

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR**  
**ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE DE JIJEL**  
**Faculté des Sciences Exactes et Informatique**  
**Département de Physique**

N° d'ordre :

Série :

**Mémoire**

présenté pour obtenir le diplôme de

**Master en physique**

Option : Physique Théorique

par

Bounequet Asma

**Thème**

**Etude quantique d'une particule dans une interface**

Soutenu le : 15 /07/2021

**Devant le Jury :**

Présidente	Z. Belghobsi	Prof.	Univ. Jijel
Encadreur	N. Ferkous	MCA	Univ. Jijel
Examineur	A. Tilbi	MCA.	Univ. Jijel

# Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord à Dieu tout puissant de la volonté, de la santé et de la patience, qu'il m'a donné pour réaliser ce mémoire.

Mes remerciements les plus chaleureux vont à mon Encadreur Monsieur **N.Ferkous** qui ma donné la chance de préparer ce travail sous sa direction et pour son aide

Je voudrais également remercier les membres du Jury **Z. Belghobsi** et **A. Tilbi** pour avoir accepter d'évaluer ce travail et pour toutes leurs remarques et critiques.

Un merci spécial à mon père **B. Rachid**, ma mère **B. Fatiha**, mes sœurs et mon ami **Mohamad** pour leur soutien moral.

J'adresse mes plus sincères remerciements à **Lamri Houria** la secrétaire du laboratoire de physique théorique pour les services et l'encouragement.

A tous mes enseignants qui m'ont initié aux valeurs authentiques, en signe d'un profond respect et d'un profond amour.

Merci à vous tous.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Quelques éléments de géométrie différentielle</b>	<b>7</b>
2.1	Introduction . . . . .	7
2.2	Surfaces dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	8
2.3	Première forme quadratique . . . . .	9
2.4	Deuxième forme quadratique . . . . .	10
2.5	Relations entre la première et la deuxième formes quadratiques . . . . .	13
2.5.1	Formules de Gauss et de Weingarten . . . . .	13
2.6	Les différentes courbures sur une surface . . . . .	16
2.6.1	Formule de Meusnier . . . . .	16
2.6.2	Courbure de Gauss et courbure moyenne . . . . .	17
2.7	Tenseur de Riemann et courbure de Gauss . . . . .	19
2.7.1	Tenseur de Riemann . . . . .	19
2.7.2	Le scalaire de Ricci et la courbure de Gauss pour une surface à 2 dimensions	21
2.8	Translation géodésique d'un vecteur . . . . .	25
2.9	Théorème de Gauss-Bonnet . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Mécanique quantique d'une particule confinée une surface : méthode de confinement</b>	<b>29</b>
3.1	Introduction . . . . .	29
3.2	Particule liée à une surface . . . . .	30
<b>4</b>	<b>particule confinée sur un cône en présence d'un champ magnétique constant</b>	<b>37</b>
4.1	Introduction . . . . .	37

---

4.2	La géométrie du cône . . . . .	38
4.3	Le problème d'une particule libre sur un cône . . . . .	41
4.4	Particule sur un cône en présence d'un champ magnétique constant . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>49</b>
.1	Annexe A . . . . .	49
.2	Annexe B . . . . .	51
.3	Annexe C . . . . .	53
.4	Résumé . . . . .	56

# Chapitre 1

## Introduction générale

La physique d'un gaz d'électrons confiné sur une surface non plane est devenue un domaine de recherche très actif [1]. La courbure peut influencer des phénomènes bien connus comme par exemple la conductance, la magnétisation, les courants persistants [2]. Ce confinement d'électrons se trouve en effet dans les nano-structures, plus précisément dans les nano-tubes qui sont généralement construits par des couches très minces de matériaux différents [3] .

En 1981, Da Costa [4] a montré que la dynamique quantique d'une particule confinée sur une surface courbe est influencée par les courbures intrinsèque et extrinsèque de cette surface. Ce processus de confinement est réalisé par un potentiel de pression qui est constant sur la surface mais augmente brusquement pour chaque petit déplacement dans la direction normale. Par conséquent, ce potentiel peut alors être considéré comme une barrière infini forte qui maintient la particule attachée de façon permanente à cette surface.

Le but de ce mémoire, est en premier lieu de détailler le calcul du papier originale [4] . Puis, on va donner à la fin de ce mémoire une petite contribution qui concerne la solution exacte d'un système important à savoir une particule confinée sur une surface conique en présence d'un champ magnétique constant.

La géométrie simple, mais non triviale, du cône apparaît dans les cordes cosmiques [5] il faut citer les applications [6]. Un problème concernant le cône largement étudié est relié à une singularité de courbure à son extrémité sous forme d'une fonction delta de Dirac à deux dimensions. La façon la plus simple de traiter cette singularité est d'imposer l'annulation de la fonction d'onde à la pointe du cône comme cela a été déjà fait par C.Furtado [7]. Une autre méthode est l'extension auto-adjointe qui est une méthode assez mathématique basée sur le fait que

l'hamiltonien de ce système n'est pas auto-adjoint [8, 9, 10]. Cependant, les travaux utilisant cette méthode fournissent les résultats les plus importants en fonction d'un paramètre réel arbitraire. Une troisième méthode pour surmonter ce problème est de redéfinir cette singularité comme la limite d'une autre plus physique et moins singulière comme dans la référence [11]. Ici nous allons adopter cette technique de régularisation pour faire face au problème du cône. D'abord, on va considérer une particule neutre sur une surface conique où on extrait le spectre d'énergie relatif à ce confinement. Puis, on va traiter le problème d'une particule chargée sur un cône et soumise à un champ magnétique constant. Cette étude assez importante a été considérée dans la référence [12, 13] mais sans tenir compte de la courbure de Gauss qui introduit une singularité sous forme d'une fonction delta de Dirac. Comme résultat de ce mémoire, le spectre d'énergie de ce système est obtenu comme une équation transcendante. Les niveaux de Landau déterminés dans [12, 13] (c'est-à-dire sans tenir compte de la singularité) sont obtenus ici comme cas limite.

Ainsi, le reste de ce mémoire est organisé comme suit : Le deuxième chapitre sera consacré à un rappel de quelques notions élémentaires de la géométrie différentielle, en particulier le théorème de Gauss-Bonnet qu'on va l'utiliser pour déterminer la courbure de Gauss. Au troisième chapitre, on va exposer la méthode de confinement pour une particule non relativiste du point de vue de Da Costa. Le quatrième chapitre sera notamment réservé à l'étude d'une particule chargée sur un cône et soumise à un champ magnétique constant. Enfin, nous terminerons ce mémoire par une conclusion.

# Chapitre 2

## Quelques éléments de géométrie différentielle

" Papa, le calcul n'est pas juste! "

Gauss à l'âge de 3 ans

### 2.1 Introduction

La géométrie différentielle est une théorie mathématique qui utilise les techniques du calcul différentiel et de l'algèbre pour étudier des problèmes de géométrie. Outre son intérêt mathématique, c'est aussi un outil puissant pour représenter le monde physique. Déjà sur une surface bidimensionnelle émergée dans un espace tridimensionnel, la géométrie différentielle est riche en idées, admettant une vaste généralisation pour une surface multidimensionnelle [14, 15, 16, 17]. Nous présentons dans ce chapitre quelques notions fondamentales nécessaires pour traiter les chapitres suivants. Nous allons concentrer essentiellement sur la géométrie de Gauss. Nous commençons par la première forme quadratique qui introduit une métrique. Puis, la deuxième forme quadratique qu'on utilise pour calculer la courbure de lignes se trouvant sur une surface. Nous introduisons les formules de Gauss et de Weingarten qui décrivent la relation entre la première et la deuxième forme. Afin d'avoir une vue assez complète, nous considérons aussi le tenseur de Riemann et ses propriétés, nous déduisons le tenseur de Ricci et la courbure scalaire. Nous montrons la relation entre la courbure scalaire et la courbure de Gauss. Nous donnons également le fameux théorème de Gauss-Bonnet qui va nous aider à comprendre le problème d'une particule confinée sur un cône circulaire droit. Pour éclaircir ces notions, nous considérons, à

travers ce chapitre, l'exemple d'une surface sphérique plongée dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ .

## 2.2 Surfaces dans $\mathbb{R}^3$

Il existe différentes façons de représenter une surface 2-dimensionnelle ( $S$ ) dans l'espace 3-dimensionnel  $\mathbb{R}^3$ . L'une est la représentation familière dans laquelle la surface est définie via une équation de la forme  $f(x, y, z) = 0$ , où  $x$ ,  $y$  et  $z$  exprimant les coordonnées cartésiennes et  $f$  est une fonction scalaire. On peut également représenter une surface avec les coordonnées cartésiennes  $x$ ,  $y$  et  $z$  comme étant des fonctions réelles de deux paramètres réels indépendants  $q^1$  et  $q^2$  parcourant un domaine  $U \subset \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{cases} x = x(q^1, q^2) \\ y = y(q^1, q^2) \\ z = z(q^1, q^2), \end{cases} \quad (2.1)$$

ici les lettres supérieures sont des indices, pas des exposants.

Il est possible de remplacer les équations (2.1) par une équation vectorielle (vecteur de position) de façon que

$$\mathbf{r} = (x(q^1, q^2), y(q^1, q^2), z(q^1, q^2)) = \mathbf{r}(q^1, q^2) \quad (2.2)$$

Formellement, il est possible qu'à deux points paramétriques différents  $(q^1, q^2)$  et  $(q^{1'}, q^{2'})$  il corresponde un même point de la surface ( $S$ ). Mais, pour éviter les auto-intersections, on ne considère pas de telles situations. Pour garantir la biunivocité, on doit exiger de plus que le *rang* de la matrice de Jacobi suivante

$$M = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q^1, q^2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q^1} & \frac{\partial y}{\partial q^1} & \frac{\partial z}{\partial q^1} \\ \frac{\partial x}{\partial q^2} & \frac{\partial y}{\partial q^2} & \frac{\partial z}{\partial q^2} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

soit égale à 2. Il en résulte que les deux vecteurs

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} \text{ et } \mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} \quad (2.4)$$

en un point  $P$  de la surface ( $S$ ) sont *linéairement indépendants*. Ces deux vecteurs sont disposés dans le *plan tangent* de la surface ( $S$ ) au point correspondant  $P$ . Notons ici que ces vecteurs de base  $\mathbf{r}_i$ ,  $i = 1, 2$  ne sont pas nécessairement des vecteurs unitaires. On peut écrire donc

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} dq^i = \mathbf{r}_i dq^i, \quad (2.5)$$



l'indice répété indique une sommation.

**Exemple :** Une surface sphérique de rayon  $r_0$  immergée dans un espace 3-dimensionnel est déterminée par le rayon vecteur

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (r_0 \sin \theta \cos \varphi, r_0 \sin \theta \sin \varphi, r_0 \cos \theta) \quad , \quad r_0 = \text{cte}$$

soit

$$\mathbf{r}_\theta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (r_0 \cos \theta \cos \varphi, r_0 \cos \theta \sin \varphi, -r_0 \sin \theta)$$

et aussi

$$\mathbf{r}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-r_0 \sin \theta \sin \varphi, r_0 \sin \theta \cos \varphi, 0)$$

Ainsi,  $|\mathbf{r}_\varphi| = r_0 \sin \theta \neq 1$ .

### 2.3 Première forme quadratique

Soit une surface ( $S$ ) bidimensionnelle paramétrée par  $q^1$  et  $q^2$  et soit le vecteur position  $\mathbf{r}(q^1, q^2)$  d'un point  $P$  sur cette surface. La distance  $ds$  entre  $P$  et certain point  $P'$ , qui est au voisinage de  $P$ , s'écrit comme

$$\begin{aligned} ds^2 &= |d\mathbf{r}|^2 = (d\mathbf{r}, d\mathbf{r}) \\ &= g_{ij} dq^i dq^j, \quad i, j = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

où  $g_{ij} = (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ . La forme quadratique dans le second membre de (2.6) est appelée *première forme quadratique* de la surface ( $S$ ) notée aussi  $G(q, dq)$ . Cette forme s'écrit explicitement comme suit

$$\begin{aligned} G(q, dq) &= g_{ij} dq^i dq^j \\ &= E (dq^1)^2 + 2F dq^1 dq^2 + G (dq^2)^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

où  $E$ ,  $F$  et  $G$  sont les coefficients de la première forme donnés par les expressions

$$E = g_{11} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1), \quad F = g_{12} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad G = g_{22} = (\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2) \quad (2.8)$$

$g_{ij}$  est la *métrique* de la première forme qui est un tenseur d'ordre 2, symétrique. Si de plus cette métrique est diagonale, la base  $\{\mathbf{r}_i, i = 1, 2\}$  est orthogonale (i.e;  $F = 0$ ). L'inverse du tenseur  $g_{ij}$  est le tenseur  $g^{ik}$  de façon qu'on a

$$g_{ij} g^{ik} = \delta_j^k \quad (2.9)$$

où  $\delta_j^k$  est le symbole de Kronecker.

Notons le tenseur  $g_{ij}$  par la matrice  $\mathbf{g}$  (ici le caractère gras du tenseur indique sa représentation matricielle). Le déterminant de la métrique  $\mathbf{g}$  est noté  $g$  tels que

$$g = \det(\mathbf{g}) = \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = EG - F^2 \quad (2.10)$$

Les composantes de l'inverse de  $\mathbf{g}$  sont données par l'expression

$$\mathbf{g}^{-1} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

L'équation (2.6) détermine complètement la *géométrie intrinsèque* de la surface ( $S$ ).

**Exemple :** si on considère l'exemple de la surface de la sphère précédente, les coefficients de la première forme quadratique de cette sphère, d'après Gauss, sont désignés comme suit

$$g_{\theta\theta} = (\mathbf{r}_\theta, \mathbf{r}_\theta) \quad , \quad g_{\theta\varphi} = (\mathbf{r}_\theta, \mathbf{r}_\varphi) \quad , \quad g_{\varphi\varphi} = (\mathbf{r}_\varphi, \mathbf{r}_\varphi)$$

après quoi la première forme quadratique, s'exprime

$$ds^2 = g_{\theta\theta} d\theta^2 + 2g_{\theta\varphi} d\theta d\varphi + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2$$

Ainsi, on obtient

$$g_{\theta\theta} = r_0^2 \quad , \quad g_{\theta\varphi} = 0 \quad , \quad g_{\varphi\varphi} = r_0^2 \sin^2 \theta$$

d'où la métrique s'écrit sous la forme

$$ds^2 = r_0^2 d\theta^2 + r_0^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (2.12)$$

le tenseur métrique  $g_{ij}$  est désigné par la matrice diagonale  $\mathbf{g}$  comme

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} r_0^2 & 0 \\ 0 & r_0^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

## 2.4 Deuxième forme quadratique

Les combinaisons linéaires des vecteurs  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  peuvent être utilisées pour exprimer tous les vecteurs tangents à ( $S$ ) en  $P$ . Ils forment donc naturellement une base pour ces vecteurs. Cela signifie que le plan tangent à ( $S$ ) en  $P$  est engendré par ces vecteurs. Lorsqu'un vecteur

$\mathbf{n}$  perpendiculaire à  $(S)$  en  $P$  est ajouté à la base naturelle considérée, on obtient une autre base pour  $\mathbb{R}^3$ . De cette façon, au moins les points dans le voisinage immédiat de la surface  $(S)$  peuvent être exprimés en utilisant cette base.

