REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Universite Mohamed Seddik Ben Yahia Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques

Option : Probabilités et Statistique

Thème

Comparaison de la fiabilité des systèmes mixte

Présenté par : Azouzi Yamine

Devant le Jury :

Président	Mr : GHARDA Mebrouk	M.A.A	Univ. Jijel
Encadreuse	Mme YAKOUBI Fatema	M.A.A	Univ. Jijel
Examinatrice	Mme MADI Meriem	M.A.A	Univ. Jijel

Promotion 2020/2021

⁂ *Remerciements* ⁂

Nous tenons d'abord à remercier de bon dieu qui nous donne le courage, la patience et le privilège d'étudier et de terminer ce modeste travail.

Nous tenons à remercier virement notre encadreur Mme Yakoubi Fatima pour ses conseils précieux et nous avoir confiance travail et assurer l'encadrement de ce mémoire on est très reconnaissant pour sa compréhension sa disponibilité et pour l'intérêt qui il pour à notre travail.

Nous remercions docteur Mr Gherda Mebrouk de l'honneur qu'il nous fait en acceptant d'être le président du jury de ce mémoire.

Nous adressons également nos à Mme Madi Meriem pour avoir bien voulu examiner ce travail et d'avoir pris le temps de lire et l'évaluer.

Nous nous inclinons respectueusement devant les êtres à qui nous devons existences, nos pères et nos mères et mes frères.

Enfin exprime tout notre gratitude à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation et tout personne ayant apporté un plus de pris on de loin à ce travail.

⁂ *Dédicace* ⁂

Je dédie ce modeste travail ;

♡ A mes parents, ce travail est le fruit de votre dur labour, je sais que les paroles ne suffirons jamais à décrire ce qui je ressens envers vous ... je ne trouve pas mieux a dire que : " O mon seigneur, fais leur a tous de miséricorde comme ils m'ont élevé tout petit "

♡ A mon frère Amar et mes sœurs pour leur aide et encouragement durant la réalisation de ce mémoire.

♡ A Rodina, Moatez, Ryam, Tayam et Rimasse (les enfants de mes frères).

♡ A mes profs Azzouz Ferrag, Fateh Saci et Djeridi Zohra.

♡ A tous mes proches et mes amis d'étude pour les bons et les mauvais moments qu'on sacrifié ensemble.

♡ Et enfin pour ceux qui ne sont pas sur les lignes mais dans le cœur.

⁂ *A yamine* ⁂

TABLE DES MATIÈRES

1 Concepts généraux **3**

1.1 Définitions générale 3

1.2 Caractéristiques de la fiabilité 8

1.3 Fonction structure 9

1.4 Quelque types-usuelles des systèmes 12

1.4.1 Système en série 12

1.4.2 Système parallèle 13

1.4.3 Système mixte : 14

2 Comparaison stochastique **17**

2.1 Ordres stochastiques 17

2.1.1 L'ordre intégral 17

2.1.2 L'ordre ensembliste 18

2.1.3 L'ordre stochastique fort (usuel) 18

2.1.4 Ordres des variabilités 20

2.2 Comparaison de durée de vie 21

2.3 Condition suffisante 25

2.4 Simulation 25

2.4.1 comparaison 1 25

2.4.2 comparaison 2 28

2.4.3 comparaison 3 32
2.4.4 comparaison 4 34
2.4.5 comparaison 5 36
2.4.6 comparaison 6 40

Bibliographie **43**

TABLE DES FIGURES

1.1 Courbe de la fonction de fiabilité 4
1.2 Courbe de fonction de défaillances 5
1.3 Relation entre la fonction de défaillance $F(t)$ et la fonction de fiabilité $R(t)$ . . . 5
1.4 La courbe représentatif de taux de panne 7
1.5 Système série-parallèle 11
1.6 Système série 12
1.7 Système parallèle 14
1.8 Système série-parallèle 15
1.9 Système parallèle-série 15

2.1 Système parallèle-série 25
2.2 Système série-parallèle 26
2.3 Comparaison entre le système série-parallèle et parallèle -série comparaison 4 . . 28
2.4 Système parallèle-série 28
2.5 Système série-parallèle 29
2.6 Comparaison entre le système série-parallèle et parallèle -série comparaison 5 . . 31
2.7 Système parallèle-série 32
2.8 Système série-parallèle 32
2.9 Comparaison entre le système série-parallèle et parallèle -série comparaison 6 . 34
2.10 Système parallèle-série 34

2.11 Système série-parallèle 35
2.12 Comparaison entre le système série-parallèle et parallèle -série comparaison 2 . . 36
2.13 Système parallèle-série 36
2.14 Système série-parallèle 37
2.15 Comparaison entre le système série-parallèle et parallèle -série comparaison 1 . . 39
2.16 Système parallèle-série 40
2.17 Système série-parallèle 40
2.18 Comparaison entre le système série-parallèle et parallèle -série comparaison 3 . . 42

INTRODUCTION

Pendant la deuxième guerre mondiale, à la suite des changements rapides, et du fait que la guerre se déroulait dans la désert et dans les zones humides, l'équipement devient plus sophistique, tandis que la probabilité d'apparition des défaillances augmentait rapidement, quelques données statistiques publiées par l'administration de l'armée américaine, montrent la gravité de la situation, la plus part de l'équipement électronique n'était en état de fonctionner que pendant 30 du temps et les frais de répartition et de maintenance du parc étaient dix fois plus grands que les couts payés à l'achat.

