République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

№ d'ordre :................

№ de série :..................

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité Mathématiques.

Option Analyse Fonctionnelle.

Thème

Principe de Pontryagin pour un problème de contrôle optimal gouverné par une EDP elliptique.

Présenté par

Himeur Safa

Devant le jury

Président	**Azzam Dalila Laouir**	Professeur	Université de Jijel
Encadreur	**Nadir Arada**		MCA Université de Jijel
Examinateur	**Sabrina Izza**		MCB Université de Jijel

Promotion **2020/2021**

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon encadreur M. Nadir Arada pour tout ce qu'il m'a appris, pour les conseils qu'il m'a prodigués, pour son suivi, sa patience et l'intérêt porté à ce travail.

Je remercie Mmes Dalila Azzam-Laouir et Sabrina Izza d'avoir accepté de faire partie du jury.

Que tous ceux et toutes celles, qui de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce mémoire, veuillent trouver ici mes sincères remerciements. J'exprime en particulier ma profonde reconnaissance aux membres du département de mathématiques.

Dédicace

Je dédie ce travail à

Ma très chère mère, Nassira, la femme la plus affectueuse et la plus douce au monde. Ses sacrifices, son soutien, ses encouragements et son amour ont été la raison de ma réussite,

Mon Père Abdel-Hamid, pour avoir toujours cru en moi et pour ses nombreux sacrifices,

Mon unique soeur, Hana,

Mon unique frère, Mohamed Amine,

Toutes mes amies proches, mes cousins et cousines,

Safa.

Table des matières

Notations

Notations générales

Ω	ouvert de $\mathbb{R}^n$
Γ	frontière de Ω
$\bar{\Omega}$	adhérence de Ω
$\mathcal{L}^n(\Omega)$	mesure de Lebesgue de Ω
$\cdot$	produit scalaire de deux vecteurs; i.e. $y \cdot z = \sum_{i=1}^{n} y_i z_i, \; y, z \in \mathbb{R}^n$
f_y	dérivée de f par rapport à la variable y.
∇	gradient; i.e. $\nabla y = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial y}{\partial x_n} \right)$
Δ	Laplacien; i.e. $\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}$
χ_A	Fonction indicatrice de A
p.t.	presque tout

Espaces fonctionnels

$C(\bar{\Omega})$	espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$
$C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$	espace des fonctions α-hölderiennes sur $\bar{\Omega}$
$L^p(\Omega)$	espace des fonctions mesurables sur Ω dont la puissance d'exposant p est intégrable au sens de Lebesgue $(1 \leq p < +\infty)$
$L^\infty(\Omega)$	espace des fonctions mesurables sur Ω essentiellement bornées
$W^{k,p}(\Omega)$	espace des fonctions dans $L^p(\Omega)$ dont les dérivées distributionnelles d'ordre k appartiennent à $L^p(\Omega)$
$H^1(\Omega)$	espace des fonctions dans $L^2(\Omega)$ dont les dérivées distributionnelles appartiennent à $L^2(\Omega)$
$H_0^1(\Omega)$	espace des fonctions dans $H^1(\Omega)$ dont la trace sur Γ est nulle
$H^{-1}(\Omega)$	espace dual de $H_0^1(\Omega)$
E'	espace dual de E
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{E',E}$	crochet de dualité
p'	exposant conjugué de p; i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$
$(\cdot, \cdot)$	crochet de dualité pour $E = L^p(\Omega)$ $(1 \leq p < +\infty)$ i.e. $(f,g) = \int_\Omega f(x)g(x)\,dx \qquad f \in L^p(\Omega),\ g \in L^{p'}(\Omega)$
$\hookrightarrow$	injection continue
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	injection continue et compacte

Introduction

Dans ce mémoire, nous nous intéressons aux conditions d'optimalité pour une classe de problèmes de contrôle optimal gouvernés par des équations aux dérivées partielles semi-linéaires elliptiques. Deux grands axes sont considérés :

i) L'analyse mathématique de l'équation d'état : rendue difficile par la présence d'un terme non-linéaire, celle-ci nécessite l'association d'un cadre fonctionnel adéquat et d'une formulation faible bien posée. L'étude de la solvabilité de cette dernière englobe l'existence d'une solution faible, son unicité, son éventuelle régularité, ainsi que l'obtention des estimations a priori correspondantes.

ii) L'établissement des conditions nécessaires d'optimalité : généralement obtenues par l'introduction de perturbations autour du contrôle, elles nécessitent une analyse fine de la variation engendrée par ces perturbations sur l'application associant l'état au contrôle ainsi que sur le coût à minimiser. Dans le cas que l'on considère, elle est rendue plus ardûe par la présence conjointe de termes non-linéaires par rapport à la variable état et à la variable contrôle.

Ces aspects seront analysés dans deux directions. Dans la première, traitée dans le chapitre 1, nous supposerons que l'ensemble des contrôles admissibles est convexe et que tous les termes non-linéaires sont dérivables par rapport à la variable contrôle. Les perturbations convexes s'imposent naturellement et nous permettent d'obtenir les résultats de différentiabilité nécessaires à l'établissement de conditions d'optimalité du premier ordre (ou encore de type Lagrange car elles peuvent être obtenues en dérivant le Lagrangien associé au problème par rapport au contrôle). Dans le chapitre 2, nous empruntons une autre direction : sans hypothèse de convexité sur l'ensemble des contrôles admissibles ni de différentiabilité des non-linéarités par rapport à la variable contrôle. L'utilisation de perturbations diffuses permet d'obtenir des "développements de type Taylor" pour l'état et le coût, qui permettent d'exprimer ce dernier sous une forme Hamiltonienne et d'établir les conditions d'optimalité sous la forme d'un principe de Pontryagin.

Chapitre 1

Conditions d'optimalité Lagrangiennes

1.1 Introduction

Dans toute la suite, Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ lipschitzienne. Nous considérons l'équation aux dérivées partielles semi-linéaire elliptique donnée par

$$\begin{cases} -\Delta y + f(\cdot, y, u) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{1.1}$$

Dans (1.1), la fonction u désigne un contrôle et on notera y_u la solution associée à u. Nous verrons plus loin comment donner un sens à ce problème et énoncerons les conditions garantissant l'existence, l'unicité et la régularité d'une solution. L'objectif de ce chapitre est d'établir des conditions d'optimalité du premier ordre (sous forme Lagrangienne) asociées au problème de contrôle optimal suivant

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Minimiser} \quad J(u) = \displaystyle\int_\Omega L(x, y_u(x), u(x))\, dx \\ u \in U_{ad} = \{u \in L^\infty(\Omega) \mid u(x) \in K \quad \text{pour p.t. } x \in \Omega\}, \end{cases}$$

où $K \subset \mathbb{R}$ est borné.

Dans ce chapitre, nous supposerons que K est convexe et que f et L satisfont les hypothèses suivantes :

$(H1)$ Pour tout $(\lambda, u) \in \mathbb{R}^2$, $f(\cdot, \lambda, u)$ est mesurable sur Ω. Pour presque tout $x \in \Omega$, $f(x, \cdot)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. De plus, pour presque tout $x \in \Omega$ et tout $(\lambda, u) \in \mathbb{R}^2$, nous avons

$$|f(x, 0, u)| \leq F(x) + C_1|u|,$$

$$0 \leq Df_y(x, \lambda, u) \leq (F(x) + C_1|u|)\, \eta(|\lambda|),$$

$$|Df_u(x, \lambda, u)| \leq (F(x) + C_1|u|)\, \eta(|\lambda|),$$

où $F \in L^s(\Omega)$ avec $s \geq 2$ et $s > \frac{n}{2}$, $C_1 > 0$ et $\eta : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction croissante.

$(H2)$ Pour tout $(\lambda, u) \in \mathbb{R}^2$, $L(\cdot, \lambda, u)$ est mesurable sur Ω. Pour presque tout $x \in \Omega$, $L(x, \cdot)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. De plus, pour presque tout $x \in \Omega$ et tout $(\lambda, u) \in \mathbb{R}^2$, nous avons

$$|L(x, \lambda, u)| + |L_y(x, \lambda, u)| \leq (L_1(x) + C_1|u|)\, \eta(|\lambda|)\, \eta(|u|),$$

$$|L_u(x, \lambda, u)| \leq (L_2(x) + C_1|u|)\, \eta(|\lambda|)\, \eta(|u|),$$

où $L_1 \in L^s(\Omega)$ et $L_2 \in L^1(\Omega)$.

Le plan du chapitre est le suivant : dans la section 1.2, nous étudions l'existence, l'unicité et la régularité des solutions pour une classe d'équations aux dérivées partielles linéaires. Ces résultats nous seront ultérieurement utiles dans l'analyse de la solvabilité de l'équation d'état, de l'équation adjointe et dans l'établissement des conditions d'optimalité. Après avoir défini une formulation variationnelle adéquate, nous établissons l'existence d'une solution faible en utilisant le théorème de Lax-Milgram. Grâce à un principe du maximum classique, nous prouvons que cette solution est bornée et, finalement, qu'elle est höldérienne. Des estimations a priori associées sont systématiquement prouvées.

Passant ensuite à l'étude de l'équation d'état, nous considérons les mêmes étapes mais avec des techniques quelque peu différentes. Afin de gérer la nonlinéarité, nous commençons par tronquer la fonction f. Le problème ainsi obtenu possède des propriétés de monotonie, de continuité et de coercivité qui nous permettent d'appliquer le théorème de Minty-Browder et de prouver qu'il admet une solution faible et que si la borne de troncature est suffisamment large, alors cette solution est aussi solution de l'équation d'état. Dans la section 1.3, l'utilisation de perturbations convexes permet d'analyser la différentiabilité de l'état et de la fonctionnelle coût par rapport à la variable contrôle. Des conditions nécessaires d'optimalité sous forme Lagrangienne sont alors établies dans la section 1.4.

1.2 Solvabilité de l'équation d'état

1.2.1 Équations linéaires

Dans cette section, nous étudions la solvabilité (existence, unicité et régularité des solutions) de la classe d'équations aux dérivées partielles linéaires elliptiques suivante

$$\begin{cases} -\Delta z + bz = g & \text{dans } \Omega, \\ z = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{1.2}$$

où $b \in L^s(\Omega)$ avec $b \geq 0$, $g \in L^s(\Omega)$ et $s \geq 2$ et $s > \frac{n}{2}$. Nous commencerons par énoncer un résultat d'injection qui nous sera très utile pour la suite.

Lemme 1.2.1. *Soit $s \geq 2$, $s > \frac{n}{2}$. Il existe une constante $C_0 > 0$ dépendant de n, s et Ω telle que*

$$\|\phi\|_{L^{2s'}(\Omega)} \leq C_0 |\phi|_{H_0^1(\Omega)} \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.3}$$

Démonstration. Grâce au théorème d'injection de Sobolev, nous savons que si $n = 2$, alors

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega) \qquad \text{pour tout } r \in [1, +\infty[.$$

Il existe alors une constante $C_S > 0$ dépendant de n, r et Ω tel que

$$\|\phi\|_{L^r(\Omega)} \leq C_S(r) |\phi|_{H_0^1(\Omega)} \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega),$$

et le résultat énoncé est obtenu en prenant en particulier $r = 2s'$ et $\kappa_0 = C_S(2s')$.

Si $n \geq 3$, alors nous savons que

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega) \qquad \text{avec } 2^* = \tfrac{2n}{n-2},$$

et il existe donc une constante $C_S > 0$, dépendant de n et Ω, tel que

$$\|\phi\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C_S |\phi|_{H_0^1(\Omega)} \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Observant que

$$s > \tfrac{n}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2s' < 2^*,$$

et utilisant l'inégalité de Hölder, nous déduisons que

$$\|\phi\|_{L^{2s'}(\Omega)} \leq \mathcal{L}^n(\Omega)^{\frac{1}{2s'}-\frac{1}{2^*}} \|\phi\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq \underbrace{C_S \mathcal{L}^n(\Omega)^{\frac{1}{2s'}-\frac{1}{2^*}}}_{C_0} |\phi|_{H_0^1(\Omega)} \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega)$$

ce qui termine la preuve. □

Au vu du résultat précédent, nous sommes en mesure de donner un sens à la solution faible du problème (1.2).

Définition 1.2.2. *Soit $s \geq 2$, $s > \frac{n}{2}$, $b \in L^s(\Omega)$ avec $b \geq 0$, et $g \in L^s(\Omega)$. Une fonction $z \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible de (1.2) si*

$$(\nabla z, \nabla \phi) + (bz, \phi) = (g, \phi) \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Cette formulation est bien définie. En effet, si $z, \phi \in H_0^1(\Omega)$ alors il est clair que $\nabla z \cdot \nabla \phi \in L^1(\Omega)$. De plus, grâce au lemme précédent, nous avons que $z, \phi \in L^{2s'}(\Omega)$ et donc $z\phi \in L^{s'}(\Omega)$, ce qui implique à son tour que $bz\phi \in L^1(\Omega)$. Le même raisonnement garantit que $g\phi \in L^{\frac{2s}{s+1}}(\Omega) \subset L^1(\Omega)$.

Proposition 1.2.3. *Soit $s \geq 2$, $s > \frac{n}{2}$, $b \in L^s(\Omega)$ avec $b \geq 0$, et $g \in L^s(\Omega)$. Alors l'équation (1.2) admet une solution faible unique dans $H_0^1(\Omega)$. De plus, l'estimation suivante est satisfaite*

$$|z|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_0 \|g\|_{L^s(\Omega)},$$

où $C_0 = C_0 \mathcal{L}^n(\Omega)^{\frac{1}{2s'}}$ avec κ_0 définie dans le lemme 1.2.1.