On peut introduire le vecteur unitaire normal  $\mathbf{n}$  à la surface  $(S)$  au point  $P$  qui peut être déterminé comme le produit vectoriel des vecteurs de base du plan tangent

$$\mathbf{n}(q^1, q^2) = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}, \quad (2.14)$$

ce vecteur s'écrit aussi pour une surface définie par une équation de la forme  $f(x, y, z) = 0$  comme

$$\mathbf{n}(q^1, q^2) = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

Soit  $(L)$  une courbe définie sur une surface  $(S)$  passant par un certain point  $P$ . On sait que, pour une courbe paramétrée avec  $s$ , qui est la longueur de cette courbe, on a la formule

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t} \quad (2.15)$$

où  $\mathbf{t}$  est le vecteur unitaire tangent à la courbe  $(L)$  au point  $P$ . Si  $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \neq 0$ , alors

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa\boldsymbol{\nu} \quad (2.16)$$

avec  $\boldsymbol{\nu}$  est le vecteur unitaire orthogonal à  $\mathbf{t}$  et se trouvant dans le plan osculateur (plan contenant les vecteurs  $\boldsymbol{\nu}$  et  $\mathbf{t}$ ) et  $\kappa$  la courbure de la ligne  $(L)$ . Ainsi, d'après (2.5)

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left( \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^i} \frac{dq^i}{ds} \right) \\ &= \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^i \partial q^j} \frac{dq^j}{ds} \frac{dq^i}{ds} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^i} \frac{d^2q^i}{ds^2}, \end{aligned}$$

utilisons les abréviations

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^i \partial q^j} = \mathbf{r}_{ij} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^i} = \mathbf{r}_i$$

et multiplions scalairement par le vecteur unitaire  $\mathbf{n}$ , nous obtenons

$$\left( \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \mathbf{n} \right) = (\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{n}) \frac{dq^j}{ds} \frac{dq^i}{ds} \quad (2.17)$$

puisque  $(\mathbf{r}_i, \mathbf{n}) = 0$ . On pose  $(\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{n}) = b_{ij}$ , la forme

$$B(q, dq) = b_{ij} dq^i dq^j \quad (2.18)$$

s'appelle *deuxième forme quadratique* de la surface ( $S$ ). Cette forme s'écrit explicitement comme suit

$$B(q, dq) = L (dq^1)^2 + 2M dq^1 dq^2 + N (dq^2)^2 \quad (2.19)$$

où  $b_{11} = L$ ,  $b_{12} = b_{21} = M$  et  $b_{22} = N$ . Ainsi, d'après (2.6) et (2.18), le produit scalaire (2.17) s'écrit

$$\left( \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2}, \mathbf{n} \right) = \frac{B(q, dq)}{G(q, dq)}. \quad (2.20)$$

Le tenseur  $b_{ij}$  est un tenseur d'ordre 2, symétrique, on le note par la matrice  $\mathbf{b}$  (de même ici le caractère gras du tenseur indique sa représentation matricielle). Le déterminant de la métrique  $\mathbf{b}$  est noté  $b$  tels que

$$b = \det(\mathbf{b}) = \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = LN - M^2. \quad (2.21)$$

L'équation (2.18) détermine la *géométrie extrinsèque* de la surface ( $S$ ).

**Exemple :** on considère toujours l'exemple de la surface de la sphère, les coefficients de la deuxième forme sont

$$b_{\theta\theta} = (\mathbf{r}_{\theta\theta}, \mathbf{n}), \quad b_{\theta\varphi} = (\mathbf{r}_{\theta\varphi}, \mathbf{n}) \quad \text{et} \quad b_{\varphi\varphi} = (\mathbf{r}_{\varphi\varphi}, \mathbf{n}),$$

où le vecteur normal  $\mathbf{n}$  est

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi}{\|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi\|} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta). \quad (2.22)$$

Ainsi, on arrive à

$$L = b_{\theta\theta} = -r_0, \quad M = b_{\theta\varphi} = 0 \quad \text{et} \quad N = b_{\varphi\varphi} = -r_0 \sin^2 \theta, \quad (2.23)$$

la deuxième forme quadratique, s'exprime

$$B = -r_0 d\theta^2 - r_0 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (2.24)$$

Ainsi, le *tenseur de courbure extrinsèque*  $b_{ij}$  est désigné par la matrice diagonale  $\mathbf{b}$  associée à  $B$  comme

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -r_0 & 0 \\ 0 & -r_0 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

## 2.5 Relations entre la première et la deuxième formes quadratiques

### 2.5.1 Formules de Gauss et de Weingarten

Les formules ainsi dénommées décrivent la variation des vecteurs  $\mathbf{r}_i$   $i = 1, 2$  et  $\mathbf{n}$  lorsque le point  $P$  se déplace sur la surface  $(S)$ , tout comme les formules de Frénet. Puisque ces vecteurs sont linéairement indépendants, on peut exprimer alors les dérivées de ces vecteurs comme combinaisons de ces mêmes vecteurs avec des coefficients qui sont fonctions des coefficients de la première et la deuxième formes quadratiques. Autrement dit, on peut écrire les égalités suivantes

$$\mathbf{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k + \beta_{ij} \mathbf{n}, \quad i, j, k = 1, 2 \quad (4 \text{ équations}) \quad (2.25)$$

$$\mathbf{n}_i = \alpha_i^k \mathbf{r}_k + \gamma_i \mathbf{n}, \quad i, k = 1, 2 \quad (2 \text{ équations}) \quad (2.26)$$

où les coefficients  $\Gamma_{ij}^k$ ,  $\beta_{ij}$ ,  $\alpha_i^k$  et  $\gamma_i$  sont à déterminer. En effet, En multipliant scalairement l'équation (2.26) par  $\mathbf{n}$ , on obtient directement

$$\gamma_i = 0, \quad i = 1, 2$$

et en multipliant par  $\mathbf{n}$  les équations (2.25), on obtient

$$\beta_{ij} = (\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{n}) = b_{ij} \quad (2.27)$$

Puis, en dérivant le produit scalaire nul  $(\mathbf{n}, \mathbf{r}_i)$  par rapport au  $q^j$ , on obtient

$$(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{ij}) + (\mathbf{n}_j, \mathbf{r}_i) = 0$$

mais  $(\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{n}) = b_{ij}$ , il vient

$$(\mathbf{r}_i, \mathbf{n}_j) = -b_{ij}$$

Maintenant multiplions l'équation (2.26) par  $\mathbf{r}_j$ , on obtient

$$(\mathbf{r}_j, \mathbf{n}_i) = \alpha_i^k (\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_j)$$

on aura

$$\alpha_i^k g_{kj} = -b_{ji}, \quad i, j, k = 1, 2 \quad (2.28)$$

multiplions par  $g^{j\ell}$  on a

$$\alpha_i^k g_{kj} g^{j\ell} = -g^{j\ell} b_{ji},$$

comme  $g_{kj}g^{j\ell} = \delta_k^\ell$  il vient

$$\alpha_i^\ell = -g^{j\ell}b_{ji},$$

c'est-à-dire

$$\alpha_i^\ell = -b_i^\ell, \quad (2.29)$$

donc (2.26) devient

$$\mathbf{n}_i = -b_i^k \mathbf{r}_k \quad (2.30)$$

Les équations (2.28) s'écrivent sous forme matricielle comme

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

ou bien

$$\boldsymbol{\alpha} \mathbf{g} = -\mathbf{b}$$

c'est-dire

$$\boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{b} \mathbf{g}^{-1} \quad (2.32)$$

ou explicitement

$$\alpha_1^1 = \frac{1}{g} (b_{12}g_{21} - b_{11}g_{22}) \quad , \quad \alpha_1^2 = \frac{1}{g} (b_{11}g_{12} - b_{12}g_{11}) \quad (2.33)$$

$$\alpha_2^1 = \frac{1}{g} (b_{22}g_{21} - b_{21}g_{22}) \quad , \quad \alpha_2^2 = \frac{1}{g} (b_{21}g_{12} - b_{22}g_{11}), \quad (2.34)$$

ces formules sont appelées *formules de Weigarten*.

Déterminons maintenant les coefficients  $\Gamma_{ij}^k$ , multiplions (2.25) par  $\mathbf{r}_\ell$  on obtient

$$\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_\ell = \Gamma_{ij}^k (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_\ell) \quad (2.35)$$

comme  $\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_\ell = g_{k\ell}$  on aura

$$\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_\ell = \Gamma_{ij}^k g_{k\ell}$$

Les quantités  $\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_\ell = \Gamma_{ij\ell}$  sont appelées *symboles de Christoffel de première espèce*. On peut écrire

$$\Gamma_{ijm} g^{mn} = \Gamma_{ij}^k g_{km} g^{mn} = \Gamma_{ij}^k \delta_k^n = \Gamma_{ij}^n$$

les coefficients  $\Gamma_{ij}^k$  connus aussi comme *symboles de Christoffel de deuxième espèce*, sont alors donnés par

$$\Gamma_{ij}^k = (\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_\ell) g^{\ell k}$$

ou bien

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \cdot \mathbf{r}^k \quad (2.36)$$

avec  $\mathbf{r}_\ell g^{\ell k} = \mathbf{r}^k$ . Soit  $g_{ij} = (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j)$  dérivons par rapport à  $q^k$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} = (\mathbf{r}_{ik} \cdot \mathbf{r}_j) + (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{jk})$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki} \quad (2.37)$$

de même

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jki} \quad (2.38)$$

et

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} = \Gamma_{jik} + \Gamma_{kij} \quad (2.39)$$

comme  $\Gamma_{ij\ell} = \Gamma_{jil}$  (puisque  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_{ji}$ ) on détermine les  $\Gamma_{ijk}$  en considérons (2.39)+(2.38)-(2.37)

comme

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right)$$

Enfin, les coefficients (les connexions)  $\Gamma_{ij}^k = g^{\ell k} \Gamma_{ij\ell}$  sont

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{g^{\ell k}}{2} \left( \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{\ell i}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^\ell} \right) \quad (2.40)$$

Ainsi, les coefficients  $\Gamma_{ij}^k$  s'expriment seulement par les coefficients de la première forme quadratique et leurs dérivées. C'est un fait bien important qui montre que les coefficients  $\Gamma_{ij}^k$ , contrairement à  $\beta_{ij}$  et  $\alpha_i^k$  appartiennent à la géométrie intrinsèque de la surface. Les équations (2.25) avec les coefficients  $\Gamma_{ij}^k$  et  $\beta_{ij}$  donnés par (2.40) et (2.27) sont appelées *formules de Gauss*.

On a donné ici deux formules pour calculer les coefficients  $\Gamma_{ij}^k$  à savoir (2.40) et (2.36).

**Exemple :** calculons, par exemple, le coefficient  $\Gamma_{\theta\varphi}^\varphi$  pour la surface de la sphère précédente en utilisant la formule (2.36)

$$\Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \frac{\partial \mathbf{r}_\theta}{\partial \varphi} \cdot \mathbf{r}^\varphi$$

on a

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\theta &= (r_0 \cos \theta \cos \varphi, r_0 \cos \theta \sin \varphi, -r_0 \sin \theta) \\ \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{r}_\theta}{\partial \varphi} &= (-r_0 \cos \theta \sin \varphi, r_0 \cos \theta \cos \varphi, 0) \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{r}^\varphi = g^{\varphi i} \mathbf{r}_i \Rightarrow \mathbf{r}^\varphi = g^{\varphi\varphi} \mathbf{r}_\varphi = \frac{\mathbf{r}_\varphi}{g_{\varphi\varphi}} \quad (\text{puisque la m\u00e9trique est diagonale})$$

comme

$$\mathbf{r}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-r_0 \sin \theta \sin \varphi, r_0 \sin \theta \cos \varphi, 0)$$

il vient

$$\mathbf{r}^\varphi = \frac{1}{r_0^2 \sin^2 \theta} (-r_0 \sin \theta \sin \varphi, r_0 \sin \theta \cos \varphi, 0)$$

donc

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \frac{1}{r_0^2 \sin^2 \theta} (r_0^2 \cos \theta \sin \theta \sin^2 \varphi + r_0^2 \cos \theta \sin \theta \cos^2 \varphi) \\ &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta \end{aligned}$$

On peut \u00e9galement utiliser la formule (2.40).

## 2.6 Les diff\u00e9rentes courbures sur une surface

### 2.6.1 Formule de Meusnier

Soit  $(L)$  une courbe d\u00e9finie sur une surface  $(S)$  passant par un certain point  $P$  et param\u00e9tr\u00e9e en  $s$ . On peut d\u00e9velopper le vecteur  $\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2}$  comme

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = \kappa_n \mathbf{n} + \kappa_g \mathbf{s}$$

o\u00f9  $\kappa_n$  et  $\kappa_g$  sont les courbures normale et g\u00e9od\u00e9sique respectivement et  $\mathbf{s}$  est un vecteur unitaire orthogonal \u00e0  $\mathbf{n}$ . Ainsi, on obtient

$$\left( \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2}, \mathbf{n} \right) = (\kappa_n \mathbf{n} + \kappa_g \mathbf{s}, \mathbf{n}) = \kappa_n$$

et d'apr\u00e8s (2.20), on aura *la formule de Meusnier*

$$\kappa_n = \frac{B(q, dq)}{G(q, dq)} \quad (2.41)$$



### 2.6.2 Courbure de Gauss et courbure moyenne

Récrivons maintenant la courbure normale (2.41) comme fonction de la variable  $\lambda = dq_2/dq_1$  de la façon suivante

$$\kappa_n = \frac{L + 2M\lambda + N\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2} \quad (2.42)$$

On veut chercher les extrémums de  $\kappa_n$ , pour ce but on considère la dérivée

$$\frac{d\kappa_n}{d\lambda} = 0 \quad (2.43)$$

d'où on déduit

$$(E + 2F\lambda + G\lambda^2)(N\lambda + M) - (L + 2M\lambda + N\lambda^2)(G\lambda + F) = 0 \quad (2.44)$$

cela veut dire que

$$\kappa_n = \frac{M + N\lambda}{F + G\lambda} \quad (2.45)$$

notons qu'on peut écrire les égalités

$$\begin{aligned} E + 2F\lambda + G\lambda^2 &= (E + F\lambda) + (F + G\lambda)\lambda \\ L + 2M\lambda + N\lambda^2 &= (L + M\lambda) + (M + N\lambda)\lambda \end{aligned}$$

A l'aide de ces deux dernières relations l'équation (2.44) s'écrit ainsi comme

$$[(E + F\lambda) + (F + G\lambda)\lambda](N\lambda + M) - [(L + M\lambda) + (M + N\lambda)\lambda](G\lambda + F) = 0 \quad (2.46)$$

qui peut se simplifier comme suit

$$(E + F\lambda)(N\lambda + M) = (L + M\lambda)(G\lambda + F) \quad (2.47)$$

Donc la courbure normale donnée par (2.45) s'écrit aussi d'après (2.47) de la façon suivante

$$\kappa_n = \frac{M + N\lambda}{F + G\lambda} = \frac{L + M\lambda}{E + F\lambda} \quad (2.48)$$

