



Faculté des Sciences Exactes et Informatique  
Département de Mathématiques

## Mémoire du fin de cycle

Présenté pour l'obtention du diplôme de

**Master**

**Spécialité** : Mathématiques.

**Option** : Probabilités et Statistique.

**Thème**

# *Les Modèles Auto-Régressifs à Seuil*

**Présenté par :**

**Habila Salma**

**Devant le jury composé de :**

Laoudj Chekraoui Farida	M.C.A Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel	Président
Cheraitia Hassen	M.C.B Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel	Encadreur
Boujarda Khawla	M.C.B Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel	Examineur

Promotion **2020/2021**

## ♡ *Remerciements* ♡

*Quels* mots en préambule de cette étude, qui met un point d'orgue à une année riche  
et intense

*Tout* d'abord, nous remercions **Allah** le tout puissant pour son aide et pour nous avoir  
guidé pour mener à bien ce travail

*La* première personne que nous tenons à remercier est notre encadreur **Mr**

**\*Cheraitia Hassen\***

pour l'orientation, la confiance, la patience qui ont constitué un apport considérable sans  
lequel ce travail n'aurait pas pu être mené au bon port

Un grand merci également aux membres du jury, **Mme** la présidente **Laoudj Chekraoui Farida**  
ainsi que l'examinatrice **Mme Boujarda Khawla** pour l'honneur qu'elles nous ont fait en  
acceptant de juger notre mémoire

Nos vifs remerciements vont à tous enseignants qui nous ont suivi tout au long de nos cinq  
années

d'études à l'université

Enfin, nous remercions toutes les personnes qui auraient contribué d'une manière ou  
d'une autre à la réalisation de ce travail.

♡**Chamitou**♡

## Dédicace

*Je dédie ce travail :*

*A ma chère mère **Fatima** , pour son amour, ses encouragements et sacrifices .*

*A mon cher père **Messaoud** , pour son soutien , son affection et la confiance q'u'il m'ac-  
cordé .*

*A mes soeurs **Amal , Sima , Aicha , Tewa** .*

*A mes frères : **Ali , Hamza , Ibrahim ,Ahmed** .*

*A ma grand-mère "**Fatima** " qui je souhaite une bonne santé .*

*A tous les nombres de ma famille et Surtout les enfants de la famille .*

*A tous mes amis .*

*A promo prob-stat 2020/2021 .*

*Et tous ceux qui m'aiment .*

# Table des matières

Liste des tableaux	v
Table des figures	vi
Résumé	vii
Introduction	xi
<b>1 Processus univariés à temps discret</b>	<b>1</b>
1.1 Processus linéaires . . . . .	2
1.2 Processus stationnaire ARMA . . . . .	5
1.2.1 Processus MA(q) . . . . .	5
1.2.2 Processus AR(p) . . . . .	7
1.2.3 Processus ARMA (p,q) . . . . .	9
1.3 Processus non stationnaires ARIMA et SARIMA . . . . .	12
1.3.1 Processus ARIMA . . . . .	12
1.3.2 Processus SARIMA . . . . .	13
1.4 Processus TS et DS . . . . .	14
1.4.1 Les processus TS . . . . .	14
1.4.2 processus DS . . . . .	15
1.5 Test de linéarité . . . . .	16
1.5.1 Le test du multiplicateur de Lagrange (LM) . . . . .	16
1.5.2 Le test du CUSUM . . . . .	17
1.5.3 Test du rapport de la vraisemblance . . . . .	17

1.5.4	Critères d'information . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Processus non linéaire</b>	<b>20</b>
2.1	Les processus ARCH et GARCH . . . . .	21
2.1.1	Hétéroscedasticité . . . . .	21
2.1.2	Processus ARCH . . . . .	21
2.1.3	Processus GARCH . . . . .	23
2.2	Processus ARFIMA . . . . .	25
2.2.1	Les processus ARFIMA(0,d,0) . . . . .	25
2.2.2	ARFIMA(p,d,q) . . . . .	27
2.3	Processus Bilinéaires . . . . .	28
2.4	Les processus auto-régressifs à seuil . . . . .	30
2.4.1	Processus TAR . . . . .	30
2.4.2	Processus STAR . . . . .	31
2.4.3	Processus LSTAR . . . . .	32
2.4.4	Processus SETAR . . . . .	32
2.5	Identification , spécification et estimation du modèle SETAR et STAR . . . . .	34
2.5.1	Identification d'un modèle SETAR . . . . .	34
2.5.2	Spécification d'un modèle SETAR . . . . .	35
2.5.3	Estimation d'un modèle STAR . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Simulations et Application</b>	<b>40</b>
3.1	Simulations . . . . .	40
3.1.1	modèle SETAR(2,2,2,1) . . . . .	40
3.1.2	modèle SETAR(2,3,1,1) . . . . .	42
3.1.3	modèle SETAR(3,3,3,3,2) . . . . .	43
3.2	Application . . . . .	47
3.2.1	Représentation graphique de la série suns . . . . .	47
3.2.2	Estimation du modèle autorégressive simple . . . . .	47
3.2.3	Estimation de modèle autorégressive à seuil . . . . .	48
3.2.4	Prévisions . . . . .	50
	<b>Bibliographie</b>	<b>52</b>

Annexe

56

# Liste des tableaux

3.1	Moyennes et écarts-types de modèle SETAR (2,2,2,1) avec $N = 100$ . . . . .	41
3.2	Moyennes et écarts-types de modèle SETAR (2,3,1,1) avec $N = 500$ . . . . .	42
3.3	Moyennes et écarts-types de modèle SETAR (3,3,3,3,2) avec $N = 100, N = 500, N = 1000$ . . . . .	44
3.4	Estimation des modèles AR(p) avec $p = 1, 2, 3, 4, 5$ . . . . .	48
3.5	les tests du rapport de vraisemblance . . . . .	48
3.6	Estimation des modèles SETAR avec $p_i = 2, 3, 4, 5 ; i = 1, 2$ . . . . .	49
3.7	Prévisions de AR(4) et SETAR(2,3,3,2) . . . . .	50

# Table des figures

3.1	Trajectoire, ACF et PACF du modèle SETAR(2,2,2,1) avec N=100 . . . . .	42
3.2	Trajectoire, ACF et PACF du modèle SETAR(2,3,1,1) avec N=500 . . . . .	43
3.3	Trajectoire, ACF et PACF du modèle SETAR(3,3,3,3,2) avec N=100. . . . .	45
3.4	Trajectoire, ACF et PACF du modèle SETAR(3,3,3,3,2) avec N=500. . . . .	45
3.5	Trajectoire, ACF et PACF du modèle SETAR(3,3,3,3,2) avec N=1000. . . . .	46
3.6	Trajectoire, ACF et PACF du série "Sunspot american" . . . . .	47
3.7	Prévision par le modèle AR(4) et SETAR(2,3,3,2) . . . . .	50



# Résumé

En statistique , les modèles SETAR (Self-Exciting Threshold AutoRegressive) sont des modèles non linéaires généralement appliqués aux données de série temporelles comme une extension des modèles autorégressifs. Ces modèles sont caractérisés par une grande flexibilité dans leurs paramètres grâce au comportement de changement de régime.

La majorité des travaux de modélisation suppose que les séries non linéaires et la plupart des recherche appliqués trouvent donc commode de supposer la linéarité. Récemment des arguments ont été présentés, basés sur des données financières , selon lesquels les spécifications non linéaires peuvent être une représentation plus réaliste de données.

Dans cette étude, une série chronologique mensuelle des taches solaires (1998-2016) a été analysé. Le modèle SETAR (2,3,3,2) a été choisit comme meilleur modèle non linéaire pour cette série sur le quel les prévisions ont été calculées pour une période de 6 mois. En terme de RMSE, le modèle SETAR (2,3,3,2) a fournit des bonnes prévisions .

## Abstract

In statistics, Self-Exciting Threshold AutoRegressive (SETAR) model are non linear models typically applied to time series data as an extension of autoregressive models There models are characterized by a high degree of flexibility in their parameters through a regime switching behavior.

The majority of the empirical modeling work assumes that the series are linear and the most applied researches find it convenient to assume linearity. Recently, arguments have been presented, based on financials data, that non linear specifications may be more realistic representation of data.

In this study, a time series of monthly sunspot (1998-2016) was analyzed. The SETAR (2,3,3,2) model has been chosen as the best non linear model of this series in which the predictions were calculated for period of 6 months. In terms of RMSE, the SETAR (2,3,3,2) model provided a good predictions.

# Notations

- ♣  $S_t$  : La saisonnalité.
- ♣  $\varepsilon_t$  : le résidu.
- ♣ **i.i.d** : indépendant identiquement distribué.
- ♣ **E** : Espérance.
- ♣ **Var** : La variance.
- ♣ **cov** : La covariance.
- ♣  $\gamma_h$  : La fonction d'auto-covariance .
- ♣  $\rho_h$  : La fonction d'auto-corrélation partielle.
- ♣ **ACF** : La fonction d'auto-corrélation.
- ♣ **AR** :Auto-régressif.
- ♣ **ARIMA** :Auto-régressif Moyenne mobile Intégré.
- ♣ **ARMA** :Auto-régressif Moyenne mobile.
- ♣ **SARIMA** :Auto-régressif Moyenne mobile Intégré Saisonnier .
- ♣ **ARFIMA** :Auto-régressif Moyenne mobile Fractionnement Intégré.
- ♣ **ARCH** :Auto-régressif Conditionnellement Hétéroscédastique.
- ♣ **GARCH** :Auto-régressif Conditionnellement Hétéroscédastique Généralisé.
- ♣ **BL** :Bilinéaires.
- ♣ **MA** : Moyenne mobile.
- ♣ **STAR** :Smooth transition Auto-régressif
- ♣ **LSTAR** :Logistic Smooth transition Auto-régressif
- ♣ **TAR** :Threshold Auto-régressif.

- ♣ **SETAR** :Self-Exciting Threshold Auto-régressif.
- ♣ **c – à – d** : C'est à dire.
- ♣ **SSi** : Si et Seulement Si.
- ♣ **ML** : Multiplication de Lagrange.
- ♣ **TS** : Trend Stationary.
- ♣ **DS** : Differency Stationnary.
- ♣ **bb** :bruit blanc .
- ♣ **bbf** :bruit blanc fort.
- ♣ **AIC** :AKAIKE.Information.criterion.

# Introduction Générale

Une série chronologique, ou série temporelle, est une série d'observations ordonnées chronologiquement. Elles se rencontrent naturellement dans une grande variété de domaines. On peut citer : l'économie (taux de chômage, PNB ...), la finance (cours d'action, taux d'intérêt, ...), l'écologie (pollution à l'ozone, au CO<sub>2</sub>, ...), le transport (avec l'exemple célèbre du trafic aérien international), la démographie. Les objectifs d'étude sont multiples ; La prévision est sans doute le but le plus fréquent. Il s'agit de prévoir les valeurs futures d'une variable grâce aux valeurs observées dans le présent et le passé de cette même variable, la problématique n'est donc pas la même qu'en régression où l'on cherche à prévoir le niveau d'une variable (la réponse) en fonction du niveau d'autres variables (les prédicteurs). Une classe très importante de modèles utilisés pour la prévision des processus stationnaires est celle des Auto-régressifs Moyenne Ajusté (ARMA).

La majorité des travaux de modélisation en séries temporelles supposent que les séries sont linéaires. Les modèles linéaires de type Autoregressifs ont été appliqués dans de nombreux domaines, les praticiens sont de plus en plus confrontés à des données réelles non linéaires, ce qui suggère des modèles appropriés à ce type de données. Pour tenir compte de ces comportements dynamiques en utilisant des données de séries chronologiques, des modèles de changement de régime ont été introduits, plus particulièrement les modèles autoregressifs à seuil introduits par Tong, Tong et Lim (1980) sont largement discutés.

Le recours aux modèles non linéaires peut s'expliquer par le fait que l'hypothèse de la linéarité apparaît étant une hypothèse lourde concernant l'évolution de nombreuses séries financières.

L'un de fameux modèle autoregressif à seuil est le modèle SETAR( $k, p_1, \dots, p_k, d$ ) qui est généralement appliqués aux données de séries temporelle comme une extension des modèles autoregressifs a fin de permettre un plus grand degrés de flexibilité dans les paramètres du modèle grace au comportement du changement de régime.

le modèle SETAR est un outil important permettant de comprendre et de prédire les valeurs futurs d'une série temporelle, en supposant que le comportement de la série change une fois que la série rentre dans un régime différent, le passage d'un régime à l'autre dépend des valeurs passées de la série.

Nous articulons ce mémoire autour de trois chapitres .Dans *le premier chapitre* intitulé "Processus univariés à temps discret ", nous présentons quelques rappels sur les processus linéaires stationnaires (AR, MA et ARMA) et non stationnaires (TS et DS). Cette présentation nécessite que l'on définisse au préalable un certain nombre de notions essentielles à l'analyse des séries temporelles, et en particulier la notion de stationnarité.

Dans *le deuxième chapitre* intitulé "processus non linéaires", nous étudierons les modèles non linéaires et les modèles auto-régressive à seuil, leurs méthodes d'estimation et la procédure d'identification de Tong et Lim (1980), la spécification du modèle à seuil, et quelques tests de linéarité.

Enfin , dans *le troisième chapitre* "Simulations et Application" , on fait compléter notre travail par la mise en place de quelques simulation de processus SETAR en changeant ces différents paramètres puis de modéliser une série réelle par un modèle AR et un modèle SETAR.

A la fin une conclusion générale dresse une synthèse des principaux résultats obtenus au cours de notre travail.

# Processus univariés à temps discret

## Introduction

Ce chapitre présente les bases de la modélisation probabiliste des séries temporelles. Il définit les notions de processus stochastique et de stationnarité, ainsi que des outils d'analyse comme les autocorrélogrammes.

Soit  $(x_t)_{t \in T}$  une famille d'observations d'un phénomène qui peut être physique, économique, biologique... Chaque observation  $x_t \in \mathbb{R}^d$  a été enregistrée à un temps spécifique  $t \in T$  et on appelle **série temporelle** cet ensemble d'observations.

Si  $T$  est dénombrable (en général  $T \subset \mathbb{Z}$ ), on parle de série temporelle à **temps discret**.

Si  $T$  n'est pas dénombrable (en général un intervalle de  $\mathbb{R}$ ), on parle de série temporelle à **temps continu**.

On considère des séries temporelles à valeur dans  $\mathbb{R}^d$ . Si  $d = 1$ , on parle de série **univariée**. Si  $d > 1$ , on parle de **série multivariée**.

On désignera dans la suite par série temporelle **une série temporelle univariée à temps discret**.

On considère en Statistique que l'observation  $x$  est la réalisation d'une variable aléatoire  $X$ . De manière analogue, une série temporelle  $(X_t)_{t \in T}$  est considérée comme la réalisation d'un processus stochastique (d'une suite de variables aléatoires)  $(X_t)_{t \in T}$ .

## 1.1 Processus linéaires

Les modèles linéaires occupent une place centrale dans la théorie des séries chronologiques. L'analyse classique des séries temporelles basée sur la construction de modèles du processus stochastique sous-jacent. Celui-ci est ensuite utilisé d'un point de vue statistique, que ce soit pour analyser la structure du processus ou pour produire des prévisions. Dans la pratique on trouve plusieurs modèles linéaires de séries chronologiques, on cite : modèles AR, modèles MA, modèles ARMA, modèles ARIMA, SARIMA, modèles TS et DS.

### Rappels

#### Définition 1.1.1.

On appelle processus une suite  $(X_n)_n$  des variables aléatoires. [34]

#### Définition 1.1.2.

Un processus linéaires est un processus stochastique  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  formé par une combinaison linéaire de bruits blancs (white noise  $\varepsilon(t)$ ). [25]

#### Définition 1.1.3.

Un bruit blanc fort est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (iid)  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  centrées et de variances  $\sigma^2$ . On note  $(\varepsilon_t) \sim \text{bbf}(0, \sigma^2)$ . [17]

#### Définition 1.1.4.

Un bruit blanc faible, tout suite de v.a.r  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  centrées et de variance  $\sigma^2$ .

On note :  $(\varepsilon_t) \sim \text{bb}(0, \sigma^2)$ .

$$i) \forall (t, t') \in \mathbb{Z}^2, t \neq t', \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) = 0.$$

$$ii) \forall t \in \mathbb{Z} : E(X_t) = 0 \text{ et } E(X_t^2) = \sigma_\varepsilon^2. [21]$$

#### Définition 1.1.5.

Le processus  $X_t$  est stationnaire au sens strict si pour tout  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  avec  $t_i \in \mathcal{T}$ ,  $i = 1, \dots, n$  et si pour tout  $\tau \in \mathbf{T}$  avec  $t_i + \tau \in \mathbf{T}$ ,  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  a la même distribution de probabilité jointe que  $(X_{t_1+\tau}, X_{t_2+\tau}, \dots, X_{t_n+\tau})$ . [2]

#### Définition 1.1.6.

Un processus  $X_t$  est stationnaire au second ordre si :

$$-i- E(X_t) = m < +\infty.$$



-ii-  $E(X_t^2) < +\infty \quad \forall t \in \mathbb{Z}$ .

-iii-  $Cov(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h) \quad \forall t \in \mathbb{Z}$ . Où est la fonction d'autocovariance du processus .[21][17]

**Exemple 1.1.1.**

♣ par la définition d'un bruit blanc fort  $(\varepsilon_t) \sim bbf(0, \sigma^2)$  est strictement (fortement)stationnaire.

♣ par la définition d'un bruit blanc faible  $(\varepsilon_t) \sim bb(0, \sigma^2)$  est faiblement stationnaire .[1]

**Définition 1.1.7.**

On dit que  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un processus linéaire de moyenne  $\mu$  s'il peut être écrit sous la forme [23] :

$$X_t = \mu + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_i \varepsilon_{t-i}.$$

Où

$$(\varepsilon_t) \sim bbf(0, \sigma^2) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_i^2 < +\infty.$$

**Définition 1.1.8. la fonction d'auto-covariance**

La fonction d'auto-covariance d'un processus stationnaire  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est définie par [21][30] :

$$\begin{aligned} \gamma_h &= Cov(X_t, X_{t+h}) \\ &= E[(X_t - E(X_t))(X_{t+h} - E(X_{t+h}))] \forall h \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

**Définition 1.1.9. la fonction d'auto-correlation(ACF)**

La fonction d'auto-correlation d'un processus stationnaire  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est définie par :

$\forall h \in \mathbb{Z}$  [30] :

$$\varphi_h = \frac{Cov(X_t, X_{t+h})}{\sqrt{Var(X_t)}\sqrt{Var(X_{t+h})}}$$

**estimation de la fonction d'autocovariance et la fonction d'autocorrélation**

considérons un ensemble d'observation  $X_1, \dots, X_T$ .

