République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....
№ de série : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse fonctionnelle.

Thème

Les deux théorèmes de Nevanlinna et applications

Présenté par :

ABDI Nadjiba

Devant le jury :

Président	: **F. ALIOUANE**	M.C.A. Université de Jijel
Encadreur	: **T. ZERZAIHI**	Prof. Université de Jijel
Examinateur	: **R. BELHADEF**	M.C.B. Université de Jijel

Promotion **2020/2021**

REMERCIEMENTS

*Mes remerciements vont tout premièrement à **Dieu** tout puissant pour la volonté, la santé, et la patience qu'il m'a donnée durant ces longues années d'étude et le courage pour terminer ce mémoire.*

*Tout d'abord, je remercie vivement mon encadreur, Monsieur **Tahar Zerzaihi**, professeur à l'université - Mohammed Seddik Ben Yahia Jijel- pour avoir dirigé ce travail, pour ses précieux conseils, ses remarques, sa patience et sa disponibilité durant la réalisation de ce travail.*

*Je remercie également les membres du jury, la présidente Melle. **Fatine Aliouane** M.C.A. à l'université de Jijel, l'examinateur Mr. **Rafik Belhadef** M.C.B. à l'université de Jijel, pour avoir accepté d'évaluer mon travail.*

Je voudrais aussi remercier tous les enseignants qui ont contribué à ma formation, ainsi qu'à toute l'équipe du département de mathématiques. Aussi je tiens à remercier toutes mes collègues.

Enfin, un grand merci avec beaucoup de plaisir à ma mère, mon père et ma famille pour leurs conseils et encouragement durant toutes les années de mes études.

Nadjiba

TABLE DES MATIÈRES

Notations

On utilise les notations suivantes :

$\mathbb{N}^*$	:	L'ensemble des entiers naturels non nuls.
$\mathbb{C}$	:	L'ensemble des nombres complexes.
D	:	Un domaine (ouvert et connexe) dans $\mathbb{C}$.
∂D	:	La frontière de D.
$\mathring{D}$	:	L'intérieur de D.
$D^+(z_0, r)$	:	Le disque fermé de centre z_0 et de rayon r.
C	:	Le contour fermé au sens positive.
C^-	:	Le contour fermé au sens négative.
$mes(\mathrm{E})$	:	La mesure de l'ensemble E.
$f^{(n)}$	:	La dérivée de f d'ordre n.
$\underset{z=a}{Res} f(z)$	:	Le résidu de f en $z = a$.
$n(r, f)$	:	Le nombre des pôles de f dans $\|z\| \leq t$.
$n(r, \frac{1}{f})$	:	Le nombre des zéros de f dans $\|z\| \leq t$.
$N(r, f)$	:	La fonction de comptage des pôles.
$\overline{N}(r, f)$	:	La fonction de comptage des pôles sans compter la multiplicité.
$N(r, \frac{1}{f})$	:	La fonction de comptage des zéros.
$m(r, f)$	:	La fonction de compensation de f.
$T(r, f)$	:	La fonction caractéristique de f.
$M(r, f)$	:	Maximum de module de f sur $\|z\| = r$.
$\sigma(f)$	:	L'ordre de croissance de f.
$\mu(f)$	:	L'ordre d'inférieure de f.
$O(1)$	:	L'ensemble des fonctions bornées.

INTRODUCTION

En 1925, Nevanlinna a établi une importante théorie dans le domaine complexe ; ‟La théorie de Nevanlinna″ou la théorie de la distribution des valeurs. Cette théorie permet d'étudier le comportement asymptotique des solution de l'équation $f(z) = a$.

A partir de la théorie de Nevanlinna, on peut étudier la taille d'une fonction méromorphe en utilisant la fonction caractéristique de Nevanlinna $T(r, f)$. Grâce à cette fonction, on définit l'ordre de croissance qui a un rôle important dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles et fonctionnelles.

Ensuite plusieurs études et problèmes sur la distribution des valeurs des fonctions méromorphes ont été publiées.

Ce mémoire se compose de l'introduction et trois chapitres. Dans le premier chapitre, on donne quelques définitions qui sont la base d'analyse complexe et on cite des théorèmes utilisés dans la suite.

Dans le deuxième chapitre, on énonce les deux théorèmes fondamentaux de Nevanlinna. Au début, on présente la formule de Poisson-Jensen, puis on donne les définitions des fonctions $m(r, f), N(r, f)$ et $T(r, f)$ et leurs propriétés. Ensuite, on démontre le premier théorème. Pour le deuxième théorème, on énonce d'abord le lemme de **Borel** et le théorème de la dérivé logarithmique pour donner une estimation du terme $S(r, f)$. Puis on prouve le deuxième théorème de Nevanlinna.

Le Troisième chapitre contient quelques applications. Pour le premier théorème, on expose l'application sur les équations aux q-différences, qui donne une borne inférieure de l'ordre inférieur d'une fonction méromorphe. Ces résultats sont dans la publication [4] de **Xiu-Min Zheng, Zong-Xuan Chen**. Pour le deuxième théorème, on donne les conditions sur la fonction méromorphe pour qu'elle soit une fonction périodique. Ce résultat est publié dans le travail [7] de **J. Hittokangas** et autres.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRE D'ANALYSE COMPLEXE

Dans ce chapitre, on va rappeler quelques notions de base d'analyse complexe et quelques théorèmes qu'on va utiliser dans la suite. Soit $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, on a

1.1 Fonctions Analytiques

Définition 1.1. *On dit que f est une fonction analytique en z_0 si elle est différentiable dans un voisinage de z_0.*

Remarque 1.1.

1) L'ensemble où f est analytique est un ensemble ouvert.

2) Si f est analytique sur $\mathbb{C}$, on dit que f est entière.

1.1.1 Intégrale de Cauchy

Théorème 1.1. *[2] Si $f(z)$ est une fonction analytique sur $D \cup \Gamma$ $(\partial D = \Gamma)$ et si $z_0 \in D$ alors*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz. \tag{1.1}$$

Corollaire 1.1. *[3] On peut généraliser la formule* (1.1) *par*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \tag{1.2}$$

Théorème 1.2. *[2] (Théorème de Cauchy) Si f est une fonction analytique, sa dérivé f' est continue sur D et $\Gamma \subset D$ est un contour fermé, alors*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Corollaire 1.2. *[2] En posant $z = z_0 + re^{i\varphi}$ dans* (1.1), *on obtient*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi, \tag{1.3}$$

qu'on l'appelle "la formule de la moyenne."

1.1.2 Inégalité de Cauchy

Théorème 1.3. *[6] Si f est une fonction analytique sur $D \subset \mathbb{C}$, $D^+(z_0, R) \subset D$ et $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in D$ alors on a l'inégalité suivante*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \frac{Mn!}{R^n}. \tag{1.4}$$

P*reuve*.
D'après la formule (1.2)

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right|, \tag{1.5}$$

$D^+(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| \leq R\}.$

Pour $|z - z_0| = R$, on trouve

$$\begin{aligned}
|f^{(n)}(z_0)| &\leq \frac{n!}{2\pi} \int\limits_{|z|=R} \left| \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \\
&\leq \frac{n!}{2\pi} \int\limits_{|z|=R} \left| \frac{f(z)}{R^{n+1}} dz \right| \\
&\leq \frac{2\pi R M n!}{2\pi R^{n+1}} \\
&\leq \frac{M n!}{R^n}.
\end{aligned}$$

□

Théorème 1.4. *[3](Théorème de Liouville) Si f est une fonction bornée et entière, alors f est une constante.*

P*reuve*.
Comme f est analytique et bornée, alors on applique le Théorème 1.3 pour $n = 1$, on trouve

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}, \qquad \forall z_0 \in \mathbb{C}.$$

Par passage à la limite quand $R \longrightarrow +\infty$, on trouve

$$f'(z_0) = 0, \qquad \forall z_0 \in \mathbb{C}.$$

Alors f est une constante. □

1.1.3 Principe du maximum

Théorème 1.5. *[6] Soit f une fonction analytique dans un domaine D, continue sur ∂D et atteint son maximum en $z_0 \in D$, alors f est une constante sur D.*

P*reuve*.
Soit f une fonction analytique qui atteint son maximum dans D, alors

$$|f(z_0)| = \underset{|z|<r}{Max} |f(z)|, \quad \text{où } z_0 \in \mathring{D},$$

donc

$$|f(z)| < |f(z_0)|, \qquad \forall z \in \mathring{D}.$$

On pose $z = z_0 + re^{i\theta}$, alors

$$|f(z_0 + re^{i\theta})| < |f(z_0)|,$$

Comme f est continue, alors $\exists \varepsilon > 0$, $\theta_1 < \theta < \theta_2$

$$|f(z_0 + re^{i\theta})| < |f(z_0)| - \varepsilon. \tag{1.6}$$

Donc, d'après la formule de la moyenne, on trouve

$$\begin{aligned}
|f(z_0)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{\theta_1} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta + \int_{\theta_2}^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{\theta_1} |f(z_0 + re^{i\theta})|d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} |f(z_0 + re^{i\theta})|d\theta + \int_{\theta_2}^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|d\theta.
\end{aligned}$$

Alors, d'après l'inégalité (1.6), on obtient

$$\begin{aligned}
|f(z_0)| &< \frac{1}{2\pi}[(|f(z_0)| - \varepsilon)\theta_1 + (|f(z_0)| - \varepsilon)(\theta_2 - \theta_1) + (|f(z_0)| - \varepsilon)(2\pi - \theta_2)] \\
&< |f(z_0)| - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Contradiction. D'où $|f(z)| = |f(z_0)|$, $\forall z \in \mathring{D}$.
Donc f est une constante. □

1.2 Fonctions méromorphes

1.2.1 Série de Laurent

Théorème 1.6. *[3] Soit f une fonction analytique sur la couronne $D = \{r < |z - z_0| \leq R,\ 0 < r < R \leq \infty\}$. Pour tout $z \in D$, on peut représenter f par une série entière (c'est la série de Laurent) :*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

où $a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$, $\forall n \in \mathbb{N}$, et $\Gamma : |z| = R_0$ et $r < R_0 < R$.

Example 1.1.

Soit $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z+2)}$ *analytique sur* $\mathbb{C}\backslash\{1,-2\}$, *la série de Laurent sur* $1 < |z| < 2$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z+2} \\ &= \frac{-1}{z(1-\frac{1}{z})} + \frac{1}{2(1+\frac{z}{2})} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

1.2.2 Points singuliers

Définition 1.2. *Si f n'est pas analytique en $z_0 \in \mathbb{C}$ alors z_0 est un point singulier de f.*

On classifie un point singulier d'une fonction f suivant sa série de Laurent. Il existe trois types de singularité : éliminables, essentiels et pôles.
Dans cette section, on va étudier le cas des pôles.

Définition 1.3. *On dit qu'un point singulier isolé z_0 est un pôle si le nombre des coefficients d'indices négatifs de la série de Laurent est fini et différents de zéro.*

Remarque 1.2. *[1]*
Si z_0 est un pôle de f, alors $\lim\limits_{z\longrightarrow z_0} f(z) = \infty$. En effet
comme z_0 est un pôle de f, alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=-n}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \\ &= a_{-n}(z-z_0)^{-n} + a_{-n+1}(z-z_0)^{-n+1} + ... + a_0 + a_1(z-z_0) + ... \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \lim_{z\longrightarrow z_0} f(z) &= \lim_{z\longrightarrow z_0} a_{-n}(z-z_0)^{-n} + a_{-n+1}(z-z_0)^{-n+1} + ... + a_0 + a_1(z-z_0) + ... \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Définition 1.4. *Si $f(z) = \sum\limits_{-n_0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ et $a_{-n_0} \neq 0$, on dit que z_0 est un pôle d'ordre n_0.*

Remarque 1.3. *Si $n_0 = 1$ alors z_0 est un pôle simple.*

Proposition 1.1. *[1] Si z_0 est un pôle de f d'ordre n, alors on a*

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n},$$

où $\varphi(z)$ est analytique en z_0 et $\varphi(z_0) \neq 0$.