Ainsi, on peut former le système suivant

$$\begin{aligned} (F\kappa_n - M)\lambda + (E\kappa_n - L) &= 0 \\ (G\kappa_n - N)\lambda + (F\kappa_n - M) &= 0 \end{aligned}$$

mais  $\lambda = dq_2/dq_1$  c'est-à-dire on a

$$\begin{aligned} (E\kappa_n - L) dq_1 + (F\kappa_n - M) dq_2 &= 0 \\ (F\kappa_n - M) dq_1 + (G\kappa_n - N) dq_2 &= 0 \end{aligned}$$

pour avoir une solution non nulle, il faut que le déterminant soit nul, alors

$$\begin{vmatrix} L - E\kappa_n & M - F\kappa_n \\ M - F\kappa_n & N - G\kappa_n \end{vmatrix} = 0$$

d'où on tire l'équation de deuxième ordre suivante

$$\kappa_n^2 - \frac{(EN + LG - 2MF)}{(EG - F^2)}\kappa_n + \frac{(LN - M^2)}{(EG - F^2)} = 0 \quad (2.49)$$

récrivons la dernière relation sous la forme

$$\kappa_n^2 - \frac{(EN + LG - 2MF)}{(EG - F^2)}\kappa_n + \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0 \quad (2.50)$$

notons que  $EG - F^2 = g$  et  $b = LN - M^2$ . On peut écrire la dernière équation sous forme simplifiée comme suit

$$\kappa_n^2 - 2H\kappa_n + \kappa = 0 \quad (2.51)$$

où

$$\kappa = \frac{b}{g} \quad \text{et} \quad H = \frac{EN + LG - 2MF}{2g} = \frac{g_{11}b_{22} + b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12}}{2g} \quad (2.52)$$

$\kappa$  est la courbure de Gauss (totale) et  $H$  la courbure moyenne. Ces deux quantités peuvent s'écrire aussi en tenant compte des relations (2.33) et (2.34) de la façon suivante

$$H = -\frac{1}{2g}(b_{12}g_{12} - b_{11}g_{22}) - \frac{1}{2g}(b_{21}g_{21} - b_{22}g_{11}) = -\frac{1}{2}(\alpha_1^1 + \alpha_2^2)$$

c'est-à-dire

$$H = -\frac{1}{2}Tr(\boldsymbol{\alpha}) \quad (2.53)$$

et aussi on a

$$\kappa = \frac{\det(\mathbf{b})}{\det(\mathbf{g})} = \det(\mathbf{b}) \det(\mathbf{g}^{-1}) = \det(\mathbf{b}\mathbf{g}^{-1})$$

et d'après (2.32) on obtient

$$\kappa = \det(-\boldsymbol{\alpha}) = (-1)^2 \det(\boldsymbol{\alpha}) = \det(\boldsymbol{\alpha}) \quad (2.54)$$

Revenons maintenant aux extrémums de  $\kappa_n$  qui peuvent être donnés en résolvant l'équation algébrique (2.51), on aboutit à

$$(\kappa_n)_{\max} = H + \sqrt{H^2 - K} \quad (2.55)$$

$$(\kappa_n)_{\min} = H - \sqrt{H^2 - K} \quad (2.56)$$

Notons ainsi que la courbure de Gauss et la courbure moyenne peuvent être exprimées en fonction de  $(\kappa_n)_{\max}$  et  $(\kappa_n)_{\min}$

$$\kappa = (\kappa_n)_{\max} (\kappa_n)_{\min} \quad \text{et} \quad H = \frac{1}{2} [(\kappa_n)_{\max} + (\kappa_n)_{\min}] \quad (2.57)$$

Ainsi, la courbure moyenne  $H$  est la moyenne des courbures minimale et maximale, c'est un nombre réel, dont le signe dépend du choix fait pour orienter la surface ( $S$ ).

**Exemple :** On veut calculer la courbure de Gauss  $\kappa$  et la courbure moyenne  $H$  pour la surface de la sphère précédente. Pour cela, calculons d'abord la matrice  $\alpha$  donnée par (2.32) comme

$$\alpha = -\mathbf{b}\mathbf{g}^{-1} \quad (2.58)$$

on a déjà calculer les matrices  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{b}$  pour la sphère, ainsi on aura

$$\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_0} \end{pmatrix}$$

donc suite aux formules (2.54) et (2.53) on obtient

$$\kappa = \det(\alpha) = \frac{1}{r_0^2} \quad (2.59)$$

et

$$H = -\frac{1}{2} \text{Tr}(\alpha) = -\frac{1}{2} \left( \frac{2}{r_0} \right) = -\frac{1}{r_0} \quad (2.60)$$

## 2.7 Tenseur de Riemann et courbure de Gauss

### 2.7.1 Tenseur de Riemann

Le *tenseur de courbure de Riemann* ou *tenseur de Riemann* est le moyen le plus couramment utilisé pour exprimer la courbure des variétés riemanniennes. Il nous montre dans quelle mesure le tenseur métrique n'est pas localement isométrique à celui de l'espace euclidien. C'est une quantité *intrinsèque*, il peut être calculé sans aucune référence à la façon dont la surface est

émergée dans l'espace ambiant. Le tenseur de courbure peut également être défini pour toute variété pseudo-riemannienne. Ce tenseur est calculé uniquement en termes du tenseur métrique et ses dérivées comme suit

$$R_{bcd}^a = \frac{\partial \Gamma_{bd}^a}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma_{bc}^a}{\partial x^d} + \Gamma_{bd}^e \Gamma_{ec}^a - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ed}^a \quad (2.61)$$

ses indices  $a, b, c$  et  $d$  prennent les valeurs 1 à  $n$  ou (0 à  $n-1$ ) pour un espace  $n$ -dimensionnel. Le nombre total des composantes est  $n^4$ . Il n'est pas difficile de montrer que le tenseur de Riemann vérifie les propriétés de symétrie suivantes

$$R_{abcd} = g_{ae} R_{bed}^e \quad (2.62)$$

$$R_{aaaa} = 0, \quad \forall a = 1, n \quad (2.63)$$

$$R_{abcd} = -R_{bacd} \quad (2.64)$$

$$R_{abcd} = -R_{abdc} \quad (2.65)$$

$$R_{abcd} = R_{dcab} \quad (2.66)$$

et la permutation cyclique (identité de Bianchi )

$$R_{bcd}^a + R_{abc}^a + R_{cdb}^a = 0 \quad (2.67)$$

En raison de ces propriétés de symétrie, les composantes du tenseur de Riemann ne sont pas toutes indépendantes. En effet, on peut montrer que le nombre des composantes indépendantes est  $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$ . Le tableau suivant donne le nombre de ces composantes pour quelques dimensions

Dimension de l'espace ( $n$ )	1	2	3	4
Nombre de composantes ( $n^4$ )	1	16	81	256
Nombre de composantes indépendantes ( $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$ )	0	1	6	20

Si toutes les composantes du tenseur de Riemann sont nulles alors l'espace est plat (pas de courbure dans n'importe quelle direction dans cet espace ). Le tenseur de Riemann  $R_{bcd}^a$  peut être contracté (faire une sommation) pour produire le tenseur de Ricci. C'est les propriétés de symétrie qui vont nous aider à connaître quels sont les deux indices qui peuvent être contractés. En effet, si nous contractons le premier indice (a) avec le deuxième (b) on va obtenir un tenseur nul

$$R_{acd}^a = g^{ai} R_{iacd} = -g^{ia} R_{aicd} = -R_{icd}^i = -R_{acd}^a \Rightarrow R_{acd}^a = 0 \quad (2.68)$$

Il reste deux contractions ; le premier indice avec le troisième ou le premier avec le quatrième. Ce pendant, remarquons que

$$R_{bad}^a = -R_{bda}^a \quad (2.69)$$

c'est-à-dire qu'il ya une seule contraction intéressante du tenseur de Riemann. Cette contraction produit le tenseur de Ricci  $R_{ab}$  et on écrit

$$R_{ab} = R_{aib}^i = -R_{abi}^i \quad (2.70)$$

$R_{ab}$  est un tenseur symétrique. En effet, considérons l'identité de Bianchi

$$R_{bcd}^a + R_{dbc}^a + R_{cdb}^a = 0 \quad (2.71)$$

et on pose  $d = a$ , il vient

$$R_{bca}^a + R_{abc}^a + R_{cab}^a = 0 \quad (2.72)$$

mais comme  $R_{abc}^a = 0$  et  $R_{bca}^a = -R_{bac}^a$  on obtient

$$-R_{bac}^a + R_{cab}^a = 0 \quad (2.73)$$

c'est-à-dire

$$R_{cb} = R_{bc} \quad (2.74)$$

A ce stade, on peut définir la *courbure scalaire* (ou le *scalaire de Ricci*)  $\mathcal{R}$  comme la trace du tenseur de Ricci

$$\mathcal{R} = g^{ab} R_{ab} = Tr(R_{ab}) \quad (2.75)$$

Pour une surface bidimensionnelle (espace à 2 dimensions), le tenseur de Riemann n'a qu'une seule composante indépendante, ce qui signifie que le scalaire de Ricci  $\mathcal{R}$  détermine complètement le tenseur de Riemann. De plus, ce scalaire est directement proportionnelle à la courbure de Gauss  $\kappa$  de cette surface. On va montrer cette proportionnalité dans la suite.

Dans les dimensions supérieures, la courbure de Riemann généralise la courbure de Gauss, mais on a besoin dans ce cas de toutes les composantes du tenseur de Riemann.

### 2.7.2 Le scalaire de Ricci et la courbure de Gauss pour une surface à 2 dimensions

On considère une surface ( $S$ ) bidimensionnelle paramétrée par  $q^1$  et  $q^2$  et soit à nouveau le vecteur position  $\mathbf{r}(q^1, q^2)$  d'un point  $P$  sur cette surface. Les équations de Gauss dans ce cas

sont

$$\mathbf{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k + b_{ij} \mathbf{n} \quad , \quad i, j, k = 1, 2 \quad (2.76)$$

on doit alors avoir l'égalité

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{ij}}{\partial q^\ell} = \frac{\partial \mathbf{r}_{i\ell}}{\partial q^j} \quad , \quad i, j, \ell = 1, 2 \quad (2.77)$$

cela est dû à la commutativité des dérivées partielles. La dernière relation s'écrit aussi comme

$$\mathbf{r}_{ij\ell} = \mathbf{r}_{i\ell j} \quad (2.78)$$

donc à partir de (2.76) on a

$$\mathbf{r}_{ij\ell} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial q^\ell} \mathbf{r}_k + \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_{k\ell} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial q^\ell} \mathbf{n} + b_{ij} \mathbf{n}_\ell$$

tenons compte des relations (2.76) et (2.30) on aura

$$\mathbf{r}_{ij\ell} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial q^\ell} \mathbf{r}_k + \Gamma_{ij}^k (\Gamma_{k\ell}^s \mathbf{r}_s + b_{k\ell} \mathbf{n}) + \frac{\partial b_{ij}}{\partial q^\ell} \mathbf{n} - b_{ij} b_\ell^k \mathbf{r}_k$$

cette dernière égalité s'écrit en changeant quelques indices de sommation comme

$$\mathbf{r}_{ij\ell} = \left( \frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial q^\ell} + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{k\ell}^s - b_{ij} b_\ell^s \right) \mathbf{r}_s + \left( \Gamma_{ij}^k b_{k\ell} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial q^\ell} \right) \mathbf{n} \quad (2.79)$$

interchangeant maintenant  $j$  et  $\ell$  on obtient

$$\mathbf{r}_{i\ell j} = \left( \frac{\partial \Gamma_{i\ell}^s}{\partial q^j} + \Gamma_{i\ell}^k \Gamma_{kj}^s - b_{i\ell} b_j^s \right) \mathbf{r}_s + \left( \Gamma_{i\ell}^k b_{kj} + \frac{\partial b_{i\ell}}{\partial q^j} \right) \mathbf{n} \quad (2.80)$$

Les vecteurs  $\mathbf{r}_s$  et  $\mathbf{n}$  sont linéairement indépendants , la relation  $\mathbf{r}_{ij\ell} - \mathbf{r}_{i\ell j} = 0$  donne pour le coefficient de  $\mathbf{n}$

$$\Gamma_{ij}^k b_{k\ell} - \Gamma_{i\ell}^k b_{kj} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial q^\ell} - \frac{\partial b_{i\ell}}{\partial q^j} = 0 \quad (2.81)$$

.Cette dernière équation est connue comme équation de *Mainardi-Codazzi*. Pour le coefficient de  $\mathbf{r}_s$  on obtient l'équation intéressante suivante

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial q^\ell} - \frac{\partial \Gamma_{i\ell}^s}{\partial q^j} + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{k\ell}^s - \Gamma_{i\ell}^k \Gamma_{kj}^s - b_{ij} b_\ell^s + b_{i\ell} b_j^s = 0 \quad (2.82)$$

qui s'écrit aussi sous la forme

$$R_{i\ell j}^s = b_{ij} b_\ell^s - b_{i\ell} b_j^s \quad (2.83)$$

où  $R_{i\ell j}^s$  est le tenseur de Riemann, discuté précédemment, il est donné par

$$R_{i\ell j}^s = \frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial q^\ell} - \frac{\partial \Gamma_{i\ell}^s}{\partial q^j} + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{k\ell}^s - \Gamma_{i\ell}^k \Gamma_{kj}^s \quad (2.84)$$

le tenseur de Ricci dans ce cas est

$$R_{ij} = R_{ijs}^s = b_{ij}b_s^s - b_{is}b_j^s \quad (2.85)$$

par conséquent, la courbure scalaire est

$$\mathcal{R} = g^{ij}R_{ij} = g^{ij}b_{ij}b_s^s - g^{ij}b_{is}b_j^s \quad (2.86)$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{R} = b_j^j b_s^s - b_s^j b_j^s \quad (2.87)$$

on a vu dans (2.29) que

$$\alpha_i^\ell = -b_i^\ell ,$$

par suite

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \alpha_i^i \alpha_s^s - \alpha_s^j \alpha_j^s = \alpha_1^1 \alpha_1^1 + \alpha_1^1 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_1^1 + \alpha_2^2 \alpha_2^2 \\ &\quad - \alpha_1^1 \alpha_1^1 - \alpha_1^2 \alpha_2^1 - \alpha_2^1 \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \alpha_2^2 \\ &= 2(\alpha_1^1 \alpha_2^2 - \alpha_1^2 \alpha_2^1) = 2 \det(\boldsymbol{\alpha}) \end{aligned}$$

Donc d'après (2.54), on obtient le résultat général important pour une surface bidimensionnelle

$$\mathcal{R} = 2\kappa \quad (2.88)$$

comme on a déjà constaté, la courbure scalaire  $\mathcal{R}$  est proportionnel à la courbure de Gauss  $\kappa$ .

La relation (2.88) est d'une importance fondamentale. Pour une surface bidimensionnelle, le scalaire de Ricci  $\mathcal{R}$  détermine complètement le tenseur de Riemann qui dépend du tenseur métrique  $g_{ij}$  et ses dérivées ; c'est-à-dire de la première forme. Il s'ensuit, à travers l'égalité (2.88) que la courbure de Gauss  $\kappa$  est indépendante de la deuxième forme. C'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de la manière dont la surface est plongée dans l'espace tridimensionnel. Ce résultat constitue le théorème remarquable de Gauss (*Théorème egregium*).