**Définition 1.1.10. moyenne empirique**

La moyenne empirique est donnée par [23] :

$$\bar{X}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t$$

**Définition 1.1.11.** *la fonction d'autocovariance empirique [21]*

$$\hat{\gamma}_T(h) = \frac{1}{T-h} = \sum_{t=1}^{T-h} (X_t \bar{X}_T)(X_{t-h} - \bar{X}_T)$$

**Définition 1.1.12.** *la fonction d'autocorrélation empirique [1]*

$$\hat{\rho}_T(h) = \frac{\hat{\gamma}_T(h)}{\hat{\gamma}_T(0)}$$

ci ces estimation sont biaisés (à distance finie ) ils sont malgré tout asymptotiquement sans biais.

**Proposition 1.1.1.**

*Les moments empiriques convergent vers les moments théoriques.  $X_T \rightarrow m$  ;  $\hat{\gamma}_T(h) \rightarrow \gamma_T(h)$  et  $\hat{\rho}_T(h) \rightarrow \rho_T(h)$  . quand  $T \rightarrow +\infty$ . asymptotiquement des moments empiriques.[3]*

**Théorème 1.1.2.**

*La fonction d'auto-covariance(résp.d'auto-corrélation) d'un processus  $X_t$  stationnaire vérifie les propriétés suivantes [30] :*

- i)-  $\gamma_T(0) = Cov(X_t, X_t) = E[X_t - (E(X_t))^2] = Var(X_t)$  .*
- ii)-  $|\gamma_h| \leq \gamma_0$  .*
- iii)-  $\gamma_h = \gamma_{-h}$  (fonction paire) .*
- (resp :  $\rho_0 = 1, |\rho_h| \leq \rho_0, \rho_h = \rho_{-h}$ ).*

**Définition 1.1.13.** *fonction d'auto-corrélation partielle*

*La fonction d'autocorrélation partielle est donnéé par :*

$$\phi_{hh} = \frac{|\rho_h^*|}{\rho_h}$$

*Où :  $|\rho_h^*|$  (resp  $|\rho_h|$  ) est le déterminant de la matrice  $\rho_h$  et  $\rho_h^*$  est donnée par :*

$$\rho_h = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{h-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{h-2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-1} & \dots & \rho_1 \end{bmatrix}$$

*$\rho_h$  est la matrice symétrique formés des (h-1) premiers autocorrélations de  $X_t$  .*

$$\rho_h^* = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-1} & \dots & \rho_h \end{bmatrix}$$

$\rho_h^*$  est ainsi la matrice  $\rho_h$  dans laquelle on a remplacé la dernière colonne par le vecteur  $(\rho_1, \dots, \rho_h)'$ . [31]

**Définition 1.1.14.**

Un processus linéaire  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  s'appelle causal s'il peut être représenté sous la forme [1] :

$$X_t = \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}.$$

Où  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc et  $\sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i^2 < +\infty$

**Définition 1.1.15.**

Un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est dit inversible s'il existe une suite de constantes  $(\pi_i)$  telle que [30] :

$$\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{+\infty} \pi_i X_{t-i}.$$

où  $\sum_{i=0}^{+\infty} \pi_i^2 < +\infty$ .

## 1.2 Processus stationnaire ARMA

La classe des modèles ARMA peut être décomposée en deux sous classes : la classe des modèles autorégressives AR et la classe des modèles moyenne mobile MA.

### 1.2.1 Processus MA(q)

**Définition 1.2.1.**

On appelle processus moyenne mobile ("moving average") d'ordre  $q$ , noté  $MA(q)$ , un processus stationnaire  $(X_t)$  vérifiant une relation du type :  
pour tout  $t \in \mathbb{Z}$ .

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} \tag{1.1}$$

où les  $\theta_i$  sont des réels et  $(\varepsilon_t)$  est un bruit blanc de variance  $\sigma^2$ , (1.1) est équivalent à l'écriture  $X_t = \Theta(B)\varepsilon_t$  où  $\Theta(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q$ .  
comme  $\Theta(B) < +\infty$  est stationnaire.[3]

**Proposition 1.2.1.**

Soit  $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  un processus MA(q), alors :

i)-  $E(X_t) = 0$ .

$$ii)- \gamma(h) = var(X_t) = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2)\sigma_\varepsilon^2 & \text{si } h = 0. \\ (\theta_h + \theta_{h+1}\theta_1 + \dots + \theta_q\theta_{q-h})\sigma_\varepsilon^2 & \text{si } 1 \leq h \leq q. \\ 0 & \text{si } h > 0. \end{cases}$$

$$iii)- \varphi(h) = cov(X_t, X_{t+h}) = E(X_t X_{t+h}) = \begin{cases} 1 & \text{si } h = 0. \\ \frac{(\theta_h + \theta_{h+1}\theta_1 + \dots + \theta_q\theta_{q-h})}{\theta_1^2 + \dots + \theta_q^2} & \text{si } 1 \leq h \leq q. \\ 0 & \text{si } h > q. \end{cases}$$

Il convient d'introduire l'opérateur retard  $\mathbf{B}$  ce qui permettra de simplifier les écritures. En général soit  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  un modèle MA(q) et  $\mathbf{B}$  l'opérateur retard.

avec  $\mathbf{B}^j Y_t = Y_{t-j}$ , alors on a :

$$\begin{aligned} Y_t &= \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}. \\ &= (1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q) \varepsilon_t. \\ &= \Theta(\mathbf{B}) \varepsilon_t. \end{aligned}$$

où  $\Theta(\mathbf{B})$  est un polynôme moyenne mobile d'ordre q.[1]

**Représentation stationnaire et causale :**

La définition d'un MA(q) est explicite et ne pose donc pas de problème :

le processus  $X_t$  est parfaitement défini et est automatiquement stationnaire. La représentation est causale par définition.[23]

**Représentation inversible**

$\Theta(\mathbf{B})$  est un polynôme en  $\mathbf{B}$  de degré  $q$ , que l'on peut factoriser en ayant calculé ses racines  $Z_i = \frac{1}{\lambda_i}$ ,  $i = 1, \dots, q$  :

$$\begin{aligned} \Theta(\mathbf{B}) &= 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q. \\ &= (1 - \lambda_1 B)(1 - \lambda_2 B) \dots (1 - \lambda_q B). \end{aligned}$$

Si  $\Theta(\mathbf{Z})$  n'a pas de racine de module égale à 1, on peut calculer l'inverse de  $\Theta(\mathbf{B})$ , qui est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \Theta(\mathbf{B})^{-1} &= (1 - \lambda_1 B)^{-1} (1 - \lambda_2 B)^{-1} \dots (1 - \lambda_q B)^{-1}. \\ &= \frac{K_1}{(1 - \lambda_1 B)} + \frac{K_2}{(1 - \lambda_2 B)} + \dots + \frac{K_q}{(1 - \lambda_q B)}. \end{aligned}$$

Si toutes les racines de  $\Theta$  (c-à-d  $\frac{1}{\lambda_i}$ ,  $i = 1, \dots, q$ ) sont distinctes et où  $K_1, \dots, K_q$  sont des paramètres qui dépendent de  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ .

On obtient alors l'expression suivante :

$$\Theta(\mathbf{B})^{-1} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \pi_j X_{t-j} = \varepsilon_t.$$

Où  $\sum \pi_j < \infty$  (alternativement, les racines du polynôme caractéristique sont à l'intérieur du cercle unitaire). Dans ce cas : Les coefficients  $\pi_j$  sont les coefficients de la série Taylor de  $\pi(z) = \frac{1}{\Theta(\mathbf{Z})}$ .

- \* Si les racines  $\Theta(\mathbf{Z}) = 0$  sont tout de module supérieur 1, on peut montrer que  $\pi_j = 0$  et  $\varepsilon_t$  s'interprète comme l'innovation du processus, on dit que le processus est inversible.
- \* Si les racines de  $\Theta(\mathbf{Z}) = 0$  sont inférieures à 1 en module, mais qu'il n'y a pas de racines de module égale à 1, on peut inverse les racines, quitte à changer de bruit blanc et supposer que le processus inversible.[27]

**1.2.2 Processus AR(p)**

**Définition 1.2.2.**

Soit  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  un bruit blanc (faible) de variance  $\sigma^2$  et  $p \geq 1$ .

On dit qu'un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un processus autorégressif ou encore processus AR (Auto-Regressive) d'ordre  $p$ , noté  $AR(p)$ , si :

- \*  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est stationnaire.

\*  $\forall t \in \mathbb{Z} : X_t = \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t$  où  $(\phi_1, \dots, \phi_p)$  sont des constantes  $\phi_p \neq 0$ .

On utilise généralement la notion suivante :

$$\Phi(B)X_t = \varepsilon_t \text{ où } \Phi(B) = 1 - \sum_{i=1}^p \phi_i B^i. [24]$$

### Représentation inversible

La représentation AR(p) est inversible par définition. [30]

### Représentation causale

Si le polynôme  $\phi$  a toutes ses racines de module strictement supérieur à 1, l'opérateur inverse  $\Phi(B)^{-1}$  admet un développement ne faisant intervenir que les puissances positives de  $B$ . On a alors :

$$X_t = \sum_{j=0}^{+\infty} h_j \varepsilon_{t-j}.$$

Dans ce cas, on montre que l'on a :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} h_j < \infty, \quad h_0 = 1.$$

Dans ce cas  $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$  sont fonctions linéaires de  $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots$ , et en particulier sont non corrélés avec  $\varepsilon_t$ . Projetant la relation AR sur le passé de  $Y$ , on obtient :

$$E(X_t / X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) = \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i}.$$

Ainsi, le bruit blanc est aussi l'innovation puisque :

$$X_t - E(X_t / X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) = \varepsilon_t.$$

Lorsque les racines de  $\Phi(z)$  sont de module différent de 1, On peut montrer que, quitte à changer de bruit blanc, on peut toujours supposer que ces racines sont de module supérieur à 1. Mais si certaines racines de  $\Phi(z) = 0$  sont de module inférieur à 1, alors  $\varepsilon_t$  n'est pas l'innovation. [27]

### Remarque 1.2.1.

\* Un processus autoregressif (AR) est toujours inversible d'après la définitions de l'inversibilité.

- \* Pour l'existence d'une solution stationnaire causale il faut que les racines du polynôme soient inférieure à 1.
- \* Un processus MA(q) est toujours stationnaire (car défini à partir d'un bruit blanc stationnaire).
- \* Un processus MA(q) est toujours causale par définition de la causalité..[27] [30] [23]

### 1.2.3 Processus ARMA (p,q)

#### Définition 1.2.3.

On dit que le processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  suit un modèle ARMA(p,q). S'il est défini par la relation suivante :

$$X_t - \sum_{j=1}^p \phi_j X_{t-j} = \sum_{k=0}^q \theta_k \varepsilon_{t-k}.$$

$$X_t = \sum_{j=1}^p \phi_j X_{t-j} + \sum_{k=0}^q \theta_k \varepsilon_{t-k}.$$

Où les  $\phi_k, \theta_k$  sont des nombres réels et  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ . Le modèle peut aussi écrit [1] :

$$\left(1 - \sum_{j=1}^p \phi_j B^j\right) X_t = \left(1 - \sum_{k=0}^q \theta_k B^k\right) \varepsilon_t.$$

Ou :

$$\Phi(B)X_t = \Theta(B)\varepsilon_t.$$

#### ♣ stationnarité ARMA(p,q)

Un processus ARMA(p,q) est stationnaire si le polynôme  $\Phi(B)$  admet des racines en dehors du cercle unité en module. [30]

#### ♣ causalité ARMA(p,q)

Un processus ARMA(p,q) est dit causal s'il existe des constantes  $\psi_j$  tels que  $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$  est :

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}.$$

La condition de la causalité est équivalente à :

$$\Phi(X) = 1 - \phi_1 X_1 - \phi_2 X_2 - \dots - \phi_p X_p = 0 \Rightarrow |X| > 1.$$

La détermination des coefficients  $\psi_j$  se fait par identification :

$$\Phi(B)X_t = \Theta(B)\varepsilon_t \Rightarrow X_t = \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)}\varepsilon_t = \Psi(B)\varepsilon_t.$$

Tel que :  $\Phi(B)\Psi(B) = \Theta(B)$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)(\psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots + \psi_p B^p) \\ = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_p B^p). \end{aligned}$$

En développant cette relation et par identification, on peut vérifier que les coefficients  $\psi_j$  se calculent comme suit :

$\psi_0 = 1, \psi_1 - \phi_1 \psi_0 = \theta_1, \psi_2 - \phi_1 \psi_1 - \phi_2 \psi_0 = \theta_2$ . Et d'une manière générale, on a :

$$\psi_j - \sum_{k=1}^p \phi_k \psi_{j-k} = \theta_j \quad \text{pour } j = 0, 1, 2, \dots$$

Où

$\theta_0 = 1, \theta_j = 0$  pour  $j > q$  et  $\psi_j = 0$  pour  $j < 0$ . [25]

### ♣ Inversibilité du processus ARMA(p,q)

#### Théorème 1.2.2.

Soit  $X_t$  un processus ARMA(p,q). On suppose que  $\Phi(z)$  et  $\Theta(z)$  qu'ils ne partagent pas une valeur de zéros. Alors il existe une suite  $\{\pi_k\}$  causale absolument sommable telle que :

$$Z_t = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k X_{t-k}.$$

Si et seulement si  $\Theta(z)$  pour  $Z \leq 1$ . On dit alors que le modèle ARMA(p,q) est inversible. La suite  $\pi_k$  est la suite des coefficients du développement en série de  $\frac{\Phi(z)}{\Theta(z)}$  dans le disque  $\{Z : |z| < 1\}$ . [8]

#### Démonstration.

Remarquons que la notion d'inversibilité, comme celle de causalité, est bien relative au modèle



ARMA(p,q) lui-même et pas uniquement au processus  $X_t$ . Un modèle ARMA(p,q) est causal et inversible lorsque les racines des polynôme  $\Phi(z)$  et  $\Theta(z)$  sont toutes situées à l'extérieur du filtre unité. Dans ce cas,  $X_t$  et  $Z_t$  se déduisent mutuellement l'un de l'autre par des opérations de filtrage causal, la réponse impulsionnelle de chacun de ces filtres étant à phase minimale (c-à-d inversible causale-ment).[8]

**Exemple 1.2.1. ARMA(1,1)**

Considérons un processus ARMA(1,1) de représentation minimale :

$$X_t - \phi X_{t-1} = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}.$$

On a donc  $|\phi| < 1$  et  $|\theta| < 1$ . Déterminons le développement en moyenne mobile infinie.

On a

$$\begin{aligned} X_t &= \sum_{j=0}^{+\infty} \phi^j (\varepsilon_{t-j} - \theta \varepsilon_{t-j-1}). \\ &= \varepsilon_t \sum_{j=1}^{+\infty} (\phi^j - \theta \phi^{j-1}) \varepsilon_{t-j}. \\ &= \varepsilon_t + (\phi - \theta) \sum_{j=1}^{+\infty} \phi^{j-1} \varepsilon_{t-j}. \end{aligned}$$

On peut directement calculer la fonction d'auto-covariance ou d'auto-corrélation à partir de cette expression. La variance  $\gamma(0)$  vaut

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \sigma^2 \left( 1 + (\phi - \theta)^2 \sum_{j=1}^{+\infty} \phi^{2(j-1)} \right) \\ &= \sigma^2 \left( 1 + \frac{(\phi - \theta)^2}{1 - \phi^2} \right). \end{aligned}$$

De plus  $h > 0$ .

$$Cov(X_t, X_{t+h}) = \sigma^2 \left( (\phi - \theta) \phi^{h-1} + (\phi - \theta)^2 \phi^h \sum_{j=1}^{+\infty} \phi^{2(j-1)} \right).$$

On voit alors que

$$\gamma(h) = \sigma^2 \left( (\phi - \theta) \phi^{h-1} + \frac{(\phi - \theta)^2 \phi^h}{1 - \phi^2} \right).$$

## 1.3 Processus non stationnaires ARIMA et SARIMA

Un processus non stationnaire est un processus qui ne satisfait pas l'une ou l'autre de ces deux conditions. Ainsi, l'origine de la non-stationnarité peut provenir d'une dépendance du moment d'ordre 1 (l'espérance) par rapport au temps ou d'une dépendance de la variance ou des autocovariances par rapport au temps.

### 1.3.1 Processus ARIMA

Lorsque l'on a une série  $X_t$  à non-stationnarité stochastique, il convient de la modéliser à l'aide d'un processus ARIMA(p,d,q) où d désigne l'ordre de différenciation (ou d'intégration).

#### notons

$\Delta$  l'opérateur de différenciation  $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ .

L'opérateur de différenciation d'ordre K correspondant est :

$$\Delta^k X_t = \Delta(\Delta^{k-1} X_t).$$

On peut remarquer  $\Delta X_t = (1 - B)X_t$  et plus généralement :

$\Delta^d X_t = (1 - B)^d X_t$ . Ainsi un processus ARIMA est défini ainsi :

#### Définition 1.3.1.

• Une série stationnaire  $X_t$  admet une représentation ARIMA(p,d,q) minimale s'il satisfait :

$$\Phi_p(B)(1 - B)^d X_t = \Theta_q(B)\varepsilon_t. \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Avec :

$$\Phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p.$$

$$\Theta_q(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q.$$

Avec les conditions suivantes :

- i-  $\phi_p \neq 0$  et  $\theta_q \neq 0$ .
- ii-  $\Phi$  et  $\Theta$  polynôme de degré resp p et q, n'ont pas de racines communes et leurs racines sont de module  $> 1$ .
- iii- Où  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}} \sim \text{bb}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ .

- Un processus  $ARIMA(p,d,q)$  convient pour modéliser une séries temporelle comprenant une tendance polynômiale de degré  $d$  en une constante pour estimer d'une modèle  $ARIMA$ , on procède de même que pour un  $ARMA$  sur le processus différence  $(1 - B)^d X_t$ . [36]

**Remarque 1.3.1.**

Si  $d=0$  on obtient un processus  $ARMA(p,q)$ .

**1.3.2 Processus SARIMA**

Le processus SARIMA est un modèle ARIMA dans lequel une composante saisonnière est ajoutée.

**Définition 1.3.2.**

Soient  $p,q,d$  et  $s \geq 0$ , un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un processus  $SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_s$  (multiplicatif saisonnier auto-régressif moyenne mobile intégré) s'il vérifie l'équation :

$$\begin{aligned} \nabla^d \Phi_p(B) \nabla_s^D \Phi_P(B^s) X_t &= \Theta_q(B) \Theta_Q(B^s) \varepsilon_t. \\ (1 - B)^d \Phi_p(B) (1 - B^s)^D \Phi_P(B^s) X_t &= \Theta_q(B) \Theta_Q(B^s) \varepsilon_t. \end{aligned}$$

Où

- $\nabla^d = (1 - B)^d$ .
- $\nabla_s^D = (1 - B^s)^D$ .
- $\Phi_p(B) = 1 + \phi_1 B + \dots + \phi_p B^p$  Où  $(\phi_1, \dots, \phi_p) \in \mathbb{R}$  et  $\phi_p \neq 0$ .
- $\Phi_P(B^s) = 1 + \phi_1 B^s + \dots + \phi_p B^{Ps}$ .
- $\Theta_q(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q$  Où  $(\theta_1, \dots, \theta_q) \in \mathbb{R}$  et  $\theta_q \neq 0$ .
- $\Theta_Q(B^s) = 1 + \theta_1 B^s + \dots + \theta_q B^{Qs}$ .
- Les polynôme  $\Phi_p(B), \Phi_P(B^s), \Theta_q(B), \Theta_Q(B^s)$  sont à coefficient inconnus.
- $(s)$  correspond à la période du processus SARIMA qu'on peut identifier regardant l'auto-corrélogramme.
- Les entiers  $d$  et  $D$  sont choisis de sorte que la série différenciée  $(1 - B)^d (1 - B^s)^D X_t$  soit stationnaire.
- Les ordres  $p$  et  $q$  s'obtiennent comme pour les modèles  $ARMA(p,q)$  (auto-corrélation partielle et simple).
- Les ordres  $P$  et  $Q$  en regardent les order de  $S$  de l'auto-corrélogramme. [24][29][30]

## 1.4 Processus TS et DS

Dans ce dernier cas, la non stationnarité du processus  $(X_t, t \in \mathbb{Z})$  tient au fait que les chocs  $\varepsilon_t$  s'accumulent au cours du temps, ce qui accroît la variance de  $X_t$  au fur et à mesure que le temps passe.

L'origine de la non stationnarité provient ici de l'accumulation de chocs stochastiques  $\varepsilon_t$  :

la non stationnarité peut donc être de type stochastique. Le fait que la stationnarité puisse être de type déterministe ou stochastique nous amène à présent à définir la classe des processus TS (Trend Stationary), qui correspondent à une non stationnarité de type déterministe et la classe des processus DS (Differency Stationary), qui correspondent à une non stationnarité de type stochastique.

Cette distinction selon l'origine de la non stationnarité est essentielle tant sur le plan statistique que sur le plan de l'analyse économique.

### 1.4.1 Les processus TS

Commençons par définir ce qu'est un processus TS pour Trend Stationary, selon la terminologie proposée par Nelson et Plosser(1982).

#### Définition 1.4.1.

$(X_t, t \in \mathbb{Z})$  est un processus TS s'il peut s'écrire sous la forme

$X_t = f(t) + \varepsilon_t$  où  $X_t = f_t + \varepsilon_t$  où  $f(t)$  est une fonction du temps (où déterministe du temps) et  $\varepsilon_t$  est un processus stochastique stationnaire.

Dans ce cas, le processus  $X_t$  s'écrit comme la somme d'une fonction déterministe du temps et d'une composante stochastique stationnaire, éventuellement de type ARMA.

En effet, on montre immédiatement que :

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E(f_t + \varepsilon_t). \\ &= f_t + E(\varepsilon_t). \\ &= f_t + 0, \quad \text{comme } \varepsilon_t \sim N(0, 1). \\ &= f_t. \end{aligned}$$

La définition d'un processus stationnaire.[10]

#### Exemple 1.4.1.

L'exemple le plus simple d'un processus TS ou la fonction  $f_t$  est une fonction polynomial d'ordre

1.

On pose  $f(t) = a_0 + a_1t$  et  $X_t = a_0 + a_1t + \varepsilon_t$  avec  $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2, \varepsilon_t \sim i.i.d (0, \sigma^2)$ . Dans ce cas, on vérifie que le processus  $X_t$  est non stationnaire.  $E(X_t) = E(a_0 + a_1t + \varepsilon_t) = a_0 + a_1t$ .

On a  $X_t - (\hat{a}_0 + \hat{a}_1t) = \varepsilon_t$  est un bruit blanc, par définition stationnaire.

## 1.4.2 processus DS

Comme nous l'avons précédemment mentionné, il existe une autre forme de non stationnarité, provenant non pas de la présence d'une composante déterministe tendancielle, mais d'une source stochastique. C'est pourquoi nous allons à présent introduire la définition des processus DS pour Difference Stationary.

### Définition 1.4.2.

Un processus non stationnaire  $(X_t, t \in \mathbb{Z})$  est un processus DS (Difference Stationary) d'ordre  $d$ , où  $d$  désigne l'ordre d'intégration, si le processus filtré défini par  $(1 - B)^d X_t$  est stationnaire. On dit aussi que  $(X_t, t \in \mathbb{Z})$  est un processus intégré d'ordre  $d$ , noté  $I(d)$ . Ainsi, on peut définir une classe de processus stochastiques qui ne satisfont pas les conditions de la stationnarité, mais dont la différence à l'ordre  $d$  satisfait elle les propriétés de la stationnarité.[16]

### Exemple 1.4.2.

Si un processus non stationnaire, on dit que ce processus est DS, intégré d'ordre un, noté  $I(1)$ , si le processus défini par la différence première :

$$\begin{aligned} \Delta X_t &= (1 - B)X_t \\ &= X_t - BX_t \\ &= X_t - X_{t-1}. \end{aligned}$$

Est quant à lui stationnaire.

### propriété 1.4.1.

Un processus non stationnaire  $(X_t, t \in \mathbb{Z})$  est un processus DS intégré d'ordre  $d$ , noté  $I(d)$ , si le polynôme  $\Phi(B)$  définit l'opérateur retard  $B$ , associé à sa composante auto-régressive admet  $d$  racines unitaires :

$$\Phi(B)X_t = \varepsilon_t$$

avec

$$\Phi(B) = (1 - B)^d \tilde{\Phi}(B).$$

Où  $\varepsilon_t$  est un processus stationnaire, et si les racines du polynôme  $\Phi(B)$  sont toutes supérieures strictement à l'unité en module.[10]

## 1.5 Test de linéarité

Avant de construire un modèle non-linéaire, il est recommandé de vérifier qu'un modèle linéaire ne suffit à modéliser correctement la série. Il peut arriver (surtout si les séries temporelles sont courtes) que l'on estime - avec succès - un modèle non-linéaire alors que la vraie relation sous-jacente est linéaire.

Le danger est alors de compliquer inutilement la construction du modèle. Tester la linéarité peut alors aider à ne pas compliquer à outrance, mais cela peut, en outre, aider pour la spécification du type de non-linéarité. Un type de test sont alors utilisés :

- Les tests contre un modèle non-linéaire spécifique (comme les tests du multiplicateur de Lagrange et le test du Cusum).

### 1.5.1 Le test du multiplicateur de Lagrange (LM)

L'estimation de modèles non-linéaires est en général plus difficile que celle des modèles linéaires, il est naturel de considérer des tests qui, bien qu'avec des alternatives non-linéaires spécifiques, ne requièrent pas l'estimation de ces alternatives.

Tester l'hypothèse de linéarité contre l'alternative fournie par les modèles à seuil revient à tester l'hypothèse nulle suivante :

$$H_0 : \phi_0^{(1)} = \phi_0^{(2)} \text{ et } \phi_i^{(1)} = \phi_i^{(2)} \quad \text{contre} \quad H_1 : X_t = \begin{cases} \phi_0^{(1)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(1)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{(1)} & \text{si } X_{t-d} \leq r. \\ \phi_0^{(2)} + \sum_{i=1}^q \phi_i^{(2)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{(2)} & \text{si } X_{t-d} > r. \end{cases}$$

Le processus  $(\varepsilon_t)$  bruit blanc gaussien,  $(\varepsilon_t) \sim (0, \sigma^2)$ .

La statistique du test du multiplicateur de Lagrange est :

$$LM = \hat{\sigma}^{-2} \left[ \sum \hat{Z}_{1,t} \hat{\varepsilon}_t \right]' \left[ \widehat{M}_{11} - \widehat{M}_{10} \widehat{M}_{00}^{-1} \widehat{M}_{01} \right] \left[ \sum \hat{Z}_{1,t} \hat{\varepsilon}_t \right].$$

$$\text{Où : } \begin{cases} \widehat{Z}_{0,t} = (-1, X_{t-1}, \dots, X_{t-p})' & \text{et} & \widehat{M}_{ii} = \sum \widehat{Z}_{i,t} \widehat{Z}_{i,t} \quad \text{pour } i = 0, 1. \\ \widehat{Z}_{1,t} = \begin{pmatrix} -1, X_{t-1}, \dots, X_{t-p} \\ -1, X_{t-1}, \dots, X_{t-p} \end{pmatrix}' & & \widehat{M}_{01} = \widehat{M}_{10} = \sum \widehat{Z}_{i,t} \widehat{Z}_{i,t}. \end{cases}$$

- Il est possible de montrer que sous  $H_0$ , LM est asymptotiquement distribuée comme un chi-deux à  $p$  degrés de liberté.[5]

### 1.5.2 Le test du CUSUM

Le test du CUSUM permet de détecter l'existence de régimes ou de seuil. Il consiste à reclasser les observations suivant les variables de transition.

On estime alors les paramètres de manière récursive et on considère les sommes cumulées des résidus obtenus.

Dans le cas d'un modèle SETAR, on suppose que l'on connaît le délai  $d$ , et que l'on dispose des observations  $X_{t-d}, \dots, X_0, \dots, X_T$ . On ordonne les observations  $X_1, \dots, X_n$  selon les valeurs de  $X_{1-d}, \dots, X_{t-d}$ . Soient  $X_{(1)}^T, \dots, X_{(T)}^T$  les observations ainsi réordonnées. Pour tout  $j$ , on considère le modèle linéaire suivant :

$$X_{(i)}^T = \sum_{k=1}^p \phi_k^j X_{(i)-K} + \varepsilon_{(j)}^T \text{ pour tout } i \leq j.$$

L'hypothèse ( $H_0$ ) est alors  $\phi_j = \phi, \phi_k^j = \phi_k$  pour tout  $k$ , et l'hypothèse alternative ( $H_1$ ) est que ( $H_0$ ) n'est pas vérifiée.[1]

### 1.5.3 Test du rapport de la vraisemblance

Supposons qu'on s'intéresse à tester l'hypothèse linéaire générale suivante :

$$H_0 : C' \underline{b} = \beta \quad \text{contre} \quad H_1 : \underline{b} \in \mathbb{R}^{K+1}.$$

- C'est à dire on regarde si les données statistique prévoient des raisons pour la rejeter ou non ,selon en seuil ,  $\alpha$  prédéterminé.

- le test du rapport de fonction de vraisemblance , associé au modèle de régression adjacent et qui est , sous l'hypothese de normalité donnée par :

$$\mathcal{L}(y; b; \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (y - \underline{X}b)' (y - \underline{X}b) \right\}.$$

Ce test consiste en les étapes suivante :

1/- On calcul la valeur maximal de la fonction de la vraisemblance  $\mathcal{L}(\cdot)$ , sous l'hypothèse  $H_0$ , dite hypothèse nulle ,cette valeur est note  $\max \mathcal{L}_{H_0}$ .

2/- On calcul la valeur maximal de la fonction de la vraisemblance  $\mathcal{L}(\cdot)$ , sous l'hypothèse  $H_1$ , dite hypothèse nulle ,cette valeur est note  $\max \mathcal{L}_{H_1}$ .

Par définition le rapport de la vraisemblance , donnée par :

$$\mathcal{L} = \frac{\max \mathcal{L}_{H_0}}{\max \mathcal{L}_{H_1}}.$$

Et le test du rapport de la vraisemblance consiste à ne pas rejeter, au seuil  $\alpha$  nulle si :

$$\mathcal{L} = \frac{\max \mathcal{L}_{H_0}}{\max \mathcal{L}_{H_1}} > \lambda.$$

Pour une certaine valeur de  $\lambda$  à déterminer, à partir des données statistiques disponible.

Concernant la valeur  $\max \mathcal{L}_{H_0}$ , est d'après les résultats obtenus en estimations sous la contraintes, donnée par [15] :

$$\begin{aligned} \max \mathcal{L}_{H_0} &= (2\pi\tilde{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\tilde{\sigma}^2} (\underline{y} - \underline{X}\tilde{b})' (\underline{y} - \underline{X}\tilde{b}) \right\}. \\ &= \left( 2\pi \frac{SSE + QH}{n} \right)^{-\frac{n}{2}} \exp \left( -\frac{n}{2} \right). \end{aligned}$$

Et la valeur  $\max \mathcal{L}_{H_1}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \max \mathcal{L}_{H_0} &= (2\pi\tilde{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\tilde{\sigma}^2} (\underline{y} - \underline{X}\hat{b})' (\underline{y} - \underline{X}\hat{b}) \right\}. \\ &= \left( 2\pi \frac{SSE}{n} \right)^{-\frac{n}{2}} \exp \left( -\frac{n}{2} \right). \end{aligned}$$

Alors, le rapport de la vraisemblance est donnée :

$$\mathcal{L} = \frac{\max \mathcal{L}_{H_0}}{\max \mathcal{L}_{H_1}} = \frac{SSE}{SSE + QH}.$$

#### 1.5.4 Critères d'information

Revenons à l'ordre ARMA (p,q), nous avons vu plus haut que l'examen de pour l'auto-corrélation et l'auto-corrélation partielle peut permettre un nombre présélectionné de modèles. Une fois que les paramètres de ces modèles sont estimés à, nous pouvons choisir quel critère minimise les éléments suivants :

##### AIC (AKaiKe Information Criterion)

Ce qui est généralement préféré lorsque le but de l'étude est de produire des prédictions et qui est défini par :

$$AIC(p, q) = -2 \log L + 2(p + q).$$

##### BIC (Bayesian Information Criterion)

En général, il est préférable que le but de l'étude soit d'ajuster la série observée, qui est définie par :

$$BIC(p, q) = -2 \log L + (p + q) \log T.$$



Où

$\log L$  : la log-vraisemblance du modèle ARMA( $p, q$ ) estimé.

$T$  : le nombre d'observations.

Les modèles ayant la plus petite valeur du critère devront être choisis. [19] [3]

## Processus non linéaire

### Introduction

Il existe des séries temporelles, particulièrement dans la finance (par exemple : les indices des prix, les indices boursiers, l'inflation, taux de change, ...) dont la modélisation des différentes caractéristiques est difficile à obtenir par des modèles linéaires de type ARMA, car ces modèles sont incapables de capter toutes les asymétries cycliques. Les variations instantanées alors un grand intérêt est accordé aux spécifications non linéaires, ces modèles introduisent une distribution significative entre les phases d'expansion et les phases de récession, ils sont alors suffisamment flexibles et permettant de tenir compte des différentes spécifications et des relations correspondant à chaque phase. Parmi les modèles non linéaires, on peut citer les modèles ARFIMA(p,d,q) les modèles autoregressives à seuil TAR(p) (Tong, 1978), les modèles SETAR (Terasvirta et Addison, 1992), les modèles ESTAR (exponentiel STAR), les modèles bilinéaires BL(p,q,P,Q) (Granger et Joyeux, 1980 et Hosking 1981) et les modèles ARCH et GARCH.

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la famille des modèles à changement de régime (SETAR, ESTAR, STAR et TAR).

Nous allons tout de même appliquer un test de non linéarité pour justifier ce choix, et montrer qu'effectivement ces séries sont non linéaires.

## 2.1 Les processus ARCH et GARCH

Le processus **ARCH**(q) (Autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques) est le modèle de base des processus **ARCH** proposé par engle (1982) lors d'une étude sur la variance de l'inflation en grand bretagne.

Le modèles **ARCH**(q) est basé sur une paramétrisation quadratique de la variance conditionnelle  $\sigma_t^2$  apparaît comme une fonction linéaire des q valeur passées du processus du carré des innovation.

### 2.1.1 Hétéroscédasticité

#### Définition 2.1.1.

Le modèle est dit hétéroscédastique si  $E(\varepsilon_n^2/\varepsilon_{n-1})$  n'est pas constant.[7]

#### Définition 2.1.2.

En statistique. On parle d'hétéroscédasticité lors que les variances des variables examinée sont différentes .

La notion d'hétéroscédasticité s'oppose à celle d'homoscédasticité, qui correspond au cas où la variance de l'erreur des variables est constante. Tandis que dans le cas d'homoscédasticité, nous avons  $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2 \forall i$  , nous avons désormais  $Var(\varepsilon_i) = \sigma_i^2 \forall i$  , où  $\sigma_i^2$  peut être différent de  $\sigma_j^2$  , pour  $i \neq j$ . [20]

### 2.1.2 Processus ARCH

L'hypothèse fondamentale sous-tendant les **ARCH** linéaires est la symétrie des spécifications quadratiques de la variance conditionnelles des erreurs.

#### Définition 2.1.3.

Un processus  $X_t$  satisfait une représentation ARCH(q) si :

$$X_t = \varepsilon_t \sqrt{h_t}$$

avec :

$$h_t = a_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i X_{t-i}^2.$$

et où  $\varepsilon_t$  désigne un bruit blanc faible tel que  $E(\varepsilon_t) = 0$  et  $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$ .

