin\omega T}}\exp[iS_{cl}] \end{aligned} \tag{3.127}$$

Fixons la constante c. Comme elle est indépendante de t_i et t_f.

A la limite $T = t_f - t_i \longrightarrow 0$

$$\lim_{\lambda\to 0} K(x_b, x_a; \lambda) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{c}{\lambda^2} \exp\left[-i\frac{(x_b - x_a)^2}{2\lambda}\right] = \delta^4(x_b - x_a). \tag{3.128}$$

$$\lim_{T\to 0} \langle x_f\ t_f \mid x_i\ t_i\rangle = \delta\left(x_f - x_i\right) \tag{3.129}$$

Par intégration sur x_b sur la gaussienne et de la fonction δ, nous pouvons voir que

$$c = \sqrt{\frac{M\ \omega}{2\pi i}} \tag{3.130}$$

D'où le propagateur

$$\langle x_f\ t_f \mid x_i\ t_i\rangle = \sqrt{\frac{M\omega}{2\pi i \sin\omega T}} \exp\left\{\frac{iM\omega}{2\sin\omega T}\left[\left(x_f^2 + x_i^2\right)\cos\omega T - 2x_i x_f\right]\right\} \tag{3.131}$$

Par conséquent notre propagateur est le même que celui déterminé dans l'espace des phases. Effectuons le passage de l'espace des phases à l'espace des configurations.

Chapitre 4

Formulation dans l'espace de Configuration

4.1 Procédure générale

Il est plus avantageux de calculer le propagateur dans l'espace de configuration et donc d'utiliser le formalisme lagrangien au lieu du formalisme hamiltonien qui nécessite deux variables stochastiques (x_Q, p_Q) au lieu d'une seule qui est x_Q .

Effectuons le passage de l'espace des phases à l'espace des configurations.

Notons d'abord qu'en terme de moyenne, nous avons en général

$$\langle H_Q(t_i,s)\rangle = \left\langle p_Q(t_i,s)\frac{\partial x_Q(t_i,s)}{\partial t}\right\rangle - \langle L_Q(t_i,s)\rangle\,, \tag{4.1}$$

avec

$$\langle L_Q(t_i,s)\rangle = \frac{M}{2}\left\langle \frac{\partial x_Q^2}{\partial t}(t_i,s)\right\rangle = \frac{M}{2}\lim_{t_1,t_2\longrightarrow t_i}\partial_{t_1}\partial_{t_2}\left\langle x_Q(t_1,s)x_Q(t_2,s)\right\rangle. \tag{4.2}$$

et la moyenne de $H_Q(t_i,s)$ est égale dans ce cas

$$\lim_{s\longrightarrow\infty}\langle H_Q(t_i,s)\rangle \;=\; \lim_{s\longrightarrow\infty}\left\langle p_Q(t_i,s)\frac{\partial x_Q(t_i,s)}{\partial t}\right\rangle - \frac{M}{2}\lim_{t_1,t_2\longrightarrow t_i}\partial_{t_1}\partial_{t_2}\lim_{s\longrightarrow\infty}\left\langle x_Q(t_1,s)x_Q(t_2,s)\right\rangle \tag{4.3}$$

Pour notre particule (la particule libre), les deux variables stochastiques se calculent par les deux équations de Langevin qui les régissent

$$\frac{\partial p_Q(t,s)}{\partial s} = i\frac{\delta S_Q}{\delta p_Q(t,s)} + \eta_Q(t,s), \tag{4.4}$$

avec

$$S_Q = \int_{t_i}^{t_f} dt \left(p_Q \frac{\partial x_Q}{\partial t} - \frac{p_Q^2}{2M} \right) \tag{4.5}$$

Alors

$$\frac{\partial p_Q(t,s)}{\partial s} = i\left(\frac{\partial x_Q(t,s)}{\partial t} - \frac{p_Q}{M} \right) + \eta_Q(t,s), \tag{4.6}$$

Il est facile de s'assurer que dans le produit

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial x_Q(t',s)}{\partial t} \frac{\partial p_Q(t,s)}{\partial s} \right\rangle &= i\left\langle \frac{\partial x_Q(t',s)}{\partial t} \frac{\partial x_Q(t,s)}{\partial t} \right\rangle - \frac{i}{M}\left\langle \frac{\partial x_Q(t',s)}{\partial t} p_Q(t,s) \right\rangle \\ &+ \left\langle \frac{\partial x_Q(t',s)}{\partial t} \eta_Q(t,s) \right\rangle, \end{aligned} \tag{4.7}$$

et utilisons les propriétés des bruits (3.22) ,le 1èr et le 4ème terme sont nuls à la limite $s \longrightarrow \infty$ et que le 2ème terme est simplement égal à

$$\left\langle p_Q(t,s) \frac{\partial x_Q(t',s)}{\partial t} \right\rangle = M \left\langle \frac{\partial x_Q(t',s)}{\partial t} \frac{\partial x_Q(t,s)}{\partial t} \right\rangle. \tag{4.8}$$

Autrement dit la substitution de p_Q par $\frac{\partial x_Q(t',s)}{\partial t}$ est permise uniquement à l'équilibre $(\lim_{s\longrightarrow\infty})$.

Ainsi donc (4.3)

$$\lim_{s\longrightarrow\infty} \langle H_Q(t_i,s)\rangle = \frac{M}{2} \lim_{t_1,t_2\longrightarrow t_i} \partial_{t_1}\partial_{t_2} \lim_{s\longrightarrow\infty} \langle x_Q(t_1,s)x_Q(t_2,s)\rangle, \tag{4.9}$$

et le propagateur dans ce cas est égale à [3]

$$\langle x_f,t_f \mid x_i,t_i\rangle = c\exp\left[iS_{cl}\right]\exp\left[i\frac{M}{2}\int_0^{t_i} \lim_{t_1,t_2\longrightarrow t_i} \partial_{t_1}\partial_{t_2} \lim_{s\longrightarrow\infty} \langle x_Q(t_1,s)x_Q(t_2,s)\rangle\, dt_i \right]. \tag{4.10}$$

4.2 Propagateur d'une particule libre

Comme présenté dans le chapitre précédent il est nécessaire d'abord de calculer S_{cl} et ensuite le facteur de fluctuation

Commençons par l'action classique qui est plus facile et qui a été déjà calculée au chapitre précédent.

4.2.1 Calcul de l'action Classique $\mathbf{S_{cl}}$

Cherchons au sens de la mécanique classique la trajectoire suivie par notre particule non relativiste.