**Exemple :**

On considère toujours l'exemple précédent de la surface de la sphère définie par le vecteur position  $\mathbf{r}(\theta, \varphi)$ . On veut déterminer le scalaire de courbure  $\mathcal{R}$  en contractant le tenseur de Ricci correspondant, puis on vérifie la relation (2.88).

Considérons le tenseur de Ricci

$$\begin{aligned} R_{ij} &= R_{ijs}^s \\ &= R_{i\theta j}^\theta + R_{i\varphi j}^\varphi \end{aligned}$$

soit

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} R_{\theta\theta} & R_{\theta\varphi} \\ R_{\varphi\theta} & R_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}$$

le scalaire de courbure est

$$\mathcal{R} = g^{ij} R_{ij} = g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + g^{\varphi\varphi} R_{\varphi\varphi}$$

donc on n'a pas besoin de calculer  $R_{\theta\varphi}$  puisque notre métrique  $g_{ij}$  est diagonale

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} r_0^2 & 0 \\ 0 & r_0^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix},$$

Ainsi,

$$R_{\theta\theta} = R_{\theta\theta\theta}^\theta + R_{\theta\varphi\theta}^\varphi = R_{\theta\varphi\theta}^\varphi$$

et

$$R_{\varphi\varphi} = R_{\varphi\theta\varphi}^\theta + R_{\varphi\varphi\varphi}^\varphi = R_{\varphi\theta\varphi}^\theta$$

puisque  $R_{\theta\theta\theta}^\theta = R_{\varphi\varphi\varphi}^\varphi = 0$  (voir propriété (2.63)). Donc on aura

$$\mathcal{R} = \frac{1}{r_0^2} R_{\theta\varphi\theta}^\varphi + \frac{1}{r_0^2 \sin^2 \theta} R_{\varphi\theta\varphi}^\theta$$

mais

$$\begin{aligned} R_{\varphi\theta\varphi}^\theta &= g_{\varphi i} R_{\theta\varphi\theta}^i = g_{\varphi\varphi} R_{\theta\varphi\theta}^\varphi \\ R_{\theta\varphi\theta}^\varphi &= g_{\theta i} R_{\varphi\theta\varphi}^i = g_{\theta\theta} R_{\varphi\theta\varphi}^\theta \end{aligned}$$

comme  $R_{\varphi\theta\varphi}^\theta = R_{\theta\varphi\theta}^\varphi$  ( suite au (2.66) ) il vient

$$\mathcal{R} = \frac{2}{r_0^2} R_{\theta\varphi\theta}^\varphi$$

il suffit donc de calculer l'élément  $R_{\theta\varphi\theta}^\varphi$ . En effet

$$R_{\theta\varphi\theta}^\varphi = \frac{\partial \Gamma_{\theta\theta}^\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi}{\partial \theta} + \Gamma_{\theta\theta}^e \Gamma_{e\varphi}^\varphi - \Gamma_{\theta\varphi}^e \Gamma_{e\theta}^\varphi$$

on obtient après un calcul

$$R_{\theta\varphi\theta}^\varphi = 1$$

Donc le scalaire de courbure est

$$\mathcal{R} = \frac{2}{r_0^2}$$

on a calculé précédemment la courbure de Gauss pour cette surface et on a obtenu  $\kappa = 1/r_0^2$ .

Donc on a bien vérifié la relation  $\mathcal{R} = 2\kappa$ .



## 2.8 Translation géodésique d'un vecteur

Soit une surface  $(S_2) \subset \mathbb{R}^3$  et soit  $(L)$  une ligne dérivable sur cette surface

$$(L) = \{ \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1(t), u^2(t)), \alpha \leq t \leq \beta \} \quad (2.89)$$

En tout point de cette ligne soit un vecteur  $\mathbf{a} = a^i(t) \mathbf{r}_i$ , où  $a_i(t)$  sont des fonctions dérivables. Soit la différentielle

$$d\mathbf{a} = \mathbf{r}_k da^k + a^i \mathbf{r}_{ij} du^j \quad (2.90)$$

mais d'après (2.25) on a

$$\mathbf{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k + b_{ij} \mathbf{n}$$

il vient

$$\begin{aligned} d\mathbf{a} &= \mathbf{r}_k da^k + a^i (\Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k + b_{ij} \mathbf{n}) du^j \\ \Rightarrow d\mathbf{a} &= (da^k + \Gamma_{ij}^k a^i du^j) \mathbf{r}_k + b_{ij} a^i du^j \mathbf{n} \end{aligned}$$

la différentielle géodésique est définie par

$$\mathcal{D}\mathbf{a} = (da^k + \Gamma_{ij}^k a^i du^j) \mathbf{r}_k \quad (2.91)$$

On dit que le vecteur  $\mathbf{a}$  subit une *translation*, ou bien, plus exactement, est géodésiquement translaté le long de la ligne  $(L)$ , si sa différentielle géodésique est *nulle* en tout point de la ligne  $(L)$ . En général, si deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sont translatés le long d'une ligne  $(L)$ , leur produit scalaire reste constant.

## 2.9 Théorème de Gauss-Bonnet

Soit une surface semi-géodésique bidimensionnelle  $(S_2)$  où sa première forme quadratique est donnée par

$$ds^2 = dw^2 + G(w, u) du^2 \quad (2.92)$$

la métrique correspondante et son inverse sont

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{g}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/G \end{pmatrix} \quad (2.93)$$

On a vu que la courbure de Gauss est directement reliée à la courbure scalaire  $\mathcal{R}$  à travers

$$\mathcal{R} = 2\kappa \quad (2.94)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{2}g^{ij}R_{ij} = \frac{1}{2}g^{ij}R_{isj}^s \\ &= \frac{1}{2}R_{wsw}^s + \frac{1}{2G}R_{usu}^s \end{aligned} \quad (2.95)$$

$$= \frac{1}{2}R_{www}^u + \frac{1}{2G}R_{uwu}^w \quad (2.96)$$

utilisons (2.84) on arrive à

$$R_{www}^u = \frac{\partial\Gamma_{ww}^u}{\partial u} - \frac{\partial\Gamma_{wu}^u}{\partial w} + \Gamma_{ww}^k\Gamma_{ku}^u - \Gamma_{wu}^k\Gamma_{kw}^u \quad (2.97)$$

$$R_{uwu}^w = \frac{\partial\Gamma_{uu}^w}{\partial w} - \frac{\partial\Gamma_{uw}^w}{\partial u} + \Gamma_{uu}^k\Gamma_{kw}^w - \Gamma_{uw}^k\Gamma_{ku}^w \quad (2.98)$$

Pour la métrique (2.92), les symboles de christoffel sont

$$\begin{aligned} \Gamma_{uu}^w &= -\frac{1}{2}G_w, & \Gamma_{wu}^w &= \Gamma_{uw}^w = 0, & \Gamma_{ww}^w &= 0, \\ \Gamma_{uu}^u &= \frac{G_u}{2G}, & \Gamma_{uw}^u &= \Gamma_{wu}^u = \frac{G_w}{2G}, & \Gamma_{ww}^u &= 0 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} R_{www}^u &= -\frac{\partial\Gamma_{wu}^u}{\partial w} - (\Gamma_{wu}^u)^2 \\ &= -\frac{G_{ww}}{2G} + \frac{G_w^2}{2G^2} - \frac{G_w^2}{4G^2} \\ &= \frac{G_w^2}{4G^2} - \frac{G_{ww}}{2G} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} R_{uwu}^w &= \frac{\partial\Gamma_{uu}^w}{\partial w} - \Gamma_{uw}^u\Gamma_{uu}^w \\ &= -\frac{G_{ww}}{2} + \frac{G_w^2}{4G} \end{aligned}$$

La courbure totale est donc donnée par l'expression

$$\kappa = -\frac{G_{ww}}{2G} + \frac{G_w^2}{4G^2} \quad (2.99)$$

Cette expression peut être rendue encore plus compacte si on note

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{G}\right)_w &= \frac{1}{2}G^{-1/2}G_w, \\ \text{et } \left(\sqrt{G}\right)_{ww} &= -\frac{1}{4}G^{-3/2}G_w^2 + \frac{1}{2}G^{-1/2}G_{ww} \end{aligned}$$

alors

$$\frac{\left(\sqrt{G}\right)_{ww}}{\left(\sqrt{G}\right)} = -\frac{G_w^2}{4G^2} + \frac{1}{2}\frac{G_{ww}}{G} = -\kappa$$

Enfin on a

$$\left(\sqrt{G}\right)_{ww} + \kappa\sqrt{G} = 0 \quad (2.100)$$

A ce stade, on veut translater un vecteur unitaire  $\boldsymbol{\rho}$  dans le sens positif le long d'un contour  $(L)$  fermé et lisse par morceaux sur  $(S_2)$ . Considérons le produit scalaire

$$(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}_w) = \cos \theta \quad (2.101)$$

où  $\theta$  est l'angle entre le vecteur  $\boldsymbol{\rho}$  et  $\mathbf{r}_w$ . La différentielle donne

$$-\sin \theta d\theta = \underbrace{(d\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}_w)}_{=0} + (\boldsymbol{\rho}, d\mathbf{r}_w)$$

puisque seule la différentielle forcée (le terme proportionnel à  $\mathbf{n}$ ) du vecteur translaté  $\boldsymbol{\rho}$  peut être non nulle, il vient

$$-\sin \theta d\theta = (\boldsymbol{\rho}, d\mathbf{r}_w) \quad (2.102)$$

et comme  $(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{n}) = 0$  alors on obtient

$$-\sin \theta d\theta = (\boldsymbol{\rho}, \mathcal{D}\mathbf{r}_w) \quad (2.103)$$

mais d'après (2.91), on peut écrire

$$\mathcal{D}\mathbf{r}_w = \Gamma_{1j}^k du^j \mathbf{r}_k$$

avec  $\mathbf{r}_w = a^i \mathbf{r}_i \Rightarrow a^1 = a^w = 1$  et  $a^2 = a^u = 0$  et  $(u^1, u^2) = (w, u)$ . Comme  $(S_2)$  est donnée par la métrique (2.92) alors en introduisant les symboles de christoffel calculés ci-dessus, on aura

$$\mathcal{D}\mathbf{r}_w = \frac{G_w}{2G} du \mathbf{r}_u$$

comme  $\boldsymbol{\rho}$  est un vecteur unitaire, le produit (2.103) devient

$$-\sin \theta d\theta = \left(\boldsymbol{\rho}, \frac{G_w}{2G} du \mathbf{r}_u\right) = \frac{G_w}{2G} du |\mathbf{r}_u| \cos(\widehat{\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}_u})$$

$\mathbf{r}_u \perp \mathbf{r}_w$  et l'angle  $(\widehat{\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}_w}) = \theta \Rightarrow (\widehat{\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}_u}) = \frac{\pi}{2} - \theta$ , de plus  $|\mathbf{r}_u| = \sqrt{(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u)} = \sqrt{G}$ .

Alors

$$-\sin \theta d\theta = \frac{G_w}{2G} du \sin \theta \sqrt{G} \Rightarrow d\theta = -\frac{G_w}{2\sqrt{G}} du$$

et par suite, la variation de l'angle  $\theta$  le long de la ligne ( $L$ ) est

$$\Delta\theta = \oint_L d\theta = -\frac{1}{2} \oint_L \frac{G_w}{\sqrt{G}} du \quad (2.104)$$

Cette formule peut être transformée par la formule de Green dans le plan  $(w, u)$  à savoir

$$\oint_L P dw + Q du = \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial w} - \frac{\partial P}{\partial u} \right) dw du \quad (2.105)$$

pour notre cas  $P = 0$ , la formule de Green se simplifier à

$$\oint_L Q du = \iint_S \frac{\partial Q}{\partial w} dw du$$

la variation  $\Delta\theta$  est donc

$$\Delta\theta = -\frac{1}{2} \iint_S \left( \frac{G_w}{\sqrt{G}} \right)_w dw du = -\frac{1}{2} \iint_S \left( \frac{G_{ww}}{\sqrt{G}} - \frac{1}{2} \frac{G_w^2}{G^3} \right) dw du$$

comme  $dS = \sqrt{G} dw du$  alors

$$\Delta\theta = \iint_S \left( -\frac{G_{ww}}{2G} + \frac{1}{4} \frac{G_w^2}{G^2} \right) dS$$

mais d'après (2.99) on aura la variation

$$\Delta\theta = \iint_S \kappa dS \quad (2.106)$$

qui est la *formule de Gauss-Bonnet* qui montre qu'à la suite d'une translation le long d'un contour fermé ( $L$ ), chaque vecteur subit la rotation d'un angle qui vaut l'intégrale de la courbure totale de la surface sur le domaine ( $S$ ) limité par ( $L$ ).

# Chapitre 3

## Mécanique quantique d'une particule confinée une surface : méthode de confinement

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter essentiellement les résultats de la référence [4]. Cette étude sera nécessaire pour traiter le chapitre suivant.

Comme on va le voir, la dynamique d'une particule rigidement liée à une surface, par l'action d'un potentiel externe connu comme le potentiel de confinement qui devrait être nul (ou constant) le long du surface, mais, pour chaque petit déplacement de la particule vers la direction normale, ce potentiel augmente fortement et tend vers l'infini pour garder cette particule sur la surface. En raison du confinement latéral, les énergies d'excitation quantique dans la direction normale deviennent beaucoup plus élevées que dans la direction tangentielle. Désormais, on peut ignorer le mouvement des particules dans la direction normale.

R. C. T. da Costa [4] a montré qu'en raison des courbures de la surface, un potentiel scalaire de nature purement quantique apparaît dans l'équation de Schrödinger 2-dimensionnelle décrivant le confinement de cette particule. Ce potentiel s'écrit en fonctions de la courbure moyenne et la courbure de Gauss. Ainsi, nous allons introduire en détail cette méthode de confinement en se basant sur les notions vues dans le chapitre précédent.

### 3.2 Particule liée à une surface

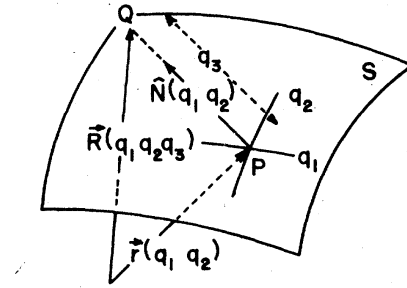
Soit une particule de masse  $m$  liée à une surface ( $S$ ) bidimensionnelle d'équations paramétriques  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, q^2)$ . Le voisinage très proche de cette surface est paramétrées par le vecteur

$$\mathbf{R}(q^1, q^2, q^3) = \mathbf{r}(q^1, q^2) + q^3 \mathbf{n}(q^1, q^2), \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{n}$  est un vecteur normal à la surface ( $S$ ) en un point donné. La coordonnée  $q^3$  indique la distance entre ce point de la surface et un point  $Q$  de coordonnées  $(q^1, q^2, q^3)$ . Comme évoqué dans l'introduction, on va considérer maintenant le potentiel de confinement qui est modélisé en général par la forme suivante

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} V_\lambda(q^3) = \begin{cases} 0 & \text{si } q^3 = 0 \\ \infty & \text{si } q^3 \neq 0 \end{cases}, \quad (3.2)$$

où  $\lambda$  est un paramètre introduit pour assurer la forme indiquée ci-dessus. Par exemple, on peut penser à un potentiel de confinement harmonique  $V_\lambda(q^3) = \frac{1}{2}m\lambda^2(q^3)^2$  où  $\lambda \rightarrow \infty$ .