Démonstration. La formulation variationnelle associée à (1.2) est de la forme

$$\begin{cases} \text{Trouver } z \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(z, \phi) = F(\phi) \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{1.4}$$

où a est la forme bilinéaire définie par

$$a(z, \phi) = (\nabla z, \nabla \phi) + (bz, \phi) \qquad \forall z, \phi \in H_0^1(\Omega) \tag{1.5}$$

et où F est la forme linéaire définie par

$$F(\phi) = (g, \phi) \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Vérifions que a est coercive dans $H_0^1(\Omega)$. Prenant en compte le fait que $b \geq 0$, on obtient

$$\begin{aligned} a(\phi, \phi) &= (\nabla \phi, \nabla \phi) + (b\phi, \phi) = \|\nabla \phi\|^2_{L^2(\Omega)} + (b\phi, \phi) \\ &= |\phi|^2_{H_0^1(\Omega)} + (b\phi, \phi) \\ &\geq |\phi|^2_{H_0^1(\Omega)} \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Prouvons à présent que a est continue dans $H_0^1(\Omega)$. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité de Hölder et (1.3), il vient que

$$\begin{aligned} |a(w, \phi)| &= |(\nabla w, \nabla \phi) + (bw, \phi)| \\ &\leq \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)} + \|b\|_{L^s(\Omega)} \|w\phi\|_{L^{s'}(\Omega)} \\ &\leq \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)} + \|b\|_{L^s(\Omega)} \|w\|_{L^{2s'}(\Omega)} \|\phi\|_{L^{2s'}(\Omega)} \\ &\leq (1 + C_0^2 \|b\|_{L^s(\Omega)}) |w|_{H_0^1(\Omega)} |\phi|_{H_0^1(\Omega)} \qquad \forall w, \phi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant l'inégalité de Hölder et (1.3), on obtient

$$\begin{aligned} |F(\phi)| &= |(g, \phi)| \leq \|g\|_{L^s(\Omega)} \|\phi\|_{L^{s'}(\Omega)} \\ &\leq \mathcal{L}^n(\Omega)^{\frac{1}{2s'}} \|g\|_{L^s(\Omega)} \|\phi\|_{L^{2s'}(\Omega)} \\ &\leq C_0 \mathcal{L}^n(\Omega)^{\frac{1}{2s'}} \|g\|_{L^s(\Omega)} |\phi|_{H_0^1(\Omega)} \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

montrant ainsi la continuité de F. Les conditions d'application du théorème de Lax-Milgram étant satisfaites, nous déduisons que l'équation (1.2) admet une solution faible unique $z \in H_0^1(\Omega)$.

Pour obtenir l'estimation a priori correspondante, posons $\phi = z$ dans la formulation (1.4) et utilisant la coercivité de a et la continuité de F, nous obtenons

$$|z|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq a(z, z) = F(z) \leq C_0 \mathcal{L}^n(\Omega)^{\frac{1}{2s'}} \|g\|_{L^s(\Omega)} |z|_{H_0^1(\Omega)},$$

et donc

$$|z|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_0 \mathcal{L}^n(\Omega)^{\frac{1}{2s'}} \|g\|_{L^s(\Omega)}.$$

Ceci termine la démonstration. □

Comme nous le verrons dans la proposition 1.2.5 ci-après, la solution faible de (1.2) est plus régulière que $H_0^1(\Omega)$. Ce résultat est une conséquence des résultats classiques énoncés dans le lemme suivant.

Lemme 1.2.4. *Soit $g \in L^q(\Omega)$ avec $2 \leq q < +\infty$. Alors l'équation*

$$\begin{cases} -\Delta\phi = g & \text{dans } \Omega, \\ \phi = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{1.6}$$

admet une solution unique $\phi \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,q}(\Omega)$. De plus, on a les estimations suivantes

$$|\phi|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^q(\Omega)}, \qquad \|\phi\|_{W^{2,q}(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^q(\Omega)},$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de g.

Démonstration. Voir [8] et [5]. □

Proposition 1.2.5. *Soit $s \geq 2$, $s > \frac{n}{2}$, $b \in L^s(\Omega)$ avec $b \geq 0$, et $g \in L^s(\Omega)$. Alors la solution du problème (1.2) appartient à $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et l'estimation suivante est satisfaite*

$$\|z\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \kappa_1\|g\|_{L^s(\Omega)},$$

où $\kappa_1 > 0$ est une constante indépendante de b et de g.

Démonstration. Commençons par rappeler que $s > \frac{n}{2}$ implique que $W^{2,s}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$. Une conséquence directe du lemme 1.2.4 est que ϕ, la solution de (1.6), appartient à $L^\infty(\Omega)$ et satisfait

$$\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_S\|\phi\|_{W^{2,s}(\Omega)} \leq \tilde{C}\|g\|_{L^s(\Omega)}. \tag{1.7}$$

où $\tilde{C} = C_S C$.

Le reste de la démonstration sera divisée en deux parties.

Partie 1. Supposons dans un premier temps que $g \geq 0$. Appliquant le principe du maximum (cf. [8]), il vient que la solution de l'équation (1.6) satisfait

$$\phi \geq 0.$$

Posons alors $w = \phi - z$. Il est facile de voir que w est la solution de l'équation

$$\begin{cases} -\Delta w + bw = b\phi & \text{dans } \Omega, \\ w = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Prenant en compte le signe de b et appliquant encore une fois le principe du maximum, il vient que $w \geq 0$, i.e.

$$z \leq \phi.$$

Combinant les deux résultats, nous déduisons que

$$0 \leq z \leq \phi,$$

et grâce à (1.7), nous obtenons

$$\|z\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \tilde{C}\|g\|_{L^s(\Omega)}.$$

Partie 2. Considérons maintenant le cas général. Soit g^+ et g^- les parties positives et négatives de g de sorte que $g = g^+ - g^-$. Notons z_1 et z_2 les solutions de l'équation (1.2) correspondant à g^+ et g^-, respectivement, i.e.

$$\begin{cases} -\Delta z_1 + bz_1 = g^+ & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta z_2 + bz_2 = g^- & \text{dans } \Omega, \\ z_1 = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ z_2 = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

D'après la partie 1, on a

$$\|z_1\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \tilde{C}\|g^+\|_{L^s(\Omega)},$$

et donc

$$-\tilde{C}\|g\|_{L^s(\Omega)} \leq -\tilde{C}\|g^+\|_{L^s(\Omega)} \leq z_1 \leq \tilde{C}\|g^+\|_{L^s(\Omega)} \leq \tilde{C}\|g\|_{L^s(\Omega)}.$$

De la même façon, on trouve que

$$-\tilde{C}\|g\|_{L^s(\Omega)} \leq -\tilde{C}\|g^-\|_{L^s(\Omega)} \leq z_2 \leq \tilde{C}\|g^-\|_{L^s(\Omega)} \leq \tilde{C}\|g\|_{L^s(\Omega)}.$$

Observant que $z = z_1 - z_2$, il vient que

$$-2\tilde{C}\|g\|_{L^s(\Omega)} \leq z = z_1 - z_2 \leq 2\tilde{C}\|g\|_{L^s(\Omega)},$$

et par conséquent

$$\|z\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \kappa_1\|g\|_{L^s(\Omega)},$$

où κ_1 est une constante positive indépendante de b et de g. □

Remarque 1.2.6. *Les estimations énoncées dans la proposition* 1.2.3 *et la proposition* 1.2.5 *sont indépendantes de b. Ce fait sera très utile ultérieurement.*

Proposition 1.2.7. *Soit $s \geq 2$, $s > \frac{n}{2}$, $b \in L^s(\Omega)$ avec $b \geq 0$, et $g \in L^s(\Omega)$. Alors la solution du problème* (1.2) *appartient à $H_0^1(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ pour un certain $\alpha \in]0,1[$ et l'estimation suivante est satisfaite*

$$\|z\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq \kappa_2 \left(1 + \|b\|_{L^s(\Omega)}\right) \|g\|_{L^s(\Omega)},$$

où $\kappa_2 > 0$ est une constante indépendante de b et de g.

Démonstration. Soit z la solution de l'équation (1.2). Alors z est la solution du problème (1.6) correspondant à $-bz + g \in L^s(\Omega)$. D'après le lemme 1.2.4, z appartient à $W^{2,s}(\Omega)$. De plus

$$\begin{aligned} \|z\|_{W^{2,s}(\Omega)} &\leq C \left(\|bz\|_{L^s(\Omega)} + \|g\|_{L^s(\Omega)}\right) \\ &\leq C \left(\|b\|_{L^s(\Omega)}\|z\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g\|_{L^s(\Omega)}\right) \\ &\leq C \left(\kappa_1\|b\|_{L^s(\Omega)}\|g\|_{L^s(\Omega)} + \|g\|_{L^s(\Omega)}\right) \\ &\leq \hat{C} \left(1 + \|b\|_{L^s(\Omega)}\right) \|g\|_{L^s(\Omega)}, \end{aligned}$$

où $\hat{C} = \max(1, C\kappa_1)$ est une constante positive indépendantes de b et de g.

L'exposant s satisfaisant $2s > n$, nous savons qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que

$$W^{2,s}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Nous déduisons alors de ce qui précède que $z \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ et satisfait l'estimation

$$\|z\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C_S\|z\|_{W^{2,s}(\Omega)} \leq \kappa_2 \left(1 + \|b\|_{L^s(\Omega)}\right) \|g\|_{L^s(\Omega)},$$

où $\kappa_2 = C_S\hat{C}$. □

1.2.2 Équation d'état

L'analyse du problème de contrôle optimal nécessite une étude approfondie de la solvabilité de l'équation d'état (1.1). Des résultats d'existence, d'unicité et de régularité de la solution faible correspondante feront l'objet de cette section.

Nous commencerons par un résultat auxiliaire qui nous sera très utile dans la suite.

Lemme 1.2.8. *Supposons que l'hypothèse* $(H1)$ *soit satisfaite. Alors pour tout* $u, u_1, u_2 \in L^s(\Omega)$ *et tout* $z, z_1, z_2 \in L^\infty(\Omega)$*, nous avons les estimations suivantes*

$$\begin{aligned} &\left\|\int_0^1 f_y(\cdot, \theta z_1 + (1-\theta)z_2, u)d\theta\right\|_{L^s(\Omega)} \\ &\leq C_2 \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right) \eta \left(\max\left(\|z_1\|_{L^\infty(\Omega)}, \|z_2\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\right), \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} &\left\|\int_0^1 f_u(\cdot, z, \theta u_1 + (1-\theta)u_2)d\theta\right\|_{L^s(\Omega)} \\ &\leq C_2 \left(1 + \tfrac{1}{2}\|u_1\|_{L^s(\Omega)} + \tfrac{1}{2}\|u_2\|_{L^s(\Omega)}\right) \eta \left(\|z\|_{L^\infty(\Omega)}\right), \end{aligned} \tag{1.9}$$

où $C_2 = C_1 + \|F\|_{L^s(\Omega)}$.

Démonstration. Pour presque tout $x \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^1 f_y(x, \theta z_1(x) + (1-\theta) z_2(x), u(x)) d\theta \right| \\
&\leq \int_0^1 |f_y(x, \theta z_1(x) + (1-\theta) z_2(x), u(x))| \, d\theta \\
&\leq \int_0^1 |F(x) + C_1 |u(x)|| \, \eta \left(|\theta z_1(x) + (1-\theta) z_2(x)| \right) d\theta \\
&= |F(x) + C_1 |u(x)|| \int_0^1 \eta \left(|\theta z_1(x) + (1-\theta) z_2(x)| \right) d\theta.
\end{aligned}$$

Observant que

$$\begin{aligned}
|\theta z_1(x) + (1-\theta) z_2(x)| \quad &\leq \theta |z_1(x)| + (1-\theta) |z_2(x)| \\
&\leq \max \left(|z_1(x)|, |z_2(x)| \right) \\
&\leq \max \left(\|z_1\|_{L^\infty(\Omega)}, \|z_2\|_{L^\infty(\Omega)} | \right),
\end{aligned}$$

et utilisant la croissance de η, nous déduisons que

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^1 f_y(x, \theta z_1(x) + (1-\theta) z_2(x), u(x)) d\theta \right| \\
&\leq |F(x) + C_1 |u(x)|| \int_0^1 \eta \left(\max \left(\|z_1\|_{L^\infty(\Omega)}, \|z_2\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \right) d\theta \\
&= |F(x) + C_1 |u(x)|| \, \eta \left(\max \left(\|z_1\|_{L^\infty(\Omega)}, \|z_2\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \right).
\end{aligned}$$

La première estimation suit par une simple intégration sur Ω.

• Des arguments similaires montrent que pour presque tout $x \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 f_u(x, z(x), \theta u_1(x) + (1-\theta) u_2(x)) d\theta \\
&\leq \int_0^1 |F(x) + C_1 |\theta u_1(x) + (1-\theta) v_1(x)|| \, \eta \left(|z(x)| \right) d\theta \\
&\leq \int_0^1 \left(F(x) + C_1 \left(\theta \left| u_(x) \right| + (1-\theta) |v(x)| \right) \right) \eta \left(\|z\|_{L^\infty(\Omega)} \right) d\theta \\
&= \left(F(x) + \tfrac{C_1}{2} \left(|u(x)| + |v(x)| \right) \right) \eta \left(\|z\|_{L^\infty(\Omega)} \right),
\end{aligned}$$

ce qui donne la deuxième estimation, après intégration sur Ω. □

Comme conséquence, nous avons le résultat suivant.