Le lagrangien de la particule libre est donné par l'expression suivante

$$L = \frac{M}{2}\dot{x}^2, \tag{4.11}$$

et l'action classique est encore donnée par

$$S_{cl} = \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{M}{2}\dot{x}^2 \tag{4.12}$$

dans ce cas l'équation de la trajectoire se détermine à partir de l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\ddot{x}_{cl}(t) = 0$$

Nous voyons que

- l'équation de la trajectoire

- ainsi que l'action classique

sont les mêmes que celles déjà trouvées au chapitre précédent Par conséquent, il est inutile de refaire les calculs qui se trouvent dans le chapitre 2

L'action classique est la même.

$$S_{cl} = \frac{M}{2T}(x_f - x_i)^2. \tag{4.13}$$

4.2.2 Calcul du facteur de fluctuation

Comme précedament, séparons dans l'action les parties classiques et non classiques

$$\begin{aligned} S &= S_{cl} + S_Q \\ &= \frac{m}{2}\int_{t_i}^{t_f} dt\ \dot{x}_{cl}^2 + \frac{m}{2}\int_{t_i}^{t_f} dt\ \dot{x}_Q^2 + m\int_{t_i}^{t_f} dt\ \dot{x}_{cl}\dot{x}_Q \end{aligned}$$

le dernier terme est disparaît à cause des conditions aux bords $x_Q(t_i) = x_Q(t_f) = 0$, nous obtenons alors pour l'action non classique

$$S_Q = \frac{m}{2}\int_{t_i}^{t_f} dt\ \dot{x}_Q^2. \tag{4.14}$$

Effectuons encore la séparation des variables (t,s) au moyen de la décomposition de Fourier

$$x_Q(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(s) \sin\frac{n\pi}{T}(t-t_i). \tag{4.15}$$

Ainsi

$$\frac{\partial x_Q(t,s)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(s)\frac{n\pi}{T}\cos\frac{n\pi}{T}(t-t_i), \tag{4.16}$$

et

$$S_Q = \int_{t_i}^{t_f}\frac{m}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} x_n(s)\frac{n\pi}{T}\cos\frac{n\pi}{T}(t-t_i)\right]\left[\sum_{l=1}^{\infty} x_l(s)\frac{l\pi}{T}\cos\frac{l\pi}{T}(t-t_i)\right]dt. \tag{4.17}$$

Avec le résultat d'intégration suivant

$$\int_{t_i}^{t_f}\cos\frac{n\pi}{T}(t-t_i)\cos\frac{l\pi}{T}(t-t_i)\,dt = \frac{T}{2}\delta_{n,l}. \tag{4.18}$$

l'action non classique s'écrit alors

$$S_Q = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\pi^2 M}{4T}x_n^2(s). \tag{4.19}$$

L'équation d'évolution de Langevin est

$$\frac{dx_n}{ds} = i\frac{M\ n^2\ \pi^2}{2T}x_n + \eta_n \tag{4.20}$$

Apartir de (4.20) Il est facile de s'assurer que dans le produit $\left\langle x_m(s)\dfrac{dx_n(s)}{ds}\right\rangle$

$$\left\langle x_m(s)\frac{\partial x_n(s)}{\partial s}\right\rangle = i\frac{M\ n^2\ \pi^2}{2T}\left\langle x_n(s)x_m(s)\right\rangle + \left\langle x_m(s)\eta_n\right\rangle$$

le premier terme est nul à la limite $s \to \infty$, et comme

$$\left\langle x_n(s)\eta_m(s)\right\rangle = \delta_{nm}$$

Alors

$$\left\langle x_n(s)x_m(s)\right\rangle = \frac{2iT}{n^2\ \pi^2 M}\delta_{nm} \tag{4.21}$$

par conséquent le propagateur dans l'espace de cofiguration

$$\left\langle x_f, t_f \mid x_i, t_i\right\rangle = c\exp\left[iS_{cl}\right]\exp\left[i\int^{t_i}\lim_{s\longrightarrow\infty}\left\langle H_Q(t_i,s)\right\rangle dt_i\right]$$

avec

$$\lim_{s\longrightarrow\infty}\left\langle H_Q(t_i,s)\right\rangle = \frac{M}{2}\lim_{t_1,t_2\longrightarrow t_i}\partial_{t_1}\partial_{t_2}\lim_{s\longrightarrow\infty}\left\langle x_Q(t_1,s)x_Q(t_2,s)\right\rangle, \tag{4.22}$$

Nous sommes alors en position de calculer la fonction de corrélation libre à deux points.

$$\begin{aligned}\lim_{s\longrightarrow\infty}\langle x_Q(t_{1,}s)x_Q(t_{2,}s)\rangle &= \lim_{s\longrightarrow\infty}\langle\sum_{n,m}\left[\left(x_n\sin\frac{n\ \pi}{T}(t_1-t_i)\right)\left(x_m\sin\frac{m\ \pi}{T}(t_2-t_i)\right)\right]\rangle \\ &= \frac{2iT}{Mn^2\ \pi^2}\sum_{n=m}\left[\sin\frac{n\ \pi}{T}(t_1-t_i)\sin\frac{n\ \pi}{T}(t_2-t_i)\right]\end{aligned} \tag{4.23}$$

Transformons $\left[\sin\frac{n\pi}{T}(t_1-t_i)\sin\frac{n\pi}{T}(t_2-t_i)\right]$ en $\frac{1}{2}\left[\cos\frac{n\pi}{T}(t_1-t_2)-\cos\frac{n\pi}{T}(t_1+t_2-2t_i)\right]$ et utilisons l'identité suivante [9] [*Appendice* 01].

$$\sum\frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi x}{2}+\frac{x^2}{4}, \qquad [0\leq x\leq 2\pi], \tag{4.24}$$

Nous obtenons le résultat simple pour le produit de corrélation

$$\lim_{s\longrightarrow\infty}\langle x_Q(t_{1,}s)x_Q(t_{2,}s)\rangle = \frac{i}{MT}\left(t_f-t_1\right)\left(t_2-t_i\right). \tag{4.25}$$

En dérivant deux fois par rapport a $t_1$et t_2 et à l'équilibre

$$\langle H_Q(t_i, s)\rangle = \frac{M}{2} \lim_{t_1,t_2 \longrightarrow t_i} \partial_{t_1}\partial_{t_2} \lim_{s\longrightarrow\infty} \langle x_Q(t_1, s)x_Q(t_2, s)\rangle. \tag{4.26}$$

$$\lim_{s\to\infty} \langle H_Q(s, u)\rangle = -\frac{i}{2T} \tag{4.27}$$

et pour le propagateur nous obtenons l'expression suivante

$$\begin{aligned}
\langle x_f, t_f | \, x_i, t_i\rangle &= c \exp\left[iS_{cl} + i \lim_{s\longrightarrow\infty} \int^{t_i} \langle H_Q(t_i, s)\rangle dt_i\right] \\
&= c \exp\left[iS_{cl} + \int^{t_i} \frac{1}{2T} dt_i\right] \\
&= c \exp\left[iS_{cl} + \int^{t_i} \frac{1}{2\,(t_f - t_i)} dt_i\right] \\
&= c \exp\left[iS_{cl} - \frac{1}{2}\log T\right] \\
&= c\sqrt{\frac{1}{T}} \exp iS_{cl}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Fixons la constante c. Comme elle est indépendante de t_i et t_f. A la limite $T = t_f - t_i \longrightarrow 0$

$$\lim_{T\to 0} \quad \langle x_f, t_f | \, x_i, t_i\rangle = \delta(x_f - x_i) \tag{4.29}$$

$$c = \sqrt{\frac{M}{2\pi i}} \tag{4.30}$$

$$\langle x_f, s_f \mid x_i, s_i\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i T}} \exp i \frac{m}{2T}(x_f - x_i)^2. \tag{4.31}$$