On commence par rappeler l'équation (2.26)

$$\mathbf{n}_i = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial q^i} = \alpha_i^k \mathbf{r}_k, \quad i, k = 1, 2, \quad (3.3)$$

où les coefficients  $\alpha_i^k$  sont donnés explicitement dans le chapitre précédent par les formules de Weigarten (2.33) et (2.34). Dérivons l'équation (3.1) par rapport à  $q^i$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} + q^3 \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial q^i}, \quad i = 1, 2, \quad (3.4)$$

tenir compte (3.3), il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} &= (\delta_i^k + q^3 \alpha_i^k) \mathbf{r}_k, \quad i = 1, 2, \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^3} &= \mathbf{n}, \end{aligned}$$

Dans un voisinage tri-dimensionnelle de  $(S)$ , la composante covariante du tenseur métrique est

$$G_{ij} = G_{ji} = \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i}, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^j} \right), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.5)$$

Montrons maintenant pour  $i, j = 1, 2$  on a

$$G_{ij} = g_{ij} - 2b_{ij}q^3 + g^{ks}b_{si}b_{kj} (q^3)^2, \quad (3.6)$$

En effet

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^j} = (\boldsymbol{\delta}_i^k + q^3 \alpha_i^k) \mathbf{r}_k \cdot (\boldsymbol{\delta}_j^s + q^3 \alpha_j^s) \mathbf{r}_s \\ &= (\boldsymbol{\delta}_i^k + q^3 \alpha_i^k) (\boldsymbol{\delta}_j^s + q^3 \alpha_j^s) \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_s \\ &= \boldsymbol{\delta}_i^k \boldsymbol{\delta}_j^s \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_s + [\boldsymbol{\delta}_i^k \alpha_j^s \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_s + \alpha_i^k \boldsymbol{\delta}_j^s \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_s] q^3 + \alpha_i^k \alpha_j^s \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_s (q^3)^2 \\ &= \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j + [\alpha_j^s \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_s + \alpha_i^k \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_j] q^3 + \alpha_i^k \alpha_j^s \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_s (q^3)^2 \\ &= g_{ij} + [\alpha_j^s g_{is} + \alpha_i^k g_{kj}] q^3 + \alpha_i^k \alpha_j^s g_{ks} (q^3)^2 \end{aligned}$$

on a d'après (2.29)

$$\begin{aligned} \alpha_j^s g_{is} &= -g_{is} b_j^s = -b_{ij} \\ \alpha_i^k g_{kj} &= -g_{kj} b_i^k = -b_{ji} = -b_{ij} \\ \alpha_i^k \alpha_j^s g_{ks} &= b_i^k b_j^s g_{ks} = g^{ks} b_{si} b_{kj} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$G_{ij} = g_{ij} - 2b_{ij}q^3 + g^{ks}b_{si}b_{kj} (q^3)^2 \quad (3.7)$$

et de plus pour  $i, j = 3$  on a

$$\begin{aligned} G_{i3} &= G_{3i} = \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i}, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^3} \right) = ((\boldsymbol{\delta}_i^k + q^3 \alpha_i^k) \mathbf{r}_k, \mathbf{n}) = 0, \quad i = 1, 2 \\ G_{33} &= \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^3}, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^3} \right) = 1 \end{aligned}$$

la matrice  $\mathbf{G}$  s'écrit donc

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 \\ G_{21} & G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

la première forme quadratique est

$$\begin{aligned} ds^2 &= G_{ij} dq^i dq^j, \\ &= [g_{ij} - 2b_{ij}q^3 + g^{ks}b_{si}b_{kj} (q^3)^2] dq^i dq^j + (dq^3)^2 \end{aligned}$$

Donc on a

$$\det(\mathbf{G}) = \det(G_{ij}) \quad \text{avec } i, j = 1, 2 \quad (3.9)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= -\mathbf{b}\mathbf{g}^{-1}, \\ \det(\mathbf{G}) &= \det(\mathbf{g} - 2\mathbf{b}q_3 + \mathbf{b}\mathbf{g}^{-1}\mathbf{b}q_3^2) \end{aligned} \quad (3.10)$$

rappelons aussi d'après (2.32) qu'on a

$$\boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{b}\mathbf{g}^{-1},$$

on peut donc simplifier de plus la dernière relation en écrivant

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{G}) &= \det\left[\left(\mathbf{g}\mathbf{g}^{-1} - 2\mathbf{b}\mathbf{g}^{-1}q_3 + \mathbf{b}\mathbf{g}^{-1}\mathbf{b}\mathbf{g}^{-1}(q_3)^2\right)\mathbf{g}\right] \\ &= \det\left[\left(\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\alpha}q_3 + \boldsymbol{\alpha}^2(q_3)^2\right)\mathbf{g}\right] \\ &= \det\left(\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\alpha}q_3 + \boldsymbol{\alpha}^2(q_3)^2\right) \det(\mathbf{g}) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\det(\mathbf{G}) = g \det(\mathbf{I} + \boldsymbol{\alpha}q_3)^2 \quad (3.11)$$

si on note  $\det(\mathbf{G}) = G$  on a donc

$$\sqrt{G} = \sqrt{g} \det(\mathbf{I} + \boldsymbol{\alpha}q_3)$$

reste à calculer l'expression

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{I} + \boldsymbol{\alpha}q_3) &= (1 + \alpha_1^1 q_3)(1 + \alpha_2^2 q_3) - \alpha_1^2 \alpha_2^1 (q_3)^2 \\ &= 1 + (\alpha_1^1 + \alpha_2^2) q_3 + (\alpha_1^1 \alpha_2^2 - \alpha_1^2 \alpha_2^1) (q_3)^2 \\ &= 1 + Tr(\boldsymbol{\alpha}) q_3 + \det(\boldsymbol{\alpha}) (q_3)^2 \end{aligned}$$

c'est-à-dire on a finalement la relation

$$\sqrt{G} = \sqrt{g} [1 + Tr(\boldsymbol{\alpha}) q_3 + \det(\boldsymbol{\alpha}) q_3^2] \quad (3.12)$$

Tournons notre attention maintenant à l'équation de Schrödinger pour la particule de masse  $m$  liée à la surface courbe ( $S$ ) au moyen du potentiel de confinement  $V_\lambda(q^3)$  donné ci-dessus

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V_\lambda(q^3) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (3.13)$$



avec  $\nabla^2$  est l'opérateur tri-dimensionnel de Laplace-Beltrami donné par (voir Annexe)

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\sqrt{G}}\partial_i \left[ \sqrt{G}G^{ij}\partial_j\psi \right], \quad (3.14)$$

avec l'abréviation  $\partial_i = \partial/\partial q^i$ . Ainsi, on a l'équation

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\sqrt{G}}\partial_i \left[ \sqrt{G}G^{ij}\partial_j\psi \right] + V_\lambda(q^3)\psi = i\hbar\partial_t\psi, \quad (3.15)$$

où la métrique  $\mathbf{G}$  introduite dans l'équation de Schrödinger est donnée par (3.8). La structure de cette métrique, nous permet de séparer le Laplacien en deux parties ; une partie surfacique notée  $\mathfrak{D}(q^1, q^2, q^3)$  donnée par  $i, j = 1, 2$  et une partie normale définie par  $i = j = 3$ . En effet

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{2G}(\partial_i G)G^{ij}\partial_j\psi - \frac{\hbar^2}{2m}\partial_i(G^{ij})\partial_j\psi - \frac{\hbar^2}{2m}G^{ij}\partial_{ji}\psi \\ & -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{2G}(\partial_3 G)G^{33}\partial_3\psi - \frac{\hbar^2}{2m}\partial_3(G^{33})\partial_3\psi - \frac{\hbar^2}{2m}G^{33}\partial_{33}\psi + V_\lambda(q^3)\psi = i\hbar\partial_t\psi \end{aligned}$$

$i, j = 1, 2$ . Mais  $G^{33} = 1$ , l'équation précédente se réduit à

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m}\left\{ \frac{1}{2G}(\partial_i G)G^{ij}\partial_j\psi - \partial_i(G^{ij})\partial_j\psi - G^{ij}\partial_{ji}\psi \right\} \\ & -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{2G}(\partial_3 G)\partial_3\psi - \frac{\hbar^2}{2m}\partial_{33}\psi + V_\lambda(q^3)\psi = i\hbar\partial_t\psi \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ainsi, on obtient

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\mathfrak{D}(q^1, q^2, q^3)\psi - \frac{\hbar^2}{2m}\left[ \frac{(\partial_3 G)}{2G}\partial_3\psi + \partial_{33}\psi \right] + V_\lambda(q^3)\psi = i\hbar\partial_t\psi \quad (3.17)$$

avec

$$\mathfrak{D}(q^1, q^2, q^3) = \frac{1}{2G}(\partial_i G)G^{ij}\partial_j - \partial_i(G^{ij})\partial_j - G^{ij}\partial_{ji} \quad (3.18)$$

Comme on espère obtenir une fonction d'onde surfacique qui dépend seulement des coordonnées  $q^1$  et  $q^2$ , on est naturellement amené à introduire une nouvelle fonction d'onde  $\chi$  pour laquelle on peut écrire la séparation  $\chi(q^1, q^2, q^3) = \chi_t(q^1, q^2)\chi_n(q^3)$  et nous pouvons définir ainsi la densité de probabilité surfacique

$$P = |\chi_t|^2 \int |\chi_n|^2 dq^3$$

La transformation adéquate est

$$\chi(q^1, q^2, q^3) = \sqrt{f(q^1, q^2, q^3)}\psi(q^1, q^2, q^3) \quad (3.19)$$

puisque l'élément de volume associé est donné par

$$\begin{aligned} dV &= \sqrt{G} dq^1 dq^2 dq^3 \\ &= f dS dq^3 \end{aligned} \quad (3.20)$$

avec

$$dS = \sqrt{g} dq^1 dq^2,$$

et du fait

$$\sqrt{G} = \sqrt{g} \left[ 1 + \text{Tr}(\boldsymbol{\alpha}) q^3 + \det(\boldsymbol{\alpha}) (q^3)^2 \right], \quad (3.21)$$

ainsi la fonction  $f$  est

$$f = 1 + \text{Tr}(\boldsymbol{\alpha}) q^3 + \det(\boldsymbol{\alpha}) (q^3)^2, \quad (3.22)$$

introduisons la transformation (3.19) dans (3.17), nous obtenons

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \mathfrak{D} \left( \chi / \sqrt{f} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{(\partial_3 G)}{2G} \partial_3 \left( \chi / \sqrt{f} \right) + \partial_{33} \left( \chi / \sqrt{f} \right) \right] \\ + V_\lambda(q^3) \left( \chi / \sqrt{f} \right) = i\hbar \partial_t \left( \chi / \sqrt{f} \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

multiplions par  $\sqrt{f}$  les deux membres, il vient

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{f} \mathfrak{D} \left( \chi / \sqrt{f} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \sqrt{f} \frac{(\partial_3 G)}{2G} \partial_3 \left( \chi / \sqrt{f} \right) + \sqrt{f} \partial_{33} \left( \chi / \sqrt{f} \right) \right] \\ + V_\lambda(q^3) \chi = i\hbar \partial_t \chi \end{aligned} \quad (3.24)$$

notons que

$$\begin{aligned} \partial_3 \left( \chi / \sqrt{f} \right) &= \frac{\partial_3(\chi)}{\sqrt{f}} - \frac{\chi \partial_3(f)}{2f^{3/2}} \\ \partial_{33} \left( \chi / \sqrt{f} \right) &= \partial_3 \left( \frac{\partial_3 \chi}{\sqrt{f}} \right) - \frac{1}{2} \partial_3 \left( \frac{\chi}{f^{3/2}} \partial_3(f) \right) \\ &= \frac{(\partial_{33} \chi)}{\sqrt{f}} - \frac{(\partial_3 \chi)}{f^{3/2}} (\partial_3 f) + \frac{3}{4} \frac{\chi}{f^{5/2}} [\partial_3(f)]^2 - \frac{1}{2} \frac{\chi}{f^{3/2}} \partial_{33}(f) \end{aligned} \quad (3.25)$$

et d'après (3.11) et (3.22) on a

$$G = g f^2 \quad \text{et} \quad \partial_3 G = 2g (\partial_3 f) f \quad (3.26)$$

il vient

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{f} \mathfrak{D} \left( \chi / \sqrt{f} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{(\partial_3 f)}{f} \partial_3(\chi) - \frac{[\partial_3(f)]^2}{2f^2} \chi \right. \\ \left. + (\partial_{33} \chi) - \frac{(\partial_3 \chi)}{f} (\partial_3 f) + \frac{3}{4} \frac{\chi}{f^2} [\partial_3(f)]^2 - \frac{1}{2} \frac{\chi}{f} \partial_{33}(f) \right\} + V_\lambda(q_3) \chi = i\hbar \partial_t \chi \end{aligned} \quad (3.27)$$

c'est-à-dire

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\sqrt{f}\mathfrak{D}\left(\chi/\sqrt{f}\right)-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{(\partial_{33}\chi)+\frac{1}{4}\frac{(\partial_3 f)^2}{f^2}\chi-\frac{1}{2}\frac{\chi}{f}\partial_{33}(f)\right\}+V_\lambda(q_3)\chi=i\hbar\partial_t\chi \quad (3.28)$$

qui s'écrit aussi comme

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\sqrt{f}\mathfrak{D}\left(\chi/\sqrt{f}\right)-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\partial_{33}\chi+\frac{1}{4f^2}[(\partial_3 f)^2-2f\partial_{33}(f)]\chi\right\}+V_\lambda(q^3)\chi=i\hbar\partial_t\chi \quad (3.29)$$

on est maintenant prêt à tenir compte de l'effet du potentiel de confinement  $V_\lambda(q^3)$ . A la limite  $\lambda \rightarrow \infty$  la fonction d'onde voit deux barrières de potentiel sur les deux cotés de la surface. Comme on ne s'intéresse qu'à la surface, on peut prendre la limite  $q^3 \rightarrow 0$  c'est-à-dire  $f \rightarrow 1$  et par suite, on a

$$\lim_{q_3 \rightarrow 0} \partial_3 f = Tr(\boldsymbol{\alpha}) \quad \text{et} \quad \lim_{q_3 \rightarrow 0} \partial_{33}(f) = 2 \det(\boldsymbol{\alpha})$$

de plus on a

$$\lim_{q_3 \rightarrow 0} G = g$$

et on a d'après (3.6)

$$\lim_{q_3 \rightarrow 0} G_{ij} = g_{ij} \quad \text{et} \quad \lim_{q_3 \rightarrow 0} G^{ij} = g^{ij}$$

Donc la partie surfacique (3.18) se réduit à

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} &= \frac{1}{2g}(\partial_i g)g^{ij}\partial_j - \partial_i(g^{ij})\partial_j - g^{ij}\partial_{ji} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}g^{ij}\partial_j) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Par conséquent l'équation (3.29) a la forme

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}g^{ij}\partial_j\chi)-\frac{\hbar^2}{8m}\{[Tr(\boldsymbol{\alpha})]^2-4\det(\boldsymbol{\alpha})\}\chi-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_{33}\chi+V_\lambda(q^3)\chi=i\hbar\partial_t\chi, \quad (3.31)$$

avec  $i, j = 1, 2$ . Cette dernière équation peut maintenant facilement séparée en partie normale et tangentielle

$$\chi = \chi_t(q_1, q_2, t)\chi_n(q^3, t),$$

pour laquelle on a les deux équations

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\chi_n}{\partial q_3^2}+V_\lambda(q^3)\chi_n=i\hbar\frac{\partial\chi_n}{\partial t} \quad (\text{éq. normale}) \quad (3.32)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial\chi_t}{\partial q_j}\right)-\frac{\hbar^2\{[Tr(\boldsymbol{\alpha})]^2-4\det(\boldsymbol{\alpha})\}}{8m}\chi_t=i\hbar\frac{\partial\chi_t}{\partial t} \quad (\text{éq. tangentielle}) \quad (3.33)$$

l'expression (3.32) est juste l'équation de Schrödinger pour une particule confinée par le potentiel  $V_\lambda(q^3)$ . L'équation (3.33) est la plus intéressante en raison du terme lié à la géométrie du surface

$$V_s(q^1, q^2) = -\frac{\hbar^2}{8m} \{[Tr(\boldsymbol{\alpha})]^2 - 4 \det(\boldsymbol{\alpha})\} \quad (3.34)$$

qui peut affecter la dynamique de la particule. Notons en premier lieu que ce terme peut s'écrire, en utilisant les relations (2.53) et (2.54) comme

$$V_s(q^1, q^2) = -\frac{\hbar^2}{2m} (H^2 - \kappa) \quad (3.35)$$

où  $H$  et  $\kappa$  sont respectivement la courbure moyenne et la courbure de Gauss. Il est important de noter aussi que ce potentiel dépend de la courbure intrinsèque et extrinsèque de la surface. Par conséquent, ce terme n'est pas le même pour deux surface isométriques.