Ce n'est que depuis les années 70 qu'on a commencé à s'intéresser au problème de fiabilité comme conséquence logique de la complexité des équipements. Dans le passé, il n'y avait pas de spécification concernant la fiabilité, car on ne savais pas quels sont les paramètres qui déterminent la fiabilité des installations et des équipement. Cela explique pourquoi les fabriquant n'ont eu longtemps, aucun moyen d'apprécier le comportement dans le temps des équipements qu'ils livraient la fiabilité s'intéresse à l'ensemble des mesures à prendre pour qu'un produit, un système ou une entité fonctionne sans défaillance suffisamment faible pour être acceptable dans l'usage prévu.

Un système est constitué de plusieurs composants assurant diverses fonctions. Une des plus importants mesures de sa performance et sa fiabilité. La fiabilité d'un système est définie comme étant la probabilité que le système fonctionne durant une période de temps sous des conditions spécifiées. Un objectif de la théorie de la fiabilité est de trouver la moyen d'évaluer la fiabilité d'un système complexe à partir de la connaissance des fiabilités des composantes le constituant,

d'où l'évaluation de la fiabilité d'un système est une caractéristique importante.
La comparaison stochastique a été largement utilisé durant les quarante dernières années dans divers domaines des probabilités et de statistique. On cite la théorie de la fiabilité , les fils d'attente et l'actuariat. En effet soit F et G deux fonctions de répartitions ; la notion d'ordre FG a été introduit pour préciser l'idée que la fonction Fa moins de caractéristique que G. cette approche a été utilisé par Mann et Whitney (1947) qui présente ce qui est maintenant appelé "ordre stochastique" il a été utilisé par Birnbaum (1948).
Ce mémoire comporte deux chapitres :

* le premier chapitre, est consacré aux quelques concepts nécessaires ce qui sera utile dans la suite de ce travail.
* le deuxième chapitre est une présentation des différents types d'ordres stochastiques et la relation entre eux, en fin nous présentons quelques simulations sur des systèmes mixte où nous comparons la fiabilité d'un système série-parallèle et la fiabilité d'un système parallèle-série.

CHAPITRE 1

CONCEPTS GÉNÉRAUX

Concepts généraux

Dans ce chapitre nous allons présenter des notions de bases des calcules de la fiabilité des systèmes simples composés d'éléments réparables. Pour l'étude du temps de fonctionnement d'un système simple on utilise des techniques probabilistes et statistiques élémentaires.

1.1 Définitions générale

système

Un système peut être d'écrit comme un ensemble d'éléments en interaction entre eux et avec l'environnement dont le comportement dépend des comportements individuels des éléments qui le composant, des règles d'interaction entre éléments, de l'organisation typologique des éléments. On peut aussi distinguer deux types de systèmes :

* **Système non réparables :** élément remplacé après être tombé en panne. Exemple : interrupteur, ampoule, carte à puce,. . .
* **Système réparable :** élément pouvant être réparé après être tombé en panne. Exemple : centrale nucléaire, radar, voiture,. . .

fiabilité

On appelle fiabilité $R(t)$ d'un système S devant accomplir une mission dans des conditions données la probabilité que le système S n'ait eu aucune défaillance entre les instants :
0 et t

$$.R(t) = P(S \text{ non défaillant sur } [0.t])$$

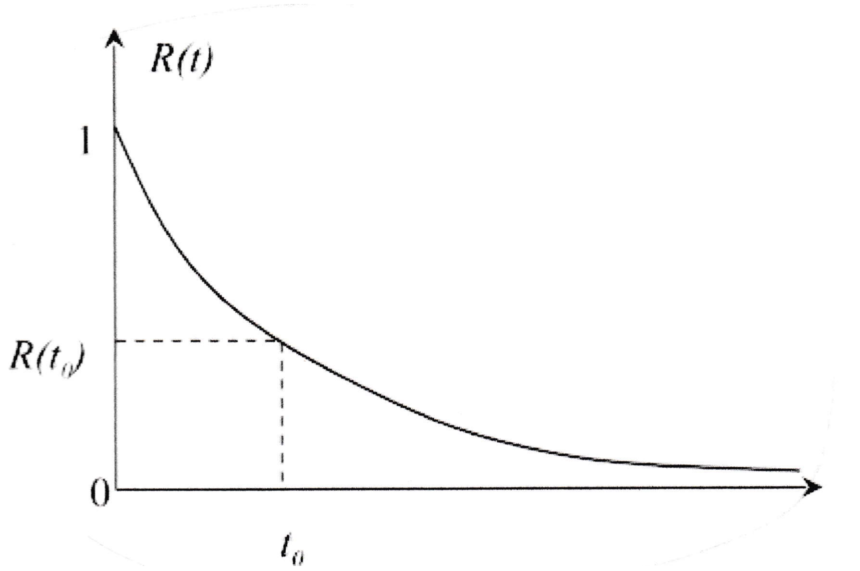

FIGURE 1.1 – Courbe de la fonction de fiabilité

La défaillances

la défaillance est la fin de l'aptitude d'un dispositif (d'un système) à accomplir la fonction que l'on attendait de ce matériel. On distingue :

* Des défaillances graves ou totales entrainant la fin de la fonction.
* Des défaillances partielles réduisant les performances mais non la fonction.

$$\begin{aligned} F(t) &= 1 - R(t) \\ &= 1 - P(Snondéfaillantsur[0,t]) \end{aligned}$$