4.3 Propagateur du potentiel linéaire

4.3.1 Calcul de l'action classique

Le lagrangien du potentiel linéaire est donné par l'expression suivante

$$L = \frac{1}{2} m \ \dot{x}^2 - kx \tag{4.32}$$

et l'action classique et encore donnée par

$$S_{cl} = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{1}{2} m \ \dot{x}^2 - kx \right] \tag{4.33}$$

dans ce cas l'équation de la trajectoire se détermine à partir de l'équation d'Euler-Lagrange :

$$m \ \ddot{x} + k = 0 \tag{4.34}$$

Nous voyons que

- l'équation de la trajectoire

- ainsi que l'action classique

sont les mêmes que celles déjà trouvées dans l'espace des phases, par conséquent, il est inutile de refaire les calculs qui se trouvent dans le chapitre 3

L'action classique est la même.

$$S_{cl} = \frac{M}{2} \frac{(x_f - x_i)^2}{T} - \frac{kT}{2} \ (x_f + x_i) - \frac{k^2 T^3}{24M} \tag{4.35}$$

4.3.2 Calcul du terme de fluctuation $\left\langle H_{Q(t_i,s)} \right\rangle$

Comme précedament, séparons dans l'action les parties classiques et non classiques

$$S = S_{cl} + S_Q \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}
S &= \int_{t_f}^{t_i} dt \ \left[\frac{M}{2}\dot{x}^2 - kx\right] \\
&= \int_{t_f}^{t_i} dt \ \left[\frac{M}{2}\left(\dot{x}_{cl} + \dot{x}_Q\right)^2 - k\left(x_{cl} + x_Q\right)\right] \\
&= \int_{t_f}^{t_i} dt \left[\frac{M}{2}\left(\dot{x}_Q^2 + \dot{x}_{cl}^2 + 2\dot{x}_Q\dot{x}_{cl}\right) - kx_{cl} - kx_Q\right] \\
&= \int_{t_f}^{t_i} dt\frac{M}{2}\dot{x}_{cl}^2 - \int_{t_f}^{t_i} dt \ kx_{cl} + \int_{t_f}^{t_i} dt\frac{M}{2}\dot{x}_Q^2 - \int_{t_f}^{t_i} dt \ kx_Q \\
&\quad + \int_{t_f}^{t_i} dt \ M \ \dot{x}_Q\dot{x}_{cl}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

le dernier terme est disparaît à cause des conditions aux bords $x_Q\left(s_i\right) = x_Q\left(s_f\right) = 0$ nous obtenons alors pour l'action non classique

$$\begin{aligned}
S_{cl} &= \int_{t_f}^{t_i} dt \left(\frac{M}{2}\dot{x}_{cl}^2 - \ kx_{cl}\right). \\
&= \frac{M}{2}\frac{\left(x_f - x_i\right)^2}{T} - \frac{kT}{2} \ \left(x_f + x_i\right) - \frac{k^2T^3}{24M}
\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$S_Q = \int_{t_f}^{t_i} dt \left(\frac{M}{2}\dot{x}_Q^2 - kx_Q\right) \tag{4.39}$$

Effectuons encore la séparation des variables (t, s) au moyen de la décomposition de Fourier (3.23)

$$x_Q = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sin\frac{n\pi}{T}\left(t - t_i\right) \tag{4.40}$$

$$\dot{x}_Q = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{n\pi}{T} \cos\frac{n\pi}{T}\left(t - t_i\right) \tag{4.41}$$

Remplaçons(4.40) et(4.41) dans(4.39) nous obtenons

$$S_Q = \int_{t_i}^{t_f} dt\ \frac{M}{2}\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{n\pi}{T}\cos\frac{n\pi}{T}(t-t_i)\right)\left(\sum_{l\ =1}^{\infty} x_l \frac{l\pi}{T}\cos\frac{l\pi}{T}(t-t_i)\right)\right]$$

$$-\int_{t_i}^{t_f} dt\ k\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n \sin\frac{n\pi}{T}(t-t_i)\right) \tag{4.42}$$

Utilisons l'intégration suivant

$$\int_{t_i}^{t_f} dt\ \cos\frac{n\pi}{T}(t-t_i)\cos\frac{l\pi}{T}(t-t_i) = \frac{T}{2}\delta_{n,l} \tag{4.43}$$

$$\int_0^T dt\ \cos\frac{l\pi}{T}t = T\ \delta_{l,0} \tag{4.44}$$

nous obtenons pour l'action non classique

$$S_Q\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2 M}{4T} x_n^2$$

utilisons L'équation de Langevin suivant

$$\frac{d}{ds}x_n = i\ \frac{dS}{dx_n} + \eta_n \tag{4.45}$$

Dérivons l'action nous obtenons

$$\frac{dS}{dx_n} = \frac{n^2\pi^2 M}{2T} x_n^2 \tag{4.46}$$

remplaçons (4.46) dans (4.45) nous trouvons

$$\frac{d}{ds}x_n = i\ \frac{n^2\pi^2 M}{2T} x_n^2 + \eta_n \tag{4.47}$$

Pour résoudre cette équation en posant

$$\alpha = i\ \frac{n^2\pi^2 M}{2T} \tag{4.48}$$

donc

$$\frac{dx_n}{ds} = \alpha x_n + \eta_n \tag{4.49}$$

Multiplions (4.49) par x_m

$$\left\langle \frac{d}{ds} x_n x_m \right\rangle = \alpha \left\langle x_n x_m \right\rangle + \left\langle \eta_n x_m \right\rangle \tag{4.50}$$

le premier terme est nul à la limite $s \to \infty$.

$$\alpha \left\langle x_n x_m \right\rangle = - \left\langle \eta_n x_m \right\rangle \tag{4.51}$$

$$\left\langle x_n x_m \right\rangle = \frac{- \left\langle \eta_n x_m \right\rangle}{\alpha} \tag{4.52}$$

$$\left\langle x_n x_m \right\rangle = \frac{-\delta_{nm}}{i \, \frac{M}{2} \frac{(n \; \pi)^2}{T}} \tag{4.53}$$

$$= \frac{2i \; T \; \delta_{nm}}{M \; n^2 \; \pi^2} \tag{4.54}$$

$$\left\langle x_n x_m \right\rangle = \frac{2iT}{n^2 \pi^2 M} \delta_{nm} \tag{4.55}$$

on a l'expression du propagateur dans l'espace de configuration

$$\left\langle x_f \; t_f \mid x_i \; t_i \right\rangle = c \; \exp \left[iS_{cl} \; + i \; \lim_{s \to \infty} \int^{t_i} \left\langle H_Q \left(t_i, s \right) dt_i \right\rangle \right] \tag{4.56}$$

Avec

$$\left\langle H_Q \left(t_i, s \right) \right\rangle = \frac{M}{2} \lim_{t_1, t_2 \to t_i} \partial t_1 \partial t_2 \; \lim_{s \to \infty} \left\langle x_Q \left(t_{1,} s \; \right) x_Q \left(t_{2,} s \; \right) \right\rangle \tag{4.57}$$