P*reuve*.

Si z_0 est un pôle de f d'ordre n, on a

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=-n}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \\ &= a_{-n}(z-z_0)^{-n} + a_{-n+1}(z-z_0)^{-n+1} + ... + a_0 + a_1(z-z_0) + ... \\ &= (z-z_0)^{-n}(a_{-n} + a_{-n+1}(z-z_0) + ... + a_0(z-z_0)^n + a_1(z-z_0)^{n+1} + ...). \end{aligned}$$

On pose

$$\varphi(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-z_0) + ... + a_0(z-z_0)^n + a_1(z-z_0)^{n+1} + ...$$

Alors, $\varphi(z)$ est analytique en z_0 et $\varphi(z_0) = a_{-n} \neq 0$.

Donc

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}.$$

$\square$

Définition 1.5. *Soit f une fonction analytique. On dit que z_0 est un zéro analytique de f si f est analytique en z_0 et $f(z_0) = 0$.*

Remarque 1.4. *Si z_0 est un zéro de f d'ordre n alors $f(z_0) = f'(z_0) = ... = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ et $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.*

Proposition 1.2. *[1] Si f est une fonction analytique en z_0 et z_0 est un zéro de f d'ordre n, alors*

$$f(z) = (z-z_0)^n g(z),$$

où $g(z)$ analytique en z_0 et $g(z_0) \neq 0$.

P*reuve*.

Soit f une fonction analytique, alors on a

$$\begin{aligned} f(z) &= a_n(z-z_0)^n + a_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + a_{n+2}(z-z_0)^{n+2} + ... \\ &= (z-z_0)^n(a_n + a_{n+1}(z-z_0) + a_{n+2}(z-z_0)^2 + ...) \\ &= (z-z_0)^n g(z). \end{aligned}$$

Où $g(z) = a_n + a_{n+1}(z-z_0) + a_{n+2}(z-z_0)^2 + ...$ et $g(z_0) = a_n \neq 0$. $\square$

Théorème 1.7. *[1] On a z_0 est un pôle de f d'ordre n si et seulement si z_0 est un zéro analytique de $\dfrac{1}{f}$ d'ordre n.*

P*reuve*.

On suppose que z_0 est un pôle de f d'ordre n, alors d'après la Proposition 1.1

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n},$$

où $\varphi(z_0) \neq 0$, ce qui implique

$$\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^n \phi(z),$$

alors $\phi(z)$ est analytique en z_0 car $\varphi(z_0) \neq 0$.

D'où z_0 est un zéro de $\frac{1}{f}$ d'ordre n.

Pour la deuxième implication, on suppose que z_0 est un zéro de $\frac{1}{f}$ d'ordre n, alors

$$\frac{1}{f(z)} = g(z)(z-z_0)^n,$$

où $g(z)$ analytique et $g(z_0) \neq 0$.

Donc

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^n},$$

où $h(z) = \dfrac{1}{g(z)}$ est analytique en z_0, car $g(z_0) \neq 0$.

Donc z_0 est un pôle de f d'ordre n. $\square$

Définition 1.6. ***(fonction méromorphe)*** *Si f est une fonction analytique dans un domaine D sauf en un nombre fini de pôles, alors on dit que f est une fonction méromorphe sur D.*

1.3 Résidu des fonctions

Définition 1.7. *Soit $f(z) = \sum\limits_{k=-n}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, le résidu de f en un point $z = a$ est le coefficient a_{-1} de son développement de Laurent i.e. $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\zeta)d\zeta$ où Γ est un contour fermé autour de $z = a$. On le note $\underset{z=a}{Res} f(z)$.*

Autrement dit,

$$\underset{z=a}{Res} f(z) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\zeta)d\zeta.$$

1.3.1 Théorème de Résidu de Cauchy

Théorème 1.8. *[2] Soit C un contour simple fermé et soit f une fonction analytique sur C et à l'intérieur de C sauf aux points $z_1, z_2, ..., z_n$ qui sont des points singuliers, alors* *on a*

$$\int\limits_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{Res} f(z).$$

P*reuve*.

Si C_i sont des cercles dans l'intérieure de C, où z_i est le centre de C_i, alors d'après le théorème de Cauchy dans le cas multi-connexe, on a

$$\int\limits_{C\cup C_1^- \cup C_2^- \dots} f(z)dz = 0,$$

alors

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_{C_1} f(z)dz + \int\limits_{C_2} f(z)dz + \dots + \int\limits_{C_n} f(z)dz,$$

donc

$$\int\limits_C f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{C_i} f(z)dz,$$

d'où

$$\int\limits_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \underset{z=z_k}{Res} f(z).$$

□

1.3.2 Méthodes pour calculer le résidu dans le cas d'un pôle

Théorème 1.9. *[3] Si $z_0$est un pôle d'ordre n de f, alors*

$$\underset{z=z_0}{Res} f(z) = a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}((z-z_0)^n f(z)).$$

Corollaire 1.3. *[3] Si z_0 est un pôle simple de f, alors*

$$\underset{z=z_0}{Res} f(z) = a_{-1} = \lim_{z \longrightarrow z_0} (z-z_0) f(z).$$

Example 1.2.

Soit $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-1)}$, on a

$z=0$ est un pôle double alors $\underset{z=0}{Res}(z) = \lim\limits_{z\longrightarrow 0} \dfrac{-1}{(z-1)^2} = -1.$

$z=1$ est un pôle simple et $\underset{z=1}{Res} f(z) = 1.$

Remarque 1.5. *[3]*
Si $f(z)$ est de la forme $\dfrac{\varphi(z)}{\phi(z)}$ où $\varphi(z)$ et $\phi(z)$ sont analytiques en z_0, $\varphi(z_0) \neq 0$, $\phi(z_0) = 0$ et $\phi'(z_0) \neq 0$, alors

$$\underset{z=z_0}{Res} f(z) = a_{-1} = \lim_{z \longrightarrow z_0} (z - z_0) \frac{\varphi(z)}{\phi(z)} = \frac{\varphi(z)}{\frac{\phi(z)-\phi(z_0)}{(z-z_0)}} = \frac{\varphi(z_0)}{\phi'(z_0)}.$$

Proposition 1.3. *[9] Soit f est une fonction analytique sur le domaine $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r,\ r > 0\}$. On suppose que f n'a pas de zéros dans $\bar{D}$, alors $\forall z \in \bar{D}$, on a*

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \frac{(r^2 - |z|^2) \log f(\zeta)}{(r^2 - \zeta\bar{z})(\zeta - z)} d\zeta. \tag{1.7}$$

P*reuve*.

i) Pour $z = 0$, d'après la formule de Cauchy, on trouve

$$\begin{aligned}\log f(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \frac{\log f(\zeta)}{\zeta} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \frac{(r^2 - |0|) \log f(\zeta)}{(r^2 - \zeta 0)(\zeta - 0)} d\zeta.\end{aligned}$$

ii) Pour $z \neq 0$, on pose

$$F(\zeta) = \frac{(r^2 - |z|^2) \log f(\zeta)}{(r^2 - \zeta\bar{z})(\zeta - z)},$$

le seul point singulier de F est un pôle simple.

En effet

$\zeta - z = 0$ implique $\zeta = z$ est un pôle simple.

$r^2 - \zeta\bar{z} = 0$ implique $\zeta = \dfrac{r^2}{\bar{z}}$ et comme $|\zeta| > r$ alors $\zeta \notin \bar{D}$.

D'après le Théorème 1.8 et Corollaire 1.3, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} F(\zeta) d\zeta &= \lim_{\zeta \longrightarrow z} (\zeta - z) F(\zeta) \\ &= \lim_{\zeta \longrightarrow z} \frac{(r^2 - |z|^2) \log f(z)}{(r^2 - \zeta\bar{z})} \\ &= \log f(z).\end{aligned}$$

D'où

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \frac{(r^2 - |z|^2) \log f(\zeta)}{(r^2 - \zeta\bar{z})(\zeta - z)} d\zeta.$$

$\square$

Remarque 1.6.

Dans les conditions de la Proposition 1.3, pour $z = \delta e^{i\theta}$ *et* $\zeta = re^{i\varphi}$*, tel que* $0 < \delta < r$ *on a*

$$(r^2 - \zeta\bar{z})(\zeta - z) = re^{i\varphi}(r^2 - 2\delta r cos(\theta - \varphi) + \delta^2),$$

En remplaçant dans la formule (1.7), on obtient

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log f(re^{i\varphi})\frac{r^2 - \delta^2}{r^2 - 2\delta r cos(\theta - \varphi) + \delta^2}d\varphi,$$

En séparant la partie réelle, on trouve

$$\log |f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi})|\frac{r^2 - \delta^2}{r^2 - 2\delta r cos(\theta - \varphi) + \delta^2}d\varphi.$$

1.3.3 Le résidu logarithmique

Théorème 1.10. *[2] Soit* f *une fonction méromorphe dans* D *et continue sur* ∂D*.*
Si $\forall z \in \partial D,\ f(z) \neq 0, \infty$*, alors on a*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P,$$

où N *est le nombre des zéros dans* D *de* f *avec leur multiplicité et* P *est le nombre des pôles de* f *avec leur multiplicité dans* D*.*

P*reuve*.

On suppose que z_0 est un zéro de $f(z)$ d'ordre k, alors de la Proposition 1.2

$$f(z) = \varphi(z)(z - z_0)^k,\ et\ \varphi(z_0) \neq 0.$$

Donc

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{(z - z_0)} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)},$$

où $\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ est analytique en z_0.
D'où z_0 est un pôle simple de résidu k.

Supposons maintenant que z_1 est un pôle de $f(z)$ d'ordre n.

D'après la Proposition 1.1, on a

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_1)^k},$$

où $\varphi(z_1) \neq 0$,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-n}{(z-z_1)} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)},$$

où $\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ est analytique en z_1.
D'où z_1 est un pôle simple de résidu $-n$.

D'après le Théorème 1.8, on trouve

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P.$$

□

1.3.4 Principe d'argument

Théorème 1.11. *[2] Dans les mêmes conditions du Théorème 1.10, on a*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma arg(f(z)) = N - P.$$

où Δ_Γ est la variation de l'argument de $f(z)$ quand z parcourt Γ^+.