Pour ce type de processus, on retrouve les deux propriétés essentielles vues précédemment, à

savoir la propriété de différence de martingale (ou bruit blanc faible)  $E(X_t/X_{t-1}) = 0$  et la propriété de variance conditionnelle variable dans le temps puisque :

$$\text{Var}(X_t/X_{t-1}) = h_t = a_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i X_{i-1}^2$$

et  $\alpha_0, \alpha_i$  constant  $\forall i$ . [9]

### Propriétés des processus ARCH

#### propriété 2.1.1.

On peut noter que pour tout  $s < 1$  :

$$E(X_t/I_{t-s}) = 0.$$

Pour démontrer cela utilisons la propriété des espérances itérées. En effet, on a :

$$\begin{aligned} E(X_t/I_{t-1}) &= E(E(X_t/I_{t-1})/I_{t-s}). \\ &= E(0/I_{t-s}). \\ &= 0 \quad , \forall s < 1. \end{aligned}$$

Car  $I_{t-s} \subset I_{t-1}$  ,  $\forall s < 1$ . [13]

#### propriété 2.1.2.

La variance conditionnelle du processus  $X_t$  satisfaisant une représentation **ARCH**(1), définie par l'équation  $X_t = \varepsilon_t \sqrt{h_t}$  est non constante dans le temps et vérifie :

$$\text{Var}(X_t/I_{t-1}) = \alpha_0 \left[ \frac{1 - \alpha_1^s}{1 - \alpha_1} \right] + \alpha_1^s X_{t-s}^2, \quad \forall t.$$

C'est la propriété centrale des processus **ARCH**, le processus  $X_t$  a une variance conditionnelle qui dépend du temps. En effet, On sait que  $E[X_t/I_{t-s}] = 0$  dès lors,  $\text{Var}[X_t/I_{t-s}] = E[X_t^2/I_{t-s}]$ . Considérons le processus  $X_t^2$  défini par la relation :

$$X_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \varepsilon_t$$

où  $\varepsilon$  est un bruit blanc faible. Par itération successive. [7]

**propriété 2.1.3.**

Les auto-covariances conditionnelles du processus  $X_t$ , **ARCH**(1), définies par l'équation :  $X_t = \varepsilon_t \sqrt{h_t}$  sont nulles

$$\text{Cov}[\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k} / I_{t-s}] = 0, \forall k, s \geq 1.$$

Le processus est donc un processus sans mémoire conditionnellement à  $I_{t-s}, \forall s > 1$  .[20]

**Remarque 2.1.1.**

L'absence de corrélations entre les valeurs d'un processus **ARCH** est une caractéristique très importante de cette famille de modèle, qui les rend utiles pour modéliser certaines séries financières. Toute, ces propriétés peuvent être généralisées au cas d'un processus **ARCH**( $p$ ).[2]

### 2.1.3 Processus GARCH

**Définition 2.1.4.**

Un processus  $X_t$  satisfait une représentation **GARCH**( $p, q$ ) si :

$$X_t = \varepsilon_t \sqrt{h_t} \quad \text{avec} \quad h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j X_{t-j}^2.$$

Où  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc faible et où :

$$\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, p \quad \text{et} \quad \beta_j \geq 0, j = 1, \dots, q.$$

$X_t$  admet pour moments conditionnels :

$$E(X_t / X_{t-1}) = 0$$

$$\text{Var}(X_t / X_{t-1}) = h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i X_{t-i}^2 \quad \text{si} \quad \text{Var}(\varepsilon_t) = 1.$$

Le modèle **GARCH** peut être représenté comme un modèle **ARMA** dans les erreurs au carré.

Tout comme pour le modèle **ARCH**, on peut par inversion exprimer le processus  $X_t^2$  sous la forme (d'un processus **ARMA** défini dans une innovation), on a :

$$\begin{aligned} h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i X_{t-i}^2. \\ X_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}^2 + (X_{t-i}^2 - h_t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Avec :  $\mu = X_{t-i}^2 - h_t$ .

Introduisant cette notation dans l'équation (2.1), il vient :

$$X_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j (X_{t-j}^2 + \mu_{t-j}) + \mu_t.$$

D'où l'on tire que

$$X_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) X_{t-i}^2 + \mu_t - \sum_{j=1}^q \beta_j \mu_{t-j}.$$

Avec la convention  $\alpha_i = 0$  pour  $i > p$  et  $\beta_i = 0$  pour  $i > q$ , en plus le processus  $X_t^2$  d'une représentation GARCH( $p, q$ ) peut être représenté sous la forme d'un processus ARMA [ $\max(p, q), p$ ] avec innovations :

$$\mu_t = X_t^2 - \text{Var}(X_t/X_{t-1}).$$

**Note bien :** Ce modèle a les mêmes propriétés que le modèle ARCH( $p$ ). [13][9]

## Propriétés de processus GARCH

### propriété 2.1.4.

Le processus  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc, si  $E(\varepsilon_t^2) < \infty$  [20] :

On a :

$$E[\varepsilon_t] = E[E(\varepsilon_t/I_{t-1})] = 0.$$

Et

$$\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}] = E[\varepsilon_{t-k} E(\varepsilon_t/I_{t-1})] = 0, \quad \forall k > 0.$$

### propriété 2.1.5.

Une condition nécessaire de l'existence de la variance d'un processus GARCH ( $p, q$ ) est :

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1.$$

[20]

**Proposition 2.1.1.**

Si le processus  $X_t$  satisfait une représentation GARCH( $p,q$ ) conditionnellement gaussienne, telle que :

$$X_t = \varepsilon_t + \sqrt{h_t}$$

$$\text{Var}(X_t/X_{t-1}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} = h_t$$

où  $\varepsilon_t$  désigne bruit blanc faible gaussien, alors

(i) La loi marginale de  $\varepsilon_t$  a des queues plus épaisses qu'une loi normale (distribution leptokurtique) :

$$E(X_t^4) \geq 3[E(X_t^2)]^2.$$

(ii) Son coefficient d'excès de kurtosis peut s'exprimer sous la forme suivante [9] :

$$\text{Excès de Kurtosis} = \frac{E(X_t^4)}{[E(X_t^2)]^2} - 3 = 3 \frac{\text{Var}[E(X_t^2/X_{t-1})]}{[E(X_t^2)]^2}.$$

**Remarque 2.1.2.**

Si cette condition est vérifiée avec les contraintes de non négative donnée ci-dessus, elle est également suffisante. Donc le processus GARCH est faiblement stationnaire ou stationnaire au second ordre.[20]

## 2.2 Processus ARFIMA

Les processus ARFIMA qui sont les modèles le plus simples présentant la longue mémoire . Le processus à mémoire longue très répandu est le processus auto-régressif fractionnaire intégré et à moyenne mobile dit processus ARFIMA( $p,d,q$ ) où  $p$  représente le nombre de coefficient de la partie AR,  $d$  le paramètre de mémoire et  $q$  le nombre de coefficients de la partie MA.

### 2.2.1 Les processus ARFIMA(0,d,0)

Les processus ARFIMA(0,d,0) noté  $(X_t)$  encore appelé bruit fractionnaire  $FN(d, \sigma^2)$ , où  $d$  est le paramètre de mémoire ou paramètre de différenciation fractionnaire et  $\sigma^2$  la variance de l'innovation est une classe particulière de processus ARFIMA( $p,d,q$ ) dans laquelle les polynôme  $\Phi(B)$  et  $\Theta(B)$  des parties AR et MA sont réduits à l'opérateur identité  $I$ .

Ainsi il se définit par :

**Définition 2.2.1.**

Soit  $d \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ ,  $X_t$  est un processus ARFIMA(0,d,0) s'il satisfait l'équation :

$$(1 - B)^d X_t = \varepsilon_t$$

$$X_t = (1 - B)^{-d} \varepsilon_t.$$

$\varepsilon_t \sim bb(0, \sigma^2)$  et  $B$  l'opérateur retard ( $B^j X_t = X_{t-j}$ ) .[12]

**Remarque 2.2.1.** On a :[12]

$$(1 - B)^{-d} = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j B^j$$

et

$$\Pi(B) = \frac{\Gamma(j - d)}{\Gamma(j + 1)\Gamma(-d)}$$

alors :

$$(1 - B)^{-d} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j + d)}{\Gamma(j + 1)\Gamma(d)}.$$

**Théorème 2.2.1.**

Soit  $X_t$  un processus ARFIMA(0,d,0) lorsque  $d < \frac{1}{2}$ ,  $X_t$  est un processus stationnaire et possède une représentation moyenne mobile infinie :

$$X_t = \psi(B)\mu_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \mu_{t-k}.$$

Où

$$\psi_k = \frac{\Gamma(k + d)}{\Gamma(d)\Gamma(k + 1)}.$$

Et  $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k = \frac{k^{d-1}}{\Gamma(d)}$ .

Lors que  $d > -\frac{1}{2}$   $X_t$  est un processus inversible et possède une représentation auto-régressive infinie :

$$\pi(B)X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k X_{t-k} = \mu_t.$$

Où

$$\pi_k = \frac{\Gamma(k - d)}{\Gamma(-d)\Gamma(k + 1)}.$$

Et  $\lim_{k \rightarrow \infty} \pi_k = \frac{k^{-d-1}}{\Gamma(-d)}$ .



### Fonction d'auto-covariance

Supposons que  $-\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2}$  et que  $\mu_t$  soit de variance unitaire, alors :

$$\gamma_k = \frac{\Gamma(1-2d)\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)\Gamma(k+1-d)}.$$

Avec :  $\gamma_k \rightsquigarrow \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)}K^{2d-1}$  quand  $K \rightarrow +\infty$ . [31]

### 2.2.2 ARFIMA(p,d,q)

#### Définition 2.2.2.

Soit  $d \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ ,  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un processus ARFIMA(p,d,q) si  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est une solution stationnaire de l'équation :

$$\Phi(B)X_t = \Theta(B)(1-B)^{-d}\varepsilon_t \quad (2.2)$$

Où  $\Phi$  et  $\Theta$  sont des polynômes premiers entre eux de degré respectif p et q et  $\varepsilon_t$  un processus de bruit blanc  $(0, \sigma^2)$ .

On voit immédiatement que  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un processus ARFIMA(p,d,q) ssi  $X_t = (1-B)^d X_t$  est un processus ARMA(p,q).

On peut remarquer aussi, que si de plus  $\Theta(z)$  n'a pas de zéro dans le disque unité fermé, alors le processus  $Y_t = \Phi(B)\Theta^{-1}(B)X_t$  vérifie  $(I-B)^d Y_t = \varepsilon_t$  et  $\Phi(B)X_t = \Theta(B)Y_t$ , on peut donc voir un processus ARFIMA(p,d,q) comme un processus "ARMA(p,q)" conduit par un bruit fractionnaire [12].

#### Théorème 2.2.2.

Considérons un processus ARFIMA(p,d,q) défini par (2.2). Supposons que les polynômes  $\Phi(z)$  et  $\Theta(z)$  n'ont aucun zéro en commun et que  $d \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . alors :

- si les zéros de  $\Phi(B)$  sont à l'extérieur du cercle unité  $\{z : |z| = 1\}$ , alors il existe une unique solution stationnaire pour (2.2) donnée par :

$$X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j \varepsilon_{t-j}.$$

où  $\psi(z) = (1-z)^{-d} \frac{\Theta(z)}{\Phi(z)}$ .

- Si les zéros de  $\phi(z)$  sont à l'extérieur du disque unité  $\{z : |z| \leq 1\}$ , alors la solution Y est causale.

- Si les zéros de  $\theta(z)$  sont à l'extérieur du disque unité  $\{z : |z| \leq 1\}$ , alors la solution Y est inversible. [28]

**Remarque 2.2.2.**

D'après le théorème (2.2.2), si les racines des polynômes  $\Phi(B)$  et  $\Theta(B)$  sont à l'extérieur du disque unité et  $d \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  alors le processus ARFIMA( $p, d, q$ ) est stationnaire, causal et inversible. Dans ce cas, on a [12] [28] :

$$X_t = (1 - B)^{-d} \Phi(B)^{-1} \Theta(B) \varepsilon_t = \Psi(B) \varepsilon_t.$$

et

$$\varepsilon_t = (1 - B)^d \Phi(B) \Theta(B)^{-1} X_t = \Pi(B) X_t.$$

## 2.3 Processus Bilinéaires

Ces modèles ont été introduits par Granger et Andersen (1978) en économie. Ils permettent de modéliser des séries présentant des périodes de très forte volatilité, suivies de périodes de calme. Du fait de cette caractéristique les processus bilinéaires ont été initialement dans le domaine financier.

**Définition 2.3.1.**

Les processus bilinéaires notés  $BL(p, q, P, Q)$ , s'il peut être écrit sous la forme :

$$X_t = \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^Q b_{ij} X_{t-j} \varepsilon_{t-j}.$$

Où  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc,  $\phi_i, \theta_j$  et  $b_{ij}$  sont des réels. [32]

**Remarque 2.3.1.**

Un processus bilinéaire est dit [31] :

- Super diagonal si  $P > Q$ .
- Diagonal si  $P = Q$ .
- Sous diagonal si  $P < Q$ .

**Exemple 2.3.1.**

Processus  $BL(0, 0, 2, 1)$  de type :

$$X_t = \varepsilon_t + \lambda X_{t-2} \varepsilon_{t-1}. \quad (2.3)$$

Où  $\lambda \in \mathbb{R}$  et où  $\varepsilon_t$  est i.i.d( $0, \sigma_\varepsilon^2$ ) . Ce processus est de moyenne nulle car :

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E(\varepsilon_t) + \lambda E(X_{t-2}\varepsilon_{t-1}). \\ &= E(\varepsilon_t) + \lambda E(X_{t-2})E(\varepsilon_{t-1}). \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sa fonction d'auto-covariance  $\gamma(h) = E(X_t X_{t-h})$  est définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= E(\varepsilon_t + \lambda X_{t-2}\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-h} + \lambda X_{t-2-h}\varepsilon_{t-1-h}). \\ &= E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-h}) + \lambda^2 E(X_{t-2}\varepsilon_{t-1} X_{t-2-h}\varepsilon_{t-1-h}) + \lambda E(X_{t-2}\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-h}) + \lambda E(\varepsilon_t X_{t-2-h}\varepsilon_{t-1-h}). \end{aligned}$$

Pour  $h > 0$ , il n'apparaît aucun terme en  $\varepsilon_{t-h}^2$  et puisque l'opérateur espérance est linéaire, la fonction  $\gamma(h)$  est par conséquent nulle. En revanche, pour  $h = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= E(\varepsilon_t^2) + \lambda^2 E(X_{t-2}^2)E(\varepsilon_{t-1}^2). \\ &= \sigma_\varepsilon^2 + \lambda^2 E(X_{t-2}^2)\sigma_\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Ainsi la fonction génératrice d'auto-covariance s'écrit :

$$E(X_t X_{t-h}) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 + \lambda^2 E(X_{t-2}^2)\sigma_\varepsilon^2 & \text{si } h = 0. \\ 0 & \text{si } h \geq 1. \end{cases}$$

Examinons la variance et la variance conditionnelle du processus  $X_t$  défini par ce processus bilinéaire  $BL(0, 0, 2, 1)$ . La variance du processus  $X_t$  sous la condition d'ergodicité  $\lambda^2 \sigma_\varepsilon^2 < 1$  est obtenue par la solution de l'équation de récurrence :

$$\sigma_{X,t}^2 - (\lambda^2 \sigma_\varepsilon^2) \sigma_{X,t-2}^2 - \sigma_\varepsilon^2 = 0$$

On montre alors que la variance marginale s'écrit  $\text{Var}(X_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1-\lambda^2 \sigma_\varepsilon^2)}$  . Parallèlement, la variance conditionnelle du processus  $X_t$  se dérive directement à partir de l'équation (2.5).

$$\text{Var}(X_t/X_{t-2}) = \sigma_\varepsilon^2 [1 + \lambda^2 X_{t-2}^2].$$

La variance conditionnelle du processus  $X_t$  dépend des valeurs passées de ce processus.[9]

## 2.4 Les processus auto-régressifs à seuil

Les modèles auto-régressifs à seuils OÙ modèles à changement de régimes indépendants constituent l'une des spécifications possibles de la grande famille des modèles non-linéaires, appelés modèles à régime. L'idée consiste à postuler l'existence de plusieurs dynamiques pour une même série (plusieurs régimes) et à spécifier un mécanisme de transition d'un régime à l'autre.

Les modèles à seuils ont été introduit par Tong (1978). Il existe toute une classe de modèle suivant la définition retenue de la fonction de transition : TAR, STAR, ESTAR , SETAR etc.. Le modèle le plus simple est le modèle SETAR (Self Exciting Threshold AutoRegressive) introduit par Tong, mais popularisé par Hansen (1996).

### Processus auto-régressifs généraux

Le modèle auto-régressif univarié général est de la forme :

$$X_t = f(z_t) + \varepsilon_t.$$

Où  $z_t$  est un vecteur pouvant inclure les variables retardées  $X_{t-1}, \dots, X_{t-p}$ .

Dans le cas où la fonction  $f$  n'est pas linéaire en le passé de  $X_t$  et  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc.[14]

### 2.4.1 Processus TAR

Le modèle non linéaire le plus élémentaire est le modèle auto-régressif à seuil limite notes TAR ( Threshold Autoregressive) , Il est définit comme suit :

#### Définition 2.4.1.

Un processus non linéaire  $\{X_t, t > 0\}$  suite le modèle auto-régressif à seuil limité , noté  $TAR(p)$ .

Un modèle TAR d'ordre  $p$  satisfait l'équation suivante :

$$X_t = \begin{cases} \phi_0^{(1)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(1)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{(1)} & \text{si } X_{t-d} < r_1. \\ \phi_0^{(2)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(2)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{(2)} & \text{si } r_1 < X_{t-d} < r_2. \\ : & : \\ \phi_0^{(k)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(k)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{(k)} & \text{si } X_{t-d} > r_{k-1}. \end{cases}$$

Avec :  $d$  entier positif appelé paramètre délai (ou retard).