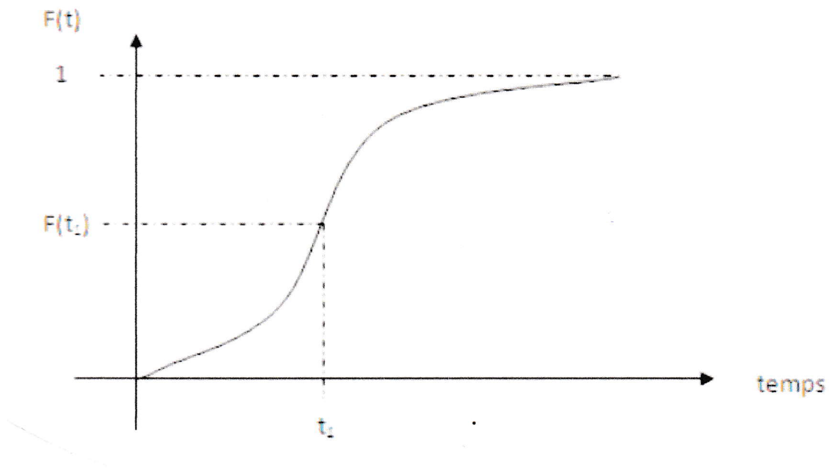

Figure 1.2 – Courbe de fonction de défaillances

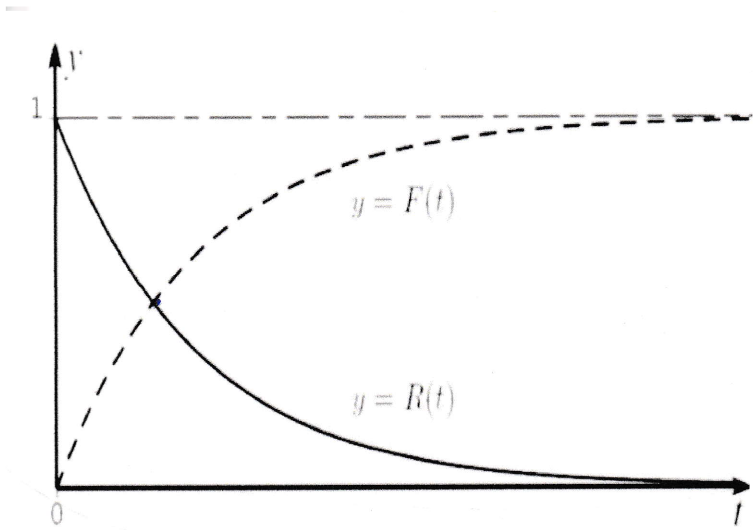

Figure 1.3 – Relation entre la fonction de défaillance $F(t)$ et la fonction de fiabilité $R(t)$

disponibilité

On appelle disponibilité $A(t)$ la probabilité que le système S fonctionne à l'instant t. On a donc :

$$A(t) = P(S \text{ non défaillant à l'instant} t).$$

la durée de vie

L'intervalle de temps entre la mise en marche ($t = 0$) et la 1^{ere} défaillance ou bien le temps entre deux défaillance consécutives après remises à neuf est une variable aléatoire T continue et positives. T représente la durée de vie d'un matériel avant défaillance.

maintenabilité

On appelle $M(t)$ d'un système S la probabilité pour que le système S soit réparé avant l'instant t sachant qu'il est défaillant à l'instant 0. On a alors :

$$M(t) = 1 - P(S \text{ non réparé sur } [0.t]).$$

La *maintenabilité* est une fonction croissante de 0 à 1 lorsque t varie de 0 à l'infini.
Si T représente la variable aléatoire mesurant la durée de bon fonctionnement du système, on peut écrire :
La fonction de fiabilité :

$$R(t) = P(T \geq t)$$

et la fonction de défiabilité :

$$\begin{aligned} F(t) &= 1 - R(t) \\ &= P(T \leq t) \end{aligned}$$

le taux instantanés de défaillance

On introduit également les taux instantanés de défaillance et de réparation $\lambda(t)$ et $\mu(t)$. Nous supposerons dans la suite que T admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$, presque partout continue. Cette densité vaut presque partout :

$$f(t) = -\frac{dR(t)}{dt}$$

Si U est la variable aléatoire représentant la durée de réparation du système. On a :

$$M(t) = P(U \leq t)$$

Nous supposerons que : U admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$, presque partout continue. Cette densité vaut presque partout :

$$f(t) = -\frac{dM(t)}{dt}$$

D'après les définitions précédentes, nous pouvons écrire le taux de défaillance $\lambda(t)$ tel que :

$$\lambda(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{1}{\delta t} P(t < T < t + \delta t / T > t)$$

C'est le rapport entre le nombre moyen de panne par unité de temps et le nombre moyen d'éléments en bon fonctionnement. Il traduit bien une « vitesse » de dégradation.
La forme classique de la courbe représentative de λ, pour des composants industriels, est dite en « baignoire » car elle comprend trois phases :

* La période infantile du composant (déverminage ou rodage) qui correspond à un intervalle proche de 0 sur lequel la fonction λ est décroissante.
* La période de maturité durant laquelle λ peut être supposée constante.
* La période de vieillissement du produit ou l'usure du composant se traduit par la croissance de la fonction.