Lemme 1.2.9. *Supposons que l'hypothèse $(H1)$ soit satisfaite. Alors pour tout $u \in L^s(\Omega)$ et tout $z \in L^\infty(\Omega)$, les fonctions $f_y(\cdot, z, u)$, $f_u(\cdot, z, u)$ et $f(\cdot, z, u)$ appartiennent à $L^s(\Omega)$. De plus, les estimations suivantes sont satisfaites*

$$\|f_y(\cdot, z, u)\|_{L^s(\Omega)} \leq C_2 \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right) \eta \left(\|z\|_{L^\infty(\Omega)}\right), \tag{1.10}$$

$$\|f_u(\cdot, z, u)\|_{L^s(\Omega)} \leq C_2 \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right) \eta \left(\|z\|_{L^\infty(\Omega)}\right), \tag{1.11}$$

$$\|f(\cdot, z, u)\|_{L^s(\Omega)} \leq C_2 \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right) \left(1 + \eta \left(\|z\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \|z\|_{L^\infty(\Omega)}\right). \tag{1.12}$$

Démonstration. La première et deuxième estimation sont, respectivement, une conséquence directe de (1.8) et (1.9), en posant $z_1 = z_2 = z$ et $u_1 = u_2 = u$.

• Utilisant le développement de Taylor, pour presque tout $x \in \Omega$, on a

$$f(x, z(x), u(x)) = f(x, 0, u(x)) + \int_0^1 f_y(x, \theta z(x), u(x)) d\theta \, z(x),$$

et donc

$$\begin{aligned} \|f(\cdot, z, u)\|_{L^s(\Omega)} &\leq \|f(\cdot, 0, u)\|_{L^s(\Omega)} + \left\| \int_0^1 f_y(\cdot, \theta z, u) d\theta \, z \right\|_{L^s(\Omega)} \\ &\leq \|f(\cdot, 0, u)\|_{L^s(\Omega)} + \left\| \int_0^1 f_y(\cdot, \theta z, u) d\theta \right\|_{L^s(\Omega)} \|z\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Grâce à $(H1)$, pour presque tout $x \in \Omega$, on a

$$|f(x, 0, u(x))| \leq F(x) + C_1 |u(x)|,$$

ce qui, après intégration sur Ω, donne

$$\begin{aligned} \|f(\cdot, 0, u)\|_{L^s(\Omega)} &\leq \|F + C_1 |u|\|_{L^s(\Omega)} \leq \|F\|_{L^s(\Omega)} + C_1 \|u\|_{L^s(\Omega)} \\ &\leq C_2 \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right). \end{aligned} \tag{1.14}$$

De l'autre côté, en posant $z_1 = z$ et $z_2 = 0$ dans (1.8), on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^1 f_y(\cdot, \theta z, u) d\theta \right\|_{L^s(\Omega)} &\leq \left(\|F\|_{L^s(\Omega)} + C_1 \|u\|_{L^s(\Omega)}\right) \eta \left(\|z\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \\ &\leq C_2 \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right) \eta \left(\|z\|_{L^\infty(\Omega)}\right). \end{aligned} \tag{1.15}$$

La troisième estimation est alors une conséquence de (1.13), (1.14) et (1.15). □

Le résultat précédent permet, entre autres, de donner un sens à la formulation variationnelle associée à notre équation d'état.

Définition 1.2.10. *Supposons que l'hypothèse $(H1)$ soit satisfaite avec $s \geq 2$ et $s > \frac{n}{2}$ et soit $u \in L^s(\Omega)$. Une fonction $y_u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ est une solution faible de (1.1) si*

$$(\nabla y_u, \nabla \phi) + (f(\cdot, y_u, u), \phi) = 0 \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

L'existence d'une solution faible de l'équation d'état peut-être prouvée comme suit :

• Nous tronquons f en considérant, pour $k \in \mathbb{N}$, la fonction définie par

$$f_k(x,\lambda,u) = f\left(x, \mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda, u\right) = \begin{cases} f(x,k,u) & \text{si } \lambda \geq k, \\ f(x,\lambda,u) & \text{si } -k \leq \lambda \leq k, \\ f(x,-k,u) & \text{si } \lambda \leq -k, \end{cases}$$

où $\mathbb{P}_{[-k,k]}$ est la projection sur l'intervalle $[-k,k]$. Contrairement à f, la fonction f_k possède des propriétés qui nous permettront de prouver que l'opérateur

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &\longrightarrow H^{-1}(\Omega) \\ z &\longmapsto -\Delta z + f_k(\cdot, z, u) \end{aligned}$$

est monotone, continu et coercif et qu'il existe donc une solution unique $y_k \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant

$$\begin{cases} -\Delta y + f_k(x,y,u) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{1.16}$$

• En utilisant des arguments classiques, nous prouvons ensuite que $(y_k)_k$ est uniformément bornée dans $L^\infty(\Omega)$ et que, pour k suffisamment grand, on a

$$f_k(\cdot, y_k, u) = f(\cdot, y_k, u).$$

Par conséquent $y_k \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ est solution de l'équation d'état (1.1).

Nous commençons par étudier les propriétés de la troncature de f.

Lemme 1.2.11. *Supposons que l'hypothèse* $(H1)$ *soit satisfaite. Alors pour presque tout* $x \in \Omega$ *et tout* $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, u \in \mathbb{R}$, *on a*

$$f_k(x,\lambda,u) \leq (1+\eta(k))\,(F(x) + C_1|u|)\,, \tag{1.17}$$

$$|f_k(x,\lambda_1,u) - f_k(x,\lambda_2,u)| \leq \eta(k)\,(F(x) + C_1|u|)\,|\lambda_1 - \lambda_2|\,, \tag{1.18}$$

$$(f_k(x,\lambda_1,u) - f_k(x,\lambda_2,u))\,(\lambda_1 - \lambda_2) \geq 0. \tag{1.19}$$

Démonstration. Des arguments classiques, en combinaison avec l'hypothèse $(H1)$ et le théorème de Taylor, montrent que

$$
\begin{aligned}
|f_k(x,\lambda,u)| &= \left|f\left(x,\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda,u\right)\right| \\
&= \left|f\left(x,0,u\right)+\int_0^1 f_y\left(x,\theta\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda,u\right)d\theta\,\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda\right| \\
&\leq \left|f\left(x,0,u\right)\right|+\int_0^1 f_y\left(x,\theta\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda,u\right)d\theta\,\left|\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda\right| \\
&\leq \left(F(x)+C_1|u|\right)+\int_0^1 \left(F(x)+C_1|u|\right)\eta\left(\theta\left|\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda\right|\right)d\theta\left|\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda\right| \\
&= \left(F(x)+C_1|u|\right)\left(1+\int_0^1 \eta\left(\theta\left|\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda\right|\right)d\theta\left|\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda\right|\right).
\end{aligned}
$$

Observant que $\left|\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda\right| \leq k$ et utilisant l'hypothèse de croissance relative à η, nous déduisons que

$$\eta\left(\theta\left|\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda\right|\right)\leq\eta\left(\left|\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda\right|\right)\leq\eta\left(k\right)\qquad\text{pour tout }\theta\in[0,1].$$

Par conséquent nous obtenons

$$|f_k(x,\lambda,u)|\leq\left(F(x)+C_1|u|\right)\left(1+k\,\eta\left(k\right)\right),$$

ce qui prouve la première estimation. De la même manière, nous avons

$$
\begin{aligned}
&|f_k(x,\lambda_1,u)-f_k(x,\lambda_2,u)| = \left|f\left(x,\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda_1,u\right)-f\left(x,\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda_2,u\right)\right| \\
&= \left|\int_0^1 f_y\left(x,\theta\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda_1+(1-\theta)\,\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda_2,u\right)d\theta\,\left(\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda_1-\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda_2\right)\right| \\
&\leq \left(F(x)+C_1|u|\right)\int_0^1 \eta\left(\left|\theta\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda_1+(1-\theta)\,\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda_2\right|\right)d\theta\left|\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda_1-\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda_2\right| \\
&\leq \left(F(x)+C_1|u|\right)\int_0^1 \eta\left(\theta\left|\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda_1\right|+(1-\theta)\left|\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda_2\right|\right)d\theta\left|\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda_1-\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda_2\right|. \\
&\leq \left(F(x)+C_1|u|\right)\eta\left(k\right)\left|\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda_1-\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda_2\right|.
\end{aligned}
$$

Utilisant le fait que la projection $\mathbb{P}_{[-k,k]}$ est lipschitzienne avec

$$\left|\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda_1-\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda_2\right|\leq\left|\lambda_1-\lambda_2\right|,$$

nous obtenons la deuxième estimation. Finalement, on a

$$
\begin{aligned}
&\left(f_k(x,\lambda_1,u)-f_k(x,\lambda_2,u)\right)\left(\lambda_1-\lambda_2\right) \\
&= \left(f\left(x,\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda_1,u\right)-f\left(x,\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda_2,u\right)\right)\left(\lambda_1-\lambda_2\right) \\
&= \int_0^1 f_y\left(x,\theta\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda_1+(1-\theta)\,\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda_2,u\right)d\theta\,\left(\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda_1-\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda_2\right)\left(\lambda_1-\lambda_2\right).
\end{aligned}
$$

Prenant en compte la monotonie de $\mathbb{P}_{[-k,k]}$, dans le sens suivant

$$\left(\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda_1-\mathbb{P}_{[-k,k]}\lambda_2\right)\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\geq 0$$

et le signe de f_y, nous obtenons la troisième inégalité. □

Dans la proposition suivante, nous établissons l'existence d'une solution faible au problème "tronqué" (1.16).

Proposition 1.2.12. *Si* $(H1)$ *est satisfaite et si* $u \in L^s(\Omega)$*, alors le problème* (1.16) *admet une solution unique* $y_k \in H_0^1(\Omega)$*. De plus, l'estimation suivante est satisfaite*

$$|y_k|_{H_0^1(\Omega)} \leq \kappa \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right),$$

où $\kappa > 0$ *est indépendante de* u *et de* k*.*

Démonstration. Considérons les applications $\mathcal{A}_k$ et L_k définies par

$$\langle \mathcal{A}_k(z), \phi \rangle_{H^{-1},H_0^1} = (\nabla z, \nabla \phi) + (f_k(\cdot, z, u) - f_k(\cdot, 0, u), \phi),$$

et

$$\langle L_k, \phi \rangle_{H^{-1},H_0^1} = -\left(f_k(\cdot, 0, u), \phi\right).$$

La formulation faible associée au problème (1.16) est équivalente à

$$\begin{cases} \text{Trouver } y_k \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \langle \mathcal{A}_k(y_k), \phi \rangle_{H^{-1},H_0^1} = \langle L_k, \phi \rangle_{H^{-1},H_0^1} \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{1.20}$$

Grâce à (1.17) et (1.18), nous pouvons facilement voir que $f_k(\cdot, 0, u) \in L^s(\Omega)$ et que si $z, \phi \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2s'}(\Omega)$, alors

$$(f_k(\cdot, z, u) - f_k(\cdot, 0, u)) \in L^{\frac{2s}{s+1}}(\Omega) \quad \text{et} \quad (f_k(\cdot, z, u) - f_k(\cdot, 0, u))\, \phi \in L^1(\Omega).$$

Ceci montre que le problème (1.20) est bien défini. L'idée est alors d'utiliser le théorème A-4.2 pour montrer qu'il admet une solution unique.

• Pour montrer que l'opérateur $\mathcal{A}_k$ est continu de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$, considérons une suite $(z_n)_n$ convergeant vers z dans $H_0^1(\Omega)$. Prenant en compte (1.18) et utilisant l'inégalité de Sobolev, il vient que

$$\begin{aligned} &\left|\langle \mathcal{A}_k(z) - \mathcal{A}_k(z_n), \phi \rangle_{H^{-1},H_0^1}\right| \\ &= \left|(\nabla (z_n - z), \nabla \phi) + (f_k(\cdot, z_n, u) - f_k(\cdot, z, u), \phi)\right| \\ &\leq |z_n - z|_{H_0^1(\Omega)} |\phi|_{H_0^1(\Omega)} + \eta(k) \left(\|F\|_{L^s(\Omega)} + C_1 \|u\|_{L^s(\Omega)}\right) \|z_n - z\|_{L^{2s'}(\Omega)} \|\phi\|_{L^{2s'}(\Omega)} \\ &\leq \left(1 + C_2 C_S^2 \eta(k) \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right)\right) |z_n - z|_{H_0^1(\Omega)} |\phi|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

où C_S est la constante de Sobolev et C_2 est la constante donnée dans le lemme 1.2.9. Par conséquent

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_k(z) - \mathcal{A}_k(z_n)\|_{H^{-1}} &= \sup_{|\phi|_{H_0^1} \leq 1} \left|\langle \mathcal{A}_k(z) - \mathcal{A}_k(z_n), \phi \rangle_{H^{-1},H_0^1}\right| \\ &\leq \left(1 + C_2 C_S^2 \eta(k) \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right)\right) |z_n - z|_{H_0^1(\Omega)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0. \end{aligned}$$

• Prouvons à présent la monotonie de $\mathcal{A}_k$. Prenant en compte (1.19), nous déduisons que

$$\begin{aligned}&\langle \mathcal{A}_k(z_1) - \mathcal{A}_k(z_2), z_1 - z_2\rangle_{H^{-1},H_0^1}\\ &= |z_1 - z_2|^2_{H_0^1(\Omega)} + \underbrace{\left(f_k\left(\cdot, z_1, u\right) - f_k\left(\cdot, z_2, u\right), z_1 - z_2\right)}_{\geq 0}\\ &\geq |z_1 - z_2|^2_{H_0^1(\Omega)} > 0 \qquad \text{si } z_1 \neq z_2.\end{aligned}$$

• De même, choisissant $z_1 = z$ et $z_2 = 0$ et remarquant que $\mathcal{A}_k(0) = 0$, il vient que

$$\frac{\langle \mathcal{A}_k(z), z\rangle_{H^{-1},H_0^1}}{|z|_{H_0^1(\Omega)}} \geq \frac{|z|^2_{H_0^1(\Omega)}}{|z|_{H_0^1(\Omega)}} = |z|_{H_0^1(\Omega)},$$

et donc

$$\lim_{|z|_{H_0^1(\Omega)}\to+\infty} \frac{\langle \mathcal{A}_k(z), z\rangle_{H^{-1},H_0^1}}{|z|_{H_0^1(\Omega)}} = +\infty$$

montrant ainsi la coercivité de $\mathcal{A}_k$.