Remarque 1.7. $(N-P)$ *est le nombre de rotation que fait $f(z)$ autour d'origine.*

1.3.5 Théorème de Rouché

Théorème 1.12. *[2] Soient f et g deux fonctions analytiques sur un domaine borné D et Γ la frontière de D. Si pour tout $z \in \Gamma$ on a $|f(z)| >|g(z)|$, alors $f(z)$ et $F(z) = f(z)+g(z)$ ont le même nombre de zéros dans D.*

P*reuve*.
Si z_0 est un zéro de f sur Γ, alors $f(z_0) = g(z_0)$ contradiction avec l'hypothèse donc $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \Gamma$.
De même on trouve que $F(z) \neq 0, \quad \forall z \in \Gamma$.
Comme les conditions du Théorème 1.11 sont vérifiées, alors

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma arg(F(z)) = N_F,$$

et

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma arg(f(z)) = N_f,$$

on a

$$\begin{aligned} F(z) &= f(z) + g(z) \\ &= f(z)\left[1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right], \end{aligned}$$

donc

$$\Delta_\Gamma arg(F(z)) = \Delta_\Gamma arg(f(z)) + \Delta_\Gamma arg\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right),$$

pour $w(z) = 1 + \dfrac{g(z)}{f(z)}$ alors $|w(z) - 1| < 1$.
Donc $w(z)$ ne fait aucune rotation autour de l'origine. Par conséquence

$$\Delta_\Gamma arg\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right) = 0.$$

Alors

$$\Delta_\Gamma arg(F(z)) = \Delta_\Gamma arg(f(z)).$$

D'où $N_F = N_f$. $\square$

CHAPITRE 2

LES DEUX THÉORÈMES DE NEVANLINNA

Dans ce chapitre, on va énoncer quelques définitions. Au début, on présente la formule de Poisson -Jensen, puis les définitions des fonctions, de comptage (des pôles et des zéros), de compensation $m(r, f)$, et la fonction caractéristique de Nevanlinna $T(r, f)$ et leurs propriétés, puis on prouve le premier théorème de Nevanlinna à partir de la formule de Jensen et on donne la définition de l'ordre d'une fonction méromorphe. Dans la deuxième partie, on énonce et on prouve les deux versions du deuxième théorème de Nevanlinna à l'aide de quelques lemmes et du théorème de la dérivée logarithmique.

2.1 La formule de Poisson- Jensen

Théorème 2.1. *[11](Formule de Poisson- Jensen) Soit $f(z)$ une fonction méromorphe sur $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R \quad et \quad 0 < R < +\infty\}$. On suppose que $\{a_i\}_{i=1}^{m}$ est la suite des zéros de f et $\{b_j\}_{j=1}^{n}$ est la suite des pôles de f à l'intérieur dans $\bar{D}$. Pour $z = re^{i\theta}$ et*

$0 < r < R$, *on a*

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})|\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rrcos(\theta-\varphi)+r^2}d\varphi + \sum_{i=1}^{m}\log\Big|\frac{R(z-a_i)}{R^2-\bar{a}_i z}\Big| - \sum_{j=1}^{n}\log\Big|\frac{R(z-b_j)}{R^2-\bar{b}_j z}\Big|. \tag{2.1}$$

Cette formule s'appelle formule de Poisson - Jensen.

P*reuve*.

On suppose que f ne possède ni zéros ni pôles sur $\bar{D}$.

On pose que

$$\psi(\zeta) = f(\zeta)\prod_{j=1}^{n}\frac{R(\zeta-b_j)}{R^2-\bar{b}_j\zeta}\Big/\prod_{i=1}^{m}\frac{R(\zeta-a_i)}{R^2-\bar{a}_i\zeta}. \tag{2.2}$$

- Si on pose $\zeta = Re^{i\varphi}$ alors

$$\psi(Re^{i\varphi}) = f(Re^{i\varphi}). \tag{2.3}$$

En effet

$$\Big|\frac{R(\zeta-a_i)}{R^2-\bar{a}_i\zeta}\Big| = \frac{|R||Re^{i\varphi}-a_i|}{|R||R-\bar{a}_i e^{i\varphi}|} = \frac{|R-a_i e^{-i\varphi}|}{|R-\bar{a}_i e^{i\varphi}|} = 1,$$

de même, on trouve que

$$\frac{|R(\zeta-b_j)|}{|R^2-\bar{b}_j\zeta|} = 1.$$

D'autre part, on remarque que $\psi(z) \neq 0, \infty$ *sur* $\bar{D}$, alors d'après la Remarque 1.6 on a

$$\log|\psi(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\psi(Re^{i\varphi})|\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rrcos(\theta-\varphi)+r^2}d\varphi, \tag{2.4}$$

de (2.4) et (2.3)

$$\log|\psi(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})|\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rrcos(\theta-\varphi)+r^2}d\varphi. \tag{2.5}$$

D'autre part, par (2,2)

$$\log|\psi(z)| = \log|f(z)| + \sum_{j=1}^{n}\log\Big|\frac{R(z-b_j)}{R^2-\bar{b}_j z}\Big| - \sum_{i=1}^{m}\log\Big|\frac{R(z-a_i)}{R^2-\bar{a}_i z}\Big|.$$

D'où

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})|\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rrcos(\theta-\varphi)+r^2}d\varphi - \sum_{j=1}^{n}\log\Big|\frac{R(z-b_j)}{R^2-\bar{b}_j z}\Big| + \sum_{i=1}^{m}\log\Big|\frac{R(z-a_i)}{R^2-\bar{a}_i z}\Big|.$$

□

Remarque 2.1. *[8] (Formule de Jensen)*

Dans les mêmes conditions du Théorème 2.1, pour $z = 0$ *on trouve, la formule de Jensen*

$$|\log f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})|d\varphi + \sum_{j=1}^{n}\log\Big|\frac{R}{b_j}\Big| - \sum_{i=1}^{m}\log\Big|\frac{R}{a_i}\Big|.$$

2.2 Fonction caractéristique de Nevanlinna

Soit f une fonction méromorphe dans $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} \ |z| \leq r, \ 0 < r < \infty\}$ et non constante. On note par $n(r, \infty)$ le nombre des pôles avec leurs multiplicités de f dans D, et par $n(r, 0)$ le nombre des zéros de f dans D avec leurs multiplicités, de plus $n(0, \infty)$ représente l'ordre de $z = 0$ comme un pôle de f et $n(0, 0)$ représente l'ordre de $z = 0$ comme un zéro de f.

Pour définir la fonction caractéristique de Nevanlinna qu'on note par $T(r, f)$, on a besoin de définir les fonctions suivantes :

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi,$$

où

$$\log^+ a = \max(\log a, 0) = \begin{cases} \log a & si \quad a \geq 1 \\ 0 & si \quad 0 \leq a < 1 \end{cases}$$

Cette fonction est appelée **"la fonction de compensation."**

On a aussi

$$N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty) - n(0, \infty)}{t} dt + n(0, \infty) \log r,$$

qu'on l'appelle **"la fonction de comptage des pôles"** dans $\bar{D}$,

et

$$N(r, \frac{1}{f}) = \int_0^r \frac{n(t, 0) - n(0, 0)}{t} dt + n(0, 0) \log r,$$

appelée **"la fonction de comptage des zéros"** dans $\bar{D}$.

Dans la suite, on va étudier les propriétés de ces fonctions.

Propriétés 2.1. *[5] Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$. On a les relations suivantes*

1) $\log a \leq \log^+ a$.

2) Si $a \leq b$ alors $\log^+ a \leq \log^+ b$.

3) $\log a = \log^+ a - \log^+ (\frac{1}{a})$.

4) $|\log a| = \log^+ a + \log^+ (\frac{1}{a})$.

5) $\log^+ \Big(\prod_{i=1}^{n} a_i \Big) \leq \sum_{i=1}^{n} \log^+ a_i$ *avec* $a_i \in \mathbb{R}^+$.

6) $\log^+ \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i \Big) \leq \log n + \sum_{i=1}^{n} \log^+ a_i$ *avec* $a_i \in \mathbb{R}^+$.

P*reuve*.

1) et 2) sont évidentes

3)

- Si $a < 1$, alors

  $\log^+ a = 0$ et $\log^+(\frac{1}{a}) = -\log a$, donc

$$\log^+ a - \log^+\left(\frac{1}{a}\right) = \log a.$$

- Si $a > 1$, alors

  $\log^+ a = \log a$ et $\log^+(\frac{1}{a}) = 0$, donc

$$\log^+ a - \log^+\left(\frac{1}{a}\right) = \log a.$$

4) On a

$$\begin{aligned}\log^+ a + \log^+\left(\frac{1}{a}\right) &= \max(\log a, 0) + \max(\log\left(\frac{1}{a}\right), 0)\\ &= \max(\log a, 0) + \max(-\log a, 0)\\ &= \max(\log a, 0) - \min(\log a, 0)\\ &= |\log a|.\end{aligned}$$

5)

- Si $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i > 1$, alors

$$\log^+(\prod_{i=1}^{n} a_i) = \log(\prod_{i=1}^{n} a_i) = \sum_{i=1}^{n} \log(a_i),$$

  d'après (1), alors

$$\log^+(\prod_{i=1}^{n} a_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \log^+ a_i.$$

- Si $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i < 1$, alors

  $\log^+(\prod\limits_{i=1}^{n} a_i) = 0$, donc

$$\log^+(\prod_{i=1}^{n} a_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \log^+ a_i.$$

6) On a $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \leq n \max\limits_{1\leq i\leq n}|a_i|$. D'après (2) et (5), on trouve

$$\begin{aligned}\log^+ \sum_{i=1}^{n} a_i &\leq \log^+(n \max_{1\leq i\leq n} a_i)\\ &\leq \log^+(n) + \log^+(\max_{1\leq i\leq n}|a_i|)\\ &\leq \log n + \sum_{i=1}^{n} \log^+ a_i.\end{aligned}$$

$\square$

Propriétés 2.2. *[11] Soient $f_1, f_2, ..., f_n$ des fonctions méromorphes. On a*

a) $m(r, \prod\limits_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} m(r, f_i),\ \forall n \geq 1.$

b) $m(r, \sum\limits_{i=1}^{n} f_i) \leq \log n + \sum\limits_{i=1}^{n} m(r, f_i),\ \forall n \geq 1.$

c) $N(r, \prod\limits_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} N(r, f_i),\ \forall n \geq 1.$

d) $N(r, \sum\limits_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} N(r, f_i),\ \forall n \geq 1.$

P*reuve*.

a) On a

$$\begin{aligned} m(r, \prod_{i=1}^{n} f_i) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |\prod_{i=1}^{n} f_i(re^{i\varphi})| d\varphi \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{n} \log^+ |f_i(re^{i\varphi})| d\varphi \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f_i(re^{i\varphi})| d\varphi. \end{aligned}$$

D'où

$$m(r, \prod_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i).$$

b) On a

$$\begin{aligned} m(r, \sum_{i=1}^{n} f_i) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |\sum_{i=1}^{n} f_i(re^{i\varphi})| d\varphi \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log n + \sum_{i=1}^{n} \log^+ |f_i(re^{i\varphi})| d\varphi \\ &\leq \log n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f_i(re^{i\varphi})| d\varphi. \end{aligned}$$

D'où

$$m(r, \sum_{i=1}^{n} f_i) \leq \log n + \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i).$$

c) z_0 est un pôle de f_i d'ordre λ_i, alors z_0 est un pôle de $\prod\limits_{i=1}^{n} f_i$ d'ordre égale au plus $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$, donc

$$N(r, \prod_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i).$$

d) z_0 est un pôle de f_i d'ordre λ_i, alors z_0 est un pôle de $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i$ d'ordre égale au plus $\max\limits_{1\leq i\leq n} \lambda_i \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$. D'où

$$N(r, \sum_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i).$$

$\square$

Définition 2.1. *Soit f une fonction méromorphe et $r > 0$. On définit* ***"la fonction caractéristique de Nevanlinna"*** *par*

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f).$$

Remarque 2.2. *Si f est une fonction analytique alors $N(r, f) = 0$.*

Example 2.1.