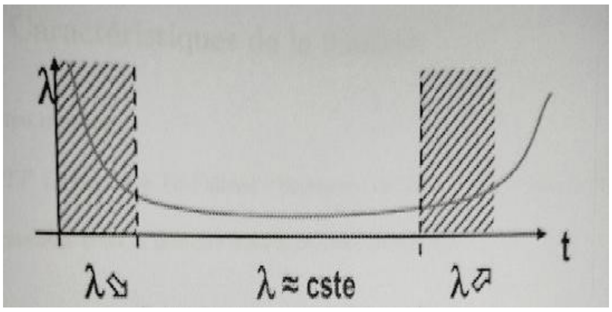

FIGURE 1.4 – La courbe représentatif de taux de panne

Et le taux de réparation $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{1}{\delta t} P(t < U < t + \delta t / U > t)$$

En tout point de continuité des densités on a les relations :

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = -\frac{dR(t)/dt}{R(t)} = -\frac{R'}{R} = -\Big(lg(R(t))\Big)$$

$$\mu(t) = \frac{g(t)}{1 - M(t)} = \frac{dM(t)/dt}{1 - M(t)} = -\Big(lg1 - M(t))\Big)$$

Inversement, pour cherche la fonction de fiabilité et de réparation à partir du taux de défaillance et le taux de réparation instantané respectivement, on utilise les fonctions suivante :

$$R(t) = exp\bigg(- \int_0^t \lambda(u)du\bigg)$$

et

$$M(t) = 1 - exp\bigg(- \int_0^t \mu(u)du\bigg)$$

1.2 Caractéristiques de la fiabilité

MTTF (Mean Time To Failure)

Représente une estimation du temps moyen de fonctionnement avant la première défaillance. nous notons m

$$m = MTTF = E(T)$$

il est souvent pris comme un indicateur permettant la comparaison des fiabilités des systèmes fournis par un constructeur. Pour le calculer, il est préférable d'utiliser la formule d'intégration suivante :

$$E(T) = \int_0^{\infty} R'(t)dt \qquad \text{si} \qquad \lim_{t \to 0} R(t) = 0$$

en effet

$$\begin{aligned} E(T) &= \int_0^{\infty} udF(u) \\ &= \int_0^{\infty} ud(1 - R(u)) \end{aligned}$$

si on intégré par partie en trouve les résultats.

MTTF (Mean Residual Time to failure)

Le temps moyen résidual de panne, elle est notée $m(t)$.

$$m(t) = E(T - \frac{t}{T} > T) = \frac{1}{R(t)} \int_t^{\infty} R(u)du$$

MTTR (Mean Time To Repair)

La durée moyenne avant réparation d'un système en panne :

$$MTTR = \int_0^{\infty} (1 - M(t)dt)$$

où

$$MTTR = \frac{\sum \text{des temps de réparation}}{\text{nombre de réparation.}}$$

si μ est constante, alors $\mu = \frac{1}{MTTR}$

MTBF (Mean Time Between failure)

Durée moyenne entre deux pannes.

$$MTBF = \frac{\sum \text{des temps de bon fonctionnement entre les n défaillances}}{\text{nombre des temps de bon fonctionnement}}$$

si λ constant, le $MTBF = \frac{1}{\lambda}$

En fiabilité, deux types de systèmes sont à distinguer, les systèmes ayant une structure élémentaire et ceux ayant une structure complexe. Une structure élémentaire contient des composants indépendants en série ou en parallèle ou toutes combinaisons possibles de ces deux cas. Un système pouvant être décomposée plusieurs modules à structure élémentaire est considéré comme système simple ou compliqué si sa taille est très importante.

1.3 Fonction structure

Considérons un système S formé de n composants, chaque composant possède deux états : **Un état de marche** et **un état de panne**. Nous allons étudier différentes représentations de la structure du système, c'est-à-dire, différentes manières d'exprimer si le système est en marche ou en panne, à partir des états de ses composants.

Définition 1.3.1. *La fonction structure traduit les relations fonctionnelle entre les composants du système et son état de panne, fonctionnement. considérons un système binaire à n composant numéroté $1, \dots n$, pour chaque composant i on désigne une variable x_i, à valeur dans $\{0,1\}$, avec convention suivante :*

$$x_i = \begin{cases} 1 & \textit{si le composant i est en bon état} \\ 0 & \textit{si le composant i est en panne} \end{cases}$$

Définition 1.3.2. *Soit $x = (x_1, x_2, ...x_n) \in \{0,1\}$, le vecteur décrivant conjointement les états des composants, on définit une fonction $\phi(x)$ décrivant d'états du système à valeurs dans $\{0,1\}$, avec la convention suivant :*

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si le système est en bon état} \\ 0 & \textit{si le système est en panne} \end{cases}$$

Système cohérent

Un système binaire est dit cohérent si :

* Tous les éléments du système sont critiques et les défauts de tous les éléments conduisent aux défauts du système entier.
* La fonction de structure est non décroissante lorsque le système est en fonctionnement, aucune réparation n'induit la panne du système et aucune panne ne provoque une amélioration du système.

Définition 1.3.3. ***(Décomposition pivotale)*** *Soit $\phi(x)$ la fonction de structure d'un système de n composants. Pour un composant i fixé, et pour tout x, nous avons la relation :*

$$\phi(x) = x_i\phi(x', 1_i) + (1 - x_i)\phi(x', 0_i)$$

où : $(x', 1_i) = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1_i, x_{i+1}, ..., x_n)$
et $(x', 0_i) = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0_i, x_{i+1}, ..., x_n)$

Cette relation est appelée la décomposition pivotale de ϕ selon le composant numéro i. Cette relation définie un algorithme qui permet de construire de proche en proche la fonction structure. Il suffit pour cela de décomposer successivement selon les différents composants du système.