• Finalement, prenant en compte $(H1)$ et grâce à l'inégalité de Hölder et à l'inégalité de Sobolev, et prenant en compte (1.14), on obtient

$$\begin{aligned}\left|\langle L_k, \phi\rangle_{H^{-1},H_0^1}\right| &= |-(f_k(\cdot, 0, u), \phi)| = |-(f(\cdot, 0, u), \phi)|\\ &\leq C_2\left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right)\|\phi\|_{L^{s'}(\Omega)}\\ &\leq C_2 \mathcal{L}^n\left(\Omega\right)^{\frac{1}{2s'}}\left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right)\|\phi\|_{L^{2s'}(\Omega)}\\ &\leq \kappa\left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right)|\phi|_{H_0^1(\Omega)},\end{aligned}$$

où $\kappa = C_2 C_S \mathcal{L}^n\left(\Omega\right)^{\frac{1}{2s'}}$. Les conditions d'application du théorème de Minty-Browder étant satisfaites, nous déduisons que le problème (1.20) admet une solution unique y_k. De plus, posant $\phi = y_k$ dans (1.20) et utilisant des arguments similaires, on obtient

$$\begin{aligned}|y_k|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \langle \mathcal{A}_k(y_k), y_k\rangle_{H^{-1},H_0^1} &= \langle L_k, y_k\rangle_{H^{-1},H_0^1}\\ &\leq \kappa\left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right)|y_k|_{H_0^1(\Omega)}\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$|y_k|_{H_0^1(\Omega)} \leq \kappa\left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right),$$

et termine la preuve. □

Nous allons prouver à présent que la solution faible de l'équation (1.16) est uniformément bornée dans Ω. Pour ce faire, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 1.2.13. *Soit $h_0 \in \mathbb{R}$ et soit φ une fonction définie dans $[h_0, +\infty[$, non négative, décroissante et satisfaisant la propriété suivante*

$$\begin{cases} \textit{Pour tout } h > k \geq h_0 \\ \varphi(h) \leq \frac{c_0}{(h-k)^\alpha} \varphi(k)^\beta, \end{cases}$$

où $c_0 > 0$, $\alpha > 0$ et $\beta > 1$. Alors,

$$\varphi(h_0 + \omega) = 0 \qquad \textit{où } \omega = c_0^{\frac{1}{\alpha}} \varphi(h_0)^{\frac{\beta-1}{\alpha}} 2^{\frac{\beta}{\beta-1}}.$$

Démonstration. Voir le lemme B1, chapitre 2 dans [7]. □

Proposition 1.2.14. *Supposons que les hypothèses de la proposition* 1.2.12 *sont satisfaites. Alors la solution faible du problème* (1.16) *appartient à $L^\infty(\Omega)$. De plus, l'estimation suivante est satisfaite*

$$\|y_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \kappa_\infty \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right),$$

où $\kappa_\infty > 0$ est indépendante de u et de k.

Démonstration. Dans toute la suite, nous désignerons par A_h l'ensemble défini par

$$A_h = \{x \in \Omega \mid |y_k(x)| \geq h\}, \qquad h > 0,$$

et par v_k la fonction définie par

$$v_k = \operatorname{sign} y_k \max(|y_k| - k, 0) = \begin{cases} y_k - k & \text{si } y_k \geq k, \\ 0 & \text{si } |y_k| \leq k, \\ y_k + k & \text{si } y_k \leq -k, \end{cases}$$

Grâce au corollaire A.5 et à la proposition 5.3 dans [7], nous avons que $v_k \in H_0^1(\Omega)$ et

$$\nabla v_k = \nabla y_k \chi_{A_k}.$$

Choisissant $\phi = v_k$ dans la formulation (1.20) correspondant à y_k, nous obtenons

$$(\nabla y_k, \nabla v_k) + (f_k(\cdot, y_k, u) - f_k(\cdot, 0, u), v_k) = -(f_k(\cdot, 0, u), v_k).$$

Utilisant la monotonie de f, nous pouvons voir que

$$\begin{aligned} &(f_k(\cdot, y_k, u) - f_k(\cdot, 0, u), v_k) \\ &= \int_\Omega \left(f(x, \mathbb{P}_{[-k,k]} y_k(x), u(x)) - f(x, 0, u(x))\right) v_k(x) dx \\ &= \int_{\{x \in \Omega | y_k(x) \geq k\}} (f(x, k, u(x)) - f(x, 0, u(x)))(y_k(x) - k)\, dx \end{aligned}$$

$$+\int_{\{x\in\Omega|y_k(x)\leq -k\}} \left(f(x,-k,u(x)) - f(x,0,u(x))\right)(y_k(x)+k)\,dx \geq 0.$$

Ceci, combiné ave le fait que

$$(\nabla y_k, \nabla v_k) = \|\nabla v_k\|^2_{L^2(\Omega)},$$

implique que

$$\|\nabla v_k\|^2_{L^2(\Omega)} \leq -\left(f_k(\cdot,0,u), v_k\right) = -\int_{A_k} f(x,0,u(x))v_k(x)dx.$$

Utilisant alors l'inégalité de Sobolev et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}\|v_k\|^2_{L^{2^*}(A_k)} &\leq C\,\|\nabla v_k\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C\,\|f(\cdot,0,u)\|_{L^{(2^*)'}(A_k)}\,\|v_k\|_{L^{2^*}(A_k))},\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\||y_k|-k\|_{L^{2^*}(A_k)} &= \|v_k\|_{L^{2^*}(A_k)} \\ &\leq C\,\|f(\cdot,0,u)\|_{L^{(2^*)'}(A_k)} \\ &\leq C\,\|f(\cdot,0,u)\|_{L^s(A_k)}\,|A_k|^{\frac{1}{(2^*)'}-\frac{1}{s}} \\ &\leq C\,\|f(\cdot,0,u)\|_{L^s(\Omega)}\,|A_k|^{\frac{1}{(2^*)'}-\frac{1}{s}}.\end{aligned}$$

De l'autre côté, si $h>k>0$, alors $A_h\subset A_k$ et

$$\begin{aligned}\||y_k|-k\|_{L^{2^*}(A_k)} &\geq \||y_k|-k\|_{L^{2^*}(A_h)} \\ &\geq \|h-k\|_{L^{2^*}(A_h)} = (h-k)\,|A_h|^{\frac{1}{2^*}}.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$(h-k)\,|A_h|^{\frac{1}{2^*}} \leq C\,\|f(\cdot,0,u)\|_{L^s(\Omega)}\,|A_k|^{\frac{1}{(2^*)'}-\frac{1}{s}}.$$

Autrement dit

$$\begin{aligned}|A_h| &\leq \tfrac{C^{2^*}}{(h-k)^{2^*}}\,\|f(\cdot,0,u)\|^{2^*}_{L^s(\Omega)}\,|A_k|^{\frac{2^*}{(2^*)'}-\frac{2^*}{s}} \\ &= \tfrac{C^{2^*}}{(h-k)^{2^*}}\,\|f(\cdot,0,u)\|^{2^*}_{L^s(\Omega)}\,|A_k|^{1+\frac{4s-2n}{(n-2)s}} \\ &\leq \tfrac{(CC_2)^{2^*}}{(h-k)^{2^*}}\left(1+\|u\|_{L^s(\Omega)}\right)^{2^*}|A_k|^{1+\frac{4s-2n}{(n-2)s}}.\end{aligned}$$

Appliquant le lemme 1.2.13 avec $\varphi(h)=|A_h|$, $c_0=(CC_2)^{2^*}\left(1+\|u\|_{L^s(\Omega)}\right)^{2^*}$, $h_0=0$, $\alpha=2^*$ et $\beta=1+\frac{4s-2n}{(n-2)s}$ (>1 car $s>\frac{n}{2}$), il vient que

$$|A_\omega|=0 \qquad \text{avec } \omega = CC_2\left(1+\|u\|_{L^s(\Omega)}\right)\mathcal{L}^n(\Omega)^{\frac{\beta-1}{\alpha}}\;2^{\beta(\beta-1)}.$$

Ceci implique que

$$|y_k(x)|\leq\omega \qquad \text{presque partout dans } \Omega,$$

et termine la preuve. □

Nous sommes en mesure de montrer l'existence d'une solution de l'équation d'état dans $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Plus précisemment, nous avons le résultat suivant.

Théorème 1.2.15. *Si* $(H1)$ *est satisfaite et si* $u \in L^s(\Omega)$, *alors l'équation* (1.1) *admet une solution unique* $y_u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. *Cette solution satisfait les estimations suivantes*

$$|y_u|_{H_0^1(\Omega)} \leq \kappa \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right),$$

$$\|y_u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \kappa_\infty \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right).$$

Démonstration. Soit k tel que

$$k > \kappa_\infty \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right),$$

où κ_∞ est la constante dans la proposition 1.2.14. Soit $y_k \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ la solution de (1.16). Grâce à la proposition 1.2.14, nous déduisons que

$$|y_k(x)| \leq \|y_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \kappa_\infty \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right) < k \qquad \text{p.t. } x \in \Omega,$$

et donc

$$f_k(\cdot, y_k) = f(\cdot, y_k).$$

Autrement dit, y_k est aussi solution de (1.1). Reste à prouver l'unicité de la solution. Supposons que y_1 et y_2 sont deux solutions de (1.1). Utilisant des arguments classiques, nous pouvons facilement voir que $z = y_1 - y_2$ est solution de

$$\begin{cases} -\Delta z + bz = 0 & \text{dans } \Omega, \\ z = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{1.21}$$

où $b = \displaystyle\int_0^1 f_y(\cdot, \theta y_1 + (1-\theta) y_2, u) d\theta \geq 0$. Grâce au lemme 1.2.8, nous savons que $b \in L^s(\Omega)$, et donc d'après la proposition 1.2.3, nous déduisons que le problème (1.21) admet une solution unique et que

$$\|z\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \, |z|_{H_0^1(\Omega)} \leq 0$$

impliquant que $z = 0$, i.e. $y_1 = y_2$ p.p. □

Finalement, nous avons le résultat de régularité suivant.

Théorème 1.2.16. *Si* $(H1)$ *est satisfaite et si* $u \in L^s(\Omega)$, *alors la solution* y_u *de l'équation* (1.1) *appartient à* $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ *pour un certain* $\alpha \in]0,1[$ *et*

$$\|y_u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq \kappa_3 \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right)^2 \left(1 + \eta \left(\kappa_\infty \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right)\right)\right),$$

où $\kappa_3 > 0$ *est une constante indépendante de* u.

Démonstration. Il est facile de voir que y_u satisfait

$$\begin{cases} -\Delta y + by = -f(\cdot, 0, u) & \text{dans } \Omega, \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où $b = \displaystyle\int_0^1 f_y(\cdot, \theta y_u, u)\, d\theta \geq 0$. Grâce au lemme 1.2.8, nous savons que $b \in L^s(\Omega)$. Utilisant alors la proposition 1.3.1 et les inégalités (1.8) et (1.14), nous déduisons que $y_u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ et satisfait

$$\begin{aligned} \|y_u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} &\leq \kappa_2 \left(1 + \|b\|_{L^s(\Omega)}\right) \|f(\cdot, 0, u)\|_{L^s(\Omega)} \\ &\leq \kappa_2 C_2 \left(1 + C_2 \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right) \eta \left(\|y_u\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\right) \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right) \\ &\leq \kappa_3 \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right)^2 \left(1 + \eta \left(\|y_u\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\right), \\ &\leq \kappa_3 \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right)^2 \left(1 + \eta \left(\kappa_\infty \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right)\right)\right), \end{aligned}$$

où $\kappa_3 = \kappa_2 C_2 (1 + C_2)$. □

1.3 Variation de l'état et de la fonctionnelle coût

1.3.1 Différentiabilité de l'application associant l'état à la variable contrôle

Une étape fondamentale lors de l'établissement des conditions d'optimalité est l'étude des propriétés topologiques de l'application $u \mapsto y_u$. La continuité lipschitzienne de cette application sera le premier aspect que l'on considère.

Proposition 1.3.1. *Supposons que l'hypothèse* $(H1)$ *est satisfaite. Soient* $u, v \in L^\infty(\Omega)$ *et soient* y_u *et* y_v *les solutions de* (1.1) *correspondantes à* u *et* v*, respectivement. Alors*

$$\begin{aligned} &|y_u - y_v|_{H_0^1(\Omega)} + \|y_u - y_v\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq \kappa_4 \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)} + \|v\|_{L^s(\Omega)}\right) \eta \left(\kappa_\infty \left(1 + \|v\|_{L^s(\Omega)}\right)\right) \|u - v\|_{L^\infty(\Omega)}, \end{aligned} \tag{1.22}$$

où κ_4 *est une constante positive indépendante de* u *et de* v.