$r_j$  ,  $j = 1, \dots, k - 1$ , sont les paramètres délai pour les quels le système passe d'une régime à

l'autre.

$X_{t-d}$  les variable de seuil. les  $\{\varepsilon_t^{(1)}, \dots, \varepsilon_t^{(k)}\}$  sont bruit blancs non corrélés.[15]

**Théorème 2.4.1. (chan,petrucelli,Tong et Woolford 1985)**

Un processus TAR(1) à k régime est ergodique si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée [22] :

- $\phi_1^{(1)} < 1, \phi_1^{(k)} < 1, \phi_1^{(1)}\phi_1^{(k)} < 1.$
- $\phi_1^{(1)} = 1, \phi_1^{(k)} < 1, \phi_0^{(1)} > 0.$
- $\phi_1^{(1)} < 1, \phi_1^{(k)} = 1, \phi_0^{(k)} < 0.$
- $\phi_1^{(1)} = 1, \phi_1^{(k)} = 1, \phi_0^{(k)} < 0 < \phi_0^{(1)}.$
- $\phi_1^{(1)}\phi_1^{(k)} = 1, \phi_1^{(k)} < 0, \phi_0^{(k)} + \phi_1^{(k)}\phi_0^{(1)} > 0.$

**2.4.2 Processus STAR**

Les méthodes préconisées ci-dessus dans le cadre des modèles TAR ont toutes une particularité commune : les changements décrits par le modèle à seuils se font de manière brutale. Les modèles STAR (Smooth Transition Autoregressive où à transition souple), proposés par Chan et Tong (1986), Luukkonen, Saikkonen et Teräsvirta (1988), et Teräsvirta (1994), introduisent une progressivité dans le processus du changement (transition lisse, ou souple). Une interprétation intéressante de la transition lisse est suggérée par Granger et Teräsvirta (1997), selon lesquels le changement au niveau agrégé sera plus adéquatement représenté par un modèle STAR si l'économie est constituée d'un grand nombre d'individus ou de firmes dont chacun change de régime de façon brutale mais à des dates différentes. Dans le cas simple caractérisé par une seule fonction de transition qui vient pondérer les équations différentes AR à deux dynamiques différentes dans lesquelles on suppose pour simplifier l'égalité des variances des résidus ,un modèle STAR à deux régimes.Il est défini comme suit :

**Définition 2.4.2.**

Un modèle STAR d'ordre p s'écrit :

$$X_t = H_1(X_{t-1}, \dots, X_{t-p}) + H_2(X_{t-1}, \dots, X_{t-p}) \times F(S_t; \gamma, c) + \varepsilon_t.$$

Où  $H_1$  et  $H_2$  sont des fonctions (linéaire ou non linéaire) des valeurs passées de  $X_t$ .

$F(S_t; \gamma, c)$  est la fonction de transition d'un état à un autre (comprise entre 0 et 1),  $S_t$  étant la variable de transition , la variable de transition peut être une variable endogène retardée( $X_{t-1}$ , étant le paramètre délai) ou une variable exogène ,  $\varepsilon_t \sim i.i.d (0, \sigma_\varepsilon^2)$ .

Dans le cas où  $H_1$  et  $H_2$  sont des fonctions linéaires, on peut écrire le modèle  $STAR(p)$  comme suit :

$$X_t = \sum_{i=1}^p \phi_{1i} X_{t-i} + \left( \sum_{i=1}^p \phi_{2i} X_{t-i} \right) F(S_t; \gamma, c) + \varepsilon_t. \quad (2.4)$$

Soit encore :

$$X_t = \phi'_1 Z_t (1 - F(S_t; \gamma, c)) + \phi'_2 Z_t (1 - F(S_t; \gamma, c)) + \varepsilon_t.$$

Où  $Z_t = (X_{t-1}, \dots, X_{t-p})$  et  $\phi_i = (\phi_{1i}, \dots, \phi_{ip})'$  pour  $i = 1, 2$ . [11][31]

### Théorème 2.4.2. chang et Tong

Si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée[31] :

- $p = 1, d = 1, \phi_{11} < 1, \phi_{11} + \phi_{21} < 1, \phi_{11}(\phi_{11} + \phi_{21}) < 1.$
- $\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \left( \sum_{i=1}^p |\phi_{1i} + \alpha \phi_{2i}| \right) < 1.$

alors le processus  $X_t$  Défini en (2.4) est un processus ergodique et il existe un seul processus stationnaire vérifiant(2.4).

### 2.4.3 Processus LSTAR

#### Définition 2.4.3.

Un modèle  $LSTAR$ (logistic  $STAR$ ), on peut écrire comme suit :

$$X_t = \sum_{i=1}^p \phi_{1i} X_{t-i} + \left( \sum_{i=1}^p \phi_{2i} X_{t-i} \right) F(S_t; \gamma, c) + \varepsilon_t.$$

soit encore :

$$X_t = \phi'_1 Z_t (1 - F(S_t; \gamma, c)) + \phi'_2 Z_t (1 - F(S_t; \gamma, c)) + \varepsilon_t.$$

et  $F(S_t; \gamma, c)$  est une fonction logistique :

$$F(S_t; \gamma, c) = [1 + \exp(-\gamma(S_t - c))]^{-1}.$$

Où  $\varepsilon_t \sim i.i.d(0, \sigma_\varepsilon^2)$  et  $Z_t = (X_{t-1}, \dots, X_{t-p})$  et  $\phi_i = (\phi_{1i}, \dots, \phi_{ip})'$  pour  $i = 1, 2$ . [26][11]

### 2.4.4 Processus SETAR

Parmi les modèles a seuils existants, nous retenons ceux dans lesquels la transition entre les régimes est brutale (modèle SETAR) pour le cas des transitions douces.

Les modèles SETAR (” Self-Exciting Threshold autoregressive ”) sont le prolongement des

modèles de classe TAR (” Threshold autoregressive ”) introduits par Tong et Lim(1980). L’idée sous-jacente de ce type d’approche est qu’une relation peut être non linéaire sur la période globale considérée mais linéaire par sous périodes.

**Définition 2.4.4.**

Un processus non linéaire  $X_t, t \geq 0$  suit un modèle self-exciting thershold autoregressive modeles SETAR  $(k, p_1, \dots, p_k, d)$  à  $k$  régimes , s’il est solution de l’équation caractéristique aux différence stochastiques suivantes :

$$X_t = \begin{cases} \phi_0^{(1)} + \sum_{i=1}^{p_1} \phi_i^{(1)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{(1)} & \text{si } X_{t-d} < r_1. \\ \phi_0^{(2)} + \sum_{i=1}^{p_2} \phi_i^{(2)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{(2)} & \text{si } r_1 \leq X_{t-d} < r_2. \\ : & : \\ \phi_0^{(k)} + \sum_{i=1}^{p_k} \phi_i^{(k)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{(k)} & \text{si } X_{t-d} \geq r_{k-1}. \end{cases}$$

avec :  $d$  entier positif appelé paramètre délai (ou retard).

$r_j, j = 1, \dots, k - 1$ , sont les paramètre délai pour les quels le système passe d’une régime à l’autre.

$X_{t-d}$  les variable de seuil. les  $\{\varepsilon_t^{(1)}, \dots, \varepsilon_t^{(k)}\}$  sont bruit blancs non corrélés. La valeur seuil donne une première interprétation économique des régimes définissant la dynamique de proces- sus .[22]

**Lemme 2.4.3.**

Un modèle à deux régimes ( $k = 2$ ), on constate que le processus SETAR suit un certain régime  $AR(p)$  quand  $X_{t-d} \leq r$ , et tombe dans régime  $AR(p)$  différent à la période suivante si :  $X_{t-d+1} > r$ , et lorsque la valeur seuil  $r$  est nulle on définit deux états :un régime croissante positive et un régime croissante négative.[15]

**Remarque 2.4.1.**

On notera que ces modèles permettent de prendre en cosidération des structures de retards différentes pour chaque sous période étudiée , et donc de mener une modélisation relativement souple .[22]

**Remarque 2.4.2.**

Un cas particulier de ce type de modèle est lorsque les ordres des retards sont les mêmes pour toutes les équation , c’est à dire  $p_i = p \forall i$  on dira que les modèles SETAR se ramènent aux modèles thershold autoregressive (TAR).[31]

**Exemple 2.4.1.**

Soit un modèle SETAR( $k,p,d$ ) où tous les AR sont du même ordre  $P$  :

la condition nécessaire et suffisante de stationnarité et  $\max_k \sum_i^p |\phi_{ki}| < 1$  et si  $p = 1$  cette condition de vient  $\max_k |\phi_{k1}| < 1$  , ce qui revient à imposer la stationnarité de chacun des  $k$  processus AR(1).

Dans un modèle à deux régimes , les conditions à la fois nécessaires et suffisantes sont connues et correspondent aux contraintes :  $\phi_{11} < 1$  ,  $\phi_{21} < 1$  et  $\phi_{11}\phi_{21} < 1$ , selon la condition suffisant de Chang est alors trop restrictive et il est possible de construire un modèle SETAR stationnaire dans lequel un des régimes est gouverné par AR non stationnaire. [15]

## 2.5 Identification , spécification et estimation du modèle SETAR et STAR

### 2.5.1 Identification d'un modèle SETAR

Dans cette parties , nous exposons la procédure d'identification de tong et lim (1980) . La technique de tong et lim (1980) repose essentiellement sur l'utilisation du critère d'information d'AKAIKE (AIC).

- considérons le modelés SETAR(2,p,q), ce choix permet de simplifier la représentation dans la mesure où une seuil  $r$  est à estimer :

$$X_t = \begin{cases} \phi_0^{(1)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(1)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{(1)} & \text{si } X_{t-d} \leq r. \\ \phi_0^{(2)} + \sum_{i=1}^q \phi_i^{(2)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{(2)} & \text{si } X_{t-d} > r. \end{cases}$$

**Trois étapes** sont nécessaires à l'application de la méthode de Tong et Lim :

- **étape 1** : On commencer par se fixer arbitrairement un ensemble de valeurs pour le paramètre de délai  $d$  et pour le seuil  $r$  .On estime chacun des deux modèles par les méthodes des moindres carrés ordinaires (MCO) en choisissant les valeurs de  $p$  et  $q$  qui minimisent le critère d'information AIC. On calcul un critère AIC global égal à la somme des deux critères AIC déterminés pour chaque modèle.
- **étape 2** : On cherche ici à identifier la valeur du seuil .On conserve fixée la valeur de  $d$  et l'on fait varier la valeur  $r$  . On répète la première étape pour les différence valeurs de  $r$  et l'on retient comme valeur optimale de seuil celle qui minimise le critère AIC global.



• **étape 3** : Cette étape a pour objet de déterminer la valeur optimale de  $d$  , à cette fin , on répète les deux étapes précédentes pour chaque valeur choisie de  $d$  l'on retient comme valeur optimale du paramètre de délai celle qui minimise le critère AIC global.

Cette technique est très coûteuse en termes de temps de calcul.

Il existe une autre procédure , plus directe , afin de choisir la variable de transition et donc

le paramètre de délai  $d$ . On utilise pour cela les résultats des tests de linéarité . L'idée générale sous-jacente est en effet que la linéarité sera d'autant plus fortement rejetée que le modèle SETAR (donc non linéaire) sera bien spécifié. En d'autres termes , le test de linéarité est d'autant plus puissant que la variable de transition est correctement choisie . Une stratégie consiste alors à appliquer les tests de linéarité pour plusieurs valeurs du paramètre de délai  $d$  ( $1 \leq d \leq p$ ) et à retenir comme valeur de  $d$  celle pour laquelle la linéarité est la plus fortement rejetée (c-à-d celle qui minimise la probabilité du test)[15].

## 2.5.2 Spécification d'un modèle SETAR

La spécification du modèle à seuil nécessite de choisir certains paramètres qui ne peuvent être estimés par des méthodes usuelles. Il s'agit du nombre de régresseurs ainsi que du paramètre définissant la variable de transition. Ils sont alors sélectionnés préalablement à l'estimation des autres paramètres du modèle. Pour faire choisir on fait recours aux tests de linéarité contre l'alternative donnée par le modèle à seuil .

### Choix des régresseurs

Le choix des régresseurs, c'est à dire les  $k$  variables explicatives et les  $p$  retards de l'endogène, du modèle à seuil s'effectue sur la base de critères d'information (AIC, BIC, Hannan), du test du portemanteau et du test de significativité du retard le plus élevé présent dans la régression.

Cette première étape est très importante puisque le modèle linéaire constitue l'hypothèse nulle du test de linéarité. Comme le fait remarquer Teräsvirta (1994) dans le cadre d'un modèle STAR, si le retard auto-régressif est sur-estimé, cela peut avoir un effet inverse sur la puissance du test (comparé au cas où  $p$  serait connu). Alternativement, si le retard sélectionné est trop faible et qu'il reste de l'auto-corrélation résiduelle, les tests de linéarité sont biaisés (la linéarité est rejetée à tort).

### Choix de la variable de transition

Le choix de la variable de transition, ou l'estimation du paramètre de délai dans un modèle TAR ,ne relève pas des méthodes usuelles. En effet, la fonction de vraisemblance n'est pas dérivable par rapport à ce paramètre. Par conséquent La variable de transition est choisie par une procédure particulière, basée sur les résultats des tests de linéarité. Sachant que cette variable est inconnue , on construit le test de linéarité pour toutes les variables de transition possibles, i.e. Pour l'ensemble des variables  $X$  ou pour toutes les valeurs du paramètre de délai  $d$  telles que  $(1 \leq d \leq p)$  dans le cas du modèle TAR.

On retient en suite la variable de transition pour laquelle la linéarité est la plus fortement rejetée, c'est-à-dire celle qui minimise la probabilité du test. En effet le test de linéarité est d'autant plus puissant que la variable de transition est bien choisie.

Les méthodes de spécification du modèle à seuil proposées par Tsay (1989) et par Hansen (1996) incorporent un test de linéarité est une procédure de détection du seuil[6].

### Procédure de spécification de Tsay (1989)

Afin de simplifier la présentation du test , considérons un processus  $TAR(p)$  à deux régimes :

$$X_t = \begin{cases} \phi_0^{(1)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(1)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{(1)} & \text{si } X_{t-d} \leq r. \\ \phi_0^{(2)} + \sum_{i=1}^q \phi_i^{(2)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{(2)} & \text{si } X_{t-d} > r. \end{cases} \quad (2.5)$$

Soit encore :

$$X_t = \begin{cases} \phi_0^{(1)} + \phi_i^{(1)} X_t + \varepsilon_t^{(1)} & \text{si } X_{t-d} \leq r. \\ \phi_0^{(2)} + \phi_i^{(2)} X_t + \varepsilon_t^{(2)} & \text{si } X_{t-d} > r. \end{cases}$$

avec  $X_t = (X_{t-1}, \dots, X_{t-p})'$  ,  $\phi^{(j)} = (\phi_1^{(j)}, \dots, \phi_p^{(j)})$  , pour  $j = 1, 2$ .

et  $\varepsilon_t$  *i.i.d*  $(0, \sigma_\varepsilon^2)$ .

- **étape 1** : On estime un modèle autoregressif usuel d'ordre  $p$  sur la série et l'on se donne un ensemble de valeurs possible pour le paramétriser de retard  $d$ .

- **étape 2** : Cette étape consiste à effectuer le test de linéarité de Tsay (1989) ce test reprend la logique des tests de type CUSUM adapté aux modèles à seuil par petrucelli et Dries (1986) . Pour mener à bien le test de linéarité , on ordonne les observations selon les valeurs croissante de la variable de seuil . On obtient alors deux régressions : la première est relative aux  $r$  premières

observation correspondant aux faibles valeurs de la variable de seuil , le seconde correspond à l'autre régime , le modèle ordonné ainsi obtenu correspond au modelé (2.5) dans lequel le seuil se suit entre  $r^{\text{ème}}$  et la  $(r + 1)^{\text{ème}}$  observation ordonnée et s'ecrit :

$$X_t = \begin{cases} \phi_0^{(1)} + \phi_i^{(1)} X_{(l)} + \varepsilon_{(l)}^{(1)} & \text{pour les } r \text{ premières observation de } \mathbb{Z}. \\ \phi_0^{(2)} + \phi_i^{(2)} X_{(l)} + \varepsilon_{(l)}^{(2)} & \text{pour les observation restantes.} \end{cases} \quad (2.6)$$

Où  $Z$  est la variable de seuil ( $Z_t = X_{t-d}$ ) et  $L$  est l'ordre correspondant au classement des observations selon les valeurs croissantes de la variable de seuil  $Z_{(l)} \leq Z_{(l)+1}, (l) \in L$  cette régression ordonnée en  $(l)$  est estimé de façon récursive pour chaque valeur de  $d$ . Sur la base du modèle ordonné (2.6), l'hypothese nulle testée est :  $H_0 : \phi_i^{(1)} = \phi_i^{(2)}$  pour  $i = 0, 1, \dots, p$ .

la statistique de test de linéarité de Tsay (1989) , notée  $Q(p)$  est donnée par :

$$Q(p) = \frac{\sum \hat{\varepsilon}_t^2 - \sum \hat{\mu}_t^2}{\sum \hat{\mu}_t^2} \frac{T-K-2p-1}{p+1}$$

où les  $\hat{\varepsilon}_t$  les résidus  $\varepsilon_t$  normalisés ,  $\hat{\mu}_t$  sont les résidus de la régression de  $\hat{\varepsilon}_{(l)}$  sur  $(1, X'_l)$  et  $K$  est le nombre d'observations utilisées pour initialiser les estimation récursive . Sous l'hypothèse nulle de linéarité la statistique  $Q(p)$  suite une loi de fishier à  $(p + 1, T - K - 2p + 1)$  degrés de liberté . Si l'hypothèse nulle est rejetée , on pour suit la procédure et l'on . Retient comme variable de seuil , celle qui maximise la statistique du test de Tsay (1989). Ou de manière équivalente celle qui minimise la probabilité du test associée.

On peut prendre  $K = \frac{T}{10} + p$  dans le cas d'une modèle auto-régressif de type TAR . Nous proposons  $K = \max(\frac{1}{10}, p + 3)$ .