Pour calculer la fiabilité d'un système, on peut utiliser la décomposition de la fonction structure ϕ à partir d'un composant i , an prenant l'espérance de chaque terme. On obtient :

$$R(p) = p_i R(p', 1_i) + (1 - p_i) R(p', 0_i)$$

Exemple 1.3.1. *Soit le système suivant :*

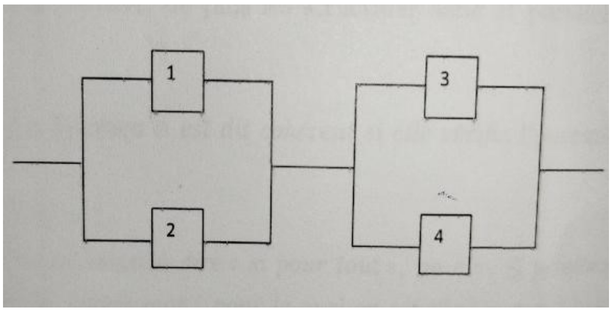

FIGURE 1.5 – Système série-parallèle

Système de 2 sous systèmes série-parallèle. La fonction structure correspondante est :

$$\begin{aligned}\phi(x) &= (1 - \prod_{i=1}^{2}(1 - x_i))(1 - \prod_{i=3}^{4}(1 - x_i)) \\ &= (1 - (1 - x_1))(1 - x_2)(1 - (1 - x_3)(1 - x_4))\end{aligned}$$

donc :

$$
\begin{aligned}
R(p) &= E(\phi(x)) \\
&= E((1-(1-x_1)(1-x_2))(1-(1-x_3)(1-x_4))) \\
&= (1-(1-p_1)(1-p_2))(1-(1-p_3)(1-p_4)) \\
&= p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 - p_1p_2p_3 - p_2p_3p_4 - p_1p_3p_4 - p_1p_2p_4 - p_1p_2p_3p_4
\end{aligned}
$$

1.4 Quelque types-usuelles des systèmes

1.4.1 Système en série

Un système en série ne fonctionne que si tous ses composants fonctionnent, la panne d'un composant quelconque entraine nécessairement la panne de système.
Il en résulte que :

$$T = \min\{T_1, ..T_n\}$$

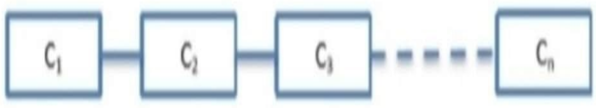

FIGURE 1.6 – Système série

d'où :

$$R(T) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t)$$

où, $R_i(t)$ est la fiabilité du i^{ème} composant.

La fonction de structure d'un système en série est donnée par :

$$\begin{aligned}\phi &= \min(x_1, \cdots, x_n) \\ &= \prod_{i=1}^{n} x_i\end{aligned}$$

Exemple 1.4.1. — ***Si les composants non identique*** *:*

Soit un poste de radio constitué de 4 composants en série : une alimentation $R_A = 0.95$, une partie récepteur $R_B = 0.92$, un amplificateur $R_C = 0.97$, et un hautparleur $R_D = 0.89$.

La fiabilité R_S de l'appareil est :

$$R_S = R_A.R_B.R_C.R_D = 0.7545$$

— ***Si les composants identique*** *:*

Soit une imprimante constitué 2000 composants montés en série, supposés tous de même fiabilité, très élevée , $R = 0.999$

La fiabilité de l'appareil est :

$$R_S = R^n = 0.9999^{2000} = 0.8187$$

1.4.2 Système parallèle

Un système en parallèle fonctionne si au mois un de ses composants fonctionne. La panne de système ne se produite donc que si tous les composants sont en panne.

Il en résulte que :

$$T = \max(T_1, ..., T_n)$$

d'où

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - R_i(t))$$

La fonction de structure d'un système en parallèle est donnée par :

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \max(x_1, x_2, ..., x_n) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)\end{aligned}$$

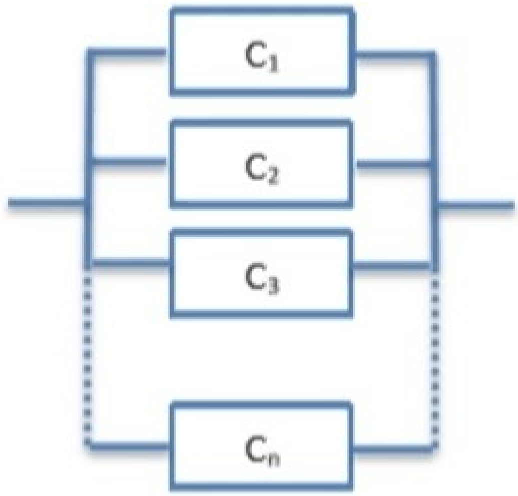

FIGURE 1.7 – Système parallèle

Exemple 1.4.2. *Soit un dispositif se compose de 4 composants connectés en parallèle dont la fiabilité sont respectivement de* $R_A = 0.98$*,* $R_B = 0.97$*,* $R_C = 0.98$*,* $R_D = 0.99$*.*
La fiabilité de l'ensemble est :

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 - \prod_{i=1}^{4}(1 - R_i(t)) \\ &= 1 - [(1 - R_A)(1 - R_B)(1 - R_C)(1 - R_D)] \\ &= 0.99 \end{aligned}$$

1.4.3 Système mixte :

Dans certains cas, les systèmes en série et en parallèle sont mélangés. Il est possible alors d'avoir des systèmes mixte, parmi aux :

Le système série-parallèle : est constitué de n sous-systèmes connectés en parallèle tel que chaque sous-système est composé de k éléments placés en série.