Démonstration. Des arguments identiques à ceux utilisés dans la section précédente montrent que $y = y_u - y_v$ est solution de

$$\begin{cases} -\Delta y + f(\cdot, y_u, u) - f(\cdot, y_v, v) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Observant que

$$\begin{aligned} f(\cdot, y_u, u) - f(\cdot, y_v, v) &= f(\cdot, y_u, u) - f(\cdot, y_v, u) + f(\cdot, y_v, u) - f(\cdot, y_v, v) \\ &= \int_0^1 f_y(\cdot, \theta y_u + (1-\theta) y_v, u) d\theta \, y \\ &+ \int_0^1 f_u(\cdot, y_v, \theta u + (1-\theta) v) d\theta \, (u - v) \,, \end{aligned}$$

nous déduisons que y satisfait

$$\begin{cases} -\Delta y + b y = \tilde{b} \, (v - u) & \text{dans } \Omega, \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{1.23}$$

où

$$b = \int_0^1 f_y(\cdot, \theta y_u + (1-\theta) y_v, u) d\theta,$$

et

$$\tilde{b} = \int_0^1 f_u(\cdot, y_v, \theta u + (1-\theta) v) d\theta.$$

Grâce au lemme 1.2.8, nous avons que b et $\tilde{b}$ appartiennent à $L^s(\Omega)$ avec

$$\|\tilde{b}\|_{L^s(\Omega)} \leq C_2 \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)} + \|v\|_{L^s(\Omega)}\right) \eta \left(\|y_v\|_{L^\infty(\Omega)}\right).$$

Utilisant alors les propositions 1.2.3, 1.2.5 et le théorème 1.2.15, nous déduisons que

$$\begin{aligned} |y|_{H_0^1(\Omega)} + \|y\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq (\kappa_0 + \kappa_1) \, \|\tilde{b} \, (u - v) \, \|_{L^s(\Omega)} \\ &\leq (\kappa + \kappa_\infty) \, \|\hat{b}\|_{L^s(\Omega)} \|u - v\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq C_2 \, (\kappa_0 + \kappa_1) \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)} + \|v\|_{L^s(\Omega)}\right) \eta \left(\kappa_\infty \left(1 + \|v\|_{L^s(\Omega)}\right)\right) \|u - v\|_{L^\infty(\Omega)} \,, \end{aligned}$$

ce qui donne l'estimation énoncée. □

Le deuxième aspect concerne la différentiabilité au sens de Gâteaux de l'application $u \mapsto y_u$.

Proposition 1.3.2. *Soient $u, v \in L^\infty(\Omega)$ ($\rho \in]0,1[$) et posons $u_\rho = u + \rho v$. Alors*

$$y_{u_\rho} = y_u + \rho z_{uv} + r_\rho \qquad \textit{avec} \lim_{\rho \to 0^+} \left\| \frac{r_\rho}{\rho} \right\|_{H_0^1(\Omega)} = \lim_{\rho \to 0^+} \left\| \frac{r_\rho}{\rho} \right\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$$

où z_{uv} est la solution de l'équation linéaire

$$\begin{cases} -\Delta z + f_y(\cdot, y_u, u) z = -f_u(\cdot, y_u, u) v & \textit{dans } \Omega, \\ z = 0 & \textit{sur } \; \Gamma. \end{cases} \tag{1.24}$$

Démonstration. Commençons par observer que grâce au lemme 1.2.9, les fonctions $b = f_y(\cdot, y_u, u)$ et $\tilde{b} = f_u(\cdot, y_u, u)$ appartiennent à $L^s(\Omega)$. Grâce à la proposition 1.2.3 et à la proposition 1.2.5, nous déduisons que le problème (1.24) admet une solution unique dans $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

• De l'autre côté, de simples calculs montrent que $z_\rho = \frac{y_{u_\rho} - y_u}{\rho}$ est solution de

$$\begin{cases} -\Delta z_\rho + b_\rho \, z_\rho = -\tilde{b}_\rho \, v & \text{dans } \Omega, \\ z_\rho = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où

$$b_\rho = \int_0^1 f_y(\cdot, \theta y_u + (1-\theta) y_{u_\rho}, u) d\theta \quad \text{et} \quad \tilde{b}_\rho = \int_0^1 f_u(\cdot, y_u, \theta u + (1-\theta) u_\rho) d\theta.$$

Grâce lemme 1.2.8, nous avons aussi que $b_\rho, \tilde{b}_\rho \in L^s(\Omega)$. Soustrayant alors les deux équations, il s'ensuit que $\chi_\rho = z_\rho - z_{uv}$ satisfait

$$\begin{cases} -\Delta \chi_\rho + b_\rho \, \chi_\rho = (b - b_\rho) \, z_{uv} + \big(\tilde{b} - \tilde{b}_\rho\big) v & \text{dans } \Omega, \\ \chi_\rho = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Appliquant encore une fois la proposition 1.2.3 et la proposition 1.2.5, il vient que

$$\begin{aligned} |\chi_\rho|_{H_0^1(\Omega)} + \|\chi_\rho\|_{L^\infty(\Omega)} &\le (\kappa_0 + \kappa_1) \left\| (b - b_\rho) \, z_{uv} + \big(\tilde{b} - \tilde{b}_\rho\big) v \right\|_{L^s(\Omega)} \\ &\le (\kappa_0 + \kappa_1) \, \|b - b_\rho\|_{L^s(\Omega)} \, \|z_{uv}\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\quad + (\kappa_0 + \kappa_1) \left\| \tilde{b} - \tilde{b}_\rho \right\|_{L^s(\Omega)} \|v\|_{L^\infty(\Omega)} . \end{aligned} \tag{1.25}$$

• Prenant en compte (1.8) et l'estimation donnée dans le théorème 1.2.15, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|b_\rho\|_{L^s(\Omega)} &\le C_2 \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right) \eta \left(\max \left(\left\|y_{u_\rho}\right\|_{L^\infty(\Omega)}, \|y_u\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \right) \\ &\le C_2 \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right) \eta \left(\kappa_\infty \max \left(1 + \|u_\rho\|_{L^s(\Omega)}, 1 + \|u\|_{L^s(\Omega)} \right) \right) \\ &\le C_2 \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right) \eta \left(\kappa_\infty \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)} + \|v\|_{L^s(\Omega)} \right) \right), \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que

$$\|u_\rho\|_{L^s(\Omega)} \le \|u\|_{L^s(\Omega)} + \rho \, \|v\|_{L^s(\Omega)} \le \|u\|_{L^s(\Omega)} + \|v\|_{L^s(\Omega)} .$$

De même, (1.9) implique que

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{b}_\rho\right\|_{L^s(\Omega)} &\le C_2 \left(1 + \tfrac{1}{2} \|u\|_{L^s(\Omega)} + \tfrac{1}{2} \|u_\rho\|_{L^s(\Omega)}\right) \eta \left(\|y_u\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \\ &\le C_2 \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)} + \|v\|_{L^s(\Omega)}\right) \eta \left(\|y_u\|_{L^\infty(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Les suites $(b_\rho)_\rho$ et $\left(\tilde{b}_\rho\right)_\rho$ sont ainsi uniformément bornées dans $L^s(\Omega)$. D'autre part, d'après la proposition 1.3.1, on a

$$\begin{gathered}
\left\|y_{u_\rho} - y_u\right\|_{L^\infty(\Omega)} \\
\leq \kappa_4 \left(1 + \|u_\rho\|_{L^s(\Omega)} + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right) \eta \left(\kappa_\infty \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right)\right) \|u_\rho - u\|_{L^\infty(\Omega)} \\
\leq \kappa_5 \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)} + \|v\|_{L^s(\Omega)}\right) \eta \left(\kappa_\infty \left(1 + \|u\|_{L^s(\Omega)}\right)\right) \|v\|_{L^\infty(\Omega)}\ \rho \\
\longrightarrow 0 \quad \text{quand } \rho \to 0.
\end{gathered}$$

Des arguments classiques montrent alors que pour presque tout $x \in \Omega$,

$$\lim_{\rho \to 0} b_\rho(x) = b(x) \quad \text{et} \quad \lim_{\rho \to 0} \tilde{b}_\rho(x) = \tilde{b}(x).$$

Appliquant le théorème de convergence dominée, il vient que

$$\lim_{\rho \to 0^+} \|b_\rho - b\|_{L^s(\Omega)} = \lim_{\rho \to 0^+} \left\|\tilde{b}_\rho - \tilde{b}\right\|_{L^s(\Omega)} = 0. \tag{1.26}$$

Conclusion en combinant (1.25) et (1.26).

$$\lim_{\rho \to 0} \|\chi_\rho\| = 0$$

□

1.3.2 Différentiabilité de la fonctionnelle coût par rapport à la variable contrôle

Une conséquence directe des résultats énoncés dans la section précédente est liée à la différentiabilité du coût J par rapport à la variable contrôle.

Proposition 1.3.3. *Si* $(H1)$ *et* $(H2)$ *sont satisfaites et si* $u \in L^\infty(\Omega)$*, alors*

$$J'(u)v = (L_u(\cdot, y_u, u) - f_u(\cdot, y_u, u)p_u, v) \qquad \forall v \in L^\infty(\Omega),$$

où $p_u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *est la solution de l'équation adjointe*

$$\begin{cases} -\Delta p_u + f_y(\cdot, y_u, u)p_u = L_y(\cdot, y_u, u) & \textit{dans } \Omega, \\ p_u = 0 & \textit{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{1.27}$$

Démonstration. Soit $v \in L^\infty(\Omega)$ et posons $u_\rho = u + \rho v$ et $z_\rho = \frac{y_{u_\rho} - y_u}{\rho}$. De simples calculs montrent que

$$\begin{aligned}
\frac{J(u_\rho) - J(u)}{\rho} &= \frac{1}{\rho} \int_\Omega \left(L(x, y_{u_\rho}(x), u_\rho(x)) - L(x, y_u(x), u(x))\right) dx \\
&= \frac{1}{\rho} \int_\Omega \left(L(x, y_{u_\rho}(x), u_\rho(x)) - L(x, y_u(x), u_\rho(x))\right) dx \\
&\quad + \frac{1}{\rho} \int_\Omega (L(x, y_u(x), u_\rho(x)) - L(x, y_u(x), u(x)))\, dx \\
&= \int_\Omega L_\rho(x) z_\rho(x)\, dx + \int_\Omega \tilde{L}_\rho(x) v(x)\, dx,
\end{aligned}$$

où

$$L_\rho = \int_0^1 L_y(\cdot, \theta y_{u_\rho} + (1-\theta) y_u, u_\rho)\, d\theta \quad \text{et} \quad \tilde{L}_\rho = \int_0^1 L_u(\cdot, y_u, \theta u_\rho + (1-\theta)u)\, d\theta.$$

Prenant en compte l'hypothèse (H_2), en utilisant des arguments similaires à ceux de la preuve de la proposition 1.3.2, nous pouvons montrer que les suites $(L_\rho)_\rho$ et $(\tilde{L}_\rho)_\rho$ sont uniformément bornées dans $L^s(\Omega)$ et $L^1(\Omega)$, respectivement. Grâce à la convergence de la suite $(y_{u_\rho}, u_\rho)_\rho$ vers (y_u, u) dans $L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$, nous pouvons montrer que pour presque tout $x \in \Omega$, nous avons

$$\lim_{\rho \to 0^+} L_\rho(x) = L_y(x, y_u(x), u(x)) \quad \text{et} \quad \lim_{\rho \to 0^+} \tilde{L}_\rho(x) = L_u(x, y_u(x), u(x)).$$

Appliquant alors le théorème de convergence dominée, nous concluons que

$$\lim_{\rho \to 0^+} \|L_\rho - L_y(\cdot, y_u, u)\|_{L^s(\Omega)} = \lim_{\rho \to 0^+} \left\|\tilde{L}_\rho - L_u(\cdot, y_u, u)\right\|_{L^1(\Omega)} = 0.$$

La combinaison de ces résultats avec ceux de la proposition 1.3.2 donne

$$\begin{aligned} J'(u)v &= \lim_{\rho \to 0^+} \tfrac{J(u_\rho) - J(u)}{\rho} \\ &= \lim_{\rho \to 0^+} \left(\int_\Omega L_\rho(x) z_\rho(x)\, dx + \int_\Omega \tilde{L}_\rho(x) v(x)\, dx \right) \\ &= \int_\Omega L_y(x, y_u(x), u(x)) z_{uv}(x)\, dx + \int_\Omega L_u(x, y_u(x), u(x)) v(x)\, dx, \end{aligned}$$

où z_{uv} est la solution de (1.24). Considérons alors l'équation adjointe (1.27). Grâce aux propositions 1.2.3 et 1.2.5, cette équation admet une solution unique $p_u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Choisissant z_{uv} comme fonction-test dans la formulation faible correspondant à p_u, il vient que

$$(\nabla p_u, \nabla z_{uv}) + (f_y(\cdot, y_u, u)\, p_u, z_{uv}) = (L_y(\cdot, y_u, u), z_{uv}). \tag{1.28}$$

De l'autre côté, choisissant p_u comme fonction-test dans la formulation faible correspondant à z_{uv}, nous obtenons

$$(\nabla z_{uv}, \nabla p_u) + (f_y(\cdot, y_u, u)\, z_{uv}, p_u) = (-f_u(\cdot, y_u, u)v, p_u). \tag{1.29}$$

Combinant (1.28) et (1.29), on a

$$(L_y(\cdot, y_u, u), z_{uv}) = (-f_u(\cdot, y_u, u), p_u), \tag{1.30}$$

et donc

$$J'(u)v = (L_u(\cdot, y_u, u) - f_u(\cdot, y_u, u) p_u, v).$$

Ceci termine la preuve. □

1.4 Conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre

Nous sommes en mesure d'établir les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre.