Soit $f(z) = e^z$. Comme f est analytique, alors

$$N(r, f) = 0.$$

Pour $z = re^{i\varphi}$, alors

$$\begin{aligned} m(r, f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |e^{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}| d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ e^{r\cos\varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log e^{r\cos\varphi} d\varphi \\ &= \frac{r}{\pi}. \end{aligned}$$

Alors

$$T(r, f) = \frac{r}{\pi}.$$

Lemme 2.1. *[5] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe sur $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r,\ 0 < r < +\infty\}$. On suppose que $\{a_i\}_{i=1}^{m}$ est la suite des zéros et $\{b_j\}_{j=1}^{n}$ la suite des des pôles dans intérieur de $\bar{D}$ tel que $0 < |a_i| < |a_{i+1}| \leq r$ et $0 < |b_j| < |b_{j+1}| \leq r$ alors, on a*

$$\sum_{j=1}^{n} \log\left|\frac{r}{b_j}\right| = \int_0^r \frac{n(t, \infty) - n(0, \infty)}{t} dt,$$

et

$$\sum_{i=1}^{m} \log\left|\frac{r}{a_i}\right| = \int_0^r \frac{n(t, 0) - n(0, 0)}{t} dt.$$

P*reuve*.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\log\left|\frac{r}{a_i}\right| &= \sum_{i=1}^{m}(\log|r|-\log|a_i|)\\
&= m\log r-\sum_{i=1}^{m}\log|a_i|\\
&= m\log r+\sum_{i=1}^{m-1} i(\log|a_{i+1}|-\log|a_i|)-m\log|a_m|\\
&= \sum_{i=1}^{m-1} i(\log|a_{i+1}|-\log|a_i|)+m(\log r-\log|a_m|)\\
&= \sum_{i=1}^{m-1}\int_{|a_i|}^{|a_{i+1}|}\frac{i}{t}dt+\int_{|a_m|}^{r}\frac{m}{t}dt.
\end{aligned}$$

Si $|a_i|<t<|a_{i+1}|$, alors $n(t,0)=i+n(0,0)$, donc

$$\int_{|a_i|}^{|a_{i+1}|}\frac{i}{t}dt=\int_{|a_i|}^{|a_{i+1}|}\frac{n(t,0)-n(0,0)}{t}dt.$$

Si $|a_m|<t<r$, alors $n(t,0)=m+n(0,0)$, donc

$$\int_{|a_m|}^{r}\frac{i}{t}dt=\int_{|a_m|}^{r}\frac{n(t,0)-n(0,0)}{t}dt.$$

Si $|a_i|=|a_{i+1}|$, alors

$$\int_{|a_i|}^{|a_{i+1}|}\frac{i}{t}dt=\int_{|a_i|}^{|a_{i+1}|}\frac{n(t,0)-n(0,0)}{t}dt=0.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\log\left|\frac{r}{a_i}\right| &= \sum_{i=1}^{m-1}\int_{|a_i|}^{|a_{i+1}|}\frac{n(t,0)-n(0,0)}{t}dt+\int_{|a_m|}^{r}\frac{n(t,0)-n(0,0)}{t}dt\\
&= \int_{0}^{|a_1|}\frac{n(t,0)-n(0,0)}{t}dt+\int_{|a_1|}^{r}\frac{n(t,0)-n(0,0)}{t}dt\\
&= \int_{0}^{r}\frac{n(t,0)-n(0,0)}{t}dt.
\end{aligned}$$

De même, on trouve

$$\sum_{j=1}^{n}\log\left|\frac{r}{b_j}\right|=\int_{0}^{r}\frac{n(t,\infty)-n(0,\infty)}{t}dt.$$

□

2.3 Premier Théorème de Nevanlinna

Pour énoncer le Premier Théorème de Nevanlinna, on a besoin d'une autre forme de Jensen.

Remarque 2.3. *[8]*
Dans les mêmes conditions du Théorème 2.1 et pour $f(0) \neq 0, \infty$, on peut écrire la formule de Jensen sous une autre forme

$$T(r, \frac{1}{f}) = T(r, f) - \log|f(0)|.$$

En effet
D'après les Propriétés 2.1, 4), on trouve

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})|d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{i\varphi})|d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi})|}d\varphi = m(r, f) - m(r, \frac{1}{f}),$$

et comme $f(0) \neq 0, \infty$, alors par la relation (2,1)

$$\begin{aligned}
|\log f(0)| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})|d\varphi + \sum_{j=1}^{n} \log\left|\frac{r}{b_j}\right| - \sum_{i=1}^{m} \log\left|\frac{r}{a_i}\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})|d\varphi + \int_0^r \frac{n(t,\infty) - n(0,\infty)}{t}dt + n(0,\infty)\log r - \int_0^r \frac{n(t,0) - n(0,0)}{t}dt \\
&- n(0,0)\log r \\
&= m(r, f) - m(r, \frac{1}{f}) + N(r, f) - N(r, \frac{1}{f}) \\
&= T(r, f) - T(r, \frac{1}{f}).
\end{aligned}$$

D'où

$$T(r, \frac{1}{f}) = T(r, f) - \log|f(0)|.$$

Théorème 2.2 ([5],[11])**.** ***(Premier théorème de Nevanlinna)*** *Soit f une fonction méromorphe dans $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r,\ 0 < r < \infty\}$, $a \in \mathbb{C}$ et*

$$f(z) - a = \sum_{i=m}^{\infty} c_i z^i, \quad c_m \neq 0.$$

On a

$$m(r, a) + N(r, a) = T(r, f) + \varphi(r, a) - \log|f(0) - a|,$$

où

$$|\varphi(r, a)| \leq \log^+|a| + \log 2.$$

P*reuve*.

On a d'après les Propriétés 2.2, b), on trouve

$$m(r, f - a) \leq \log 2 + m(r, f) + m(r, a),$$

et

$$m(r, f) \leq m(r, f - a) + \log 2 + m(r, a).$$

On pose

$$|\varphi(r, a)| = |m(r, f - a) - m(r, f)|.$$

D'autre part, d'après la Remarque 2.3, on obtient

$$m(r, a) + N(r, a) = T(r, f - a) - \log |f(0) - a|.$$

Alors

$$\begin{aligned} m(r, a) + N(r, a) &= m(r, f - a) + N(r, f - a) - \log |f(0) - a| \\ &= m(r, f) + \varphi(r, a) + N(r, f - a) - \log |f(0) - a|. \end{aligned}$$

D'où

$$m(r, a) + N(r, a) = T(r, f) + \varphi(r, a) - \log |f(0) - a|,$$

où

$$|\varphi(r, a)| \leq \log^+ |a| + \log 2.$$

□

Remarque 2.4.

On peut écrire le premier théorème de Nevanlinna par la forme suivante

$$m(r, a) + N(r, a) = T(r, f) + O(1),$$

Example 2.2. $f(z) = e^z$ *est une fonction analytique et on a*

$$T(r, f) = \frac{r}{\pi} + O(1).$$

On pose $a = 0$*, alors*

$$T(r, \frac{1}{f}) = N(r, \frac{1}{f}) + m(r, \frac{1}{f}),$$

on a

$$N(r, \frac{1}{f}) = 0,$$

et

$$\begin{aligned} m(r, \frac{1}{f}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi})|} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{e^{rcos(\varphi)}} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ e^{-rcos(\varphi)} d\varphi \\ &= \frac{-r}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} cos(\varphi) d\varphi \\ &= \frac{r}{\pi}, \end{aligned}$$

alors

$$T(r, \frac{1}{f}) = T(r, f).$$

Propriétés 2.3. *[5] Soient $f_1, f_2, ..., f_n$ des fonctions méromorphes, et soient a, b, c, d des constantes complexes. On a*

A) $T(r, \prod_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i), \ \forall n \geq 1.$

B) $T(r, \sum_{i=1}^{n} f_i) \leq \log n + \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i), \ \forall n \geq 1.$

C) $|T(r, f) - T(r, f - a)| \leq \log^+ |a| + \log 2.$

D) $T(r, \frac{af+b}{cf+d}) = T(r, f) + O(1),$ *tel que* $f \neq \frac{-d}{c}.$

P*reuve*.

A) et B) sont évidentes.

C) On a d'après (B), pour $n = 2$, on pose $f_1 = f$ et $f_2 = -a$, on obtient

$$T(r, f - a) \leq T(r, f) + \log^+ |a| + \log 2.$$

De même si on pose $f_1 = f - a$ et pour $f_2 = a$, on obtient

$$T(r, f) \leq T(r, f - a) + \log^+ |a| + \log 2.$$

Alors

$$|T(r, f) - T(r, f - a)| \leq \log^+ |a| + \log 2.$$

D) Si $c \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}\frac{af+b}{cf+d} &= \frac{a(f+\frac{b}{a})}{c(f+\frac{d}{c})} \\ &= \frac{a}{c}\frac{f+\frac{d}{c}+\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{f+\frac{d}{c}} \\ &= \frac{a}{c}\left[1+\frac{bc-ad}{ac}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right] \\ &= \frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}.\end{aligned}$$

Alors

$$T\left(r, \frac{af+b}{cf+d}\right) = T\left(r, \frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right),$$

de C), on a

$$T\left(r, \frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) = T\left(r, \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) + O(1),$$

et

$$\begin{aligned}T\left(r, \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) &= T\left(r, \frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) + O(1) \\ &= T(r,f) + O(1).\end{aligned}$$

□

Proposition 2.1. *[8] Soit f une fonction entière. Supposons $r < R < \infty$ et le module maximum $M(r,f) = \max\limits_{|z|=r}|f(z)|$ vérifie $M(r,f) \geq 1$, alors*

$$T(r,f) \leq \log M(r,f) \leq \frac{R+r}{R-r}T(r,f).$$

Preuve.

Pour la première inégalité, comme f est une fonction entière, alors

$$T(r,f) = m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log^+ f(re^{i\theta})d\theta \leq \log^+ M(r,f) = \log M(r,f).$$

Pour la deuxième inégalité, on pose $z_0 = re^{i\theta}$ et $M(r,f) = \max\limits_{|z|=r}|f(z_0)|$.

Comme

$$\frac{|R(z_0-a_j)|}{|R^2-\bar{a}_j z_0|} < 1, \quad |z_0| < R.$$

Alors, d'après la formule (2.1), on trouve

$$\begin{aligned}
\log|f(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})|\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rrcos(\theta-\varphi)+r^2}d\varphi \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f(Re^{i\varphi})|\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rrcos(\theta-\varphi)+r^2+2Rr-2Rr}d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f(Re^{i\varphi})|\frac{(R+r)}{(R-r)+2Rr(1-cos(\theta-\varphi))}d\varphi \\
&\leq \frac{(R+r)}{(R-r)}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f(Re^{i\varphi})|d\varphi \\
&= \frac{(R+r)}{(R-r)}T(r,f).
\end{aligned}$$

□

2.3.1 Ordre de croissance d'une fonction méromorphe

Définition 2.2. *Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$. On définit l'ordre de croissance de f par*

$$\sigma(f) = \limsup_{r\longrightarrow\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r}.$$

Remarque 2.5. *[5]*

Si f une fonction entière. On définit l'ordre par

$$\sigma(f) = \limsup_{r\longrightarrow\infty}\frac{\log\log M(r,f)}{\log r}.$$

Où $M(r,f) = \max_{|z|=r}|f(z)|$.

Example 2.3.

1) $f(z) = \frac{e^z}{z}$ est d'ordre $\sigma(f) = 1$.