• **étape 3** : On cherche à déterminer la valeur du façon graphique une méthode couramment employée consiste à représenter graphiquement les t student des coefficients auto-régressifs estimés de manière récursive et à repérer le moment où une rupture apparaît.

L'idée sous-jacente est la suivante : dans le modèle ordonnée (2.5) le processus associé aux  $r$  premières observations est linéaire , dés que l'on introduit l'observation dont la valeur correspond au seuil , le processus de vient une combinaison de deux régression . La trajectoire des résidus récursifs et des autres statistique va alors de déforme en passant par la valeur du seuil. On repère ainsi la seuil de façon graphique en portant sur l'axe des abscisses la variable de du seuil ordonnée et sur l'axe des ordonnées statistique considérée (notamment , les t de student des coefficient autoregressifs estimées) le seuil est ainsi donné par le première rupture repérée.

• **étape 4** : On estime le modèle SETAR par les méthodes de régression usuelles , connaissant le seuil et le paramètre de délai.[15] [31]

### Procédure de spécification de Hansen (1996)

Le test de linéarité qu'il propose est fonction de ces deux paramètres.

- **étape 1** : On estime un modèle auto-régressif usuel d'ordre  $p$  sur la série et on note  $\hat{\varepsilon}_t$  les résidus estimés. On se donne un ensemble de valeurs possibles pour le paramètre de délai  $d$ .
- **étape 2** : Pour chaque valeur du paramètre de délai on procède à un test de linéarité du type multiplicateur de Lagrange (LM). On calcul ainsi une séquence de statistiques LM(c) pour toutes les valeurs possibles du seuil  $r$ , c'est à dire pour toutes les observations de la variable de seuil :

$$LM(r) = S(r)' . I(r) . S(r)$$

et  $S(r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_t \hat{\varepsilon}_t(r)$ .

Où  $S(r)$  est le score du modèle à seuil estimé sous  $H_0$ , et  $I(r)$  est la matrice d'information de Fisher.

On calcule les statistiques  $SupLM(r)$ ,  $expLM(r)$  et  $moyLM(r)$ , Où  $expLM(r)$ . Si l'hypothèse nulle de linéarité est rejetée , on poursuit la procédure et l'on retient comme valeur du paramètre de délai celle qui maximise les statistiques  $SupLM(r)$ ,  $expLM(r)$  et  $moyLM(r)$ .

- **étape 3** : La valeur du seuil est estimée en minimisant la variance résiduelle du modèle SETAR estimé parmi toutes les valeurs possibles du paramètre de délai.
- **étape 4** : On estime le modèle SETAR par les méthodes de régression usuelles connaissant le seuil et le paramètre de délai [31].

### Estimation d'un modèle SETAR

L'estimation des modèles SETAR nécessite l'estimation de plusieurs paramètres : Le nombre de régime ( nombre de seuil), le paramètre de retard  $d$  , la valeur des seuil  $c_j, j = 1, \dots, k - 1$ . Ainsi que les coefficients auto-régressifs relatifs à chaque régime. Pour un ensemble donné d'observation  $X_t = (y_{t-1}, \dots, y_{t-p})'$ . Et pour une valeur de paramètre de délai  $d$  et de seuil  $c$  les estimateurs par moindres carrés ordinaires des coefficients auto-régressifs  $\phi_i^j, i = 0, \dots, p$ . Du régime sont asymptotiquement normaux (Chan et Tong 1986). Ils minimisent la somme des carrés des résidus du régime  $j$  :

$$SSE^{(j)} = \sum_{t \in K^{(j)}} (Y_t - \phi_0^{(j)} - \phi^{(j)} X_t)^2.$$

Où  $k(j)$  est l'ensemble ( $p < t \leq n : W_t$  appartient au régime  $j$ ) . L'estimateur de la matrice de variance-covariance des coefficients estimée est donnée par :

$$\hat{V}^j = \sigma_{(j)}^2 (X'X)^{-1}.$$

où  $X = (1; X'_t)_{i \in K(j)}$  ,et  $\sigma_{(j)}^2 = \frac{SSE(j)}{n_j - (p+1)}$ .

$n_j$  est le nombre d'observation dans le régime  $j$ . [22]

### 2.5.3 Estimation d'un modèle STAR

Une fois la variable de transition  $S_t$  et la fonction de transition  $G(S_t, \gamma, c)$  ont été sélectionnés. L'étape suivante du cycle de modélisation est l'estimation des paramètres du modèle STAR.

Notons  $\theta$  est vecteur des paramètres  $\theta = (\phi'_1, \phi'_2, \gamma, c)'$ .

$\theta_0$  est vecteur vrais paramètres . Pourez être estimé comme :

$$Q(\hat{\Theta}) = \arg \min_{\theta} Q(\Theta) = \arg \min_{\theta} \sum_{t=p}^{T-1} (X_t - f(\theta, \psi_{t-1}))^2.$$

Où  $T$  est le nombre d'observation ,  $f(\theta, \psi_{t-1}) = E_{\theta}[X_t/\psi_{t-1}]$ . Et  $\psi_t = \sigma(X_s, s \leq t)$  et posons  $\hat{\sigma} = \frac{Q(\hat{\Theta})}{T}$ .

Soit la matrice  $\mathcal{V}$  définie positive telle que :

$$\mathcal{V} = E_{\theta_0} \left[ \frac{\partial f(\theta_0, \psi_p)}{\partial \theta_i} \frac{\partial f(\theta_0, \psi'_p)}{\partial \theta_j} \right].$$

Chan et Tong (1986) ont alors montrè que :

- Il existe une suite d'estimateurs  $\hat{\Theta}$  tels que  $\hat{\Theta} \rightarrow \hat{\Theta}_0$  près que sûrement.
- Pour  $\varepsilon > 0$  , il existe un évènement  $E$ , avec  $\mathbb{P}(E) = 1 - \varepsilon$  et  $T_0$  tel que :  $T > T_0$ ,  $Q(\Theta)$  attenigue un minium relatif en  $\hat{\Theta}$  avec :

$$\sqrt{T}(\hat{\Theta} - \Theta_0) \longrightarrow N(0, \sigma^2 \mathcal{V}^{-1}).$$

et  $\hat{\sigma}^2 \xrightarrow[p.s.]{} \hat{\sigma}$ . [31][33]

## Simulations et Application

L'objectif de ce chapitre est de renforcer les résultats théoriques présentés précédemment , par le biais des simulations et une application empirique .Trois processus générateurs de type  $SETAR(2, p_1, p_2, d)$  et  $SETAR(3, p_1, p_2, p_3, d)$  , sont utilisés pour simuler des séries temporelle de taille petite , modérée et relativement grande ( $N=100,500,1000$ ).L'ordre du modèle SETAR est  $p_i=2,3$  ;  $i=1,2,3$  et le paramétrer de délai  $d=1,2$  (à titre d'essai) . Le vecteur des erreurs  $\{\varepsilon_t\}$  suit la loi normale de moyenne 0 et de variance 1.

Nous allons utiliser la bibliothèque tsDyn de logiciel R , version 4.0.5 pour cette partie empirique.

### 3.1 Simulations

Afin d'apprécier la performance des estimateurs discutés ainsi que la qualité de l'approximation asymptotique, nous entamons cette phase de simulation de quelques modèles SETAR pour des tailles 100,500 et 1000 et  $k=2,3$ .

#### 3.1.1 modèle SETAR(2,2,2,1)

Nous simulons tout d'abord le modèle SETAR (2,2,2,1) qui prend la forme suivante :

$$X_t = \begin{cases} 1 + 0.4X_{t-1} - 0.5X_{t-2} + \varepsilon_t & \text{si } X_{t-1} \leq 1. \\ 0.1X_{t-1} + 0.2X_{t-2} + \varepsilon_t & \text{si } X_{t-1} > 1. \end{cases}$$

Où encore :

$$X_t = (1 + 0.4X_{t-1} - 0.5X_{t-2})I(X_{t-d} \leq 1) + (0.1X_{t-1} + 0.2X_{t-2})(1 - I(X_{t-d} > 1)) + \varepsilon_t.$$

Avec :

$$I(X_{t-d} \leq 1) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_{t-1} \leq 1. \\ 0 & \text{si } X_{t-1} > 1. \end{cases}$$

Ce modèle peut être réécrite de façon équivalente comme suit :

$$X_t = (1 + 0.3X_{t-1} - 0.7X_{t-2})I(X_{t-d} \leq 1) + (0.1X_{t-1} + 0.2X_{t-2}) + \varepsilon_t. \quad (3.1)$$

Les résultats de simulation de modèle (3.1) sont présentés au tableau suivant :

On a :

$$\mathbf{Z}_c = \frac{| \text{Vraie valeur} - \text{Estimation moyenne} |}{\text{Écarte - type empirique}}$$

<b>N=100</b>	$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_2^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	$\phi_2^{(2)}$
Vraie valeur	1	0.3	-0.7	0	0.1	0.2
Estimation moyenne	1.04266	0.2019	-0.6693	0.0940	0.16336	0.13044
Écarte-type empirique	0.17367	0.11064	0.17774	0.54685	0.15812	0.26270
<b>Z<sub>c</sub></b>	0.2456383	4.5624548	3.0658265	1.3510103	0.4007083	2.9166349

TABLE 3.1 – Moyennes et écarts-types de modèle SETAR (2,2,2,1) avec N =100.

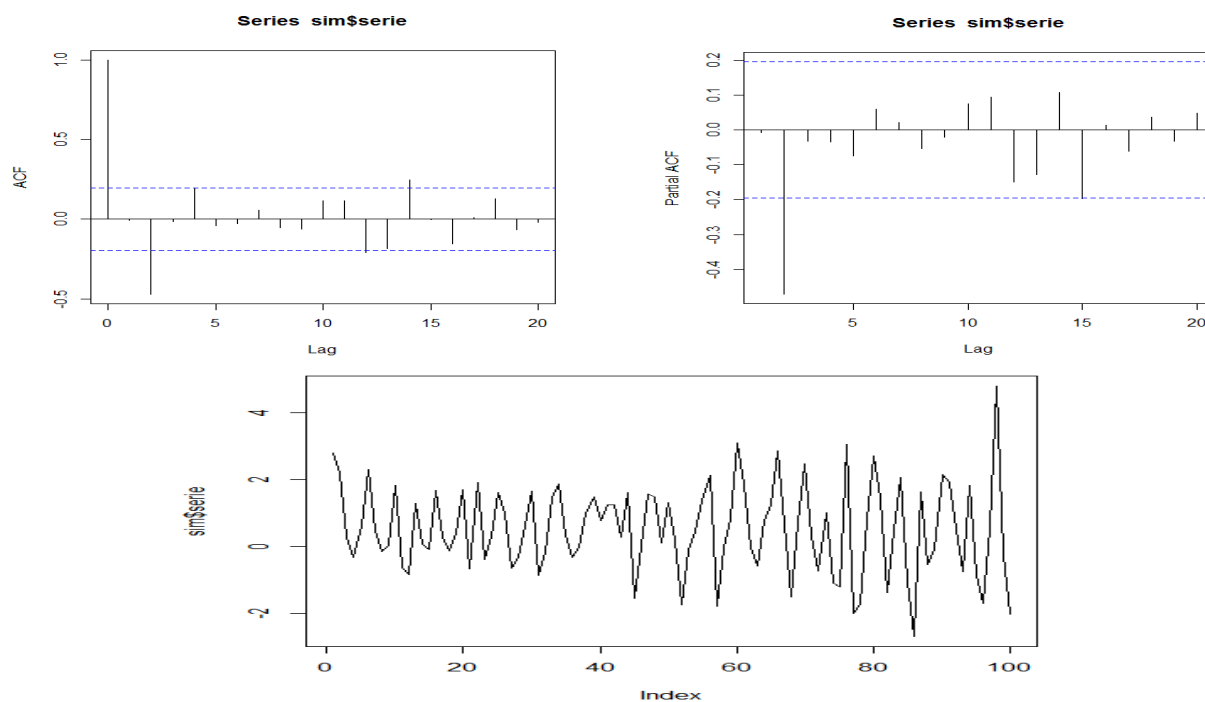


FIGURE 3.1 – Trajectoire, ACF et PACF du modèle SETAR(2,2,2,1) avec N=100

### 3.1.2 modèle SETAR(2,3,1,1)

Nous simulons le modèle SETAR(2,3,1,1) qui prend la forme suivante :

$$X_t = \begin{cases} 1 + 0.3X_{t-1} - 0.7X_{t-2} + X_{t-3} + \varepsilon_t & \text{si } X_{t-1} \leq 1. \\ 0.1 + 0.2X_{t-1} + \varepsilon_t & \text{si } X_{t-1} > 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Les résultats de simulation de modèle (3.2) sont présentés au tableau suivant :

<b>N=500</b>	$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_2^{(1)}$	$\phi_3^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$
Vraie valeur	1	0.3	-0.7	1	0.1	0.2
Estimation moyenne	0.197714	-0.182056	-0.457317	-0.140786	0.471414	-0.590105
Écarte-type empirique	0.086377	0.069855	0.050032	0.055999	0.275962	0.121808
<b>Z<sub>c</sub></b>	9.288190	6.900809	4.850556	20.371542	1.345888	6.486479

TABLE 3.2 – Moyennes et écarts-types de modèle SETAR (2,3,1,1) avec N=500 .



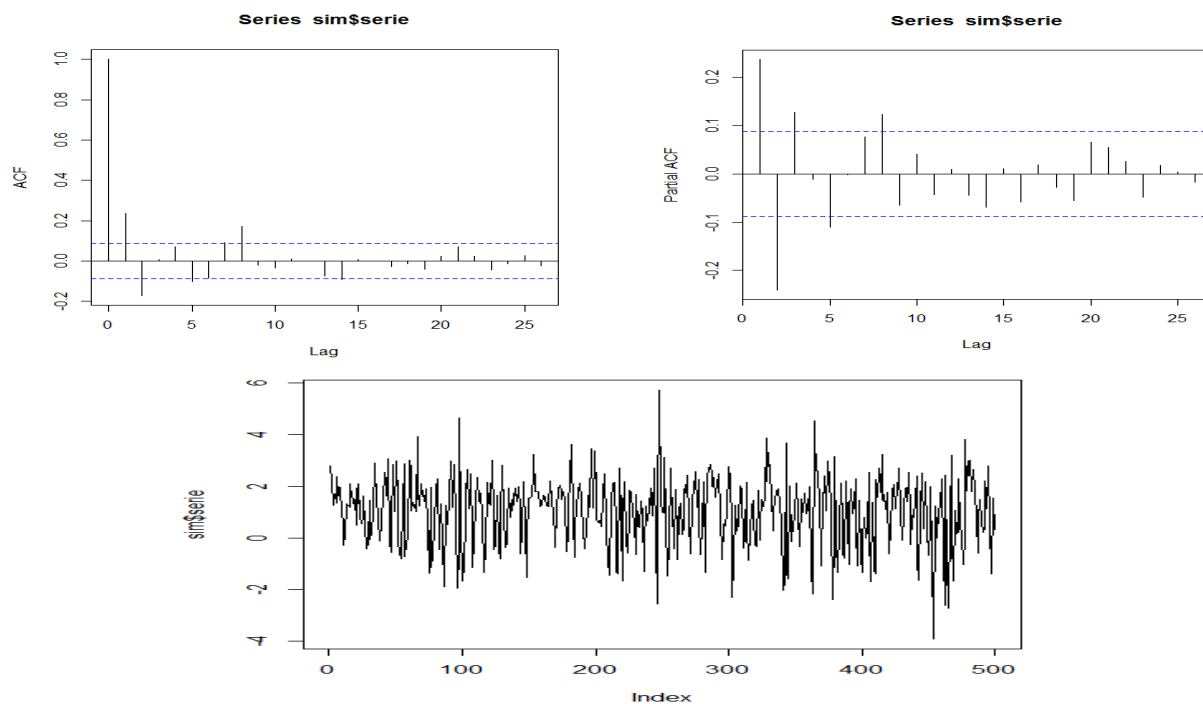


FIGURE 3.2 – Trajectoire, ACF et PACF du modèle SETAR(2,3,1,1) avec N=500 .