Théorème 1.4.1. *Si les hypothèses* $(H1)$ *et* $(H2)$ *sont satisfaites et si* $\bar{u} \in U_{ad}$ *est un contrôle optimal de* (P)*, alors il existe* $\bar{y}, \bar{p} \in H_0^1(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ *satisfaisant*

Équation d'état

$$\begin{cases} -\Delta \bar{y} + f(\cdot, \bar{y}, \bar{u}) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \bar{y} = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

Équation adjointe

$$\begin{cases} -\Delta \bar{p} + f_y(\cdot, \bar{y}, \bar{u})\bar{p} = L_y(\cdot, \bar{y}, \bar{u}) & \text{dans } \Omega, \\ \bar{p} = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

Condition d'optimalité pour le contrôle

$$(L_u(\cdot, \bar{y}, \bar{u}) - f_u(\cdot, \bar{y}, \bar{u})\bar{p}, u - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}.$$

Démonstration. Par définition, nous avons

$$J(\bar{u}) \leq J(u) \qquad \forall u \in U_{ad}.$$

Soit $u \in U_{ad}$ et considérons la perturbation convexe $u_\rho = \bar{u} + \rho(u - \bar{u})$, $\rho \in]0, 1[$. Il est clair que $u_\rho \in U_{ad}$ et donc

$$\tfrac{J(u_\rho) - J(\bar{u})}{\rho} \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad}.$$

Par passage à la limite, nous obtenons

$$J'(\bar{u})(u - \bar{u}) = \lim_{\rho \to 0^+} \tfrac{J(u_\rho) - J(\bar{u})}{\rho} \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad},$$

et la conclusion est alors une conséquence directe de la proposition 1.3.3. $\square$

Chapitre 2

Conditions d'optimalité de type Pontryagin

2.1 Introduction

Nous allons considérer le même type de problème que dans le chapitre 1, mais dans le cas où l'ensemble des contrôles admissibles n'est pas convexe et où la fonction f intervenant dans la définition de l'équation d'état et la fonctionnelle J ne sont pas nécessairement différentiables par rapport à la variable contrôle. Plus précisemment, nous avons les hypothèses suivantes

$(H1')$ Pour tout $(\lambda, u) \in \mathbb{R}^2$, $f(\cdot, \lambda, u)$ est mesurable sur Ω. Pour presque tout $x \in \Omega$ et tout $u \in \mathbb{R}$, $f(x, \cdot, u)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Pour presque tout $x \in \Omega$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(x, \lambda, \cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, pour presque tout $x \in \Omega$ et tout $(\lambda, u) \in \mathbb{R}^2$, nous avons

$$|f(x, 0, u)| \leq F(x) + C_1|u|,$$

$$0 \leq Df_y(x, \lambda, u) \leq (F(x) + C_1|u|)\, \eta\,(|\lambda|)\,,$$

où $F \in L^s(\Omega)$ avec $s \geq 2$ et $s > \frac{n}{2}$, $C_1 > 0$ et $\eta : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction croissante.

$(H2')$ Pour tout $(\lambda, u) \in \mathbb{R}^2$, $L(\cdot, \lambda, u)$ est mesurable sur Ω. Pour presque tout $x \in \Omega$ et tout $u \in \mathbb{R}$, $L(x, \cdot, u)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Pour presque tout $x \in \Omega$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $L(x, \lambda, \cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, pour presque tout $x \in \Omega$ et tout $(\lambda, u) \in \mathbb{R}^2$, nous avons

$$|L(x, \lambda, u)| + |L_y(x, \lambda, u)| \leq (L_1(x) + C_1|u|)\, \eta\,(|\lambda|)\, \eta\,(|u|)\,,$$

où $L_1 \in L^s(\Omega)$.

Afin d'établir les conditions d'optimalité, nous avons besoin de construire des perturbations admissibles du contrôle optimal. Contrairement au chapitre 1 où des perturbations convexes s'imposent naturellement, ici nous allons construire des perturbations diffuses. Une perturbation diffuse d'un contrôle $u \in U_{ad}$ est une fonction de la forme

$$u_\rho = \begin{cases} u & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_\rho, \\ v & \text{dans } \Omega_\rho, \end{cases}$$

où $v \in U_{ad}$ et Ω_ρ est un sous-ensemble mesurable de Ω qui doit satisfaire des conditions permettant, en particulier, d'analyser la variation de l'état et celle de la fonctionnelle coût par rapport à la variable contrôle. L'existence de Ω_ρ, et les propriétés adéquates qui en découlent, est une conséquence du théorème de convexité de Lyapunov. L'utilisation de cet outil permet d'exprimer la variation de la fonctionnelle coût sous une forme Hamiltonienne et d'établir les conditions d'optimalité sous la forme d'un principe de Pontryagin.

Le plan du chapitre est le suivant : dans la section 2.2, nous construisons des perturbations diffuses et étudions la variation de l'état par rapport à ces perturbations. Ces résultats sont utilisés dans la section 2.3 afin d'obtenir la formulation hamiltonienne de la variation de la fonctionnelle coût. Une forme intégrale du principe de Pontryagin est finalement établie dans la section 2.4.

2.2 Variation de l'état par rapport à des perturbations diffuses du contrôle

Dans cette section, nous allons construire des perturbations diffuses et étudier la variation de l'état par rapport à ces perturbations. Nous commençons par définir la distance d'Ekeland sur U_{ad}, notée d_E, comme la mesure de l'ensemble où deux contrôles diffèrent. Plus précisémment, pour tout $u, v \in U_{ad}$, on pose

$$\Omega_{uv} = \{x \in \Omega \mid u(x) \neq v(x)\},$$

et

$$d_E(u,v) = \mathcal{L}^n(\Omega_{uv}),$$

où $\mathcal{L}^n$ désigne la mesure de Lebesgue sur Ω. Le résultat suivant sera utile pour la suite.

Proposition 2.2.1. *Soient u, $v \in L^\infty(\Omega)$ tel que $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$ et $\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$, et soient y_u et y_v les états correspondants. Alors $y_u - y_v$ satisfait l'estimation suivante*

$$|y_u - y_v|_{H_0^1(\Omega)} + \|y_u - y_v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_M \left(\|F\|_{L^s(\Omega_{uv})} + (d_E(u,v))^{\frac{1}{s}} \right),$$

avec C_M est indépendante de u et de v.

Démonstration. Commençons par remarquer que la différence $y_u - y_v$ est solution de l'équation

$$\begin{cases} -\Delta z + bz = f(\cdot, y_v, v) - f(\cdot, y_v, u) & \text{dans } \Omega, \\ z = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

avec

$$b = \int_0^1 f_y(\cdot, \theta y_u + (1-\theta) y_v, u)\, d\theta \geq 0.$$

Grâce à la proposition 1.2.3 et à la proposition 1.2.5, on a l'estimation

$$\begin{aligned} |y_u - y_v|_{H_0^1(\Omega)} + \|y_u - y_v\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq (\kappa_0 + \kappa_1) \|f(\cdot, y_v, v) - f(\cdot, y_v, u)\|_{L^s(\Omega)} \\ &= (\kappa_0 + \kappa_1) \|f(\cdot, y_v, v) - f(\cdot, y_v, u)\|_{L^s(\Omega_{uv})}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Prenant alors en compte les hypothèses sur f et utilisant les arguments dans la preuve du lemme 1.2.9, nous obtenons

$$\|f(\cdot, y_v, v) - f(\cdot, y_v, u)\|_{L^s(\Omega_{uv})}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|f(\cdot, y_v, v)\|_{L^s(\Omega_{uv})} + \|f(\cdot, y_v, u)\|_{L^s(\Omega_{uv})} \\
&\leq \left(\|F\|_{L^s(\Omega_{uv})} + C_1 \|v\|_{L^s(\Omega_{uv})}\right) \left(1 + \eta \left(\|y_v\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \|y_v\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \\
&+ \left(\|F\|_{L^s(\Omega_{uv})} + C_1 \|u\|_{L^s(\Omega_{uv})}\right) \left(1 + \eta \left(\|y_v\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \|y_v\|_{L^\infty(\Omega)}\right).
\end{aligned}
$$

Grâce à l'inégalité de Hölder, on a

$$
\begin{aligned}
\|v\|_{L^s(\Omega_{uv})} + \|u\|_{L^s(\Omega_{uv})} &\leq \left(\|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\Omega_{uv})}\right) \mathcal{L}^n \left(\Omega_{uv}\right)^{\frac{1}{s}} \\
&= \left(\|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\Omega_{uv})}\right) \left(d_E\left(u, v\right)\right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq 2M \left(d_E\left(u, v\right)\right)^{\frac{1}{s}}.
\end{aligned}
$$

De plus, l'estimation dans le théorème 1.2.15 implique que

$$
\begin{aligned}
\|y_v\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \kappa_\infty \left(1 + \|v\|_{L^s(\Omega)}\right) \leq \kappa_\infty \left(1 + \mathcal{L}^n\left(\Omega\right)^{\frac{1}{s}} \|v\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \\
&\leq \kappa_\infty \left(1 + \mathcal{L}^n\left(\Omega\right)^{\frac{1}{s}} M\right).
\end{aligned}
$$

Le résultat vient en combinant ces inégalités. □

Le résultat principal de cette section est basé sur le résultat auxiliaire suivant.

Lemme 2.2.2. *Soient u, v dans $L^\infty(\Omega)$ et $y \in L^\infty(\Omega)$. Pour tout $\rho \in]0, 1[$, il existe une suite $(\Omega_\rho^m)_m$ de parties mesurables de Ω telle que*

$$\mathcal{L}^n\left(\Omega_\rho^m\right) = \rho\ \mathcal{L}^n\left(\Omega\right), \tag{2.2}$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\rho^m} \left(L(x, y(x), v(x)) - L(x, y(x), u(x))\right) dx \\
&= \rho \int_\Omega \left(L(x, y(x), v(x)) - L(x, y(x), u(x))\right) dx,
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

$$\tfrac{1}{\rho}\,\chi_{\Omega_\rho^m} \longrightarrow 1 \quad \textit{faible-étoile dans} \quad L^\infty(\Omega) \qquad \textit{quand } m \longrightarrow \infty, \tag{2.4}$$

où χ_A est la fonction caractéristique de A.

Démonstration. Soit $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une famille dense dans $L^1(\Omega)$. Pour $m \geq 1$, on pose

$$f^m = (1, L(\cdot, y, v) - L(\cdot, y, u), \phi_1, \cdots, \phi_m) \in L^1(\Omega)^{m+2}.$$

Grâce au lemme A-4.3, pour tout $m \geq 1$ et tout $\rho \in]0, 1[$, il existe un ensemble mesurable $\Omega_\rho^m \subset \Omega$ satisfaisant

$$\int_{\Omega_\rho^m} f^m(x)\, dx = \rho \int_\Omega f^m(x)\, dx. \tag{2.5}$$

Donc, pour tout $m \geq 1$, $(\Omega_\rho^m)_n$ satisfait (2.2), (2.3) et

$$\int_{\Omega_\rho^m} \phi_k(x)\, dx = \rho \int_\Omega \phi_k(x)\, dx \qquad \text{pour tout } k \in \{1, \cdots, m\}.$$

Pour $\phi \in L^1(\Omega)$ fixée, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \left(\tfrac{1}{\rho}\,\chi_{\Omega_\rho^m} - 1\right)\phi\,dx\right| &\leq \left|\int_\Omega \left(\tfrac{1}{\rho}\,\chi_{\Omega_\rho^m} - 1\right)(\phi - \phi_k)\,dx\right| \\ &+ \left|\int_\Omega \left(\tfrac{1}{\rho}\,\chi_{\Omega_\rho^m} - 1\right)\phi_k\,dx\right| \\ &\leq \left(\tfrac{1}{\rho} + 1\right)\|\phi - \phi_k\|_{L^1(\Omega)} \\ &+ \left|\int_\Omega \left(\tfrac{1}{\rho}\,\chi_{\Omega_\rho^m} - 1\right)\phi_k\,dx\right|.\end{aligned}$$

Vu que $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est dense dans $L^1(\Omega)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\bar{k} > 0$ tel que

$$\|\phi - \phi_{\bar{k}}\|_{L^1(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{\frac{1}{\rho}+1}.$$

De plus, grâce à (2.5), pour tout $m \geq \bar{k}$ on a

$$\int_\Omega \left(\tfrac{1}{\rho}\,\chi_{\Omega_\rho^m} - 1\right)\phi_{\bar{k}}\,dx = 0.$$

Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $m \geq \bar{k}$, on a

$$\left|\int_\Omega \left(\tfrac{1}{\rho}\,\chi_{\Omega_\rho^m} - 1\right)\phi\,dx\right| < \varepsilon,$$

ce qui donne (2.4) et termine la preuve. □

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer notre résultat.