# Chapitre 4

## particule confinée sur un cône en présence d'un champ magnétique constant

### 4.1 Introduction

Le but principal de ce chapitre est d'étudier la dynamique quantique d'une particule chargée confinée sur un cône circulaire et soumise à un champ magnétique constant dirigé selon l'axe de symétrie. D'abord, on expose dans la section suivante la géométrie non triviale du cône où nous allons montrer, en se basant sur le théorème de Gauss-Bonnet, que la courbure de Gauss introduit une singularité sous forme d'une fonction delta de Dirac qui correspond à son extrémité. Puis, on applique la méthode de confinement pour une particule sur un cône. On montre que le potentiel géométrique effectue d'une manière significative les états d'énergie du système. Enfin, nous considérons le système précédent en plus d'un champ magnétique constant. On va déterminer essentiellement :

- i) le spectre des énergies sous forme d'une équation transcendante
- ii) les niveaux de Landau sont obtenus comme cas limite.

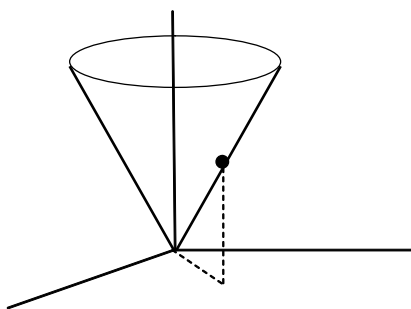
## 4.2 La géométrie du cône

On considère les coordonnées  $l$  et  $\varphi$  d'une particule confinée à la surface d'un cône ( voir figure ci-dessous) défini comme suit

$$\begin{aligned}x &= l \sin \alpha \cos \varphi, \\y &= l \sin \alpha \sin \varphi, \\z &= l \cos \alpha,\end{aligned}\tag{4.1}$$

ou bien

$$\mathbf{r}(l, \varphi) = (l \sin \alpha \cos \varphi, l \sin \alpha \sin \varphi, l \cos \alpha),$$



on aura donc

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_l &= (\sin \alpha \cos \varphi, \sin \alpha \sin \varphi, \cos \alpha) \\ \mathbf{r}_\varphi &= (-l \sin \alpha \sin \varphi, l \sin \alpha \cos \varphi, 0)\end{aligned}$$

les coefficients de la première forme

$$g_{ll} = (\mathbf{r}_l, \mathbf{r}_l) = 1, \quad g_{l\varphi} = 0, \quad g_{\varphi\varphi} = (\mathbf{r}_\varphi, \mathbf{r}_\varphi) = l^2 \sin^2 \alpha$$

le tenseur métrique et son inverse sont

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & l^2 \sin^2 \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l^2 \sin^2 \alpha} \end{pmatrix},\tag{4.2}$$

ou bien

$$ds^2 = dl^2 + l^2 \sin^2 \alpha d\varphi^2,\tag{4.3}$$

l'introduction du terme  $\sin^2 \alpha$  dans la métrique plane reproduit un angle total sur la surface qui est

$$\int_0^{2\pi} \sin \alpha d\varphi = 2\pi \sin \alpha < 2\pi$$

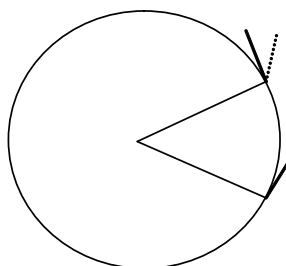
Le déficit  $\varkappa$  en angle relatif au cône par rapport à secteur circulaire est donc

$$2\pi - \varkappa = 2\pi \sin \alpha$$

c'est-à-dire

$$\varkappa = 2\pi (1 - \sin \alpha) \quad (4.4)$$

La figure ci-dessous montre clairement l'effet du transport parallèle (translation) d'un vecteur le long d'un cercle dans le plan euclidien où un angle  $\varkappa$  a été supprimé afin de reproduire le cône. L'angle résultant entre les vecteurs initial et final est  $\varkappa = 2\pi (1 - \sin \alpha)$ .



Ainsi, d'après le théorème de Gauss-Bonnet (2.106) vu au chapitre 2 à savoir

$$\varkappa = \iint_S \kappa dS \quad (4.5)$$

où  $dS = \sqrt{g} dl d\varphi = \ell \sin \alpha dl d\varphi$ . On aura alors

$$2\pi (1 - \sin \alpha) = \int_0^\ell \kappa \ell \sin \alpha dl \int_0^{2\pi} d\varphi \quad (4.6)$$

c'est-à-dire

$$\int_0^\ell \kappa \frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \ell dl = 1, \quad \forall \ell \quad (4.7)$$

ici  $0 < \sin \alpha < 1$  pour satisfaire cette dernière relation,  $\kappa$  doit avoir une contribution en fonction  $\delta$  de Dirac

$$\kappa = \frac{1 - \sin \alpha}{\sin \alpha} \frac{\delta(\ell)}{\ell}. \quad (4.8)$$

Passons maintenant au calcul de la courbure moyenne, en effet, on commence par calculer le vecteur unitaire normal qui est

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f(x, y, z)}{\|\nabla f(x, y, z)\|} \quad (4.9)$$

$$= (\cos \alpha \cos \varphi, \cos \alpha \sin \varphi, -\sin \alpha), \quad (4.10)$$

où on a utilisé le fait que l'équation de la surface du cône est

$$f(x, y, z) = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} (x^2 + y^2) - z^2 = 0 \quad (4.11)$$

ensuite on peut calculer

$$\mathbf{r}_{\ell\ell} = 0$$

$$\mathbf{r}_{\ell\varphi} = \mathbf{r}_{\varphi\ell} = (-\sin \alpha \sin \varphi, \sin \alpha \cos \varphi, 0)$$

$$\mathbf{r}_{\varphi\varphi} = (-\ell \sin \alpha \cos \alpha, -\ell \sin \alpha \sin \alpha, 0)$$

ainsi, les coefficients de la deuxième seront

$$b_{\varphi\varphi} = (\mathbf{r}_{\varphi\varphi}, \mathbf{n}) = -\ell \sin \alpha \cos \alpha, \quad b_{\ell\ell} = (\mathbf{r}_{\ell\ell}, \mathbf{n}) = 0, \quad b_{\ell\varphi} = (\mathbf{r}_{\ell\varphi}, \mathbf{n}) = 0,$$

est la matrice  $\mathbf{b}$  " le tenseur extrinsèque" est donc

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\ell \sin \alpha \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

d'où

$$\boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{b}\mathbf{g}^{-1}$$

c'est-à-dire

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1 \cos \alpha}{\ell \sin \alpha} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Ainsi, la courbure moyenne du cône est donc

$$H = -\frac{1}{2} \text{Tr}(\boldsymbol{\alpha}) = -\frac{1}{2\ell} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (4.14)$$



### 4.3 Le problème d'une particule libre sur un cône

Considérons une particule neutre confinée à une surface conique. La dynamique est régie par l'équation de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta^2\psi + V_\lambda(q_3)\psi = E\psi \quad (4.15)$$

où  $\Delta$  l'opérateur Laplace-Beltrami et  $V_\lambda(q_3)$  le potentiel de confinement. On choisit les coordonnées paramétriques  $(q_1 = \ell, q_2 = \varphi, q_3)$  avec  $q_3 \ll$  donc on a l'équation

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\sqrt{G}}\partial_i\left(\sqrt{G}G^{ij}\partial_j\psi\right)\psi + V_\lambda(q_3)\psi = E\psi, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4.16)$$

où la métrique de l'espace voisinage (l'interface)  $G_{ij}$  est définie comme dans le chapitre précédent.

À ce stade, on considère le changement  $\psi = \chi/\sqrt{f}$  où  $f$  est donnée par (3.22) puis, on applique la méthode de confinement d'une manière similaire à celle vue au chapitre précédent, on arrive à

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\ell}\frac{\partial}{\partial\ell}\left(\ell\frac{\partial\chi}{\partial\ell}\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\ell^2\sin^2\alpha}\frac{\partial^2\chi}{\partial\varphi^2} + V_s\chi - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\chi}{\partial q_3^2} + V_\lambda(q_3)\chi = E\chi \quad (4.17)$$

En raison de la topologie non triviale du cône et aussi du confinement bidimensionnel, le potentiel géométrique doit être de la forme

$$\begin{aligned} V_s(q^1, q^2) &= -\frac{\hbar^2}{2m}(H^2 - \kappa) \\ &= -\frac{\hbar^2}{8m\ell^2}\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\chi + \frac{\hbar^2}{2m}\nu\frac{\delta(\ell)}{\ell}\chi \end{aligned} \quad (4.18)$$

dans lequel  $\nu = (1 - \sin\alpha)/\sin\alpha$ . Ainsi, L'expression (4.17) peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} &-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\chi}{\partial\ell^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\ell}\frac{\partial\chi}{\partial\ell} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\ell^2\sin^2\alpha}\frac{\partial^2\chi}{\partial\varphi^2} \\ &-\frac{\hbar^2}{8m\ell^2}\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\chi + \frac{\hbar^2}{2m}\nu\frac{\delta(\ell)}{\ell}\chi - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\chi}{\partial q_3^2} + V_\lambda(q_3)\psi = E\chi \end{aligned} \quad (4.19)$$

cette dernière équation peut être séparée facilement en partie normale et tangentielle en posant

$$\chi = \chi_t(q_1, q_2, t)\chi_n(q^3, t), \quad (4.20)$$

pour laquelle on a les deux équations

$$\begin{aligned} &-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\chi_t}{\partial\ell^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\ell}\frac{\partial\chi_t}{\partial\ell} + \frac{1}{2m}\frac{L_z^2\chi_t}{\ell^2\sin^2\alpha} \\ &-\frac{\hbar^2\cos^2\alpha}{8m\ell^2\sin^2\alpha}\chi_t + \frac{\hbar^2}{2m}\nu\frac{\delta(\ell)}{\ell}\chi_t = E_s \quad \chi_t, \end{aligned} \quad (4.21)$$

et

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \chi_n}{\partial q_3^2} + V_\lambda(q_3) \chi_n(q_3) = E_n \chi_n(q_3). \quad (4.22)$$

avec  $L_z = -i\hbar(\partial/\partial\varphi)$  est le moment orbital de la particule. On va s'intéresser à l'équation surfacique "tangentielle". On commence par le changement

$$\chi_s = e^{ij\varphi} f(\ell), \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

on obtient l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d^2}{d\ell^2} + \frac{1}{\ell} \frac{d}{d\ell} - \frac{\delta_j}{\ell^2} - \nu \frac{\delta(\ell)}{\ell} \right) f = E_s f \quad (4.23)$$

avec

$$\delta_j = \frac{4j^2 - \cos^2 \alpha}{4 \sin^2 \alpha}. \quad (4.24)$$

Il est important de noter que l'équation (4.23) présente un terme singulier  $\delta(\ell)/\ell$  qui a un comportement similaire au terme  $1/\ell^2$ . La solution de ce genre de potentiel nécessite une méthode de régularisation. Ici, on va choisir une régularisation physique ; c'est-à-dire de régler la singularité de terme  $\delta(\ell)/\ell$  en le remplaçant par le terme  $\delta(\ell - a)/a$  avec  $a \rightarrow 0$ . Cette technique de régularisation a été utilisée pour quelques systèmes physiques en présence de l'effet Aharonov-Bohm [11, 18]. Ainsi, l'équation (4.23) devient

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d^2}{d\ell^2} + \frac{1}{\ell} \frac{d}{d\ell} - \frac{\delta_j}{\ell^2} - \nu \frac{\delta(\ell - a)}{a} \right) f = E_s f \quad (4.25)$$

Les solutions de cette dernière équation dépend du signe de  $\delta_j$ . Alors deux cas se présentent :

**Cas  $j = 0$  :**

$$\delta_0 = -\frac{\cos^2 \alpha}{4 \sin^2 \alpha} < 0 \quad (4.26)$$

ainsi (4.25) se réécrit comme

$$\left( \frac{d^2}{d\ell^2} + \frac{1}{\ell} \frac{d}{d\ell} - \frac{\delta_0}{\ell^2} - k^2 - \nu \frac{\delta(\ell - a)}{a} \right) f = 0 \quad (4.27)$$

où  $k^2 = -\frac{2mE_s}{\hbar^2}$ . On constate qu'il existe deux régions ; la région "in" déterminée par  $0 \leq \ell < a$  et la région "out" pour  $a < \ell < \infty$ . Ainsi, la partie radiale doit être continue en  $\ell = a$  :

$$f_{out}(a + \varepsilon) = f_{in}(a - \varepsilon), \quad (4.28)$$

alors que sa dérivée est discontinue. En effet, intégrons l'équation (4.27) dans l'intervalle  $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$  avec  $\varepsilon \rightarrow 0$ . On aura

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{d^2 f}{d\ell^2} d\ell - \nu \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{\delta(\ell - a)}{a} f(\ell) d\ell = 0$$

ou bien

$$\frac{df_{out}(a)}{d\ell} - \frac{df_{in}(a)}{d\ell} = \frac{\nu}{a} f_{in}(a) \quad (4.29)$$

qui est la deuxième condition de continuité. La solution générale de (4.27) pour  $\ell \neq a$

$$f(\ell) = AI_{i\sqrt{-\delta_0}}(k\ell) + BK_{i\sqrt{-\delta_0}}(k\ell) \quad (4.30)$$

où  $I_{i\sqrt{-\delta_0}}$  et  $K_{i\sqrt{-\delta_0}}$  sont les fonctions de Bessel modifiées de première et deuxième espèce respectivement.  $A$  et  $B$  sont des constantes arbitraires. Le choix physique de l'une de ces solutions pour chaque région dépend de leur comportement.