En effet

$T(r,f) = \frac{r}{\pi} + O(\log r)$, *alors*

$$\begin{aligned}
\sigma(f) &= \limsup_{r\longrightarrow\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r} \\
&= \limsup_{r\longrightarrow\infty}\frac{\log(\frac{r}{\pi}+O(\log r))}{\log r} \\
&= \limsup_{r\longrightarrow\infty}\frac{\log r+\log(1+O(\frac{\log r}{r})-\log\pi)}{\log r} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

2) $f(z) = e^z$ est d'ordre 1.
En effet
comme f est analytique, alors

$$\begin{aligned}\sigma(f) &= \limsup_{r\longrightarrow\infty} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r}\\ &= \limsup_{r\longrightarrow\infty} \frac{\log\log e^r}{\log r}\\ &= 1.\end{aligned}$$

2.3.2 L'ordre inférieur d'une fonction méromorphe

Définition 2.3. *Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$. On définit l'ordre inférieur de f par*

$$\mu(f) = \liminf_{r\longrightarrow\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r}.$$

Remarque 2.6. *[5]*
Si f une fonction entière. On définit l'ordre inférieur par

$$\mu(f) = \liminf_{r\longrightarrow\infty} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r}.$$

2.4 Deuxième Théorème de Nevanlinna

Dans cette section, on va énoncer le deuxième théorème de Nevanlinna et à travers ce théorème, on note que la fonction $N(r,a)$ est le dominant dans la somme $N(r,a)+m(r,a)$.

Lemme 2.2. *[10] Soit f une fonction méromorphe non constante sur $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r,\ r > 0\}$ et $a_i \in \mathbb{C}$ $(0 < i < q)$. Pour $0 < r < R$ on a l'inégalité suivante*

$$m\Big(r, \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{f(z)-a_i}\Big) \geq \sum_{i=1}^{q} m\Big(r, \frac{1}{f(z)-a_i}\Big) + O(1). \tag{2.6}$$

P*reuve*.
On pose

$$F(z) = \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{f(z)-a_j},$$

on suppose que

$$|a_i - a_j| \geq \delta, \qquad \forall 1 \leq i \leq q \quad et \quad 1 \leq j \leq q\ (i \neq j)$$

donc $\delta > 0$, on suppose E_j l'ensemble de φ avec $0 \leq \varphi \leq 2\pi$,
où

$$|f(z) - a_j| \leq \frac{\delta}{2q}. \tag{2.7}$$

Alors
Si $z = re^{i\varphi}$, $\varphi \in E_j$ et $i \neq j$, on trouve

$$|f(z) - a_i| \geq |a_j - a_i| - |f(z) - a_j| \geq \delta - \frac{\delta}{2q} = \frac{(2q-1)\delta}{2q} \geq \frac{3\delta}{4}, \tag{2.8}$$

et on a

$$F(z) = \frac{1}{f(z) - a_j}\Big[1 + \sum_{\substack{i \neq j \\ i=1}}^{q} \frac{f(z) - a_j}{f(z) - a_i}\Big],$$

alors, on a

$$|F(z)| > \frac{1}{3}\frac{1}{|f(z) - a_j|},$$

car,par (2.7) et (2.8) on a

$$\sum_{\substack{i \neq j \\ i=1}}^{q} \frac{|f(z) - a_j|}{|f(z) - a_i|} < q\frac{2}{3q} = \frac{2}{3},$$

d'où

$$\log^+ |F(z)| \geq \log^+ \frac{1}{|f(z) - a_j|} - \log 3. \tag{2.9}$$

D'autre part, on a

$$m(r, F) \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{q} \int_{E_j} \log^+ |F(re^{i\varphi})| d\varphi.$$

Alors par l'inégalité (2,9)

$$m(r, F) \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{q} \int_{E_j} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi}) - a_j|} d\varphi - \log 3.$$

Soit H_j le complémentaire de E_j alors, on a

$$|f(z) - a_j| > \frac{\delta}{2q}, \qquad \forall 1 < j < q$$

on trouve

$$\sum_{j=1}^{q} \log^+ \frac{1}{|f(z) - a_j|} \leq q \log^+ \frac{2q}{\delta}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{E_j} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi}) - a_j|} d\varphi &= m\Big(r, \frac{1}{f(z) - a_j}\Big) - \frac{1}{2\pi} \int_{H_j} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi}) - a_j|} d\varphi \\ &\geq m\Big(r, \frac{1}{f(z) - a_j}\Big) - \log^+ \frac{2q}{\delta}. \end{aligned}$$

Alors
$$m(r,F) \geq \sum_{j=1}^{q} m\Big(r, \frac{1}{f(z)-a_j}\Big) + O(1).$$

□

Théorème 2.3. *[11] (**Deuxième théorème de Nevanlinna**) Soit f une fonction méromorphe non constante sur $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq R,\ 0 < R \leq \infty\}$ et $a_i \in \mathbb{C}$ $(0 \leq i \leq q)$. Pour $0 < r < R$, on a l'inégalité suivante*
$$m(r,f) + \sum_{i=1}^{n} m\Big(r, \frac{1}{f(z)-a_i}\Big) \leq 2T(r,f) - N_1(r,f) + S(r,f). \tag{2.10}$$
Où
$$N_1(r,f) = 2N(r,f) - N(r,f') + N\Big(r, \frac{1}{f'}\Big),$$
$$S(r,f) = m\Big(r, \frac{f'}{f}\Big) + m\Big(r, \sum_{i=1}^{n} \frac{f'}{f(z)-a_i}\Big) + O(1).$$

P*reuve*.
On pose
$$m(r,F) = m\Big(r, \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f(z)-a_i}\Big).$$
Alors
$$m(r,F) \leq m(r,Ff') + m\Big(r, \frac{f}{f'}\Big) + m\Big(r, \frac{1}{f}\Big). \tag{2.11}$$
D'autre part, on a
$$\begin{aligned} m(r, \frac{f}{f'}) &= T\Big(r, \frac{f}{f'}\Big) - N\Big(r, \frac{f}{f'}\Big) \\ &= T\Big(r, \frac{f'}{f}\Big) + O(1) - N\Big(r, \frac{f}{f'}\Big) \\ &= m\Big(r, \frac{f'}{f}\Big) + N\Big(r, \frac{f'}{f}\Big) + O(1) - N\Big(r, \frac{f}{f'}\Big). \end{aligned}$$

On a d'après la formule de Jensen
$$\begin{aligned} N\Big(r, \frac{f'}{f}\Big) - N\Big(r, \frac{f}{f'}\Big) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\Big(\frac{f(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})}\Big) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log f(re^{i\varphi}) d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log f'(re^{i\varphi}) d\varphi \\ &= N\Big(r, \frac{1}{f}\Big) - N(r,f) - N\Big(r, \frac{1}{f'}\Big) + N(r,f') \end{aligned}$$

Alors l'inégalité (2.11) devient

$$m(r,F)\leq m(r,Ff')+m\Big(r,\frac{f'}{f}\Big)+T\Big(r,\frac{1}{f}\Big)+N(r,f')-N(r,f)-N\Big(r,\frac{1}{f'}\Big)+O(1). \quad (2.12)$$

Comme

$$T\Big(r,\frac{1}{f}\Big)=T(r,f)+O(1).$$

Alors

$$m(r,F)\leq m(r,Ff')+m\Big(r,\frac{f'}{f}\Big)+2T(r,f)+O(1)-[2N(r,f)+N\Big(r,\frac{1}{f'}\Big)-N(r,f')]-m(r,f). \quad (2.13)$$

Donc, d'après le Lemme 2.2, on trouve

$$m(r,f)+\sum_{i=1}^{n}m\Big(r,\frac{1}{f(z)-a_i}\Big)\leq 2T(r,f)+N_1(r,f)+S(r,f).$$

□

2.4.1 Estimation de S(r,f)

On a besoin de l'estimation de $m\Big(r,\frac{f'}{f}\Big)$ et pour cela on va énoncer le lemme suivant.

Lemme 2.3. *[11] Soit f une fonction méromorphe sur $\bar{D}=\{z\in\mathbb{C}\ |z|\leq R,\ 0<R<\infty\}$ et $f(0)\neq 0,\infty$. Pour $0<r<R$, on a*

$$m\Big(r,\frac{f'}{f}\Big)\leq 4\log^+T(R,f)+4\log^+\log^+\Big(\frac{1}{f(0)}\Big)+5\log^+R+6\log^+\Big(\frac{1}{R-r}\Big)+\log^+\Big(\frac{1}{r}\Big)+14.$$

Remarque 2.7.
On note par $mes(E)$ la mesure linéaire de l'ensemble E définie par

$$mes(E)=\int_0^\infty \mathcal{X}_E(t)dt,$$

où $\mathcal{X}_E$ est la fonction caractéristique de E.

Lemme 2.4. *[5](Lemme de Borel) Soit T une fonction croissante, continue et $T(r)\geq 1$ pour $[r_0,\infty[$. On a*

$$T\Big(r+\frac{1}{T(r)}\Big)<2T(r),$$

en dehors d'un ensemble E_0 de $mes(E_0)\leq 2$.

P*reuve*.

Soit $r \in E_0$ tel que r vérifie l'inégalité suivante

$$T\left(r + \frac{1}{T(r)}\right) \geq 2T(r), \tag{2.14}$$

on définit r_1 par

$$r_1 = \min\{r, r \in E_0 \cap \ [r_0, \infty[\ \},$$

et r_{n+1} par

$$r_{n+1} = \min\{r, r \in E_0 \cap \ [r'_n, \infty[\ \},$$

où

$$r'_n = r_n + \frac{1}{T(r_n)}, \tag{2.15}$$

alors, on obtient la suite $\{r_n\}$. Comme T est continue alors, l'inégalité (2.14) est vraie pour $r = r_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Donc $r_n \in E_0$.

On va montrer que $mes(E_0) \leq 2$.

On suppose que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} r_n = r$, comme $r_n < r'_n \leq r_{n+1}$ alors, $\lim r'_n = r$, mais on a

$$r'_n - r_n = \frac{1}{T(r_n)} \geq \frac{1}{T(r)} > 0,$$

par passage de la limite, on trouve une contradiction. Donc

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} r_n = \infty.$$

Comme $E_0 \subset \bigcup\limits_{n \geq 1} [r_n, r'_n]$, on a

$$mes(E_0) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (r'_n - r_n).$$

D'autre part, d'après (2.15) et comme $r'_n < r_{n+1}$ et T continue, on obtient

$$T(r_{n+1}) \geq T(r'_n) \geq 2T(r_n) \geq 2^2 T(r_{n-1}) \geq ... \geq 2^n T(r_1) \geq 2^n.$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} (r'_n - r_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2,$$

où bien

$$mes(E_0) \leq 2.$$

$\square$

Définition 2.4.

Soit f une fonction méromorphe. On dit que f est une fonction transcendante si f n'est pas rationnelle.

Soit f une fonction analytique. On dit que f est une fonction transcendante si f n'est pas polynomiale.

Théorème 2.4. *[8] Soit f une fonction méromorphe transcendante. On suppose que*

$$S(r,f) = m\Big(r, \frac{f'}{f}\Big) + m\Big(r, \sum_{i=1}^{n} \frac{f'}{f-a_i}\Big) + O(1),$$

on a

1) Si f est d'ordre fini, alors

$$S(r,f) = O(\log r).$$

2) Si f est d'ordre infini, alors

$$S(r,f) = O(\log T(r,f) + \log r).$$

P*reuve*.