Proposition 2.2.3. *Soit $\rho \in]0,1[$. Pour tous $u, v \in U_{ad}$, il existe une partie mesurable $\Omega_\rho \subset \Omega$ tel que*

$$\mathcal{L}^n(\Omega_\rho) = \rho\mathcal{L}^n(\Omega), \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_\rho} (L(x, y_u(x), v(x)) - L(x, y_u(x), u(x)))\,dx \\ &= \rho\int_\Omega (L(x, y_u(x), v(x)) - L(x, y_u(x), u(x)))\,dx,\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$y_{u_\rho} = y_u + \rho z_{uv} + r_\rho \qquad \textit{avec } \lim_{\rho\to 0}\left\|\frac{r_\rho}{\rho}\right\|_{L^\infty(\Omega)} = 0, \tag{2.8}$$

où u_ρ est une perturbation de u définie par

$$u_\rho = \begin{cases} u & \textit{dans } \Omega \setminus \Omega_\rho, \\ v & \textit{dans } \Omega_\rho, \end{cases}$$

et z_{uv} est la solution de l'équation

$$\begin{cases} -\Delta z + f_y(\cdot, y_u, u)z = f(\cdot, y_u, u) - f(\cdot, y_u, v) & \textit{dans } \Omega, \\ z = 0 & \textit{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Démonstration. Soit $\rho \in]0,1[$ et soit (Ω_ρ^m) la suite de sous-ensembles de Ω définie dans le lemme 2.2.2. Posons

$$u_\rho^m = \begin{cases} u & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_\rho^m, \\ v & \text{dans } \Omega_\rho^m, \end{cases}$$

et notons $z_\rho^m = \frac{y_{u_\rho^m} - y_u}{\rho}$. Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\rho}\left(f(\cdot, y_{u_\rho^m}, u_\rho^m) - f(\cdot, y_u, u)\right) &= \tfrac{1}{\rho}\left(f(\cdot, y_{u_\rho^m}, u_\rho^m) - f(\cdot, y_u, u_\rho^m)\right) \\ &\quad + \tfrac{1}{\rho}\left(f(\cdot, y_u, u_\rho^m) - f(\cdot, y_u, u)\right) \\ &= b_\rho^m z_\rho^m + \tfrac{1}{\rho}\left(f(\cdot, y_u, v) - f(\cdot, y_u, u)\right)\chi_{\Omega_\rho^m} \end{aligned}$$

où $b_\rho^m = \displaystyle\int_0^1 f_y(\cdot, \theta y_{u_\rho^m} + (1-\theta)y_u, u_\rho^m)\, d\theta \geq 0$. Il vient alors que $\xi_\rho^m = z_\rho^m - z_{uv}$ est la solution faible de

$$\begin{cases} -\Delta\xi + b_\rho^m \xi = g_\rho^m + h_\rho^m & \text{dans } \Omega, \\ \xi = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{2.9}$$

où

$$g_\rho^m = \left(f_y(\cdot, y_u, u_u) - b_\rho^m\right) z_{uv} \quad \text{et} \quad h_\rho^m = \left(1 - \tfrac{1}{\rho}\chi_{\Omega_\rho^m}\right)\left(f(\cdot, y_u, u) - f(\cdot, y_u, v)\right).$$

Soit $\xi_\rho^{m,1}$ la solution faible de

$$\begin{cases} -\Delta\xi + b_\rho^m \xi = h_\rho^m & \text{dans } \Omega, \\ \xi = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

et $\xi_\rho^{m,2}$ la solution faible de

$$\begin{cases} -\Delta\xi + b_\rho^m \xi = g_\rho^m & \text{dans } \Omega, \\ \xi = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Les problèmes étant linéaires et admettant une solution unique, il est clair que $\xi_\rho^m = \xi_\rho^{m,1} + \xi_\rho^{m,2}$.

• Soit η_ρ^m la solution faible du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta\xi + b\xi = h_\rho^m & \text{dans } \Omega, \\ \xi = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où $b = f_y(\cdot, y_u, u)$. De simples calculs montrent que la fonction $\xi_\rho^{m,1} - \eta_\rho^m$ satisfait

$$\begin{cases} -\Delta\xi + b_\rho^m \xi = \left(b - b_\rho^m\right)\eta_\rho^m & \text{dans } \Omega, \\ \xi = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Grâce à la proposition 1.2.5, nous obtenons l'estimation

$$\begin{aligned}\left\|\xi_\rho^{m,1} - \eta_\rho^m\right\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \kappa_1 \left\|\left(b - b_\rho^m\right)\eta_\rho^m\right\|_{L^s(\Omega)} \\ &\leq \kappa_1 \left\|b - b_\rho^m\right\|_{L^s(\Omega)} \left\|\eta_\rho^m\right\|_{L^\infty(\Omega)}. \qquad (2.10)\end{aligned}$$

• Analysons un peu plus les propriétés de la fonction η_ρ^m. D'après le lemme 2.2.2, la suite $\left(h_\rho^m\right)_m$ converge vers 0 pour la topologie faible-étoile de $L^\infty(\Omega)$. Elle y converge donc pour la topologie faible de $L^s(\Omega)$. En effet, $\left(h_\rho^m\right)_m \subset L^s(\Omega)$ et

$$\lim_{m\to+\infty} \left(h_\rho^m, \phi\right) = 0 \qquad \forall\phi \in L^1(\Omega),$$

implique que

$$\lim_{m\to+\infty} \left(h_\rho^m, \phi\right) = 0 \qquad \forall\phi \in L^{s'}(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$

La suite $\left(h_\rho^m\right)_m$ est par conséquent bornée dans $L^s(\Omega)$. de l'autre côté, en utilisant la proposition 1.2.3, la proposition 1.2.5 et la proposition 1.3.1, on a

$$\left|\eta_\rho^m\right|_{H_0^1(\Omega)} + \left\|\eta_\rho^m\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq (\kappa_0 + \kappa_1) \left\|h_\rho^m\right\|_{L^s(\Omega)},$$

$$\left|\eta_\rho^m\right|_{C^{0,\alpha}(\bar\Omega)} \leq \kappa_2 \left(1 + \|b\|_{L^s(\Omega)}\right) \left\|h_\rho^m\right\|_{L^s(\Omega)}.$$

La suite $\left(\eta_\rho^m\right)_n$ est ainsi bornée dans $H_0^1(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$. Il existe donc une sous-suite, encore indexée par m, et $\chi_\rho \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\eta_\rho^m \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \eta_\rho \qquad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega).$$

De l'autre côté, l'injection de $C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$ dans $L^\infty(\Omega)$ étant compacte, nous déduisons que

$$\eta_\rho^m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \eta_\rho \qquad \text{fortement dans } C^{0,\alpha}(\bar\Omega).$$

Passant alors à la limite dans la formulation faible correspondante à η_ρ^m, donnée par

$$\left(\nabla\eta_\rho^m, \nabla\phi\right) + \left(b\eta_\rho^m, \phi\right) = \left(h_\rho^m, \phi\right) \qquad \forall\phi \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{s'}(\Omega),$$

on obtient

$$(\nabla\eta_\rho, \nabla\phi) + (b\eta_\rho, \phi) = 0 \qquad \forall\phi \in H_0^1(\Omega).$$

Autrement dit, η_ρ est l'unique solution faible du problème

$$\begin{cases} -\Delta\xi + b\xi = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \xi = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

La fonction nulle étant une solution triviale, nous déduisons que $\eta_\rho = 0$.

En résumé, la suite $\left(\eta_\rho^m\right)_m$ converge vers 0, faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ et fortement dans $L^\infty(\Omega)$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m(\varepsilon)$ tel que pour tout $m \geq m(\varepsilon)$ on a

$$\left\|\eta_\rho^m\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Choisissant $\varepsilon = \rho$, nous déduisons l'existence de $m(\rho)$ tel que

$$\left\|\eta_\rho^{m(\rho)}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \rho \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{2.11}$$

Prenant en compte (2.10), on obtient alors

$$\begin{aligned}\left\|\xi_\rho^{m(\rho),1} - \eta_\rho^{m(\rho)}\right\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \kappa_1 \left\|b - b_\rho^{m(\rho)}\right\|_{L^s(\Omega)} \left\|\eta_\rho^{m(\rho)}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq \kappa_1 \left\|b - b_\rho^{m(\rho)}\right\|_{L^s(\Omega)} \rho.\end{aligned}$$

La suite $\left(b_\rho^{m(\rho)}\right)_\rho$ étant uniformément bornée dans $L^s(\Omega)$, nous déduisons que

$$\lim_{\rho\to 0^+} \left\|\xi_\rho^{m(\rho),1} - \eta_\rho^{m(\rho)}\right\|_{L^\infty(\Omega)} = 0. \tag{2.12}$$

• De l'autre côté, d'après la proposition 1.2.5, $\xi_\rho^{m(\rho),2}$ appartient à $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et satisfait l'estimation

$$\left\|\xi_\rho^{m(\rho),2}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \kappa_1 \left\|g_\rho^{m(\rho)}\right\|_{L^s(\Omega)}. \tag{2.13}$$

La suite $\left(u_\rho^{m(\rho)}\right)_\rho$ converge vers u pour la distance d'Ekeland. En effet

$$d_E\left(u_\rho^{m(\rho)}, u\right) = \left|\Omega_\rho^{m(\rho)}\right| = \rho\mathcal{L}^n\left(\Omega\right) \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Ceci implique que $\left(u_\rho^{m(\rho)}\right)_\rho$ converge presque partout vers u dans Ω. Prenant en compte le lemme 2.2.1, nous déduisons que

$$\left\|y_{u_\rho^m(\rho)} - y_u\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_M \left(\|F\|_{L^s(\Omega_\rho^{m(\rho)})} + \left(d_E(u_\rho^m(\rho), u)\right)^{\frac{1}{s}}\right) \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

et utilisant le théorème de convergence dominée, il vient que

$$\left\|b_\rho^m(\rho) - b\right\|_{L^s(\Omega)} \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent

$$\left\|g_\rho^m(\rho)\right\|_{L^s(\Omega)} \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

et grâce à (2.13), nous avons

$$\lim_{\rho\to 0^+} \left\|\xi_\rho^{m(\rho),2}\right\|_{L^\infty(\Omega)} = 0. \tag{2.14}$$

Finalement, combinant (2.12), (2.11) et (2.14), nous obtenons

$$\left\|\xi_\rho^{m(\rho)}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \left\|\xi_\rho^{m(\rho),1} - \eta_\rho^{m(\rho)}\right\|_{L^\infty(\Omega)} + \left\|\eta_\rho^{m(\rho)}\right\|_{L^\infty(\Omega)} + \left\|\xi_\rho^{m(\rho),2}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Posons alors

$$\Omega_\rho = \Omega_\rho^{m(\rho)}, \qquad u_\rho = u_\rho^{m(\rho)} \quad \text{et} \quad \frac{r_\rho}{\rho} = \xi_\rho^{m(\rho)}.$$

Les conditions (2.6)-(2.8) sont évidemment satisfaites. □

2.3 Formulation Hamiltonienne de la variation de la fonctionnelle coût

Dans cette section, nous étudions la variation de la fonctionnelle coût par rapport à des perturbations diffuses. Nous initions notre analyse par le résultat suivant.

Proposition 2.3.1. *Soient $u, v \in U_{ad}$, $\rho \in]0,1[$ et soient Ω_ρ et u_ρ tels que définis dans la proposition 2.2.3. Alors*

$$J(u_\rho) = J(u) + \rho \delta J + o(\rho), \tag{2.15}$$

où

$$\delta J = \int_\Omega L_y(x, y_u(x), u(x)) z_{uv}(x)\, dx + \int_\Omega \left(L(x, y_u(x), v(x)) - L(x, y_u(x), u(x))\right) dx.$$

Démonstration. De simples calculs, combinés avec (2.7), montrent que

$$J(u_\rho) - J(u) = \int_\Omega \big(L(x, y_{u_\rho}, u_\rho) - L(x, y_u, u)\big)\, dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_\Omega \big(L(x, y_{u_\rho}, u_\rho) - L(x, y_u, u_\rho)\big)\, dx + \int_\Omega \left(L(x, y_u, u_\rho) - L(x, y_u, u)\right) dx \\
&= \int_\Omega \big(L(x, y_{u_\rho}, u_\rho) - L(x, y_u, u_\rho)\big)\, dx + \int_{\Omega_\rho} \left(L(x, y_u, v) - L(x, y_u, u)\right) dx \\
&= \int_\Omega \big(L(x, y_{u_\rho}, u_\rho) - L(x, y_u, u_\rho)\big)\, dx + \rho \int_\Omega \left(L(x, y_u, v) - L(x, y_u, u)\right) dx
\end{aligned}$$

Par conséquent, prenant en compte (2.7), il vient que

$$\begin{aligned}
\tfrac{J(u_\rho) - J(u)}{\rho} - \delta J &= \int_\Omega \left(\tfrac{L(x, y_{u_\rho}, u_\rho) - L(x, y_u, u_\rho)}{\rho} - L_y(x, y_u, u) z_{uv}\right) dx \\
&= \int_\Omega \left(L_\rho \, \tfrac{y_{u_\rho} - y_u}{\rho} - L_y(x, y_u, u) z_{uv}\right) dx \\
&= \int_\Omega L_\rho \left(\tfrac{y_{u_\rho} - y_u}{\rho} - z_{uv}\right) dx + \int_\Omega \left(L_\rho - L_y(x, y_u, u)\right) z_{uv} dx \\
&= \int_\Omega L_\rho \, \tfrac{r_\rho}{\rho} dx + \int_\Omega \left(L_\rho - L_y(x, y_u, u)\right) z_{uv} dx,
\end{aligned}$$

où $L_\rho = \displaystyle\int_0^1 L_y(\cdot, \theta y_{u_\rho} + (1-\theta) y_u, u_\rho)\, d\theta$. Ainsi,

$$\left| \tfrac{J(u_\rho) - J(u)}{\rho} - \delta J \right| \leq \|L_\rho\|_{L^1(\Omega)} \left\| \tfrac{r_\rho}{\rho} \right\|_{L^\infty(\Omega)} + \|L_\rho - L_y(\cdot, y_u, u)\|_{L^1(\Omega)} \|z_{uv}\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Des arguments similaires à ceux précedemment utilisés, essentiellement basés sur le théorème de convergence dominées et sur la convergence dans $L^\infty(\Omega)$ de la suite $(y_{u_\rho})_\rho$ vers y_u, montrent que la suite $(L_\rho)_\rho$ est bornée dans $L^s(\Omega)$ et qu'elle y converge vers $L_y(\cdot, y_u, u)$. Le résultat est alors une conséquence de (2.7). □

Finalement nous formulons la variation du coût en fonction du hamiltonien associé à notre problème et défini par

$$H(x, y, u, p) = L(x, y, u) - pf(x, y, u).$$

Proposition 2.3.2. *Soient $u, v \in U_{ad}$, $\rho \in]0, 1[$ et soient Ω_ρ et u_ρ tels que définis dans la proposition 2.2.3. Alors*

$$J(u_\rho) = J(u) + \rho \int_\Omega (H(x, y_u(x), v(x), p_u(x)) - H(x, y_u(x), u(x), p_u(x)))\, dx + o(\rho),$$

où p_u est la solution faible de (1.27).