Le comportement pour  $k\ell \gg$

$$I_{i\sqrt{-\delta_0}}(k\ell) \approx (2\pi k\ell)^{-\frac{1}{2}} e^{k\ell} \quad (4.31)$$

$$K_{i\sqrt{-\delta_0}}(k\ell) \approx (\pi/(2k\ell))^{\frac{1}{2}} e^{-k\ell} \quad (4.32)$$

et le comportement pour  $k\ell \ll$  (voir Annexe C)

$$I_{i\sqrt{-\delta_0}}(k\ell) \approx \left( \frac{\sinh(\pi\sqrt{-\delta_0})}{\pi\sqrt{-\delta_0}} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left( i \left( \sqrt{-\delta_0} \ln(\frac{1}{2}k\ell) - \gamma \right) \right) \quad (4.33)$$

$$K_{i\sqrt{-\delta_0}}(k\ell) \approx - \left( \frac{\pi}{\sqrt{-\delta_0} \sinh(\pi\sqrt{-\delta_0})} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \left( \sqrt{-\delta_0} \ln(\frac{1}{2}k\ell) - \gamma \right) \quad (4.34)$$

où  $\gamma = \arg \Gamma(1 + i\sqrt{-\delta_0})$ . Au vu de ces comportements, on constate que

$$f_{in}(\ell) = AI_{i\sqrt{-\delta_0}}(k\ell) \quad (4.35)$$

$$f_{out}(\ell) = BK_{i\sqrt{-\delta_0}}(k\ell) \quad (4.36)$$

de la première condition (4.28), on obtient le rapport

$$\frac{B}{A} = - \frac{\sinh(\pi\sqrt{-\delta_0})}{\pi \sin(\sqrt{-\delta_0} \ln(\frac{1}{2}k\ell) - \gamma)} \exp \left( i \left( \sqrt{-\delta_0} \ln(\frac{1}{2}k\ell) - \gamma \right) \right) \quad (4.37)$$

et la deuxième condition (4.29), on a

$$\frac{B}{A} = - \frac{\sinh(\pi\sqrt{-\delta_0})(\nu + \sqrt{-\delta_0})}{\pi\sqrt{-\delta_0} \cos(\sqrt{-\delta_0} \ln(\frac{1}{2}ka) - \gamma)} \exp \left( i \left( \sqrt{-\delta_0} \ln(\frac{1}{2}ka) - \gamma \right) \right) \quad (4.38)$$

en égalant les deux rapports (4.37) et (4.38), il vient

$$\cot \left( \sqrt{-\delta_0} \ln(\frac{1}{2}ka) - \gamma \right) = \frac{\nu + \sqrt{-\delta_0}}{\sqrt{-\delta_0}}$$

d'où l'énergie de l'état lié est finalement

$$(E_0)_s = -\frac{2\hbar^2}{ma^2} \exp \left[ \frac{2}{\sqrt{-\delta_0}} \cot^{-1} \left( \frac{\nu}{\sqrt{-\delta_0}} + 1 \right) + 2\gamma \right] \quad (4.39)$$

notons que lorsque  $a \rightarrow 0$ , on a  $(E_0)_s \rightarrow -\infty$  (pas d'état fondamental fini).

**Cas  $j \neq 0$  :**

Dans ce cas l'équation (4.25) devient

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \ell^2} + \frac{1}{\ell} \frac{\partial}{\partial \ell} - \frac{\delta_j}{\ell^2} - k^2 - \nu \frac{\delta(\ell - a)}{a} \right) f = f \quad (4.40)$$

avec  $k^2 = -\frac{2mE_s}{\hbar^2}$ . La solution générale de cette équation est donnée par la combinaison

$$f = AI_{\sqrt{\delta}}(k\ell) + BK_{\sqrt{\delta}}(k\ell) \quad (4.41)$$

le comportement de ces solutions pour  $k\ell \ll 1$  à l'ordre le plus bas est

$$I_{\sqrt{\delta}}(k\ell) \approx \frac{1}{2^{\sqrt{\delta}} \Gamma(\sqrt{\delta} + 1)} (k\ell)^{\sqrt{\delta}}$$

$$K_{\sqrt{\delta}}(k\ell) \approx \frac{1}{2} \left( 2^{\sqrt{\delta}} \Gamma(\sqrt{\delta}) (k\ell)^{-\sqrt{\delta}} + \Gamma(-\sqrt{\delta}) \frac{(k\ell)^{\sqrt{\delta}}}{2^{\sqrt{\delta}}} \right)$$

par conséquent, les solutions correspondantes dans les deux régions sont

$$f_{in}(\ell) = AI_{\sqrt{\delta}}(k\ell) \quad (4.42)$$

$$f_{out}(\ell) = BK_{\sqrt{\delta}}(k\ell) \quad (4.43)$$

à l'ordre le plus bas en  $k\ell$  on obtient le rapport  $B/A$

$$\frac{B}{A} = \frac{(k\ell)^{\sqrt{\delta}}}{\Gamma(\sqrt{\delta}) \Gamma(\sqrt{\delta} + 1) \frac{2^{2\sqrt{\delta}}}{2} (k\ell)^{-\sqrt{\delta}} + \frac{1}{2} \Gamma(-\sqrt{\delta}) \Gamma(\sqrt{\delta} + 1) (k\ell)^{\sqrt{\delta}}}$$

d'autre part, la deuxième condition (4.29) donne le rapport

$$\frac{B}{A} = \frac{\left( \nu \frac{1}{2^{\sqrt{\delta}} \Gamma(\sqrt{\delta} + 1)} (ka)^{\sqrt{\delta}} + \sqrt{\delta} \frac{1}{2^{\sqrt{\delta}} \Gamma(\sqrt{\delta} + 1)} (ka)^{\sqrt{\delta}} \right)}{\left( -\sqrt{\delta} \frac{1}{2} 2^{\sqrt{\delta}} \Gamma(\sqrt{\delta}) (ka)^{-\sqrt{\delta}} + \sqrt{\delta} \frac{1}{2^{\sqrt{\delta} + 1}} \Gamma(-\sqrt{\delta}) (ka)^{\sqrt{\delta}} \right)}$$

d'où on tire le spectre suivant

$$E_j = -\frac{2\hbar^2}{ma^2} \left[ \left( 1 + \frac{2\sqrt{\delta}}{\nu} \right) \frac{\Gamma(1 + \sqrt{\delta})}{\Gamma(1 - \sqrt{\delta})} \right]^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \quad (4.44)$$

On remarque que lorsque  $a \rightarrow 0$  l'énergie n'est bornée inférieurement c'est-à-dire  $E_s \rightarrow -\infty$  (pas d'état fondamental). De même pour  $\nu \rightarrow 0$ .

#### 4.4 Particule sur un cône en présence d'un champ magnétique constant

On considère maintenant une particule de charge  $q$ , confinée sur la surface d'un cône et soumise à un champ magnétique externe constant  $\mathbf{B}$  dans la direction  $z$ . Le potentiel vecteur associé est donc

$$\mathbf{A} = \frac{B}{2} \rho \mathbf{u}_\varphi, \quad (4.45)$$

l'équation de Schrödinger du système s'écrit

$$\frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2}{2m} \psi + V_\lambda(q_3) \psi = E\psi \quad (4.46)$$

ou explicitement

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi - \frac{\hbar q}{mi} \mathbf{A} \cdot \nabla \psi - \frac{\hbar q}{2mi} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \psi + \frac{q^2 \mathbf{A}^2}{2m} \psi + V_\lambda(q_3) \psi = E\psi \quad (4.47)$$

le terme  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  puisque

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial q_i} (\sqrt{G} A^i) = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sqrt{G} A_\varphi) \quad (4.48)$$

$$= 0 \quad (\text{la jauge de Coulomb}) \quad (4.49)$$

reste à calculer  $\mathbf{A} \cdot \nabla$  comme

$$\mathbf{A} \cdot \nabla = \frac{B}{2} \rho \mathbf{u}_\varphi \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi = \frac{B}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (4.50)$$

remplaçons dans l'équation (4.47), on obtient

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{G}} \partial_i (\sqrt{G} G^{ij} \partial_j \psi) - \frac{\hbar q B}{2mi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{q^2 \mathbf{A}^2}{2m} \psi + V_\lambda(q_3) \psi = E\psi \quad (4.51)$$

Posons  $\psi = \chi/\sqrt{f}$  et appliquons la méthode de confinement comme expliquée dans le chapitre 3, on arrive à

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \ell^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\ell} \frac{\partial \chi}{\partial \ell} + \frac{L_z^2}{2m} \frac{1}{\ell^2 \sin^2 \alpha} - \frac{\hbar^2 \cos^2 \alpha}{8m \ell^2 \sin^2 \alpha} \chi + \frac{\hbar^2}{2m} \nu \frac{\delta(\ell)}{\ell} \chi \\ & - \frac{qB}{2m} L_z + \frac{q^2 B^2 \sin^2 \alpha}{8m} \ell^2 \chi - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_3^2} + V_\lambda(q_3) \psi = E\chi \end{aligned} \quad (4.52)$$

la partie surfacique correspondante a donc l'expression

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \chi_s}{\partial \ell^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\ell} \frac{\partial \chi_s}{\partial \ell} + \frac{L_z^2}{2m} \frac{1}{\ell^2 \sin^2 \alpha} - \frac{qB}{2m} L_z \\ & + \left( \frac{q^2 B^2 \sin^2 \alpha}{8m} \ell^2 - \frac{\hbar^2 \cos^2 \alpha}{8m \ell^2 \sin^2 \alpha} + \frac{\hbar^2}{2m} \nu \frac{\delta(\ell)}{\ell} \right) \chi_s = E_s \chi_s \end{aligned} \quad (4.53)$$

Considérons ensuite la décomposition suivante

$$\chi_s = e^{ij\varphi} f(\ell), \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

remplaçons dans (4.53), on arrive à l'équation

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 f}{\partial \ell^2} - \frac{\hbar^2}{2m\ell} \frac{\partial f}{\partial \ell} + \frac{q^2 B^2 \sin^2 \alpha}{8m} \ell^2 f - \frac{\hbar q B j}{2m} f \\ + \left( \frac{\hbar^2 (4j^2 - \cos^2 \alpha)}{8m\ell^2 \sin^2 \alpha} + \frac{\hbar^2}{2m} \nu \frac{\delta(\ell)}{\ell} \right) f = E_s f \end{aligned}$$

ou bien

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \ell^2} + \frac{1}{\ell} \frac{\partial f}{\partial \ell} + \left( \frac{2m\Sigma_s}{\hbar^2} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} \ell^2 - \frac{\delta_j}{\ell^2} - \nu \frac{\delta(\ell)}{\ell} \right) f = 0 \quad (4.54)$$

avec les notations

$$\delta_j = \frac{4j^2 - \cos^2 \alpha}{4 \sin^2 \alpha}, \quad \omega = \frac{qB}{2m} \sin \alpha, \quad \Sigma_s = E_s + \frac{\hbar q B j}{2m}$$

On suppose que  $\delta_j > 0$  c-à-d  $j \neq 0$ . De même que la section précédente on a un terme singulier représenté par la fonction  $\delta(\ell)/\ell$ . On adopte pour ce système la même méthode de régularisation, donc on écrit l'équation précédente comme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \ell^2} + \frac{1}{\ell} \frac{\partial f}{\partial \ell} + \left( \frac{2m\Sigma_s}{\hbar^2} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} \ell^2 - \frac{\delta_j}{\ell^2} - \nu \frac{\delta(\ell - a)}{a} \right) f = 0 \quad (4.55)$$

où la solution générale (voir Annexe B) est la combinaison

$$\begin{aligned} f(\ell) = & A \ell^{2\mu} e^{-\lambda \ell^2} \Phi \left( \frac{1}{2} + \mu - \frac{m\Sigma_s}{4\lambda\hbar^2}, 1 + 2\mu, 2\lambda\ell^2 \right) \\ & + B \ell^{-2\mu} e^{-\lambda \ell^2} \Phi \left( \frac{1}{2} - \mu - \frac{m\Sigma_s}{4\lambda\hbar^2}, 1 - 2\mu, 2\lambda\ell^2 \right) \end{aligned} \quad (4.56)$$

avec  $\mu = \sqrt{\delta_j}/2$ ,  $\lambda = m\omega/2\hbar$  et  $\Phi$  est la fonction hypergéométrique confluente (fonction de Kemmer). Afin de déterminer les états liés, on doit suivre une méthode similaire à celle vue ci-dessus. En effet, il est facile de voir que les solutions "in" et "out" des deux régions ont le comportement

$$f_{in}(\ell) \approx C \ell^{2\mu} \quad (4.57)$$

$$f_{out}(\ell) \approx A \ell^{2\mu} + B \ell^{-2\mu} \quad (4.58)$$

où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des constantes arbitraires. La continuité de  $f(\ell)$  en  $\ell = a$  exige que

$$C a^{2\mu} = A a^{2\mu} + B a^{-2\mu} \quad (4.59)$$

la discontinuité de sa dérivée donne

$$2\mu A a^{2\mu-1} - 2\mu B a^{-2\mu-1} - 2\mu C a^{2\mu-1} = \frac{\nu}{a} C a^{2\mu}$$

on peut donc construire le rapport

$$\frac{B}{A} = -\frac{a^{4\mu}}{1 + \frac{4\mu}{\nu}} \quad (4.60)$$

A ce stade, on doit exiger aussi que la fonction d'onde  $f_{out}(\ell)$  donnée par (4.56) est nulle pour  $\ell \rightarrow +\infty$ . c-à-d :

$$f_{out}(\ell) \rightarrow 0 \text{ si } \ell \rightarrow +\infty$$

utilisons le comportement asymptotique suivante [19]

$$\Phi(a, c, z) \sim \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} z^{a-c} e^z, \quad z \gg \quad (4.61)$$

explicitement

$$\Phi\left(\frac{1}{2} + \mu - \frac{m\Sigma_s}{4\lambda\hbar^2}, 1 + 2\mu, 2\lambda\ell^2\right) \sim \frac{\Gamma(1 + 2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - \frac{m\Sigma_s}{4\lambda\hbar^2}\right)} (2\lambda\ell^2)^{-\frac{m\Sigma_s}{4\lambda\hbar^2} - \mu - \frac{1}{2}} e^{2\lambda\ell^2} \quad (4.62)$$

$$\Phi\left(\frac{1}{2} - \mu - \frac{m\Sigma_s}{4\lambda\hbar^2}, 1 - 2\mu, 2\lambda\ell^2\right) \sim \frac{\Gamma(1 - 2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu - \frac{m\Sigma_s}{4\lambda\hbar^2}\right)} (2\lambda\ell^2)^{-\frac{m\Sigma_s}{4\lambda\hbar^2} + \mu - \frac{1}{2}} e^{2\lambda\ell^2} \quad (4.63)$$

alors à partir de la condition  $f_{out}(\ell) = 0$  pour  $\ell \rightarrow +\infty$ , on peut former le rapport

$$\frac{B}{A} = -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu - \frac{m\Sigma_s}{4\lambda\hbar^2}\right) \Gamma(1 + 2\mu)}{(2\lambda)^{2\mu} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - \frac{m\Sigma_s}{4\lambda\hbar^2}\right) \Gamma(1 - 2\mu)} \quad (4.64)$$

Puis, comparons (4.60) et (4.64), on obtient l'équation transcendante de l'énergie

$$\frac{a^{4\mu}}{1 + \frac{4\mu}{\nu}} = \frac{\Gamma(1 + 2\mu) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu - \frac{m\Sigma_s}{4\lambda\hbar^2}\right)}{(2\lambda)^{2\mu} \Gamma(1 - 2\mu) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - \frac{m\Sigma_s}{4\lambda\hbar^2}\right)}$$

ou bien

$$\frac{\left(\frac{a^2 m \omega}{\hbar}\right)^{\sqrt{\delta_j}}}{1 + \frac{2\sqrt{\delta_j}}{\nu}} = \frac{\Gamma(1 + \sqrt{\delta_j}) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\delta_j}}{2} - \frac{m\Sigma_s}{4\lambda\hbar^2}\right)}{\Gamma(1 - \sqrt{\delta_j}) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\delta_j}}{2} - \frac{m\Sigma_s}{4\lambda\hbar^2}\right)}. \quad (4.65)$$

Il est important de noter que lorsque  $a \rightarrow 0$ , Les niveaux de Landau sont obtenus à partir de l'égalité (4.65) comme pôles de la fonction gamma au dénominateur.