1) Comme f est d'ordre finie k, alors

$$T(R,f) = O(R^k), \quad (R \longrightarrow \infty).$$

En appliquant le Lemme 2.3, pour $R = 2r$, on trouve

$$\begin{aligned} m\Big(r, \frac{f'}{f}\Big) &\leq 4\log^+ T(2r,f) + 5\log^+(2r) + 6\log^+\Big(\frac{1}{r}\Big) + O(1) \\ &\leq 4k' \log^+(2r)^k + 5\log^+(2r) + 6\log^+\Big(\frac{1}{r}\Big) + O(1) \\ &\leq 4k'' \log r + 5\log r + O(1). \end{aligned}$$

D'où

$$m\Big(r, \frac{f'}{f}\Big) = O(\log r),$$

où bien

$$S(r,f) = O(\log r).$$

2) Comme f est d'ordre infini, alors $T(r,f) \geq 1$. D'après le Lemme 2.4, pour $r \notin E_0$ tel que E_0 l'ensemble associe à $T(r,f)$ avec $mes(E_0) \leq 2$.

On pose $R - r = \dfrac{1}{T(r,f)}$ on obtient

$$\begin{aligned} m\Big(r, \frac{f'}{f}\Big) &\leq 4\log^+ 2T(r,f) + 5\log^+ r + 6\log^+ T(r,f) + O(1) \\ &\leq k\log(rT(r,f)). \end{aligned}$$

D'où

$$m\Big(r,\frac{f'}{f}\Big)=O(\log T(r,f)+\log r),$$

où bien

$$S(r,f)=O(\log T(r,f)+\log r).$$

□

2.5 Deuxième version de deuxième théorème de Nevanlinna

Théorème 2.5. *[5] Soit f une fonction méromorphe non constante. On suppose que*

$$S(r,f)=m\Big(r,\frac{f'}{f}\Big)+m\Big(r,\sum_{i=1}^{n}\frac{f'}{f-a_i}\Big)+O(1),$$

On a

1) Si f est d'ordre fini, alors

$$S(r,f)=o(T(r,f)),\quad (r\longrightarrow\infty).$$

2) Si f est d'ordre infini, alors

$$S(r,f)=o(T(r,f)),\quad (r\longrightarrow\infty)(r\notin E).$$

Où la mesure linéaire de E est de dimension finie.

P*reuve*.
On distingue deux cas

1) Si f est rationnelle, alors $\dfrac{f'}{f}$ aussi rationnelle et le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur, comme on a

$$S(r,f)=m\Big(r,\frac{f'}{f}\Big)+m\Big(r,\sum_{i=1}^{n}\frac{f'}{f-a_i}\Big)+O(1).$$

Alors

$$S(r,f)\longrightarrow 0,\qquad si\quad r\longrightarrow\infty.$$

D'où

$$S(r,f)=o(T(r,f)).$$

2) Si f est transcendante, on a

$$\frac{T(r,f)}{\log r} \longrightarrow \infty, \qquad si \quad r \longrightarrow \infty.$$

Alors

$$\log r = o(T(r,f)).$$

D'où

$$S(r,f) = o(T(r,f)).$$

□

Corollaire 2.1. *[8] Soit f une fonction méromorphe non-constante, $a_1, a_2, ..., a_q \in \mathbb{C}$. Pour $q \geq 2$. On a*

$$(q-1)T(r,f) \leq \sum_{i=0}^{q} N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + N(r,f) + S(r,f) - N_1(r,f).$$

P*reuve*.

On remarque que

$$\sum_{i=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) = qT(r,f) - \sum_{i=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + O(1),$$

on a

$$m(r,f) = T(r,f) - N(r,f),$$

en remplaçant dans (2.10), on trouve

$$(q-1)T(r,f) \leq N(r,f) + \sum_{i=0}^{q} N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + S(r,f) - N_1(r,f).$$

□

Théorème 2.6. *[8](Deuxième version du deuxième théorème de Nevanlinna) Soit f une fonction méromorphe non constante et $a_i \in \mathbb{C}$ $(1 \leq i \leq q)$ pour $q \geq 2$, alors*

$$(q-1)T(r,f) \leq \sum_{i=0}^{q} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + \overline{N}(r,f) + S(r,f),$$

où

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \int_0^r \frac{\bar{n}\left(t, \frac{1}{f-a}\right) - \bar{n}\left(0, \frac{1}{f-a}\right)}{t} dt + \bar{n}\left(0, \frac{1}{f-a}\right) \log r,$$

où $\bar{n}\left(t, \frac{1}{f-a}\right)$ est le nombre des solutions de $f(z) = a$ sans compter la multiplicité dans $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq t\}$.

P*reuve*.

On a d'après le Corollaire 2.1, l'inégalité suivante

$$(q-1)T(r,f) \leq \sum_{i=0}^{q} N\Big(r, \frac{1}{f-a_i}\Big) + N(r,f) + S(r,f) - N_1(r,f).$$

D'où

$$(q-1)T(r,f) \leq \sum_{i=0}^{q} N\Big(r, \frac{1}{f-a_i}\Big) - N\Big(r, \frac{1}{f'}\Big) + [N(r,f') - N(r,f)] + S(r,f). \quad (2.16)$$

D'autre part, on a

- Si z_0 est une solution de $f(z) = a$ d'ordre p, alors z_0 est un zéro de f' d'ordre $(p-1)$. On obtient

$$N\Big(r, \frac{1}{f-a}\Big) - N\Big(r, \frac{1}{f'}\Big) = \overline{N}\Big(r, \frac{1}{f(z)-a}\Big) - N_0\Big(r, \frac{1}{f'}\Big), \quad (2.17)$$

  où $N_0(r, \frac{1}{f'})$ est l'ordre des zéros de $f'(z)$ sauf les solutions de l'équation $f(z) = a$.

- Si z_0 est un pôle de $f(z)$ d'ordre p, alors z_0 est un pôle de f' d'ordre $(p+1)$. On obtient

$$N(r,f') - N(r,f) = \overline{N}(r,f). \quad (2.18)$$

  En remplaçant (2.17) et (2.18) dans (2.16), on obtient

$$(q-1)T(r,f) \leq \sum_{i=0}^{q} \overline{N}\Big(r, \frac{1}{f(z)-a_i}\Big) + \overline{N}(r,f) + S(r,f).$$

□

CHAPITRE 3

APPLICATION DU PREMIER ET DU DEUXIÈME THÉORÈME DE NEVANLINNA

Dans ce chapitre on présente quelques applications de la théorie de Nevanlinna. On applique le premier théorème pour donner une borne inférieur de l'ordre inférieure des solutions méromorphes des équations aux q-différences. Pour Le deuxième théorème, on l'applique pour prouver que f est une fonction périodique de période c si $f(z)$ et $f(z+c)$ partagent une valeur IM.

3.1 Propriétés d'ordre inférieur d'une fonction méromorphe

Pour l'application du premier théorème on va donner une borne de l'ordre inférieur de certaines fonctions.

Théorème 3.1. *[4] Soit f une solution méromorphe transcendante, de l'équation*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(z)f(q^j z) = \sum_{i=0}^{d} b_i(z)f(z)^i,$$

où

$q \in \mathbb{C}$, $|q| > 1$, $d \geq 2$. Les coefficients a_j, b_i sont des fonctions rationnelles. On a

1) *Si f est entière ou possède un nombre fini de pôles, alors il existe $k > 0$, $r_0 > 0$ tel que $\log M(r, f) \geq kd^{\frac{\log r}{n \log |q|}}$ pour $r \geq r_0$.*
2) *Si f est une fonction entière et possède un nombre infini de pôles, alors il existe $k > 0$ et $r_0 > 0$ tel que $n(r, f) \geq kd^{\frac{\log r}{n \log |q|}}$, pour $r \geq r_0$.*
3) *L'ordre inférieur de f vérifie*

$$\mu(f) \geq \frac{\log r}{n \log |q|}.$$

Remarque 3.1. *Si f est une fonction méromorphe, on a*

$$M(r, f(cz)) = M(|c|r, f),$$

en effet

$$M(r, f(cz)) = \max_{|z|=r} f(cz) = \max_{|z|=|c|r} f(z) = M(|c|r, f).$$

Lemme 3.1. *[4] Si f est une fonction entière qui possède un nombre fini de pôles, alors on a*

$$\log M(r, f) = \log M(r, g) + O(1),$$

où g est une fonction entière.

P*reuve du Théorème 3.1*.

On a

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(z)f(q^j z) = \sum_{i=0}^{d} b_i(z)f(z)^i.$$

Comme a_j, b_i sont des fonctions rationnelles, en multipliant par les dénominateurs on trouve

$$\sum_{j=1}^{n} A_j(z)f(q^j z) = \sum_{i=0}^{d} B_i(z)f(z)^i,$$

où A_j, B_i sont des polynômes.

1) • On suppose que f est une fonction entière transcendante et on pose $p_j = \deg A_j$, $q_i = \deg B_i$ et $m = \max\{p_1, , ...p_n\} + 1$, et $|q| > 1$.

   On a d'après la Remarque 3.1

$$M(r, f(q^j z)) = M(|q|^j r, f),$$

donc

$$M(r,\sum_{j=1}^{n}A_j(z)f(q^jz)) \leq \sum_{j=1}^{n}M(r,A_j(z)f(q^jz))$$
$$\leq n\max_{1\leq j\leq n}|M(r,A_j(z))M(|q^j|r,f(z))|.$$

Comme

$$M(r,A_j(z)) \leq |a_0|+|a_1|r+...+|a_n|r^{p_j} \leq c\, r^{p_j},$$

et

$$r|q| \leq r|q|^2 \leq r|q|^3 \leq ... \leq r|q|^n,$$

alors

$$M(r,\sum_{j=1}^{n}A_j(z)f(q^jz)) \leq nM(|q|^n r,f(z))\max_{1\leq j\leq n}c|r^{p_j}|$$
$$\leq n\, r^m M(|q|^n r,f(z)),$$

où r est suffisamment grand. D'où

$$M(r,\sum_{i=0}^{d}B_i(z)f(z)^i) \leq nr^m M(|q|^n r,f(z)). \tag{3.1}$$

D'autre part, on a

Si f est une fonction entière transcendante, alors

$$M(r,\sum_{i=0}^{d-1}B_i(z)f(z)^i) = o(M(r,f(z)^d)),$$

en effet, on a

$$M(r,\sum_{i=0}^{d-1}B_i(z)f(z)^i) \leq \sum_{i=0}^{d-1}M(r,B_i(z)f(z)^i)$$
$$\leq d\max_{1\leq i\leq d-1}M(r,B_i(z)f(z)^i) \leq dM(r,f(z)^{d-1})r^{m_1}$$
$$\leq dM(r,f(z))^{d-1}r^{m_1},$$

où $m_1=\max\{q_1,q_2,...,q_d\}+1$, comme

$$\lim_{r\longrightarrow\infty}\frac{M(r,f)}{r^{m_1}}=\infty.$$

On a

$$M(r,\sum_{i=0}^{d-1}B_i(z)f(z)^i) = o(M(r,f(z)^d).$$

On montre maintenant que

$$M(r,\sum_{i=0}^{d}B_i(z)f(z)^i) \geq \frac{1}{2}M(r,B_d(z)f(z)^d).$$

On a l'inégalité suivante

$$\left|\frac{M(r,\sum\limits_{i=0}^{d-1}B_i(z)f(z)^i)}{M(r,B_d(z)f(z)^d)}\right|-1\leq\left|\frac{M(r,\sum\limits_{i=0}^{d}B_i(z)f(z)^i)}{M(r,B_d(z)f(z)^d)}\right|\leq\left|\frac{M(r,\sum\limits_{i=0}^{d-1}B_i(z)f(z)^i)}{M(r,B_d(z)f(z)^d)}\right|+1$$