Démonstration. Choisissant z_{uv} comme fonction-test dans la formulation faible correspondant à p_u, il vient que

$$(\nabla p_u, \nabla z_{uv}) + (f_y(\cdot, y_u, u)\, p_u, z_{uv}) = (L_y(\cdot, y_u, u), z_{uv}).$$

De l'autre côté, choisissant p_u comme fonction-test dans la formulation faible correspondant à z_{uv}, nous obtenons

$$(\nabla z_{uv}, \nabla p_u) + (f_y(\cdot, y_u, u)\, z_{uv}, p_u) = (f(\cdot, y_u, u) - f(\cdot, y_u, v), p_u).$$

Combinant ces deux identités, on obtient

$$(L_y(\cdot, y_u, u), z_{uv}) = (f(\cdot, y_u, u) - f(\cdot, y_u, v), p_u).$$

Prenant alors en compte la proposition 2.3.1, nous déduisons que

$$\begin{aligned}
\delta J &= \int_\Omega (f(x, y_u(x), u(x)) - f(x, y_u(x), v))\, p_u(x)\, dx \\
&\quad + \int_\Omega (L(x, y_u(x), v(x)) - L(x, y_u(x), u(x)))\, dx \\
&= \int_\Omega (H(x, y_u(x), v(x), p_u(x)) - H(x, y_u(x), u(x), p_u(x)))\, dx,
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. □

2.4 Principe de Pontryagin

Nous sommes en mesure d'établir les conditions nécessaires d'optimalité du type Pontryagin.

Théorème 2.4.1. *Si les hypothèses $(H1')$ et $(H2')$ sont satisfaites et si $\bar{u} \in U_{ad}$ est un contrôle optimal de (P), alors il existe $\bar{y}, \bar{p} \in H_0^1(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ satisfaisant*

Équation d'état

$$\begin{cases} -\Delta\bar{y} + f(\cdot,\bar{y},\bar{u}) = 0 & \textit{dans } \Omega, \\ \bar{y} = 0 & \textit{sur } \Gamma, \end{cases}$$

Équation adjointe

$$\begin{cases} -\Delta\bar{p} + f_y(\cdot,\bar{y},\bar{u})\bar{p} = L_y(\cdot,\bar{y},\bar{u}) & \textit{dans } \Omega, \\ \bar{p} = 0 & \textit{sur } \Gamma, \end{cases}$$

Condition d'optimalité pour le contrôle

$$\int_\Omega H(x,\bar{y}(x),\bar{u}(x),\bar{p}(x))\,dx \leq \int_\Omega H(x,\bar{y}(x),v(x),\bar{p}(x))\,dx \quad \forall v \in U_{ad}.$$

Démonstration. Soit $u \in U_{ad}$ et $\rho \in]0,1[$. Grâce à la proposition 2.3.1 et à la proposition 2.3.2, il existe un ensemble mesurable Ω_ρ tel que $\mathcal{L}^n(\Omega_\rho) = \rho\mathcal{L}^n(\Omega)$ et

$$J(u_\rho) = J(\bar{u}) + \rho\int_\Omega \left(H(x,\bar{y}(x),v(x),\bar{p}(x)) - H(x,\bar{y}(x),\bar{u}(x),\bar{p}(x))\right)dx + o(\rho),$$

où u_ρ est défini par

$$u_\rho = \begin{cases} v & \text{dans } \Omega_\rho, \\ \bar{u} & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_\rho. \end{cases}$$

Il est clair que $u_\rho \in U_{ad}$ et donc, par définition, nous avons

$$J(\bar{u}) \leq J(u_\rho).$$

Ainsi

$$\tfrac{J(u_\rho)-J(\bar{u})}{\rho} \geq 0 \qquad \forall v \in U_{ad},$$

et par passage à la limite, nous obtenons

$$\lim_{\rho\to 0^+} \tfrac{J(u_\rho)-J(\bar{u})}{\rho} = \int_\Omega \left(H(x,\bar{y}(x),v(x),\bar{p}(x)) - H(x,\bar{y}(x),\bar{u}(x),\bar{p}(x))\right)dx \geq 0$$

pour tout $v \in U_{ad}$. □

Appendice : Notations et résultats auxiliaires

A-1 Cadre classique

A-1.1 Espaces des fonctions continues et des fonctions hölderiennes

Soit $n \geq 2$ et soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière Γ et notons $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ l'adhérence de Ω dans $\mathbb{R}^n$.

Nous désignerons par $C(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$ et par $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions α-hölderienne, i.e.

$$C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) = \left\{ z \in C(\bar{\Omega}) \mid \sup_{x,y \in \bar{\Omega}} \tfrac{|z(x)-z(y)|}{|x-y|^\alpha} < +\infty \right\} \quad \text{avec } 0 < \alpha \leq 1.$$

Munis, respectivement, des normes

$$\|z\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |z(x)| \,,$$

$$\|z\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|z\|_{C(\overline{\Omega})} + \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \tfrac{|z(x)-z(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

$C(\overline{\Omega})$ et $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ sont des espaces de Banach.

A-1.2 Caractérisation de la géométrie du domaine

On dira que Ω est de classe $C^{0,\alpha}$ si pour tout point x de la frontière Γ, il existe un système de coordonnées orthogonales $(y_1, \cdots, y_n)$, un hypercube $U^x = \Pi_{i=1}^n]-a_i, a_i[$ et une application

$$\Phi^x : \prod_{i=1}^{n-1}]-a_i, a_i[\quad \longrightarrow \quad]-\tfrac{a_n}{2}, \tfrac{a_n}{2}[$$

de classe $C^{0,\alpha}$ tel que

$$\Omega \cap U^x = \{(y_1, \cdots, y_n) \in U^x \mid y_n > \Phi^x(y_1, \cdots, y_{n-1})\},$$

$$\Gamma \cap U^x = \{(y_1, \cdots, y_n) \in U^x \mid y_n = \Phi^x(y_1, \cdots, y_{n-1})\}.$$

A-2 Espaces de Lebesgue

La plupart des résultats énoncés dans cette section sont classiques et peuvent-être trouvés dans n'importe quel bon livre d'analyse fonctionnel (voir par exemple [3]) ; Nous les rappelons pour le confort du lecteur.

Soit $1 \leq p < \infty$. Une fonction mesurable (au sens de Lebesgue) $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dans $L^p(\Omega)$ si

$$\int_\Omega |v(x)|^p \, dx < \infty.$$

Muni de la norme

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

Une fonction mesurable (au sens de Lebesgue) $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dans $L^\infty(\Omega)$ si

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |v(x)| = \inf \{M \in \mathbb{R} \mid \ |v(x)| \leqslant M \text{ p.p. dans } \Omega\} < \infty.$$

Muni de la norme

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess sup}_{x\in\Omega} |v(x)|,$$

l'espace $L^\infty(\Omega)$ est aussi un espace de Banach.

La plupart des quantités qu'on utilise étant des fonctions vectorielles, la notation sera simplifiée et on omettra la dimension n dans la notation de l'espace (le sens sera clair d'après le contexte). En particulier, nous utiliserons la notation suivante

$$\begin{aligned}
(z, \phi) &= \int_\Omega z(x)\, \phi(x)\, dx, \qquad z \in L^p(\Omega),\ \phi \in L^{p'}(\Omega),\\
(z, \phi) &= \int_\Omega z(x) \cdot \phi(x)\, dx\\
&= \sum_{j=1}^n \int_\Omega z_j(x)\, \phi_j(x)\, dx, \qquad z \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^n),\ \phi \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

A-3 Espaces de Sobolev

A-3.1 Définitions

Commençons par rappeler qu'un n-uplet de la forme $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ est appelé multi-indice d'ordre $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Si α est un multi-indice, on note D^α l'opérateur différentiel défini par

$$D^\alpha z(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} z(x)}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

Soit $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω. Pour $m \in \mathbb{N}$, on définit l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ de la manière suivante

$$H^m(\Omega) = \left\{ z \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha z \in L^2(\Omega) \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \leq m \right\},$$

muni de la norme

$$\|z\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha z\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous noterons aussi par $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. Nous savons que $H_0^1(\Omega)$ est caractérisé de la manière suivante

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ z \in H^1(\Omega) \mid z_{|\Gamma} = 0 \right\}.$$

Nous désignerons par $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$ et on le munit de la norme duale

$$\|f\|_{H^{-1}} = \sup_{|z|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} \langle f, z \rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

A-3.2 Inégalité de Poincaré et inégalités de Sobolev

Nous commençons par rappeler l'inégalité de Poincaré qui affirme qu'il existe une constante positive C_P, dépendant de Ω et de n, tel que

$$\|z\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall z \in H_0^1(\Omega).$$

Une conséquence directe de l'inégalité de Poincaré est que la semi-norme

$$|z|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

En plus des liens évidents avec les espaces de Lebesgue L^2, conséquence de leur propre définition, l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ (et plus généralement l'espace $H^1(\Omega)$) est lié à d'autres espaces de Lebesgue via les injections de Sobolev. Plus précisemment, on a

- Si $n = 2$, alors $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, +\infty[$
- Si $n > 2$, alors $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ avec $2^* = \frac{2n}{n-2}$

Toutes ces injections sont continues et engendrent les inégalités de Sobolev

$$\|z\|_{L^q(\Omega)} \leq C_S \, |z|_{H_0^1(\Omega)} \qquad \text{pour tout } q \in [1, +\infty[, \quad \text{si } n = 2,$$

$$\|z\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C_S \, |z|_{H_0^1(\Omega)} \qquad \text{si } n > 2,$$

pour tout $z \in H_0^1(\Omega)$.

A-4 Résultats divers

A-4.1 Théorème de Lax-Milgram

Théorème A-4.1. *Soit H un espace de Hilbert réel de norme $\| \cdot \|_H$. On considère une forme bilinéaire continue sur $H \times H$, i.e.*

$$\exists M > 0, \ \forall y, z \in H, \quad |a(y,z)| \leq M \, \|y\|_H \, \|z\|_H \,,$$

et on suppose qu'elle est elliptique (ou coercive) sur H, i.e.

$$\exists \alpha > 0, \ \forall z \in H, \quad a(z,z) \geq \alpha \, \|z\|_H^2 \,.$$

On considère aussi une forme linéaire F sur H. Alors le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } y \in H \text{ tel que} \\ \forall z \in H, \quad a(y,z) = F(z), \end{cases}$$

admet une solution unique $z \in H$. De plus, cette solution vérifie

$$\|y\|_H \leq \tfrac{1}{\alpha} \|F\|_{H'}.$$

Démonstration. Voir [3]. □

A-4.2 Théorème de Minty-Browder

Théorème A-4.2. *Soit E un espace de Banach reflexif et soit $\mathcal{A}$ une application non linéaire et continue de E dans E'. Supposons que*

$$\langle \mathcal{A}(z_1) - \mathcal{A}(z_2), z_1 - z_2 \rangle_{E',E} > 0 \qquad \text{pour tout } z_1, z_2 \in E \text{ avec } z_1 \neq z_2,$$

et

$$\lim_{\|z\|_E \to +\infty} \tfrac{\langle \mathcal{A}(z), z \rangle_{E',E}}{\|z\|_E} = +\infty.$$

Alors pour tout $L \in E'$, l'équation $\mathcal{A}z = L$ admet une solution unique $z \in E$.

A-4.3 Théorème de convexité de Lyapunov

Théorème A-4.3. *Soient A un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^p$ dont la mesure de Lebesgue est finie, $f = (f_1, \cdots, f_k)$ une fonction vectorielle dont les composantes sont définies et intégrables sur A et soient E et F deux sous-ensembles fixés de A. Alors pour tout $\alpha \in [0,1]$, il existe un sous-ensemble mesurable $C(\alpha)$ de $E \cup F$ satisfaisant $C(0) = E$ et $C(1) = F$ et tel que*

$$\int_{C(\alpha)} f\,dx = (1-\alpha)\int_E f\,dx + \alpha \int_F dx.$$

Démonstration. Voir [10]. □

Bibliographie

[1] J.F. Bonnans, E. Casas, An extension of Pontryagin's principle for state-constrained optimal control of semilinear elliptic equations and variational inequalities, SIAM J. Control and Optim., 33, pp. 274–298, 1995.

[2] J.F. Bonnans, E. Casas, Un principe de Pontryagine pour le contrôle des systèmes semilinéaires elliptiques, J. Differential Equations, 90, pp. 288-303, 1991.

[3] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Masson, Paris, 1987.

[4] L. Cesari, Optimization, theory and applications, Springer-Verlag, New-York, 1983.

[5] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Springer Verlag, Berlin, 1983.

[6] P. Grisvard, Elliptic problems in nonsmooth domains, Pitman, Boston-London-Melbourne, 1985.

[7] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, An introduction to variational inequalities and their applications, Academic Press, New-York, 1980.

[8] G. Stampacchia, Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, Ann. Inst. Fourier Grenoble 15, pp. 189-258, 1965.

[9] F. Tröltzsch, Optimal control of partial differential equations : theory, methods, and applications. American Math. Society, 2010.

[10] E. Zeidler, Nonlinear functional analysis and its applications II B, Nonlinear monotone operators, Springer, New-York, 1990.