Un système série-parallèle est le résultat de l'association des deux systèmes série et parallèle. Pour calculer sa fiabilité, on réduit le système complet en un système parallèle en modélisant chaque sous-système en série par un seul composant. La fiabilité d'un sous-système en série i

$$R_i(t) = \prod_{j=1}^{n} R_{ij}(t)$$

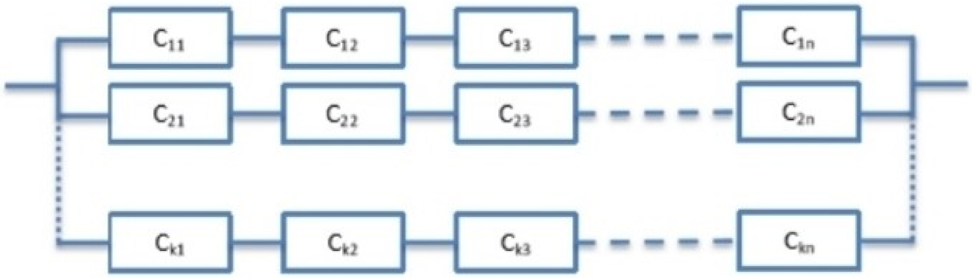

FIGURE 1.8 – Système série-parallèle

alors la fiabilité $R_(s)$ du système complet est :

$$R_s = 1 - \prod_{i=1}^{k}(1 - R_i(t))$$

$$R_s = 1 - \prod_{i=1}^{k}(1 - \prod_{j=1}^{n} R_{ij}(t))$$

Le système parallèle-série : est constitué de n sous-systèmes connectés en série tel que chaque sous-système est composé de k éléments placés en parallèle.

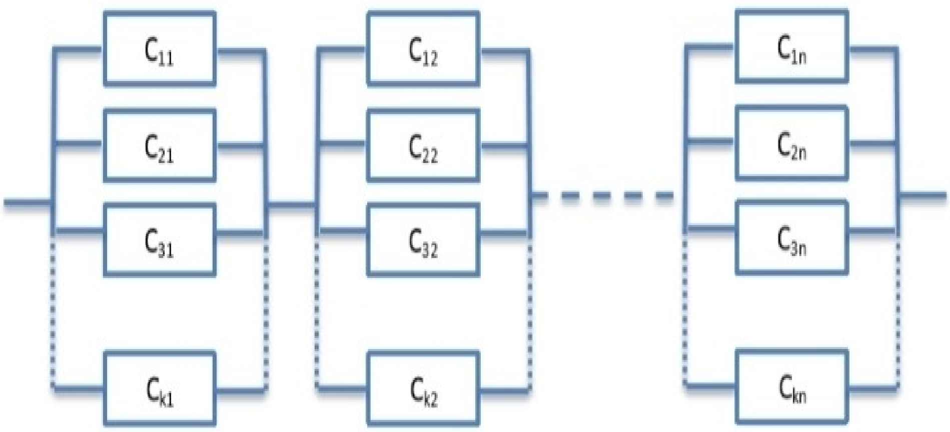

FIGURE 1.9 – Système parallèle-série

De même, un système parallèle-série est le résultat de l'association des deux systèmes série et parallèle. Pour calculer sa fiabilité, on réduit le système complet en un système série en modélisant chaque sous-système en parallèle par un seul composant. La fiabilité d'un sous-système en parallèle j est :

$$R_j = 1 - \prod_{i=1}^{k}(1 - R_i j(t))$$

alors la fiabilité R_s du système complet est :

$$R_s = 1 - \prod_{j=1}^{n} R_j(t)$$

$$R_s = 1 - \prod_{j=1}^{n}(1 - \prod_{i=1}^{k}(1 - R_{ij}(t)))$$

CHAPITRE 2

COMPARAISON STOCHASTIQUE

La comparaison stochastique permet de comparer des objets aléatoires de manière similaire à la comparaison des nombres. Dans ce chapitre, on donne des définitions et quelques résultats théoriques sur la comparaison stochastique dans la quelle les fonctions et les ensembles croissants jouent un rôle très important. On rappelle d'abord qu'une relation d'ordre R sur un ensemble E est une relation binaire notée xRy qui est réflexive, antisymétrique, et transitive. Cette relation est dite totale si deux éléments quelconques de E sont toujours comparables c'est à dire : xRy ou yRx , par contre s'il existe au moins deux éléments qui ne sont pas comparables la relation R est dite partielle. Un ensemble muni d'un ordre partiel (respectivement. total) est appelé un ensemble partiellement (respectivement. totalement) ordonné.

2.1 Ordres stochastiques

Un ordre stochastique est un ordre partiel sur un espace des fonctions de répartition. Notons par $R(s)$ l'ensemble des fonctions de répartition des variables aléatoires à valeurs dans S.

2.1.1 L'ordre intégral

On peut définir l'ordre stochastique à partir de la comparaison des espérances des fonctions appartenant à une famille de fonctions.

Définition 2.1.1. *Un ordre stochastique "$\leq$" pour lequel il existe une famille de fonctions (mesurables) F telle que :*

$$X \leq_F Y \text{ si et seulement si } \mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(Y)], \forall f \in F.$$

quand les espérances existes, est appelé un ***ordre intégral.***
la famille F est appelé générateur de l'ordre $\leq_F$

2.1.2 L'ordre ensembliste

Une autre manière de définir les ordres stochastiques est de partir d'une famille d'ensembles.