Par passage à la limite, on trouve

$$\lim_{r\longrightarrow\infty}\frac{M(r,\sum\limits_{i=0}^{d}B_i(z)f(z)^i)}{M(r,B_d(z)f(z)^d)}=1,$$

donc pour tout $\varepsilon>0$, il existe $r_0>0$, tel que pour $r\geq r_0$, on a

$$\left|\frac{M(r,\sum\limits_{i=0}^{d}B_i(z)f(z)^i)}{M(r,B_d(z)f(z)^d)}-1\right|<\varepsilon,$$

pour $\varepsilon=\frac{1}{2}$, on obtient

$$M(r,\sum_{i=0}^{d}B_i(z)f(z)^i)\geq\frac{1}{2}M(r,B_d(z)f(z)^d), \tag{3.2}$$

où r est suffisamment grand. De (3.1), (3.2) et comme

$$M(r,B_d(z)f(z)^d)=\max_{|z|=r}|B_d(z)f(z)^d|=r^{q_d}M(r,f(z)^d).$$

Alors

$$\log M(|q|^n r,f(z))\geq d\log M(r,f)+(q_d-m)\log r-\log 2-\log n=d\log M(r,f)+g(r),$$

où $|g(r)|<k\log r$ et $k>0$.
On va montrer maintenant que pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a

$$\log M(|q|^{kn}r,f(z))\geq d\log M(r,f)+g(r).$$

En effet, on a

$$\log M(|q|^n r_1,f(z))\geq d\log M(r_1,f)+g(r_1),$$

pour $r_1=|q|^n r$

$$\begin{aligned}\log M(|q|^{2n}r,f(z))&\geq d\log M(|q|^n r,f)+g(|q|^n r)\\&\geq d(d\log M(r,f)+g(r))+g(|q|^n r),\end{aligned}$$

donc

$$\log M(|q|^{2n}r,f(z))\geq d^2\log M(r,f)+d\,g(r)+g(|q|^n r),$$

pour $r_1 = |q|^{2n}r$

$$\begin{aligned}\log M(|q|^{3n}r, f(z)) &\geq d\log M(|q|^{2n}r, f) + g(|q|^{2n}r)\\ &\geq d(d^2\log M(r,f) + d\ g(r) + g(|q|^n r)) + g(|q|^{2n}r),\end{aligned}$$

donc

$$\log M(|q|^{3n}r, f(z)) \geq d^3\log M(r,f) + d^2 g(r) + d\ g(|q|^n r) + g(|q|^{2n}r),$$

pour $r_1 = |q|^{3n}r$

$$\begin{aligned}\log M(|q|^{4n}r, f(z)) &\geq d\log M(|q|^{3n}r, f) + g(|q|^{3n}r)\\ &\geq d(d^3\log M(r,f) + d^2 g(r) + d\ g(|q|^n r) + g(|q|^{2n}r)) + g(|q|^{3n}r),\end{aligned}$$

alors

$$\log M(|q|^{4n}r, f(z)) \geq d^4\log M(r,f) + d^3 g(r) + d^2 g(|q|^n r) + d\ g(|q|^{2n}r) + g(|q|^{3n}r),$$

pour $r_1 = |q|^{kn}r$

$$\log M(|q|^{kn}r, f(z)) \geq d^k\log M(r,f) + d^{k-1}g(r) + d^{k-2}g(|q|^n r) + \ldots + g(|q|^{n(k-1)}r),$$

alors

$$\log M(|q|^{kn}r, f(z)) \geq d^k\log M(r,f) + E_k(r), \tag{3.3}$$

où

$$\begin{aligned}|E_k(r)| &= |d^{k-1}g(r) + d^{k-2}g(|q|^n r) + \ldots + g(|q|^{n(k-1)}r)|\\ &\leq d^{k-1}|g(r)| + d^{k-2}|g(|q|^n r)| + \ldots + |g(|q|^{n(k-1)}r)|\\ &\leq d^{k-1}k\log r + d^{k-2}k\log|q|^n r + \ldots + k\log|q|^{n(k-1)}r\\ &\leq d^{k-1}k\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\log|q|^{ni}r}{d^i}.\end{aligned}$$

Donc

$$|E_k(r)| \leq d^{k-1}k\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\log|q|^{ni}r}{d^i}. \tag{3.4}$$

D'autre part, on a $\log|q|^{ni}r \leq i\ n\ \log q.\log r$ pour $|q| > e$, alors

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\log|q|^{ni}r}{d^i} \leq n\ \log q.\log r\sum_{i=0}^{\infty}\frac{i}{d^i}.$$

Comme $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\dfrac{i}{d^i} < \infty$ pour $d \geq 2$, on a $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{\log|q|^{ni}r}{d^i}$ est convergente.
De (3.4), on obtient

$$|E_k(r)| \leq n\ kd^{k-1}\ \log q.\log r\sum_{i=0}^{\infty}\frac{i}{d^i}$$

$$|E_k(r)| \leq k'd^k \log r, \tag{3.5}$$

où $k' > 0$ est une constante.

Pour f -entière transcendante, on a

$$\lim_{r \longrightarrow \infty} \frac{\log M(r, f)}{\log r} = \infty,$$

donc pour tout $k_1 > 0$, il existe $r_0 > 0$, tel que pour $r > r_0$, on a

$$\log M(r, f) \geq k_1 \log r.$$

On pose $k_1 = 2k'$, on obtient

$$\log M(r, f) \geq 2k' \log r. \tag{3.6}$$

De (3.3), (3.5) et (3.6), on trouve

$$\log M(|q|^{kn} r, f(z)) \geq k'd^k \log r.$$

Si l'on prend

$s \in [|q|^{nk} r_0, |q|^{n(k+1)} r_0[,\ i.e\ k > \frac{\log s - \log(|q|^n r_0)}{n \log |q|}$, on obtient

$$\log M(s, f) \geq \log M(|q|^{nk} r_0, f) \geq k'd^k \log r_0 \geq k'd^k \geq k''d^{\frac{\log s}{n \log |q|}},$$

où $k'' = k'd^{-\frac{\log |q|^n r_0}{n \log |q|}}$.

- Supposons maintenant que f est une fonction entière qui possède un nombre fini de pôles, alors d'après le Lemme 3.1, on fait les mêmes étapes de f avec g, on obtient

$$\log M(r, f) \geq (k - \varepsilon) d^{\frac{\log r}{n \log |q|}}.$$

2) Si f est une fonction entière qui possède un nombre infini de pôles, on est devant un cas particulier de théorème 3.2 pour $Q(z, f(z)) = 1$, donc il existe $k > 0$, $r_0 > 0$ tel que $\log n(r, f) \geq kd^{\frac{\log r}{n \log |q|}}$, pour $r > r_0$.

3) i) Si f est une fonction entière ou f possède un nombre fini de pôles on a $\log M(r, f) \geq kd^{\frac{\log r}{n \log |q|}}$. D'autre part, d'après l'inégalité

$$\log M(r, f) \leq \frac{R + r}{R - r} T(R, f), \tag{3.7}$$

pour $R = 2r$ dans (3.7), on trouve

$$\log M(r, f) \leq 3T(2r, f),$$

ou bien

$$kd^{\frac{\log r}{n \log |q|}} \leq 3T(2r, f).$$

En introduisant la fonction log, on trouve

$$\frac{\log r}{n \log |q|} \log d \leq \log 3 + \log T(2r, f).$$

Par passage à la limite inf, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{\log d}{n \log |q|} &\leq \liminf_{r \longrightarrow \infty} \left(\frac{\log 3}{\log r} + \frac{\log T(2r, f)}{\log r} \right) \\
&= \liminf_{r \longrightarrow \infty} \frac{\log T(2r, f)}{\log 2r} \frac{\log 2r}{\log r} \\
&= \liminf_{r \longrightarrow \infty} \frac{\log T(2r, f)}{\log 2r} \\
&= \mu(f).
\end{aligned}$$

ii) Si f possède un nombre infini de pôles, on a

$$n(r, f) \geq kd^{\frac{\log r}{n \log |q|}}.$$

D'autre part

$$n(r, f) \leq \frac{1}{\log 2} N(2r, f) \leq \frac{1}{\log 2} T(2r, f),$$

car

$$\begin{aligned}
N(2r, f) &= \int_0^{2r} \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + n(0, f) \log 2r \\
&\geq \int_r^{2r} \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + n(0, f) \log 2r \\
&\geq [n(r, f) - n(0, f)] \log 2 + n(0, f) \log 2r \\
&\geq n(r, f) \log 2 + n(0, f) \\
&\geq n(r, f) \log 2.
\end{aligned}$$

On a

$$kd^{\frac{\log r}{n \log |q|}} \leq \frac{1}{\log 2} T(2r, f).$$

En introduisant la fonction log, on trouve

$$\frac{\log r}{n \log |q|} \log d \leq \log T(2r, f) - \log \log 2.$$

Par passage à la limite inf, on obtient

$$
\begin{aligned}
\frac{\log d}{n\log|q|} &\leq \liminf_{r\longrightarrow\infty}\Big(\frac{\log T(2r,f)}{\log r}-\frac{\log\log 2}{\log r}\Big)\\
&= \liminf_{r\longrightarrow\infty}\frac{\log T(2r,f)}{\log 2r}\frac{\log 2r}{\log r}\\
&= \liminf_{r\longrightarrow\infty}\frac{\log T(2r,f)}{\log 2r}\\
&= \mu(f).
\end{aligned}
$$

D'où

$$\mu(f) \geq \frac{\log d}{n\log|q|}.$$

□

Théorème 3.2. *[4] Soit f une solution méromorphe transcendante, de l'équation*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(z)f(q^j z) = R(z,f(z)) = \frac{P(z,f(z))}{Q(z,f(z))}.$$

Où

$q\in\mathbb{C}$, $|q|>1$, les coefficients $a_j(z)$ sont des fonctions rationnelles, P et Q sont des polynômes relativement premiers en f avec $p=\deg_f P$, $t=\deg_f Q$ et $d=p-t\geq 2$.

Si f possède un nombre infini de pôles, alors il existe $k>0$, tel que

$$n(r,f)\geq kd^{\frac{\log r}{n\log|q|}},$$

pour r suffisamment grand. De plus, on a

$$\mu(f)\geq\frac{\log d}{n\log|q|}.$$

P*reuve*.

On a

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(z)f(q^j z) = R(z,f(z)) = \frac{P(z,f(z))}{Q(z,f(z))}. \tag{3.8}$$

On suppose que les coefficients de $R(z,f(z))$ sont des fonctions rationnelles qui ne possèdent pas de zéros ni de pôles sur $\{z\in\mathbb{C}, |z|>R,\ 0<R<\infty\}$ et f a un nombre infini de pôles.

On suppose aussi que z_0 est un pôle de f d'ordre τ. Donc z_0 est un pôle d'ordre $d\tau$ de $R(z,f(z)) = \dfrac{P(z,f(z))}{Q(z,f(z))}$.