Calculons la fonction de corrélation a deux points

$$\lim_{s\to\infty}\langle x_Q(t_{1,}s\ )\,x_Q(t_{2,}s\ )\rangle = \lim_{s\to\infty}\left\langle \sum_{n=1}^{\infty} x_n x_m \sin\frac{n\pi}{T}(t_1-t_i)\sum_{l=1}^{\infty} x_l \sin\frac{l\pi}{T}(t_2-t_i)\right\rangle$$
$$= \sum_{n,l=1}^{\infty}\langle x_n x_l\rangle \sin\frac{n\pi}{T}(t_1-t_i)\sin\frac{l\pi}{T}(t_2-t_i)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2iT}{n^2\pi^2 M}\sin\frac{n\pi}{T}(t_1-t_i)\sin\frac{n\pi}{T}(t_2-t_i) \tag{4.58}$$

Transformons $\left[\sin\frac{n\pi}{T}(t_1-t_i)\sin\frac{n\pi}{T}(t_2-t_i)\right]$ en $\frac{1}{2}\left[\cos\frac{n\pi}{T}(t_1-t_2)-\cos\frac{n\pi}{T}(t_1+t_2-2t_i)\right]$ et utilisons l'identité suivante [9] (*table de Gradshteyn*).

$$\sum\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi x}{2}+\frac{x^2}{4},\qquad [0\leq x\leq 2\pi]\,, \tag{4.59}$$

nous obtenons

$$\lim_{s\to\infty}\langle x_Q(t_{1,}s\ )\,x_Q(t_{2,}s\ )\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{iT}{n^2\pi^2 M}\left[\cos\frac{n\pi}{T}(t_1-t_2)-\cos\frac{n\pi}{T}(t_1+t_2-2t_i)\right]$$
$$= \frac{i}{MT}(t_f-t_1)(t_2-t_i) \tag{4.60}$$

Alors

$$\lim_{s\to\infty}\langle H_Q(t_i,s)\rangle = \frac{M}{2}\lim_{t_1,t_2\to t_i}\partial t_1\partial t_2\ \lim_{s\to\infty}\left[\frac{i}{MT}(t_f-t_1)(t_2-t_i)\right] \tag{4.61}$$

$$\lim_{s\to\infty}\ \langle H_Q(t_i,s)\rangle = -\frac{i}{2T} \tag{4.62}$$

Le propagateur dans ce cas est

$$\begin{aligned}
\langle x_f\ t_f \mid x_i\ t_i\rangle &= c\exp\left[iS_{cl}\right]\exp\left[i\int_0^{t_i}\lim_{s\longrightarrow\infty}\langle H_Q(t_i,s)\rangle\,dt_i\right] \\
&= c\exp\left[iS_{cl}\right]\exp\left[-i\int^{T}\frac{-i}{2T}dT\right] \\
&= c\exp\left[iS_{cl}\right]\exp\left[\ln\left(\frac{1}{T}\right)^{1/2}\right] \\
&= \frac{c}{\sqrt{T}}\exp\left[i\left(\frac{M}{2}\frac{(x_f-x_i)^2}{T}-\frac{kT}{2}(x_f+x_i)-\frac{k^2T^3}{24M}\right)\right]. \qquad (4.63)
\end{aligned}$$

Fixons la constante c. Comme elle est indépendante de t_i et t_f.

A la limite $T = t_f - t_i \longrightarrow 0$

$$\lim_{T\to 0}\langle x_f\ t_f \mid x_i\ t_i\rangle = \delta\left(x_f - x_i\right) \qquad (4.64)$$

Par intégration sur x_b sur la gaussienne et de la fonction δ, Nous obtenons successivement

$$c = \sqrt{\frac{M}{2i\pi}} \qquad (4.65)$$

D'où le propagateur

$$\langle x_f\ t_f \mid x_i\ t_i\rangle = \sqrt{\frac{M}{2\ \pi iT}}\exp\left[i\left(\frac{M}{2}\frac{(x_f-x_i)^2}{T}-\frac{kT}{2}(x_f+x_i)-\frac{k^2T^3}{24M}\right)\right]. \qquad (4.66)$$

Cette expression a la même forme exacte que celle obtenue par l'approche path integral [5] Par conséquent notre propagateur est le même que celui déterminé dans l'espace des phases.

4.4 Propagateur de l'oscillateur harmonique

4.4.1 Calcul de l'action Classique S_{cl}

Le lagrangien de l'oscillateur harmonique est donné par l'expression suivante

$$L = \frac{M}{2}\dot{x}^2 - \frac{M\omega^2}{2}x^2 \tag{4.67}$$

et l'action classique est donnée par

$$S_{cl} = \frac{M\omega}{2\sin\omega T}\left[\left(x_f^2 + x_i^2\right)\cos\omega T - 2x_i x_f\right] \tag{4.68}$$

4.4.2 Calcul du terme de fluctuation $\left\langle H_{Q(t_i,s)}\right\rangle$

L'action relatif à l'oscillateur harmonique étant

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt\ \left[\frac{M}{2}\left(\dot{x}\right)^2 - \frac{M\omega^2}{2}x^2\right] \tag{4.69}$$

Séparons les parties classiques et non classiques

$$\begin{aligned} S &= S_{cl} + S_Q \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt\ \left[\frac{M}{2}\left(\dot{x}_Q + \dot{x}_{cl}\right)^2 - \frac{M\omega^2}{2}\left(x_{cl} + x_Q\right)^2\right] \end{aligned} \tag{4.70}$$

où

$$S_{cl} = \int_{t_i}^{t_f} dt\ \left[\frac{M}{2}\dot{x}_{cl}^2 - \frac{M\omega^2}{2}x_{cl}^2\right] \tag{4.71}$$

$$\begin{aligned} S_Q &= \int_{t_i}^{t_f} dt\ \left(\frac{M}{2}\dot{x}_Q^2 - \frac{M\omega^2}{2}x_Q^2 + M\dot{x}_Q\dot{x}_{cl} - M\omega^2 x_{cl}x_Q\right) \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt\ \left(\frac{M}{2}\dot{x}_Q^2 - \frac{M\omega^2}{2}x_Q^2\right) \end{aligned} \tag{4.72}$$

Effectuons encore la séparation des variables (t, s) au moyen de la décomposition de Fourier

$$x_Q\left(t,s\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sin\frac{n\pi}{T}\left(t - t_i\right) \tag{4.73}$$

Ainsi

$$\frac{\partial x_Q\,(t,s)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{n\pi}{T} \cos \frac{n\pi}{T}\,(t-t_i) \tag{4.74}$$

et

$$\begin{aligned} S_Q \ &= \int_{t_i}^{t_f} dt\ \frac{M}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{n\pi}{T} \cos \frac{n\pi}{T}\,(t-t_i)\right] \left[\sum_{l\ =1}^{\infty} x_l \frac{l\pi}{T} \cos \frac{l\pi}{T}\,(t-t_i)\right] \\ &- \frac{M\omega^2}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n \sin \frac{n\pi}{T}\,(t-t_i)\right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} x_l \sin \frac{l\pi}{T}\,(t-t_i)\right) \end{aligned} \tag{4.75}$$