Définition 2.1.2. *Un ordre stochastique "$\leq_c$" défini sur les fonctions de répartition sur un espace arbitraire S, est appelé un ordre stochastique ensembliste s'il existe une famille C de sous-ensembles (mesurables) $\mathcal{C} \subset S$ vérifiant :*

$$X \leq_{\mathcal{C}} Y \Leftrightarrow \mathbb{P}(X \in C) \leq \mathbb{P}(Y \in C), \forall C \in \mathcal{C}.$$

On peut remarquer que chaque ordre ensembliste est également un ordre intégral.
En effet : soit $\leq_C$ un ordre ensembliste généré par une famille $\mathcal{C}$ de sous-ensembles de S, définissons la famille $\mathcal{F}$ de toutes les fonctions indicatrices des ensembles $C \in \mathcal{C}$,

$$\mathcal{F} = \{1_C : \quad C \in \mathcal{C}\}$$

Alors, l'ordre $\leq_C$ est un ordre intégral généré par la famille $\mathcal{F}$, cela provient directement de :

$$\mathbb{P}_X(C) = \mathbb{E}[1_C(X)]$$

2.1.3 L'ordre stochastique fort (usuel)

L'ordre stochastique usuel est l'ordre le plus naturel pour comparer deux variables aléatoires réelles. Il consiste à comparer leurs fonction de répartition(ou leurs fonction de survie). Cet ordre est souvent appelé ordre stochastique usuel selon Shaked et Shanthikumar (2007) et ordre stochastique fort selon Szekli (1995).
Soient $F_X(t)$ et $F_Y(t)$, respectivement, les fonctions de répartitions des v.a. X et Y.
Si $F_X(t) \leq F_Y(t)$ pour tout réel t, alors, avec une probabilité plus grande, X prend des petites valeurs que Y, ou avec une probabilité plus faible X prend des grandes valeurs que Y.
Ceci conduit à la définition suivante :

Définition 2.1.3. *Soit X et F deux variables aléatoires réelles. On dit que : X est Plus petit que Y au sens de l'ordre stochastique usuel notée "$\leq_{st}$" si :*

$$F_X(t) \geq F_Y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

L'inéquation est équivalente aux inéquation suivantes :

$$\bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

où $\bar{F}_X(t) = F_Y$ est la fonction de survie de X,ainsi on a :

$$P(X > t) \leq P(Y > t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Théorème 2.1.1. *Soit X et Y deux variables aléatoires réelles les propositions suivantes sont équivalentes :*

* $X \leq_{st} Y$.
* *Pour chaque fonction croissante telle que les deux espérances existent*

$$\mathbb{E}[f(X) \leqslant \mathbb{E}[f(Y)] \tag{2.1}$$

De plus si pour une fonction f l'inégalité est vérifiée pour toutes variables aléatoires X et Y telles que $X \leq_{st} Y$, alors f est une fonction croissante.
On remarque que chaque ordre stochastique fort est un ordre intégral. Considérons la famille G de toutes les fonctions indicatrices des ensembles croissants $U \subset S$ (S est un espace arbitraire, on dit que U est un ensemble croissant si sa fonction indicatrice est une fonction croissante).

Théorème 2.1.2. *La famille G est un générateur de l'ordre $\leq_{st}$ c'est-à-dire :*

$$X \leq_{st} Y \Leftrightarrow \mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(Y)], \forall f \in G.$$

Ce théorème peut être réécrit en utilisant les ensembles croissants.

Corollaire 2.1.1. $X \leq_{st} Y \Leftrightarrow \mathbb{P}(X \in U) \leq \mathbb{P}(Y \in U)$ *, pour tous les ensembles croissants U. L'ordre stochastique $\leq_{st}$ est donc également un ordre ensembliste généré par la famille C_{st} de tous les ensembles croissants.*

Propriétés de l'ordre $\leq_{st}$:

Dans la suite, on donne quelques propriétés de l'ordre $\leq_{st}$

* Si $X \leq_{st} Y$ et $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$, alors X et Y ont la même distribution.
* Si $X \leq_{st} Y$, alors $f(X) \leq_{st} f(Y)$ pour toutes les fonctions croissantes. en particulier, si X et Y sont des variables aléatoires positives,

$$\mathbb{E}[X^k] \leq \mathbb{E}[Y^k] \quad \text{,pour tout k impaire}$$

* Soit $X_1, ..., X_n$ et $Y_1, .., Y_n$ des variables aléatoires indépendantes telle que

$$X_i \leq_{st} Y_i, \quad i = 1, ..., n.$$

Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction croissante alors :

$$g(X_1, ..., X_n) \leq_{st} g(Y_1, .., Y_n)$$

en particulier :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \leq_{st} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

* Soient $X_1, ..., X_n$ et $Y_1, ..., Y_n$ des variables aléatoires indépendantes telle que $X_i \leq_{st} Y_i \quad i = 1, ..., n$ et soient

$$X_{(1:n)} \leq_{st} X_{(2:n)} \leq_{st} ... \leq_{st} X_{(n:n)}$$

$$Y_{(1:n)} \leq_{st} Y_{(2:n)} \leq_{st} ... \leq_{st} Y_{(n:n)}$$

les statistiques d'ordres qui correspondent aux variables $X_1, ..., X_n$ et $Y_1, ..., Y_n$ respectivement. Alors :

$$X_{(1:n)} \leq_{st} Y_{(i:n)}, \quad i = 1, ..., n.$$

2.1.4 Ordres des variabilités

On va introduire deux ordres des variabilités qui permettent de comparer les variabilités des phénomènes aléatoires, ayant la même moyenne, car deux distributions ayant la même moyenne sont comparables selon l'ordre stochastique fort si et seulement si elles ont la même fonction de répartition. L'ordre stochastique convexe (convex ordre $\leq_{st}$) est un ordre intégral généré par la famille des fonctions réelles convexes.

L'ordre stochastique croissant convexe (increasing convex ordre $\leq_{icx}$) est un ordre intégral généré par la famille des fonctions réelles croissantes et convexes. On note par F_{cx} la famille des fonctions réelles convexes et par F_{icx} la famille des fonctions réelles croissantes et convexes sur $\mathbb{R}$. On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe si pour chaque $x, y \in \mathbb{R}$

$$f[\alpha x + (1-\alpha)y] \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y), \quad 0 < \alpha < 1$$

.