En effet, comme z_0 est un pôle d'ordre τ de f, alors

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^{\tau}},\qquad g(z_0)\neq 0,$$

et on a

$$\frac{P(z,f(z))}{Q(z,f(z))}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{p} b_i(z)f(z)^i}{\sum\limits_{j=0}^{t} c_j(z)f(z)^j}=\frac{b_0(z)+b_1(z)f(z)+...+b_p(z)f(z)^p}{c_0(z)+c_1(z)f(z)+...+c_t(z)f(z)^t}. \tag{3.9}$$

En remplaçant f dans (3.9), on trouve

$$R(z,f(z))=\frac{H(z,g(z))}{(z-z_0)^{(p-t)\tau}},$$

où

$$H(z,g(z))=\frac{b_0(z)(z-z_0)^{p\tau}+b_1(z)(z-z_0)^{p(\tau-1)}g(z)+...+b_p(z)g(z)^p}{c_0(z)(z-z_0)^{t\tau}+c_1(z)(z-z_0)^{t(\tau-1)}g(z)+...+c_t(z)g(z)^t}\frac{(z-z_0)^{t\tau}}{(z-z_0)^{p\tau}}.$$

Comme z_0 est un pôle de $R(z,f(z))$, alors il existe $j_1\in\{1,2,...,n\}$ tel que $q^{j_1}z_0$ soit un pôle de f d'ordre $\tau_1\geq d\tau$.
En remplaçant z_0 par $q^{j_1}z_0$ dans (3.8), on trouve

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(q^jz)f(q^{j+j_1}z)=R(z,f(q^jz)).$$

Comme $|q^{j_1}z_0|\geq|z_0|$, alors les coefficients de $R(z,f(z))$ n'ont pas de zéros ni pôles en $q^{j_1}z_0$. Donc $R(z,f(z))$ a un pôle d'ordre $d\tau_1$ en $q^{j_1}z_0$.
Ce que implique qu'il existe $j_2\in\{1,2,...,n\}$ tel que $q^{j_1+j_2}z_0$ est un pôle de f d'ordre $\tau_2\geq d\tau_1$.
De même, on peut écrire les pôles de f sous la forme $\zeta_k=q^{j_1+j_2+...+j_k}z_0$ pour $j_i\in\{1,2,...,n\}$ et $i\in\{1,2,...,k\}$ qui ont de multiplicité τ_k.
D'autre part, on a $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty}|\zeta_k|=\infty$. Donc pour tout $k>0$, on trouve

$$\tau d^k\leq\tau(1+d+...+d^k)\leq n(|\zeta_k|,f)=n(|q|^{j_1+j_2+...+j_k}|z_0|,f)\leq n((|q|^n)^k|z_0|,f).$$

Si l'on prend $r\in[\ |q|^{nk}|z_0|,|q|^{n(k+1)}|z_0|\ [$, *i.e* $k>\frac{\log r-\log(|q|^n|z_0|)}{n\log|q|}$, on obtient

$$n(r,f)\geq n((|q|^n)^k|z_0|,f)\geq\tau d^k\geq k'd^{\frac{\log r}{n\log|q|}},$$

où $k'=\tau d^{-\frac{\log(|q|^n|z_0|)}{n\log|q|}}$.
En appliquant la méthode de la preuve du Théorème 3.1, on trouve

$$\mu(f)\geq\frac{\log d}{n\log|q|}.$$

$\square$

3.2 Fonction périodique

Pour l'application du deuxième théorème, on donne les conditions pour que f soit une fonction périodique. On cite les définitions suivantes.

Définition 3.1. *Soient f et g deux fonctions méromorphes. On dit que*

i) f et g partagent la valeur a en ignorant la multiplicité (IM), si $f(z)-a$ et $g(z)-a$ ont les mêmes zéros en ignorant leur multiplicité.

ii) f et g partagent a en comptant la multiplicité (CM), si $f(z)-a$ et $g(z)-a$ ont les mêmes zéros avec mêmes multiplicité,.

Définition 3.2. *Soit f une fonction méromorphe. On dit que f est une fonction périodique de période c si $f(z)=f(z+c)$, $\forall z \in \mathbb{C}$.*

Définition 3.3. *Soit f une fonction méromorphe. On dit que a est une fonction small de f si $T(r,a(z))=o(T(r,f(z)))$.*

Remarque 3.2. *On note par $S(f)$ l'ensemble des fonctions small de f.*
Par exemple, les fonctions constantes sont des fonctions small. De plus on a $\hat{S}(f)=S(f)\cup\{\infty\}$.

Théorème 3.3. *[7] Soient f_1 et f_2 deux fonctions méromorphes telles que*

$$\overline{N}(r,f_j)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f_j}\right)=S(r,f_j), \quad j=1,2.$$

Si f_1 et f_2 partagent la valeur 1 IM, alors $f_1(z)=f_2(z)$ ou $f_1(z)f_2(z)=1$, pour $z\in\mathbb{C}$.

Théorème 3.4. *[7] Soit f une fonction méromorphe d'ordre fini et soient $a_1,a_2,a_3 \in \hat{S}(f)$ périodiques de période c. Si $f(z), f(z+c)$ partagent la valeur a_3 IM et*

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a_1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a_2}\right)=S(r,f).$$

Alors $f(z)=f(z+c)$ pour $z\in\mathbb{C}$.

P*reuve*.
On suppose $a_1,a_2,a_3\in S(f)$ et on pose

$$g(z)=\frac{f(z)-a_1(z)}{f(z)-a_2(z)}\frac{a_3(z)-a_2(z)}{a_3(z)-a_1(z)},$$

et

$$g(z+c)=\frac{f(z+c)-a_1(z)}{f(z+c)-a_2(z)}\frac{a_3(z)-a_2(z)}{a_3(z)-a_1(z)},$$

alors

$$\overline{N}\Big(r, \frac{1}{g}\Big) + \overline{N}(r, g) = S(r, g).$$

D'autre part, le nombre de pôles de $f(z)$ sur $\{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq r + |c|\}$ est égal le nombre de pôles de $f(z+c)$ sur $\{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq r\}$. Donc $n(r+|c|, g) = n(r, g(z+c))$, on obtient

$$\begin{aligned}
\overline{N}(r+|c|, g) &= \int_{|c|}^{r+|c|} \frac{n(t,g) - n(0,g)}{t} dt + n(0,g)\log(r+|c|) \\
&= \int_0^r \frac{n(s, g(z+c)) - n(0, g(z+c))}{s} ds + n(0, g(z+c))\log(r) + n(0, g(z+c))\log(1 + \frac{|c|}{r}) \\
&\geq \int_0^r \frac{n(s, g(z+c)) - n(0, g(z+c))}{s} ds + n(0, g(z+c))\log(r) \\
&= \overline{N}(r, g(z+c)).
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\overline{N}(r, g(z+c)) + \overline{N}\Big(r, \frac{1}{g(z+c)}\Big) &\leq \overline{N}(r+|c|, g) + \overline{N}\Big(r+|c|, \frac{1}{g}\Big) \\
&= \overline{N}(r, g) + \overline{N}\Big(r, \frac{1}{g}\Big) + S(r, g) \\
&= S(r, g) \leq \varepsilon(r) T(r, g),
\end{aligned}$$

où $\lim\limits_{r \longrightarrow \infty} \varepsilon(r) = 0$.

D'autre part, d'après la Théorème 2.6, on a

$$(n-1)T(r, g) \leq \sum_{i=0}^{n} \overline{N}\Big(r, \frac{1}{g - a_i}\Big) + \overline{N}(r, g) + S(r, g),$$

pour $n = 3$ et $a_1 = 0, a_2 = \infty, a_3 = 1$, on obtient

$$T(r, g) \leq \overline{N}(r, g) + \overline{N}\Big(r, \frac{1}{g}\Big) + \overline{N}\Big(r, \frac{1}{g-1}\Big) + S(r, g),$$

on a aussi $g(z)$ et $g(z+c)$ partagent 1 IM, car

$$g(z) - 1 = \frac{f(z) - a_3(z)}{f(z) - a_2(z)} \frac{a_1(z) - a_2(z)}{a_3(z) - a_1(z)},$$

et

$$g(z+c) - 1 = \frac{f(z+c) - a_3(z)}{f(z+c) - a_2(z)} \frac{a_1(z) - a_2(z)}{a_3(z) - a_1(z)}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
T(r, g) &\leq \overline{N}\Big(r, \frac{1}{g(z+c) - 1}\Big) + S(r, g) \\
&\leq T(r, g(z+c)) + S(r, g).
\end{aligned}$$

Alors

$$\overline{N}(r, g(z+c)) + \overline{N}\Big(r, \frac{1}{g(z+c)}\Big) \leq \varepsilon(r)T(r, g(z+c)).$$

D'où

$$\overline{N}(r, g(z+c)) + \overline{N}\Big(r, \frac{1}{g(z+c)}\Big) = S(r, g(z+c)),$$

d'après le Théorème 3.3 on a $g(z) = g(z+c)$. D'où $f(z) = f(z+c)$, $\forall z \in \mathbb{C}$. □

Corollaire 3.1. *[7] Soit f une fonction entière d'ordre fini, $c \in \mathbb{C}$ et $a, b \in S(f)$ périodiques de période c. Si $f(z)$ et $f(z+c)$ partagent la valeur a IM et si*

$$\overline{N}\Big(r, \frac{1}{f-b}\Big) = S(r, f),$$

alors $f(z) = f(z+c)$ ou $f(z) = f(z+2c)$, pour $z \in \mathbb{C}$.

P*reuve*.
Comme f est une fonction entière, on a

$$\overline{N}\Big(r, \frac{1}{f-a_1}\Big) = 0, \quad a_1 = \infty.$$

Alors, d'après le Théorème 3.4, on obtient $a, b \in S(f)$, et comme

$$\overline{N}\Big(r, \frac{1}{f-b}\Big) = S(r, f).$$

D'où $f(z) = f(z+c)$ ou $f(z) = f(z+2c)$, pour $z \in \mathbb{C}$. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] **Agrwal. R.P, SANDRA Pinlas.K.P**, *An introduction to complex analysis*, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, (2010).

[2] **Alembert. M, Gélinas. R**, *Elément d'analyse complexe*, université de Quebec, 1991-1994.

[3] **Caumels. Y**, *Cours d'Analyse fonctionnelle et complexe*, 31100 TOULOUSE – France, (2009).

[4] **Chen. Z. H, Zheng. x. M**, *Some properties of meromophic solution of q-difference equation*,J.Math.anal.Appl. 361. 472-480 (2010).

[5] **Hayman. W. K**, *Meromorphic functions*, Calaredon press, oxford (1964).

[6] **Hoffman. M.J, Mersden. J.E**, *Basic complexe analyse*, third edition, printed united states of America, 1999, 1987, 1973.

[7] **Hittokangas. J, Korhonen. R, Laine. I, Rieppo. J, Zhang. J**, *value sharing for shifts of meromophic function and sufficient condition for peridicity*, by D.Khavinson,J. Math. anal. Appl. 355. 352-363 (2009). .

[8] **Laine. I**, *Nevanlinna theory and complex differential equations*, de Gruyter Berlin-Newyork, (1993).

[9] **Masbout. F**, *Sur les propriétés des solution méromorphes de certaines classes d'équations différentielles et d'équations aux différences*, Thèse de doctorat, université de jijel, (2018).

[10] **Yang. C.C**, *Fix points and factorization of moromophic function*, world scientific, (1990).

[11] **Zhang Guan-Hou**, *Theory of Entire and Meromorphic Functions*, by the American Mathematical Society, (1993).