Avec le résultat de l'intégration suivant

$$\int_{t_i}^{t_f} dt\ \cos \frac{n\pi}{T}\,(t-t_i) \cos \frac{l\pi}{T}\,(t-t_i) = \frac{T}{2}\delta_{n,l} \tag{4.76}$$

et comme

$$\int_{t_i}^{t_f} dt\ \cos \frac{n\pi}{T}\,(t-t_i) = T\delta_{n,0}$$

Alors

$$\int_{t_i}^{t_f} dt\ \sin \frac{n\pi}{T}\,(t-t_i) \sin \frac{l\pi}{T}\,(t-t_i) = \frac{T}{2}\delta_{n,l} \tag{4.77}$$

En remplaçant dans la dernière expression il vient

$$S_Q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M\ \pi^2}{4T} \left[n^2 - \left(\frac{\omega T}{\pi}\right)^2\right] x_n^2 \tag{4.78}$$

L'équation de Langevin qui régit le mouvement est la suivante

$$\frac{d}{ds} x_n = i\ \frac{M\ \pi^2}{2T} \left[n^2 - \left(\frac{\omega T}{\pi}\right)^2\right] x_n + \eta_n \tag{4.79}$$

Il est facile de voir que que dans le produit $\left\langle x_m(s) \frac{dx_n(s)}{ds} \right\rangle$

$$\left\langle x_m(s) \frac{dx_n(s)}{ds} \right\rangle = i \frac{M\ \pi^2}{2T} \left[n^2 - \left(\frac{\omega T}{\pi}\right)^2\right] \langle x_m x_n \rangle + \langle x_m(s) \eta_n \rangle \tag{4.80}$$

le premier terme est nul à la limite $s \to \infty$ et $\langle x_m(s)\eta_n \rangle = \delta_{mn}$ (propriété standard du bruit blanc)

donc

$$\langle x_n x_m \rangle = i \frac{2T}{M\ \pi^2} \frac{\delta_{nm}}{n^2 - \left(\frac{T\omega}{\pi}\right)^2} \tag{4.81}$$

par conséquent le propagateur dans l'espace de cofiguration

$$\langle x_f, t_f \mid x_i, t_i \rangle = c \exp\left[iS_{cl}\right] \exp\left[i \int^{t_i} \lim_{s \longrightarrow \infty} \langle H_Q(t_i, s) \rangle \, dt_i\right]$$

avec

$$\lim_{s \longrightarrow \infty} \langle H_Q(t_i, s) \rangle = \frac{1}{2} \lim_{t_1, t_2 \longrightarrow t_i} \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} \lim_{s \longrightarrow \infty} \langle x_Q(t_1, s) x_Q(t_2, s) \rangle \,, \tag{4.82}$$

Nous sommes alors en position de calculer la fonction de corrélation à deux points

$$\begin{aligned}
\langle x_Q\left(t_{1,} s\right) x_Q\left(t_{2,} s\ \right)\rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} x_n x_m \sin\frac{n\pi}{T}\left(t_1 - t_i\right) \sum_{l=1}^{\infty} \sin\frac{l\pi}{T}\left(t_2 - t_i\right) \right\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} i \frac{2T}{M\ \pi^2} \frac{1}{n^2 - \left(\frac{T\omega}{\pi}\right)^2} \sin\frac{n\pi}{T}\left(t_1 - t_i\right) \sin\frac{n\pi}{T}\left(t_2 - t_i\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{\frac{M\ \pi^2}{2T}\left(n^2 - \frac{\omega^2 T^2}{\pi^2}\right)} \sin\frac{n\pi}{T}\left(t_1 - t_i\right) \sin\frac{n\pi}{T}\left(t_2 - t_i\right)
\end{aligned} \tag{4.83}$$

Transformons $\left[\sin\frac{n\pi}{T}(t_1 - t_i) \sin\frac{n\pi}{T}(t_2 - t_i)\right]$ en $\frac{1}{2}\left[\cos\frac{n\pi}{T}(t_1 - t_2) - \cos\frac{n\pi}{T}(t_1 + t_2 - 2t_i)\right]$ et utilisons l'identité suivante [9] (*table de Gradshteyn*).

$$\sum \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4}, \qquad \left[0 \le x \le 2\pi\right], \tag{4.84}$$

nous obtenons

$$\lim_{s \to \infty} \langle x_Q\left(t_{1,} s\right) x_Q\left(t_{2,} s\ \right)\rangle = \frac{i}{M\omega \sin\omega T}\left[\sin\omega\left(t_f - t_1\right) \sin\omega\left(t_2 - t_i\right)\right] \tag{4.85}$$

En dérivant deux fois par rapport a $t_1$et t_2 et à l'équilibre

$$\langle H_Q(t_i, s) \rangle = \frac{M}{2} \lim_{t_1, t_2 \longrightarrow t_i} \partial_{t_1} \partial_{t_2} \lim_{s \longrightarrow \infty} \langle x_Q(t_1, s) x_Q(t_2, s) \rangle. \tag{4.86}$$

$$\lim_{s\to\infty}\langle H_Q\left(t_i,s\right)\rangle=\frac{-i\ \omega}{2}\cot\omega T \tag{4.87}$$

et pour le propagateur nous obtenons l'expression suivante

$$\begin{aligned}\langle x_f\ t_f\mid x_i\ t_i\rangle &= c\exp iS_{cl}\exp i\int^{t_i}\frac{-i\ \omega}{2}\cot\omega T dt_i \\ &= \sqrt{\frac{M\omega}{2i\pi\sin\omega T}}\exp\left[i\frac{M\omega}{2\sin\omega\left(t_f-t_i\right)}\left[\left(x_f^2+x_i^2\right)\cos\omega\left(t_f-t_i\right)-2x_ix_f\right]\right]\end{aligned} \tag{4.88}$$

Chapitre 5

Propagateur de l'oscillateur anharmonique

Considérons un oscillateur anharmonique décrit par l'action

$$S=\int_{t_i}^{t_f}dt\ \left(\frac{1}{2}M\ \dot{x}^2-\frac{1}{2}M\ \omega^2x^2-\frac{g}{4}x^4\right) \tag{5.1}$$

L'équation de Langevin qui régit le mouvement $x\left(t,s\right)$ est la suivante

$$\frac{\partial}{\partial s}x\left(t,s\right)=i\frac{\delta S}{\delta x\left(t,s\right)}+\eta\left(t,s\right) \tag{5.2}$$

Avec comme propriétés pour les bruits

$$\begin{aligned}\left\langle\eta\left(t,s\right)\right\rangle &= 0 &(5.3)\\ \left\langle\eta\left(t,s\right)\eta\left(t',s'\right)\right\rangle &= 2\delta\left(t-t'\right)\delta\left(s-s'\right) &(5.4)\end{aligned}$$