### 3.1.3 modèle SETAR(3,3,3,3,2)

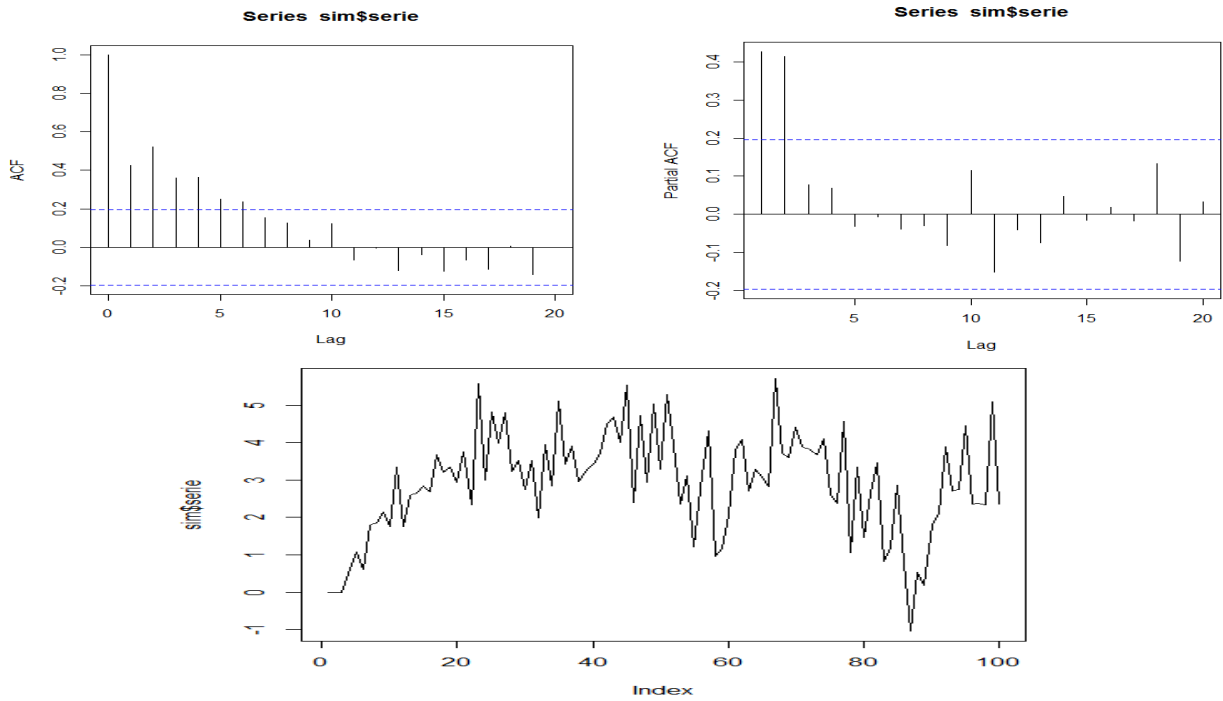
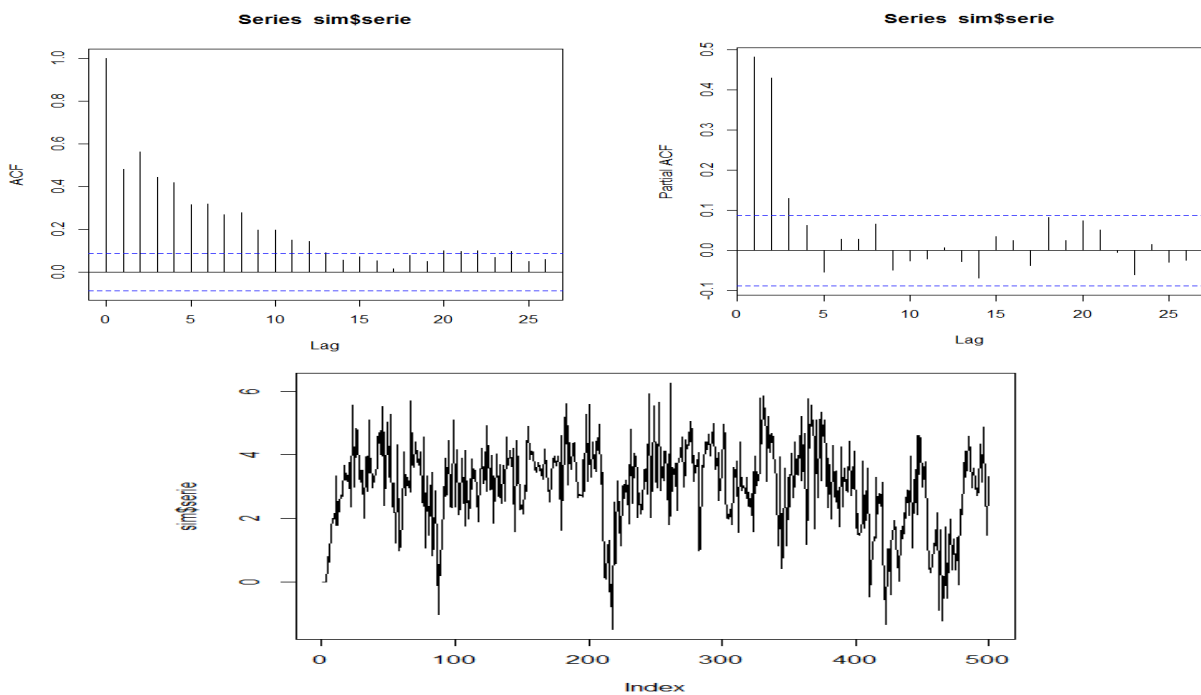
Nous simulons le modèle SETAR(3,3,3,3,2) qui prend la forme suivante :

$$X_t = \begin{cases} 1 - 0.1X_{t-1} + 0.2X_{t-2} - 0.5X_{t-3} + \varepsilon_t & \text{si } X_{t-2} < 1. \\ 0.5X_{t-1} + 0.3X_{t-2} + 0.6X_{t-3} + \varepsilon_t & \text{si } 1 \leq X_{t-2} < 2. \\ 1 + 0.2X_{t-1} + 0.4X_{t-2} + 0.1X_{t-3} + \varepsilon_t & \text{si } X_{t-2} \geq 2. \end{cases} \quad (3.3)$$

Les résultat de simulation de modèle (3.3) sont présente le table suivante :

<b>N=100</b>	$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_2^{(1)}$	$\phi_3^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$
Vraie valeur	1	-0.1	0.2	-0.5	0	0.5
Estimation moyenne	0.961381	-0.16527	0.21127	-0.50083	-0.40938	0.53870
Écarte-type empirique	0.572056	0.638021	0.564889	0.833286	1.697781	0.294118
<b>Z<sub>c</sub></b>	0.0675	0.1023	0.01995	0.00099	0.2411	0.1315
	$\phi_2^{(2)}$	$\phi_3^{(2)}$	$\phi_0^{(3)}$	$\phi_1^{(3)}$	$\phi_2^{(3)}$	$\phi_3^{(3)}$
Vraie valeur	0.3	0.6	1	0.2	0.4	0.1
Estimation moyenne	0.32026	-0.048433	1.077619	0.228778	0.397166	0.106302
Écarte-type empirique	0.382191	0.966117	0.669474	0.111129	0.114158	0.151040
<b>Z<sub>c</sub></b>	0.0530	0.6711	0.11598	0.2589	0.0248	0.0417
<b>N=500</b>	$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_2^{(1)}$	$\phi_3^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$
Vraie valeur	1	-0.1	0.2	-0.5	0	0.5
Estimation moyenne	0.999323	-0.098072	0.210717	-0.527195	-0.030497	0.506190
Écarte-type empirique	0.245729	0.145568	0.182960	0.276871	0.651211	0.117469
<b>Z<sub>c</sub></b>	0.00276	0.01324	0.05858	0.09822	0.04683	0.05269
	$\phi_2^{(2)}$	$\phi_3^{(2)}$	$\phi_0^{(3)}$	$\phi_1^{(3)}$	$\phi_2^{(3)}$	$\phi_3^{(3)}$
Vraie valeur	0.3	0.6	1	0.2	0.4	0.1
Estimation moyenne	0.325340	0.639998	1.032932	0.214642	0.406917	0.108584
Écarte-type empirique	0.100706	0.430096	0.276298	0.050572	0.051459	0.064571
<b>Z<sub>c</sub></b>	0.2516	0.0929978	0.11919	0.2895	0.1344	0.1329
<b>N=1000</b>	$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_2^{(1)}$	$\phi_3^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$
Vraie valeur	1	-0.1	0.2	-0.5	0	0.5
Estimation moyenne	0.998494	-0.072296	0.204599	-0.502451	0.041564	0.490667
Écarte-type empirique	0.144199	0.087214	0.103073	0.144691	0.555828	0.099529
<b>Z<sub>c</sub></b>	0.01044	0.317655	0.04462	0.01694	0.07478	0.09377
	$\phi_2^{(2)}$	$\phi_3^{(2)}$	$\phi_0^{(3)}$	$\phi_1^{(3)}$	$\phi_2^{(3)}$	$\phi_3^{(3)}$
Vraie valeur	0.3	0.6	1	0.2	0.4	0.1
Estimation moyenne	0.331687	0.604832	1.034028	0.199113	0.405774	0.100560
Écarte-type empirique	0.080516	0.377461	0.178956	0.036085	0.036508	0.043555
<b>Z<sub>c</sub></b>	0.010444	0.317655	0.044619	0.01694	0.07478	0.0938

TABLE 3.3 – Moyennes et écarts-types de modèle SETAR (3,3,3,3,2) avec N=100,N=500,N=1000 .

FIGURE 3.3 – Trajectoire, ACF et PACF du modèle SETAR(3,3,3,3,2) avec  $N=100$ .FIGURE 3.4 – Trajectoire, ACF et PACF du modèle SETAR(3,3,3,3,2) avec  $N=500$ .

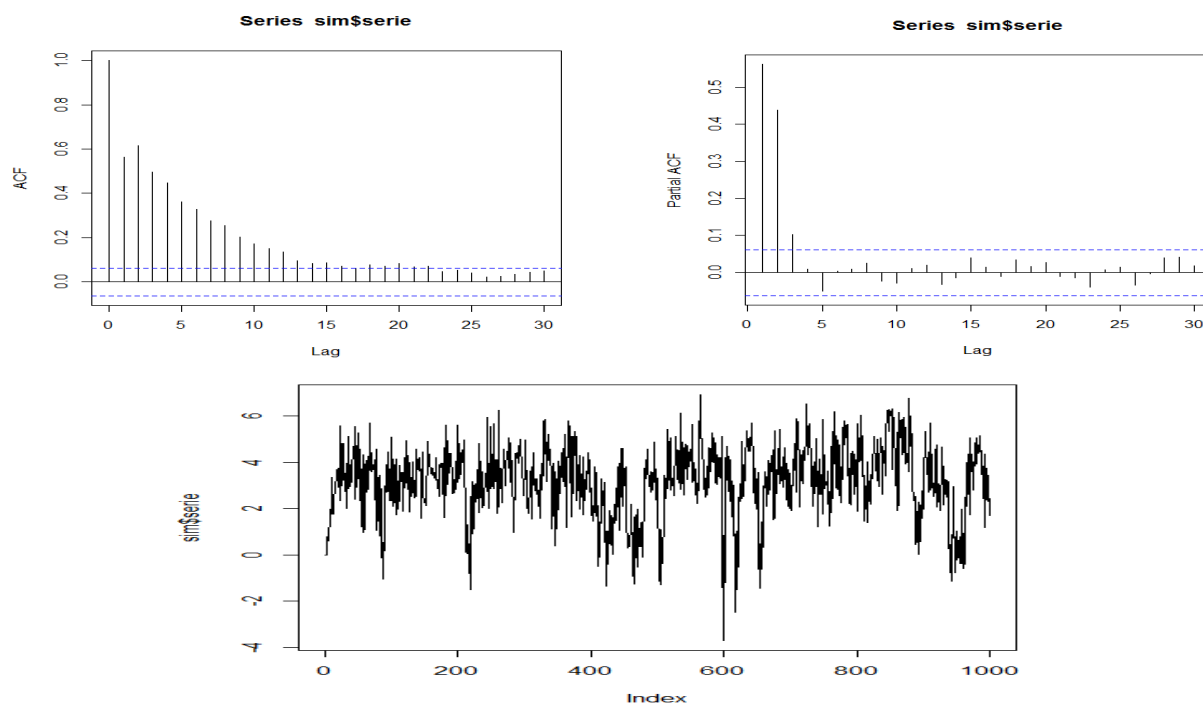


FIGURE 3.5 – Trajectoire, ACF et PACF du modèle SETAR(3,3,3,3,2) avec  $N=1000$ .

### Discussion des résultats de simulations

Les estimations des paramètres et de leurs écarts-types selon les tailles d'échantillon sont présentés aux tableaux précédents.

Nous observons que les estimateurs des paramètres convergent vers les vraies valeurs lorsque la taille d'échantillon de la série simulée augmente. Toutefois, lorsque la série comporte un petit nombre de valeurs  $N=100$ , les estimations des paramètres sont parfois très éloignés des vraies valeurs .

Les modèles comportent des estimateurs des paramètres éloignés des vraie valeur pour certains tailles possèdent des écarts types énormes .De plus lorsque  $N$  augmente , les écarts types diminuent.

## 3.2 Application

La série des taches solaires ,”sunspot” en anglais , provient de l’observation du soleil , dont l’activité varie au-cours du temps .Plusieurs phénomènes liés à cette activité sont observables, dont des éruptions ou des taches noires , entre autres .Ces taches noires apparaissent quotidiennement selon un cycle approximatif de onze ans.

Le relevé du nombre de taches présentes à la surface du soleil est particulièrement intéressant du fait de l’ancienneté des données disponibles (pour les moyennes mensuelles), la série notée par suns comporte 228 observations mensuelles couvrant la période de 1998-2016.

### 3.2.1 Représentation graphique de la série suns

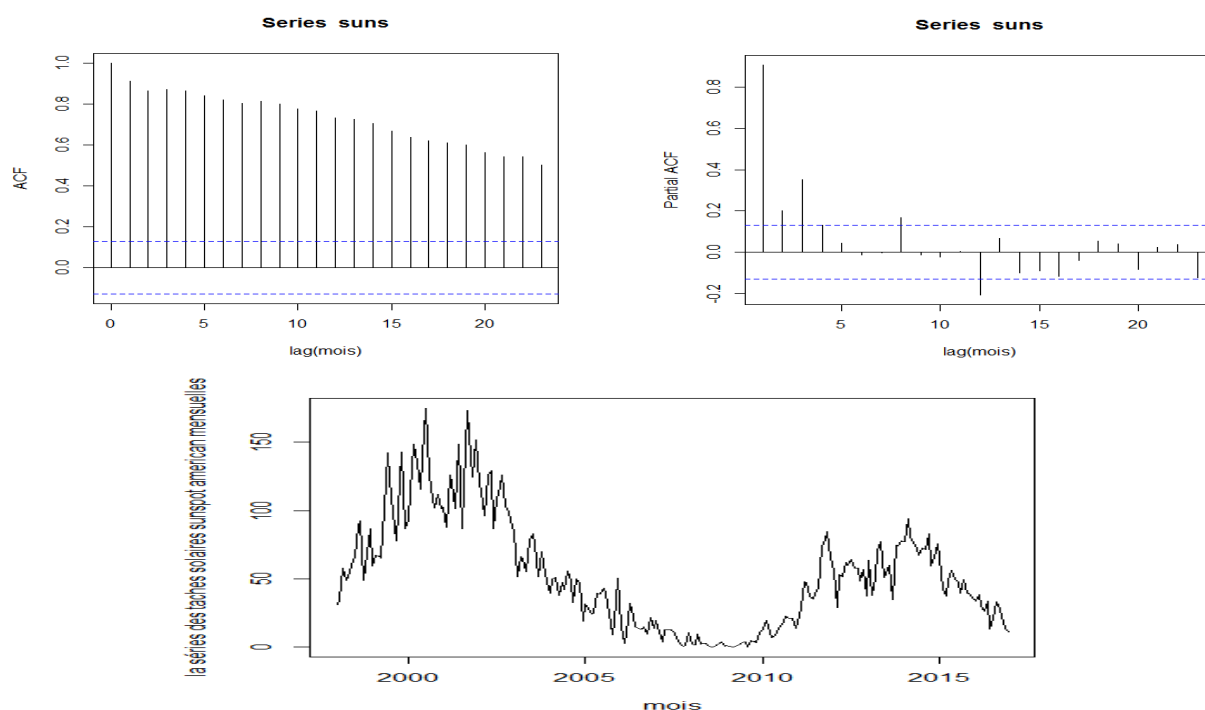


FIGURE 3.6 – Trajectoire, ACF et PACF du série ”Sunspot american” .

On remarque du graphique un changement de régime dans la trajectoire de la série ”suns”, cela nous permet de suggérer une modélisation non linéaire de la série étudiée .

### 3.2.2 Estimation du modèle autorégressive simple

Le tableau suivant , représente les résultats d’estimation du différents modèles autorégressive.

<b>auto-régressive</b>	$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$	$\phi_4$	$\phi_5$	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>
AR(1)	0.9120	-	-	-	-	1931.720	1942.008
AR(2)	0.7228	0.2069	-	-	-	1923.704	1937.421
AR(3)	0.6477	-0.0492	0.3544	-	-	1895.161	1912.308
AR(4)	0.5999	-0.0430	0.2677	0.1337	-	1893.043	1913.619
AR(5)	0.5943	-0.0538	0.2695	0.1101	0.0395	1894.686	1918.691

TABLE 3.4 – Estimation des modèles AR(p) avec p=1,2,3,4,5 .

AR(1)-AR(2)	AR(3)-AR(4)	AR(2)-AR(4)	AR(4)-AR(5)
0.01184	0.6001	$7.169e^{-07}$	0.5366

TABLE 3.5 – les tests du rapport de vraisemblance .

Suite aux résultats le test du rapport de vraisemblance et vue les critères d'information , le modèle AR(4) est le plus adéquat pour notre série, il s'écrit comme suit :

$$X_t = 0.5999X_{t-1} - 0.0430X_{t-2} + 0.2677X_{t-3} + 0.1337X_{t-4} + \varepsilon_t$$

$$(0.0655) \quad (0.0745) \quad (0.0746) \quad (0.0656)$$

$$AIC = 1893.04 , BIC = 1913.619 , \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 221.9.$$

### 3.2.3 Estimation de modèle autorégressive à seuil

Le tableau suivant regroupe les résultats d'estimation du différents modèles SETAR.

SETAR	$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_2^{(1)}$	$\phi_3^{(1)}$	$\phi_4^{(1)}$	$\phi_5^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$
SETAR(2,2,2,1)	0.629317	0.936899	0.071671	-	-	-	72.35631
SETAR(2,3,3,2)	1.758079	0.755760	-0.098696	0.299792	-	-	56.678999
SETAR(2,4,4,3)	0.813102	0.686526	-0.019688	0.243963	0.075408	-	20.87969
SETAR(2,5,5,4)	1.564535	0.816428	-0.108304	0.066597	0.236541	-0.063970	8.849446

---

SETAR	$\phi_1^{(2)}$	$\phi_2^{(2)}$	$\phi_3^{(2)}$	$\phi_4^{(2)}$	$\phi_5^{(2)}$	AIC	BIC
SETAR(2,2,2,1)	0.2353845	0.1017637	-	-	-	1247	1271.356
SETAR(2,3,3,2)	0.267914	-0.089238	0.310055	-	-	1237	1268.163
SETAR(2,4,4,3)	0.39091	-0.20209	0.25638	0.32382	-	1240	1277.657
SETAR(2,5,5,4)	0.419085	-0.042980	0.398605	0.076373	0.049213	1238	1282.628

TABLE 3.6 – Estimation des modèles SETAR avec  $p_i=2,3,4,5$ ;  $i=1,2$ .