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\delta_j}}{2} - \frac{m\Sigma_s}{4\lambda\hbar^2} = -n, \quad (4.66)$$

d'où on peut déduire les énergies suivantes

$$(E_{n,j})_s = \hbar\omega \left( 2n + 1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4j^2 - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} \right) - \frac{\hbar q B}{2m} j. \quad (4.67)$$

signalons que ce spectre est identique à celui obtenu dans la référence [13] en utilisant la technique des intégrales de chemins. Pour le cas spécial  $\alpha = \pi/2$  le cône devient un plan et on obtient les niveaux

$$(E_{n,j})_s = \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} + \frac{|j|}{2} \right) - \frac{\hbar q B}{2m} j. \quad (4.68)$$

où  $\omega_c = \frac{qB}{m}$  est la fréquence cyclotron.

Il est important de noter aussi que le potentiel géométrique effectue d'une manière remarquable le spectre d'énergie, notamment pour le cas  $j = 0$  qui n'appartient pas au spectre des états liés sauf si  $\alpha = \pi/2$ .



# Chapitre 5

## Conclusion

La dynamique quantique d'une particule non relativiste confinée sur une surface courbe par l'action d'un potentiel de confinement est basée principalement sur la séparation de l'équation de Schrödinger en deux parties ; une partie normale qui ne dépend que de la coordonnée normale et une autre surfacique qui dépend des coordonnées intrinsèques de la surface en plus d'un potentiel de nature géométrique qui est fonction des courbures caractéristiques de cette surface (courbure de Gauss et courbure moyenne).

Dans ce travail, on a considéré un exemple de confinement bidimensionnel à savoir une particule sur un cône. On a montré que le potentiel géométrique correspondant contient un terme relatif à sa courbure moyenne et un autre terme non trivial relatif à sa courbure de Gauss. Ce dernier introduit une singularité sous forme d'une fonction delta de Dirac. Pour faire face à cette pathologie, on a adopté une technique de régularisation simple basée sur la redéfinition du terme singulier. Comme résultat de ce mémoire, le spectre d'énergie de ce système est obtenu comme une équation transcendante. Les niveaux de Landau déterminés dans [12, 13] sans tenir compte de la singularité, sont obtenus ici comme cas limite.

Nous espérons que les résultats obtenus ici trouvent ses applications dans les nano-structures de confinement notamment en couches minces.

### .1 Annexe A

Les symboles de Christoffel s'écrivent

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{g^{im}}{2} \left( \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^m} \right)$$

on peut noter, en changeant les indices, que le premier terme se simplifier avec le troisième, il vient

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{g^{im}}{2} \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k}$$

Suite à la formule

$$\begin{aligned} \det A &= \exp(\text{tr} \ln A) \\ \Rightarrow d(\det A) &= \text{tr} (A^{-1} dA \det A) \end{aligned}$$

alors pour  $A \equiv g_{im}$  avec  $\det(g_{im}) = g$  il vient

$$dg = gg^{im} dg_{im}$$

cela veut dire

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x^k} dx^k &= gg^{im} \left( \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} \right) dx^k \\ \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x^k} &= gg^{im} \left( \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, pour  $g$  négatif

$$\frac{\partial \ln(\sqrt{-g})}{\partial x^k} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{g^{im}}{2} \left( \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} \right)$$

c-à-d

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{\partial \ln(\sqrt{-g})}{\partial x^k}$$

i) La divergence d'un tenseur une fois contravariant  $A^i$  s'écrit

$$\begin{aligned} D_i A^i &= \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma_{ki}^i A^k = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \frac{\partial \ln(\sqrt{-g})}{\partial x^k} A^k \\ &= \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \frac{\partial \ln(\sqrt{-g})}{\partial x^i} A^i \\ \text{ou bien } D_i A^i &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} A^i)}{\partial x^i} \end{aligned}$$

ii) Le laplacien  $\nabla^2 \varphi$  d'une fonction  $\varphi$  est défini comme  $\text{div}(\text{grad } \varphi) = D_i (\text{grad } \varphi)^i$ . En déduire que

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= D_i (\text{grad } \varphi)^i \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \left( \sqrt{-g} (\text{grad } \varphi)^i \right)}{\partial x^i} \end{aligned}$$

mais  $(\text{grad } \varphi)^i = g^{ij} (\text{grad } \varphi)_j = g^{ij} \partial_j \varphi = g^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}$ , il vient

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{-g} g^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right)$$

## .2 Annexe B

Soit l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \ell^2} + \frac{1}{\ell} \frac{\partial f}{\partial \ell} + \left( \frac{2m\Sigma_s}{\hbar^2} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} \ell^2 - \frac{\delta}{\ell^2} \right) f = 0 \quad (1)$$

Faisons le changement de variable  $r = \ell^2$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \ell} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \ell} = 2\ell \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \ell^2} &= 2 \frac{\partial f}{\partial r} + 4\ell^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = 4r \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial r} \end{aligned} \quad (2)$$

Ainsi l'équation (1) devient

$$4r \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial r} + 2 \frac{\partial f}{\partial r} + \left( \frac{2m\Sigma_s}{\hbar^2} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} r - \frac{\delta_j}{r} \right) f = 0$$

qui peut se simplifier comme suit

$$r \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\partial f}{\partial r} + \left( \frac{m\Sigma_s}{2\hbar^2} - \frac{m^2\omega^2}{4\hbar^2} r - \frac{\delta_j}{r} \right) f = 0 \quad (3)$$

Si on pose

$$f = e^{-\lambda r} g$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= -\lambda e^{-\lambda r} g + e^{-\lambda r} \frac{\partial g}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} &= \lambda^2 e^{-\lambda r} g - 2\lambda e^{-\lambda r} \frac{\partial g}{\partial r} + e^{-\lambda r} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \end{aligned}$$

on obtient

$$r \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + (1 - 2\lambda r) \frac{\partial g}{\partial r} + \left( \frac{m\Sigma_s}{2\hbar^2} - \lambda + \left( \lambda^2 - \frac{m^2\omega^2}{4\hbar^2} \right) r - \frac{\delta_j}{r} \right) g = 0 \quad (4)$$

choisissons

$$\lambda^2 - \frac{m^2\omega^2}{4\hbar^2} = 0 \quad \text{c-à-d} \quad \lambda = \frac{m\omega}{2\hbar}$$

L'équation (4) devient

$$r \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + (1 - 2\lambda r) \frac{\partial g}{\partial r} + \left( \frac{m\Sigma_s}{2\hbar^2} - \lambda - \frac{\delta_j}{r} \right) g = 0 \quad (5)$$

On considère ensuite la décomposition suivante

$$g = r^\mu \Phi \quad (6)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r} &= \mu r^{\mu-1} \Phi + r^\mu \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} &= \mu(\mu-1) r^{\mu-2} \Phi + 2\mu r^{\mu-1} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + r^\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \end{aligned}$$

remplaçons dans (5), on arrive à l'équation

$$r \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + (1 - 2\lambda r + 2\mu) \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \left( \frac{m\Sigma_s}{2\hbar^2} - \lambda - 2\lambda\mu + \frac{\mu^2 - \frac{\delta_j}{4}}{r} \right) \Phi = 0 \quad (7)$$

pour transformer cette équation à une équation différentielle connue, on doit poser

$$\mu^2 - \frac{\delta_j}{4} = 0$$

où bien

$$\mu = \pm \frac{\sqrt{\delta_j}}{2} \quad (8)$$

Ainsi, l'équation (7) se réduit à

$$r \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + (1 - 2\lambda r + 2\mu) \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \left( \frac{m\Sigma_s}{2\hbar^2} - (1 + 2\mu)\lambda \right) \Phi = 0 \quad (9)$$

Puis, effectuons le changement  $\xi = 2\lambda r$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} = 2\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} &= 4\lambda^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \end{aligned}$$

on obtient une équation de type hypergéométrique confluyente

$$\xi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + (1 + 2\mu - \xi) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \left( (1 + 2\mu) - \frac{m\Sigma_s}{2\lambda\hbar^2} \right) \Phi = 0 \quad (10)$$

de la forme

$$\xi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + (b - \xi) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - a\Phi = 0, \quad (11)$$

où

$$a = \frac{1}{2} \left( (1 + 2\mu) - \frac{m\Sigma_s}{2\lambda\hbar^2} \right), \quad b = 1 + 2\mu$$

la solution générale de (10) est la combinaison suivante

$$f = A \ell^{2\mu} e^{-\lambda \ell^2} \Phi(a, b, 2\lambda \ell^2) + B \ell^{-2\mu} e^{-\lambda \ell^2} \Phi(a - b + 1, 2 - b, 2\lambda \ell^2) \quad (12)$$

### .3 Annexe C

Soit la fonction  $L_\mu(z)$  donnée par

$$L_\sigma(z) = \frac{\pi i}{2 \sin(\mu\pi)} (I_\sigma(z) + I_{-\sigma}(z)) \quad (13)$$

l'ordre  $\sigma$  peut être complexe. Soit aussi la fonction de Bessel modifiée du second espèce  $K_\mu(z)$ .

$$K_\sigma(z) = \frac{\pi}{2 \sin(\mu\pi)} (I_{-\sigma}(z) - I_\sigma(z)) \quad (14)$$

Il a été montré dans la référence [20] que le comportement de  $L_{i\mu}(x)$  avec  $\mu$  réel pour  $x \ll$  est

$$L_{i\mu}(x) \approx \left( \frac{\pi}{\mu \sinh(\pi\mu)} \right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\mu \ln\left(\frac{1}{2}x\right) - \gamma\right)$$

alors que  $K_{i\mu}(z)$  est

$$K_{i\mu}(x) \approx - \left( \frac{\pi}{\mu \sinh(\pi\mu)} \right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\mu \ln\left(\frac{1}{2}x\right) - \gamma\right)$$

Donc on peut trouver à partir de (13) et (14)

$$I_\sigma(z) = \frac{\sin(\sigma\pi)}{\pi i} [L_\sigma(z) - iK_\sigma(z)]$$

Donc le comportement de  $I_{i\mu}(x)$  pour  $x \ll$  est

$$I_{i\mu}(x) \approx \left( \frac{\sinh(\mu\pi)}{\mu\pi} \right)^{\frac{1}{2}} [\exp i(\mu \ln(\frac{1}{2}x) - \gamma)]$$


---

# Bibliographie

- [1] L.I. Magarill, A.V. Chaplik and M.V. Entin, Phys. Usp. **48**, 953 (2005).
- [2] C.L. Foden, M.L. Leadbeater and M. Pepper, Phys. Rev. B **52**, R8646 (1995); C. Furtado, A. Rosas, S. Azevedo, EPL **79**, 57001 (2007); T. Thitapura, W. Liewrian, T. Jutarosaga, S. Boonchui, *Effect of curvature-induced superlattice structures on energy band structures of helically coiled carbon nanotubes*. Plasmonics **12**, 1439–1447 (2017).
- [3] C. Ortix and J. van den Brink, Phys. Rev. **B 81**. 100, 165419 (2010).
- [4] R. C. T. da Costa, phys. Rev. **A 23**, 1982 (1981).
- [5] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [6] M. O. Katanaev and I. V. Volovich, Ann. Phys. 216 (1992); C. Satiro and F. Moraes, Eur. Phys. J. E **20** 173 (2006).
- [7] C. Furtado, A. Rosas, S. Azevedo, EPL **79**, 57001 (2007).
- [8] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics II*, Academy Press, New York, 1975.
- [9] D .M. Gitman, I.V. Tyutin and B. L. Voronov, "*Self-adjoint extensions in Quantum Mechanics*" (Springer Science + Business Media, New York, 2012).
- [10] N. Ferkous, *Mémoire de Master*(A. Ayadi), Universite de Jijel (2016).
- [11] C. R. Hagen, Phys. Rev. Lett. **64**, 503 (1990); C. R. Hagen, Int. J. Mod. Phys. **A 6**, 3119 (1991); N. Ferkous, A. Bounames, Phys. Lett. A **325**, 21 (2004).
- [12] A. Poux1, L.R.S. Araújo1, C. Filgueiras and F. Moraes, Eur. Phys. J. Plus **129** 100 (2014).
- [13] M. Merad, T. Boudjedaa and L. Chetouani, Eur. Phys. J. C **26**, (2002).
- [14] G. Chilov, *Analyse mathématique : Fonctions de plusieurs variables réelles*, Edition Mir . Moscou (1975).

- 
- [15] E. Kreyszig, *Differential Geometry*, Dover, Mineola, NY, 1991.
- [16] N. Ferkous, *Mémoire de Master*(S. Fentazi), Université de Jijel (2018), *Mémoire de Master*(A. Laribi), Université de Jijel (2020).
- [17] Martin Libschutz, *Differentiel geometry*, McGraw-Hill, USA (1969).
- [18] N. Ferkous and A. Bounames, Phys. Lett. **A 325**, 21 (2004).
- [19] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Elsevier, Amsterdam, 2007)
- [20] T. M. Dunster, SIAM J. Math. Anal. **21**, 4 (1990).

---

## .4 Résumé

Dans ce mémoire, on a considéré la dynamique d'une particule confinée sur un cône et soumise à un champ magnétique constant. Le potentiel géométrique correspondant contient un terme relatif à sa courbure moyenne et un autre terme non trivial relatif à sa courbure de Gauss. Ce dernier introduit une singularité sous forme d'une fonction delta de Dirac. Pour faire face à cette pathologie, on a adopté une technique de régularisation simple basée sur la redéfinition du terme singulier. Comme résultat de ce mémoire, le spectre d'énergie de ce système est obtenu comme une équation transcendante. Les niveaux de Landau déterminés dans la littérature, sans tenir compte de la singularité, sont obtenus ici comme cas limite.

---

Mots clés : potentiel géométrique, singularité, régularisation, surface cônica.