Développons l'équation de Langevin

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}x\left(t,s\right) &= i\frac{\delta}{\delta x\left(t,s\right)}\int_{t_i}^{t_f}dt'\ \left(\frac{1}{2}M\ \dot{x}^2-\frac{1}{2}M\ \omega^2x^2-\frac{g}{4}x^4\right)+\eta\left(t,s\right)\\ &= i\int_{t_i}^{t_f}dt'\ \left(M\ \dot{x}\frac{\partial}{\partial t'}\delta(t-t')-M\ \omega^2x\delta(t-t')-gx^3\delta(t-t')\right)+\eta\left(t,s\right) \quad (5.5)\end{aligned}$$

A l'aide de la règle d'intégration

$$\int dx f(x)\delta'(x-a) = -f^{'}(a). \tag{5.6}$$

nous obtenons successivement pour l'équation de Langevin

$$\frac{\partial}{\partial s}x\left(t,s\right) = -iM\left(\partial_t^2 + \ \omega^2\right)x\left(t,s\right) - igx^3\left(t,s\right) + \eta\left(t,s\right) \tag{5.7}$$

Supposons que la solution x est la superposition de deux solutions. L'une de l'oscillateur harmonique (c-à-d) c'est à dire

- $(g=0)$: $x^{(0)}(t,s)$

- plus la partie restante $x'\left(t,s\right)$:

$$x\left(t,s\right) = x^{(0)}(t,s) + x'\left(t,s\right) \tag{5.8}$$

Décomposons la solution de l'oscillateur harmonique $x^{(0)}(t,s)$ encore en 2 termes

$$x^{(0)}(t,s) = x_{cl}^{(0)}(t) + x_Q^{(0)}(t,s) \tag{5.9}$$

où le 1er terme désigne $x_{cl}^{(0)}(t)$ la solution de l'équation classique.

$$\left(\partial_t^2 + \ \omega^2\right)x_{cl}^{(0)}(t) = 0, \tag{5.10}$$

$$x_{cl}^{(0)}(t) = \frac{1}{\sin\omega T}\left[x_f\sin\omega\left(t-t_i\right) + x_i\sin\omega\left(t_f-t\right)\right] \tag{5.11}$$

avec évidemment

$$x_{cl}^{(0)}(t_f) = x_f \quad \text{et} \quad x_{cl}^{(0)}(t_i) = x_i \tag{5.12}$$

La déviation $x_Q^{(0)}(t,s)$ est régie par l'équation de Langevin suivante

$$\partial_s x\left(t,s\right) = -iM\left(\partial_t^2 + \ \omega^2\right)x_Q^{(0)}(t,s) + \eta\left(t,s\right) \tag{5.13}$$

avec toujours les conditions aux limites

$$x_Q^{(0)}(t_f,s) = x_Q^{(0)}(t_i,s) = 0$$

Désignons par $G^{(0)}(t-t';s-s')$ la fonction de Green libre. Elle est solution de

$$\left[\frac{\partial}{\partial s} + iM\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \ \omega^2\right)\right] G^{(0)}(t-t';s-s') = \delta(t-t')\delta(s-s'), \tag{5.14}$$

les conditions aux limites

$$G^{(0)}(t-t';s-s') = 0, \qquad pour \quad t\,(ou\ t') = t_f, t_i \ \ ou \ \ s < s'. \tag{5.15}$$

Il est facile de trouver l'expression de $G^{(0)}(t-t';s-s')$

$$G^{(0)}(t-t';s-s') = \theta(s-s')\frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{T}(t-t_i)\sin\frac{n\pi}{T}(t'-t_i)\exp\left\{-iM\omega^2\left[1-\left(\frac{n\pi}{\omega T}\right)^2\right](s-s')\right\}. \tag{5.16}$$

D'où la solution de l'équation de Langevin de l'oscillateur harmonique est

$$x_Q^{(0)}(t,s) = \int_{t_i}^{t_f} dt' \int_{-\infty}^{+\infty} ds' G^{(0)}(t-t';s-s')\eta(t',s'), \tag{5.17}$$

et finalement la solution de l'équation de Langevin pour l'oscillateur anharmonique est la suivante

$$x\,(t,s) = x_{cl}^{(0)}\,(t) + x_Q^{(0)}\,(t,s) - ig\int_{t_I}^{t_f} dt' \int_{-\infty}^{\infty} ds' G_{bc}^{(0)}\,(t,t';s-s')\,x^3\,(t',s') \tag{5.18}$$

Nous constatons que x aux instants réel t et fictif s dépend encore de x aux instants réel t' et fictif s'.Nous pouvons trouver la solution par une simple itération.

$$\begin{aligned} x\,(t,s) &= x_{cl}^{(0)}\,(t) + x_Q^{(0)}\,(t,s) - ig\int_{t_I}^{t_f} dt' \int_{-\infty}^{\infty} ds' G_{bc}^{(0)}\,(t,t';s-s') \\ &\times \left(x_{cl}^{(0)3} + x_Q^{(0)3} + 3x_{cl}^{(0)2}x_Q^{(0)} + 3x_Q^{(0)2}x_{cl}^{(0)}\right) + O\left(g^2\right). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Nous sommes alors en position de calculer la fonction de corrélation de deux points pour l'oscillateur harmonique ($g=0$)

$$\begin{aligned} D^{(0)}\,(t,t';s-s') &= \left\langle x_Q^{(0)}\,(t,s)\,x_Q^{(0)}\,(t',s')\right\rangle = \left\langle \int_{t_i}^{t_f} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} ds_1 G^{(0)}(t-t_1;s-s_1)\eta(t_1,s_1)\right. \\ &\left.\times \int_{t_i}^{t_f} dt_2 \int_{-\infty}^{+\infty} ds_2 G^{(0)}(t'-t_2;s'-s_2)\eta(t_2,s_2)\right\rangle \end{aligned}$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} ds_1 G^{(0)}(t - t_1; s - s_1) \times \int_{t_i}^{t_f} dt_2 \int_{-\infty}^{+\infty} ds_2 G^{(0)}(t' - t_2; s' - s_2) \times \langle \eta(t_1, s_1)\eta(t_2, s_2)\rangle$$

$$= 2\int_{t_i}^{t_f} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} ds_1 G^{(0)}(t - t_1; s - s_1) \times \int_{t_i}^{t_f} dt_2 \int_{-\infty}^{+\infty} ds_2 G^{(0)}(t' - t_2; s' - s_2) \delta(t_1 - t_2)\delta(s_1 - s_2) \tag{5.20}$$

$$\left\langle x_Q^{(0)}(t,s)\, x_Q^{(0)}(t',s')\right\rangle = 2\int_{t_i}^{t_f} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} ds_1 G^{(0)}(t - t_1; s - s_1) \times G^{(0)}(t' - t_1; s' - s_1)$$