D'après les critères d'information mentionnés dans le tableau ci dessus, le modèle SETAR(2,3,3,2) est le plus adéquat pour notre série, il s'écrit sous la forme suivante :

$$X_t = \begin{cases} 1.758079 + 0.755760X_{t-1} - 0.0986961X_{t-2} + 0.299793X_{t-3} & si \quad X_{t-2} \leq 98.7. \\ (1.908450) \quad (0.076301) \quad (0.105087) \quad (0.084725) \\ 56.678999 + 0.267914X_{t-1} - 0.089238X_{t-2} + 0.310055X_{t-3} & si \quad X_{t-2} > 98.7 \\ (22.359290) \quad (0.122766) \quad (0.113768) \quad (0.136032). \end{cases}$$

$$AIC = 1237, \quad BIC = 1268.163, \quad \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 210.1.$$

## 3.2.4 Prévisions

mois	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun
Vraie valeur	18.4	14.4	11.3	21.5	12.5	15.0
prédiction SETAR(2,3,3,2)	15.52497	16.60267	16.07118	16.91969	17.93650	18.46188
prédiction AR(4)	17.70364	18.84278	17.25828	17.65226	19.15803	19.77252

<p>RMSE(prédiction SETAR)=4.049714</p> <p>RMSE(prédiction AR) = 4.789498</p>
--

TABLE 3.7 – Prévisions de AR(4) et SETAR(2,3,3,2) .

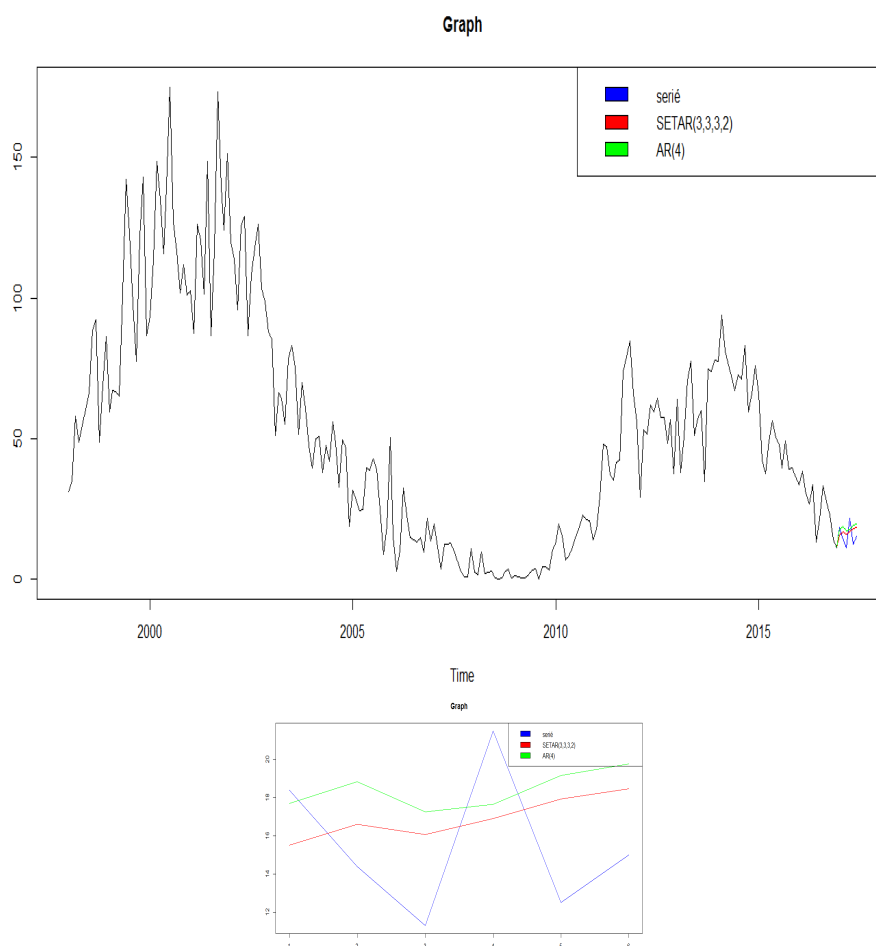


FIGURE 3.7 – Prédiction par le modèle AR(4) et SETAR(2,3,3,2) .



Le tableau ci dessus vise à calculer les prévisions et leurs qualités issues de modèle linéaire AR et le modèle non linéaire SETAR choisit. Par le biais de critère RMSE, il compare les valeurs prévues avec les valeurs réelles de la période allant de Janvier jusqu'à Juin 2017. En générale, en terme de RMSE, la prévision par le modèle SETAR(2,3,3,2) a fournit des bonnes prévisions par rapport aux celles données par le modèle AR(4).

Le graphique ci-dessus vise à représenter les prédictions du modèle AR(4) linéaire et du modèle SETAR(2,3,3,2) non linéaire. Nous notons que le graphique SETAR(2,3,3,2) correspond mieux à la courbe d'une série que la courbe AR(4).

# Conclusion

Dans notre mémoire, nous avons étudié un élément de la famille des processus non linéaires à savoir les modèles autoregressive à seuil.

Tout d'abord, nous avons présenté l'ensemble des processus linéaire stationnaires et non stationnaires en exposant leurs modèles et faire apparaitre leurs caractéristiques.

Au fait que l'hypothèse de la linéarité restreint automatiquement le comportement dynamique dans la série, des modèles particuliers commence à apparaître régulièrement dans la littérature des séries temporelles. Ces modèles c'étaient l'objet du deuxième chapitre.

L'application empirique discutés dans ce mémoire comporte deux parties : dans la première partie, nous avons simulé trois processus SETAR en faisant changer chaque fois un de leurs paramètres. Nous avons conclut que lorsque la taille  $N$  augmente, la qualité des estimateurs s'améliorent. Dans la deuxième partie, nous avons présenté une modélisation de la série réelle Sunspot Américain par un modèle linéaire  $AR(4)$  et non linéaire SETAR  $(2,3,3,2)$  .

L'étude de cette série était orientée essentiellement dans une optique prévisionnelle, les deux modèles estimés sont utilisé par la suite au calcul des prévisions pour une période de 06 mois. En terme de RMSE, le processus SETAR  $(2,3,3,2)$  avait donné des prévisions mieux que celles données par le modèle  $AR(4)$ .

Nous espérons avoir répondu au problème posé et les résultats trouvés seront d'une utilité pertinente.

# Bibliographie

- [1] **Abdelhalim Bouchemella** :Inference Statistique pour les Modeles Autoregressifs a Coefficients Aleatoires,Université Badji Mokhtar Annaba,2015.
- [2] **AMARI Kahina** :Sur les modèles AutoRégressifs Double (DAR),Mémoire de Master,Département de Mathématiques,Universite Mouloud Mammeri, Tizi-ouzou,2017.
- [3] **Arthur Charpentier** :Modèles de prévision Séries temporelles .
- [4] **Arthur Charpentier** :Cours de series temporelles theorie et applications,volume 1.
- [5] **Arthur Charpentier** : Cours de series temporelles theorie et applications,volume 2.
- [6] **Ben Salem Mélika** et **Perraudin Corinne** :Tests de linéarité, spécification et estimation de modèles à seuil : une analyse comparée des méthodes de Tsay et de Hansen.In : Économie et prévision,doi : 10.3406/ecop.2001.6284.
- [7] **BOULMELH Zineb** et **FAROUC Meriem** :Estimation Des Paramètres Pour Un Modèle GARCH (p,q),Mémoire de Master,Département de Mathématiques,Université Mohammed Seddik Ben Yahia- JIJEL ,2016/2017.
- [8] **Céline Lévy-Leduc,François Rouef, Eric Moulines** :Analyse des Séries Temporelles et Applications .
- [9] **Christophe Hurlin** :Econométrie pour la Finance,Rue de Blois – BP 6739 , Orléans,e 2006-2007 .
- [10] **Christophe Hurlin** :Économétrie Appliquée Séries Temporelles .
- [11] **Dick van Dijk** et **Timo Terasvirta** :Smooth Transition Autoregressive Models - A Survey of Recent Developments,2000.

- 
- [12] **Djazouli adel** :Analyse spectrale des modèles ARFIMA ,Mémoire de magister,Département de Mathématiques,Université des sciences et technologie houari boumedienne Annaba ,2015 .
- [13] **EZZEBSA Abdelali** :Modélisation des Marchés Financiers et Krachs Boursiers,Mémoire de Doctorat,Département de Mathématiques,Université Badji Mokhtar Annaba ,2014 .
- [14] **Gabrielle Grégoire** :Sur les modèles non-linéaires autorégressifs à transition lisse et le calcul de leurs prévisions,Département de mathématiques et de statistique Faculté des arts et des sciences ,Université de Montréal,2019.
- [15] **Gatt fella** : Modèles a seuil classique et périodique,Mémoire de magister,Département de Mathématiques,Université des sciences et technologie houari boumedienne ,2011 .
- [16] **Hélène Hamisultane** : ECONOMETRIE DES SERIES TEMPORELLES. Licence. France. 2002.
- [17] **Jérémie BIGOT** :Séries chronologiques,Université de Bordeaux,Polycopié rédigé à partir des notes de cours de Frédéric Proia , 2016-2017.
- [18] **Jonas Kibala Kuma** :Modélisation hétéroscédastique : les modèles arch-garch.
- [19] **Jonathan D. Cryer and Kung-Sik Chan** :Time Series Analysis With Applications in R ,Second Edition .
- [20] **Kamila BERHOUNE** :Processus ARCH-GARCH Applications,Mémoire de Master,Département de Mathématiques,Universite Abou Bekr Belkaid Tlemcen ,2013 .
- [21] **KESRAOUI Mahrez et NZISABIRA Cléophas** :Etude et modélisation d'une évolution d'une pathologie,Mémoire de Master,Département de Mathématiques, Université e Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou ,2016-2017.
- [22] **Maddi Nabil et Hamouda Oussama** :Estimation Et Prévision D'un Modèle Self-Exciting Threshold Autorégressive ,Mémoire de Master,Département de Mathématiques, Université Mehamed Bougara Boumerdes,2016.
- [23] **Michel LUBRANO** :Introduction à la modélisation des séries temporelles univariées,CHAPITRE I ,Septembre 2008 .
- [24] **Michel Prenat** :Séries chronologiques, Volume 1.
- [25] **Mohamed Essaied Hamrita and ISMAI Kairouan** :Processus linéaires stationnaires.

- 
- [26] **Mohsen ALIMI** : Comparaison des méthodes de sélection de structures de modèles non-linéaires en prédiction de séries temporelles : Application à la prévision des cycles endogènes des séries de la production industrielle en Tunisie ,Mémoire de Doctorat,FACULTÉ DES SCIENCES ÉCONOMIQUES ET DE GESTION ,Université SFAX ,2011 .
- [27] **Moussaoui Youcef** : Modèles linéaires et non linéaires pour des séries de taux de change et estimation non paramétrique de densité,Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene.
- [28] **Olaf Kouamo** :Analyse des séries chronologiques à mémoire longue dans le domaine des ondelettes ,Statistiques [math.ST]. Télécom ParisTech, 2011. Français. ffpastel-00565656f.
- [29] **Peter J. Brockwell** and **Richard A. Davis** :Introduction to Time Series and Forecasting,Second Edition ,2002.
- [30] **Rim Harrati** et **Horiya Tibigui** : Modèles Stochastiques et leurs Prévisions par des Processus ARMA ,Mémoire de master ,Département de Mathématiques,Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel ,2018/2019 .
- [31] **Sandirne Lardic** and **Valérie Mignon** :Économétrie des séries temporelles macroéconomique et financières,ed.economica,49,rue Héricart,75015 Paris,2002 .
- [32] **Sara Leulmi** : Inférence Statistique dans les Modèles Bilinéaires Périodiques,Mémoire de magister,Département de Mathématiques,Université Mentouri Costantine ,2012 .
- [33] **Steven Wahlström** :Comparing forecasts from LSTAR and linear Autoregressive models ,Stockholm University,2004.
- [34] **Tristan Lorino** :Processus Stochastique,2005 .
- [35] **Walter Endres** :Applied econometric time series,University of Alabama,1948 .
- [36] **Yannig Goude** :Les processus ARIMA MAP-STA2 : Séries chronologiques ,2020/2021

## Les fonctions sous R

### 1. Simulation des modèles SETAR/TAR

```
library(tsDyn)
# pour lancer le package tsDyn #
set.seed(100)
TvarMat = c(1,0.3,-0.7,0, 0.1,0.2)
TvarMat
sim=setar.sim(B=TvarMat,lag=2,n=100, type="simul", nthresh=1, Thresh=1,starting=c(2.8,2.2))
#simulation d'un modèle SETAR(2,2,1) de taille n=100#
sim
acf(sim$serie)
# tracer le autocorrélations de la série "sim$serie" #
pacf(sim$serie)
# tracer le autocorrélations partiel de la série "sim$serie" #
plot(sim$serie,type= "l")
# tracer le graphe de la série "sim$serie" #
mod.setar =setar(sim$serie, m=2, thDelay=1, th=1)
#Estimation du modèle obtenu#
summary(mod.setar)
# L'affichage des caractéristique statistiques du "mod.setar" #
```

```

set.seed(100)
TvarMat = c(1,-0.1,0.2,-0.5,0,0.5,0.3,0.6,1,0.2,0.4,0.1)
TvarMat
sim=setar.sim(B=TvarMat,lag=3,n=100, type="simul", nthresh=2, Thresh=c(1,2))
sim
mod.setar =setar(sim$serie, m=3, thDelay=2, th=c(1,2))
#simulation d'un modèle SETAR(3,3,3,2) de taille n=100#
sim
mod.setar= setar(sim$serie, m=3, thDelay=2, th=c(1,2))
mod.setar
summary(mod.setar)
acf(sim$serie)
# tracer le autocorrélations de la série "sim$serie" #
pacf(sim$serie)
# tracer le autocorrélations partiel de la série "sim$serie" #
plot(sim$serie,type= "l")
# tracer le graphe de la série "sim$serie" #

```

## 2.Applications

```

library(tseries)
library(aod)
set.seed(100)
suns

# la table de donnée#
length(suns)
# numéro de observations#
x = ts(suns, start=1998, end=c(2016,12),frequency=12)
# Transformer la à une série temporelle#
x

```

```

plot(x, xlab="mois")
# tracer le graphe de la série "x" #
acf(x, xlab="lag(mois)")
# tracer le autocorrélations de la série "x" #
pacf(x, xlab="lag(mois)")
# tracer le autocorrélations partiel de la série "x" #
ar1 =arima(x , order = c(1, 0, 0))
#Estimée un modèle AR(1)#
ar1
ar2 =arima(x , order = c(2, 0, 0))
ar2
ar3 =arima(x , order = c(3, 0, 0))
ar3
ar4 =arima(x , order = c(4, 0, 0))
ar4
ar5 =arima(x , order = c(5, 0, 0))
ar5
res = AIC(ar1, ar2, ar3, ar4, ar5)
res
#la valeur de log-vraisemblance peut être obtenue#
res2= BIC(ar1, ar2, ar3, ar4, ar5)
#la valeur de log-vraisemblance peut être obtenue#
res2
ar4$res
#donner la série des résidus d'un modèle AR(4)#
Box.test(ar4$res,type = "Box-Pierce")
#tester l'autocorrelation des résidus#
mod.setar = setar(suns, m = 2, mL = 2, mH = 2, thDelay = 1)
mod.setar
mod.setar2 = setar(suns, m =3, mL = 3, mH = 3, thDelay = 2)
mod.setar2
mod.setar3 = setar(suns, m = 4, mL = 4, mH = 4, thDelay = 3)
mod.setar3

```



```

mod.setar4= setar(suns, m = 5, mL = 5, mH =5, thDelay = 4)
mod.setar4
summary(mod.setar)
r1=BIC(mod.setar)
r1
summary(mod.setar2)
r2=BIC(mod.setar2)
r2
summary(mod.setar3)
r3=BIC(mod.setar3)
r3
summary(mod.setar4)
r4=BIC(mod.setar4)
r4
library(fNonlinear)
bds.test(suns,m=4)
#test de linéarité#
delta.test(suns)
delta.test(ar4$res)
delta.test(mod.setar2$res)
#test indépendance#
Box.test(mod.setar2$res,type = "Box-Pierce")
#tester l'autocorrelation des résidus#
mod.lstar=lstar(suns, m = 3, thDelay = 2)
summary(ar1)
library(lmtest)
lrtest(ar1,ar2)
lrtest(ar3,ar4)
lrtest(ar2,ar4)
lrtest(ar4,ar5)
#comparaisons de modèles par vraisemblance asymptotique#
set.seed(15)
ar4$res

```

```

Box.test(ar4$res,type = "Box-Pierce")
#tester l'autocorrelation des résidus#
x.new = predict(mod.setar2, n.ahead =6)
# la prédiction de le modèle setar)#
x.new
x.new1 = predict(ar4, n.ahead =6)
# la prédiction de le modèle ar)#
x.new1
suns1 length(suns1)
x1= ts(suns1, start=1998, end=c(2017,6),frequency=12)
#la série réel#
x1
suns2 length(suns2)
x2= ts(suns2, start=1998, end=c(2017,6),frequency=12)
x2
#la série réel plus les valeur prédictive de SETAR(3,3,3,2)#
suns3 length(suns3)
x3= ts(suns3, start=1998, end=c(2017,6),frequency=12)
#la série réel plus les valeur prédictive de AR(4)#
x3
plot(x1,main="Graph",type="l",col="blue")
points( x2,main="SETAR Graphs",type="l",col="red")
points( x3,main="SETAR Graphs",type="l",col="green")
points( x,type="l")
legend("topright",c("série","SETAR(3,3,3,2)"," AR(4)"),fill=c("blue","red","green"))
#tracer les graphes des les séries "x1,x2,x3" #
y=c(18.4 , 14.4 , 11.3 , 21.5 , 12.5 , 15.0)
y2=c(15.52497, 16.60267, 16.07118 ,16.91969 ,17.93650 ,18.46188)
y3=c(17.70364 ,18.84278 ,17.25828, 17.65226 ,19.15803, 19.77252 )
plot(y,main="Graph",type="l",col="blue")
points( y2,main="SETAR Graphs",type="l",col="red")
points( y3,main="SETAR Graphs",type="l",col="green")
legend("topright",c("série","SETAR(3,3,3,2)"," AR(4)"),fill=c("blue","red","green"))

```

```
#tracer les graphes les valeurs de prédiction #  
library(Metrics)  
  
rmse(y,y2)  
rmse(y,y3)  
# calcule l'erreur quadratique moyenne entre deux vecteurs numériques#
```