Reportons les expressions des fonctions de Green $G^{(0)}$

$$\begin{aligned}\left\langle x_Q^{(0)}(t,s)\, x_Q^{(0)}(t',s')\right\rangle &= 2\int_{-\infty}^{\infty} ds_1 \int_{t_I}^{t_f} dt_1 \\ &\left\{\theta(s - s_1)\frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{T}(t - t_i)\sin\frac{n\pi}{T}(t_1 - t_i)\right. \\ &\left.\exp\left[-iM\omega^2\left(1 - \left(\frac{n\pi}{\omega T}\right)^2\right)(s - s_1)\right]\right\} \\ &\left\{\theta(s' - s_1)\frac{2}{T}\sum_{l=1}^{\infty}\sin\frac{l\pi}{T}(t' - t_i)\sin\frac{l\pi}{T}(t_1 - t_i)\right. \\ &\left.\exp\left[-iM\omega^2\left(1 - \left(\frac{n\pi}{\omega T}\right)^2\right)(s' - s_1)\right]\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{8}{T^2}\sum_{n,l}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{T}(t - t_i)\sum_{l=1}^{\infty}\sin\frac{l\pi}{T}(t' - t_i)\int_{-\infty}^{\infty} ds_1\theta(s - s_1)\theta(s' - s_1) \\ &\times\int_{t_I}^{t_f} dt_1 \sin\frac{n\pi}{T}(t_1 - t_i)\sin\frac{l\pi}{T}(t_1 - t_i) \\ &\exp\left\{-iM\omega^2\left[1 - \left(\frac{n\pi}{\omega T}\right)^2\right](s - s_1)\right\}\exp\left\{-iM\omega^2\left[1 - \left(\frac{n\pi}{\omega T}\right)^2\right](s' - s_1)\right\}\end{aligned} \tag{5.21}$$

et calculons l'intégrale sur t_1

Comme

$$\int_0^T dt \cos\frac{m\pi}{T}T = T\delta_{m,0}, \tag{5.22}$$

alors

$$\int_{t_I}^{t_f} dt_1 \sin\frac{n\pi}{T}(t_1 - t_i)\sin\frac{l\pi}{T}(t_1 - t_i) = \frac{T}{2}\delta_{n,l}. \tag{5.23}$$

Remplaçant dans la dernière expression, il vient

$$\begin{aligned}
\left\langle x_Q^{(0)}(t,s)\, x_Q^{(0)}(t',s')\right\rangle &= \frac{4}{T}\sum_{n,l}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{T}(t-t_i)\sin\frac{l\pi}{T}(t'-t_i)\int_{-\infty}^{\infty} ds_1\theta(s-s_1)\,\theta(s'-s_1)\\
&\quad\times\exp\left\{-iM\omega^2\left[1-\left(\frac{n\pi}{\omega T}\right)^2\right](s-s_1)\right\}\\
&\quad\times\exp\left\{-iM\omega^2\left[1-\left(\frac{l\pi}{\omega T}\right)^2\right](s'-s_1)\right\}\\
&= \frac{4}{T}\sum_{n}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{T}(t-t_i)\sin\frac{l\pi}{T}(t'-t_i)\int_{-\infty}^{\infty} ds_1\theta(s-s_1)\,\theta(s'-s_1)\\
&\quad\exp\left\{-iM\omega^2\left[1-\left(\frac{n\pi}{\omega T}\right)^2\right](s+s'-2s_1)\right\}\\
&= \frac{4}{2iM\omega^2 T\left[1-\left(\frac{n\pi}{\omega T}\right)^2\right]}\sum_{n}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{T}(t-t_i)\sin\frac{l\pi}{T}(t'-t_i)\\
&\quad\exp\left\{-iM\omega^2\left[1-\left(\frac{n\pi}{\omega T}\right)^2\right]|s-s'|\right\}
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}
D^{(0)}(t,t';s-s') &= \left\langle x_Q^{(0)}(t,s)\, x_Q^{(0)}(t',s')\right\rangle = \frac{2i}{M\omega^2 T}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\left(\frac{n\pi}{\omega T}\right)^2 - 1}\right)\sin\frac{n\pi}{T}(t-t_i)\sin\frac{l\pi}{T}(t'-t_i)\\
&\quad\exp\left\{-iM\omega^2\left[1-\left(\frac{n\pi}{\omega T}\right)^2\right]|s-s'|\right\}.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

dans ce cas

$$\begin{aligned}
\langle x(t,s)\rangle &= x_{cl}^{(0)}(t) - ig\int_{t_I}^{t_f} dt' \int_{-\infty}^{\infty} ds' G_{bc}^{(0)}(t,t';s-s') \\
&\quad \times \left(x_{cl}^{(0)3}(t') + 3x_{cl}^{(0)}(t')\, D^{(0)}(t,t';0) \right) + O\left(g^2\right). \\
&= x_{cl}^{(0)}(t) - ig\int_{t_I}^{t_f} dt' \Delta(t,t') \left(x_{cl}^{(0)3}(t') + 3x_{cl}^{(0)}(t')\, \Delta(t,t') \right) + O\left(g^2\right). \quad (5.26)
\end{aligned}$$

où $\Delta(t,t') = D_{bc}^{(0)}(t,t';0)$, sa forme explicite est donnée par [3]

$$\Delta(t,t') = \frac{i}{M\omega \sin \omega T} \sin \omega (t_F - t) \sin \omega (t' - t_I). \quad (5.27)$$

D'autre part la valeur de $\langle p^2 \rangle$ est calculée à partir de la fonction de corrélation $\langle xx \rangle$, d'après (3.90) on a

$$\left\langle p^2(t_I) \right\rangle = M^2 \lim_{t_1,t_2 \to t_I} \partial_{t_1} \partial_{t_2} \lim_{s \to \infty} \langle x(t_1,s)\, x(t_2,s) \rangle \quad (5.28)$$

Nous sommes alors en position de calculer l'amplitude de transition (2.17)

$$\langle x_f, t_f \mid x_i, t_i \rangle = c \exp\left[i \int^{t_i} \lim_{s \longrightarrow \infty} \langle H(t_i,s) \rangle\, dt_i \right]. \quad (5.29)$$

La constante c étant indépendante de s_i que nous fixons par la condition

$$\lim_{T \longrightarrow 0} \langle x_f, t_f \mid x_i, t_i \rangle = \delta(x_f - x_i), \qquad T = (t_f - t_i). \quad (5.30)$$

Après quelques arrangements, nous obtenons pour l'amplitude de transition l'expression suivante

$$\langle x_f, t_f \mid x_i, t_i \rangle = \sqrt{\frac{M\omega}{2i\pi \sin \omega T}} \exp\left[i\left(S_0 + S_1\right) + o\left(g^2\right) \right]. \quad (5.31)$$

où S_0 est l'action classique de l'oscillateur harmonique ($g = 0$)

$$S_0 = \frac{M\omega}{2 \sin \omega T} \left[\left(x_F^2 + x_I^2\right) \cos \omega T - 2x_F x_I \right] \quad (5.32)$$

et

$$
\begin{aligned}
S_1 \;=\;& g\frac{3}{32M^2\omega^3\sin^2\omega T}\left(3\omega T-3\sin\omega T\cos\omega T-2\omega T\sin^2\omega T\right)\\
&+ig\frac{3}{16M\omega^2\sin^3\omega T}\left[\left(\acute{x}_F^2+\acute{x}_I^2\right)\left(3\omega T\cos\omega T-3\sin\omega T+\sin^3\omega T\right)\right.\\
&\left.-2\acute{x}_F\acute{x}_I\left(3\omega T-3\sin\omega T\cos\omega T-2\omega T\sin^2\omega T\right)\right]\\
&-g\frac{1}{32\omega\sin^4\omega T}\left[\left(\acute{x}_F^4+\acute{x}_I^4\right)\left(3\omega T-3\sin\omega T\cos\omega T-2\sin^3\omega T\cos\omega T\right)\right.\\
&-4\left(\acute{x}_F^3\acute{x}_I+\acute{x}_F\acute{x}_I^3\right)\left(3\omega T\cos\omega T-3\sin\omega T+\sin^3\omega T\right)\\
&\left.+6\acute{x}_F^2\acute{x}_I^2\left(3\omega T-3\sin\omega T\cos\omega T-2\omega T\sin^2\omega T\right)\right] \qquad (5.33)
\end{aligned}
$$

Chapitre 6

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons présenté les notions fondamentales du formalisme de la mécanique quantique stochastique de Parisi et Wu, les amplitudes de transitions de la particule libre non relativiste, soumise à une force harmonique et à un potentiel linéaire

ont été déterminées suivant cette approche et ceci dans l'espace des phases et de configuration.

C'est ainsi qu'en solutionnant les équations de Langevin, nous avons calculé directement les amplitudes de transitions (ou fonction de corrélation).

Dans l'espace des phases, l'action classique a été d'abord extraite et le facteur de fluctuation a été ensuite déterminé exactement en résolvant les équations de Langevin pour x_Q et p_Q.

En suivant la même démarche précédente, les amplitudes de transitions ont été recalculées pour la 2ème fois dans l'espace des configurations. L'action classique une fois extraite, le facteur de fluctuation a été encore retrouvé.

Grâce a un traitement perturbatif et grâce aussi aux propriétés du bruit blanc qui ont permis de limiter le nombre de termes dans la série de perturbation, nous avons calculé la fonction de Green pour l'oscillateur anharmonique suivant la mécanique quantique stochastique (MQS) de Parisi et Wu.

le facteur de fluctuation a été déterminé grâce à un calcul itératif et grâce à l'espace de configuration, nous avons utilisé une seule équation de Langevin au lieu de deux pour l'espace des phases.

Annexe A

Produit de corrélation

Le but de cette appendice est de montrer le résultat (4.25)

Partons de

$$\begin{aligned}\lim_{s\longrightarrow\infty}\langle x_Q(t_1,s)x_Q(t_2,s)\rangle &= \lim_{s\longrightarrow\infty}\langle\sum_{n,m}\left[\left(x_n\sin\frac{n\ \pi}{T}(t_1-t_i)\right)\left(x_m\sin\frac{m\ \pi}{T}(t_2-t_i)\right)\right]\rangle \\ &= \frac{2iT}{Mn^2\ \pi^2}\sum_n\left[\sin\frac{n\ \pi}{T}(t_1-t_i)\sin\frac{n\ \pi}{T}(t_2-t_i)\right] \qquad (A.1)\end{aligned}$$

Transformons $\left[\sin\frac{n\pi}{T}(t_1-t_i)\sin\frac{n\pi}{T}(t_2-t_i)\right]$ en $\frac{1}{2}\left[\cos\frac{n\pi}{T}(t_1-t_2)-\cos\frac{n\pi}{T}(t_1+t_2-2t_i)\right]$ et utilisons l'identité suivante [9] (*table de Gradshteyn*).

$$\sum\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi x}{2}+\frac{x^2}{4}, \qquad [0\leq x\leq 2\pi]\,, \qquad (A.2)$$

posons

$$\left\{\begin{array}{c} x_1=\frac{\pi}{T}(t_1-t_2) \\ et \\ x_2=\frac{\pi}{T}(t_1+t_2-2t_i)\end{array}\right. . \qquad (A.3)$$

Alors

$$\begin{aligned}&\frac{2iT}{Mn^2\ \pi^2}\sum_n\left[\sin\frac{n\ \pi}{T}(t_1-t_i)\sin\frac{n\ \pi}{T}(t_2-t_i)\right] \\ =\ &\frac{iT}{M\ \pi^2}\sum_n\frac{\cos nx_1-\cos nx_2}{n^2} \\ =\ &\frac{iT}{M\ \pi^2}\left[-\pi\frac{x_1}{2}+\frac{x_1^2}{4}+\pi\frac{x_2}{2}-\frac{x_2^2}{4}\right] \\ =\ &\frac{i}{M\ T}\left[(t_2-t_i)T-\left(t_1t_2-t_i(t_1+t_2)+t_i^2\right)\right]\end{aligned}$$

Remplaçons T par $(t_f - t_i)$, nous obtenons le produit de corrélation cherché

$$\lim_{s \longrightarrow \infty} \langle x_Q(t_{1,}s) x_Q(t_{2,}s) \rangle = \frac{i}{MT} \left(t_f - t_1 \right) \left(t_2 - t_i \right). \tag{A.4}$$

Bibliographie

[1] G.Parisi et Y.-S. Wu, Sci. Sin. 24 (1981), 483.

[2] Namiki M, *Stochastic Quantization* (Springer-Verlag, Heidelberg, 1992).

[3] H. Hüffel et H. Nakazato, Mod. Phys. Lett. A9 (1994), 2953.

[4] K. Yuasa et H. Nakazato, lanl.arXiv.org :hep-th-9610209.

[5] C. Grosche and F. Steiner, *Handbook of Feynman Path Integrals,* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1998).

[6] N. Chine and L. Chetouani, Czech. J. Phys. 56 (2006) 565 ; Turk. J. Phys. 31 (2007) 1.

[7] Nakazato H. and Yamanaka Y., Phys. Rev. D **34** (1986) 492.

[8] Nakazato H., Prog. Theor. Phys. **77** (1987) 20.

[9] I.S.Gradshteyn and I.M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products, Academic Press, NewYork, 1979.

Résumé

Ce travail est consacré au calcul de la fonction de Green suivant la mécanique quantique stochastique MQS de Parisi-Wu pour une particule :libre non relativiste ,soumise à une force harmonique et à un potentiel linéaire ,Dans les trois cas le calcul est fait dans l'espace des phases et l'espace de configuration,Ensuite on calcule la fonction de Green relative à un oscillateur anharmonique .

الملخص

هذا العمل يرتكز على تحديد دالة غرين حسب الميكانيك الكمي العشوائي لباريزي-يو من أجل جسيم : حر غير نسبي ،يخضع لقوة توافقية وكمون خطي،في الحالات الثلاث تم الحساب في فضاء الأطوار وفضاء الإحداثيات ،تم كذلك حساب دالة غرين المتعلقة بهزاز غير توافقي.

Abstract

This work is devoted to calculate the Green's function according to stochastic quantization method of G.Parisi-Wu for a free particle ,a particle subject to a harmonic force and to a linear potential,in the three cases the calculation is done in phase space and configuration space .Then we calculate the green function relating to anharmonic oscillator.