Définition 2.1.4. *Pour deux variables aléatoires X et Y, les relations*

$\leq_{cx}$ et $\leq_{icx}$ sont définies par :

$$X \leq_{cx} Y \quad si \quad \mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(X)], \forall f \in F_{cx}$$

.

$$X \leq_{icx} Y \quad si \quad \mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(Y)], \forall f \in F_{icx}$$

. Quand les espérances existent.

Proposition 2.1.1. *$X \leq_{cx} Y \Leftrightarrow X \leq_{icx} Y$ et $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$. La comparaison $\leq_{icx}$ est donc moins forte que la comparaison $\leq_{cx}$ et moins forte que la comparaison $\leq_{st}$ La proposition suivante provient directement de $F_{icx} \subset F_{st}$.*

Proposition 2.1.2. *$X \leq_{st} Y \Rightarrow X \leq_{icx} Y$*

2.2 Comparaison de durée de vie

Dans la théorie de la fiabilité, l'ordre stochastique est un outil important pour comparer les durées de vie des systèmes, nous disons qu'un système est plus fiable qu'un autre si sa caractéristique de fiabilité est meilleure. Suivant le choix de caractéristique, nous obtenons les relations d'ordre stochastique fort (stochastic ordering) et l'ordre en moyenne (pour l'inégalité (2.1), nous supposons que la fonction f est la fonction idendique) que nous avons déjà vus précédemment, et nous obtenons encore la définition d'ordre stochastique en moyenne résidial (mean risudual ordering), aussi la définition d'ordre des taux de panne notée $\leq_{hr}$ (hazard rate ordering). Soient deux systèmes de durées de vie aléatoires X_1, X_2, nous supposons connues les principales caractéristiques de fiabilité de chacun des systèmes :

* $R_i(t)$: la fiabilité,
* E_i : le temps moyen de bon fonctionnement,
* $h_i(t)$: le taux de panne,
* $m_i(t)$: la moyenne résiduelle.

A partir de chacune de ses expressions, on écrit les quatre notions d'ordres stochastiques précédentes comme suit :

1. $X_1 \geqslant_m X_2$ moyenne moins fiable si $E_1 \geqslant E_2$.
2. $X_1 \geqslant_{st} X_2$ stochastique moins fiable si $R_1(t) \geqslant R_2(t) \quad \forall t \geq 0$.
3. $X_1 \geqslant_{mr} X_2$ moins fiable à l'usage si $m_1(t) \geqslant m_2(t) \quad \forall t \geq 0$.
4. $X_1 \geqslant_h X_2$ plus vite défaillant si si $h_1 \leqslant h_2, \quad \forall t \geq 0$.

Proposition 2.2.1. *Les ordres partiels ci-dessus vérifiant les inclusions suivantes :*

$$h \Longrightarrow st \Longrightarrow m$$

$$h \Longrightarrow mr \Longrightarrow m$$

Il n y a pas d'inclusion entre les ordres st et mr.

Preuve. Supposons deux systèmes de durées de vie X_1, X_2vérifiant :

$$h_1(t) \geq h_2(t), \text{ pour tout } t \geq 0$$

Puisque $R(t) = exp\Bigg(- \int_0^t h(u)du\Bigg)$, donc : $R_1(t) \geq R_2(t), d'$ où $X_1 \geq_{st} X_2$,
d'autre part $R_1(t) \geq R_2(t) \Rightarrow \int_0^\infty R_1(t)dt \geqslant \int_0^\infty R_2(t)dt$ d' où : $X_1 \geq_m X_2$.
pour la relation mr, nous pouvons exprimer $m(t)$ à partir de $h(t)$:

$$\begin{aligned} m(t) = \mathbb{E} > [T > t + s \; T > t] &= \frac{1}{R(t)} \int_t^\infty R(s)ds, \quad , \text{ pour tout } s \geq 0 \\ &= \frac{R(t+s)}{R(t)} \\ &= \exp\{- \int_t^{t+s} h(u)du\} \end{aligned}$$

ce qui permet de conclus ;

$$m_1(t) \geq m_2(t)$$

d'où :$X_1 \geq_{mr} X_2$.
si $X_1 \geq_{mr} X_2$, alors dans la définition, $t = 0$ donne le même ordre pour la relation m. □

Les deux ordres $\leq_{st}$ et $\leq_h$ permettent, dans le cas de taux de panne bornés, de contrôler la fiabilité d'un système en utilisant les lois exponentielles. Le résultat suivant est une conséquence immédiate de cette relation $X_1 \geq_h X_2 \Longrightarrow X_1 \geq_{st} X_2$.

Corollaire 2.2.1. *Soit X une durée de vie aléatoire dont le taux de panne $h(t)$ est majoré (respectivement minoré) par $\lambda > 0$. Alors X est plus fiables (respectivement moins fiable) qu'une durée exponentielle de paramètre λ .*
On va maintenant utiliser les ordres $\leq_{st}$ et $\leq_h$ pour comparer des durées de vie résiduelle.

Définition 2.2.1. *On dit qu'une durée de vie X est NBU (New Better than Used) si Pour tout $t \geq 0$, la durée résiduelle X_t est moins fiable que X.*
Par définition de l'ordre stochastique, la propriété de NBU équivaut à $R_t(s) \leq R(t)$, pour tout t,et s, soit :

$$R(t+s) \leq R(t)R(s)$$

Pour une durée de vie NBU un appareil d'occasion est toujours moins fiable qu'un neuf. Cela se produit en particulier dans le cas d'un taux de panne croissant.

Définition 2.2.2. *Soit X une durée de vie.On dit que X est IFR (Increasing Failure Rate). si le taux de panne $h(t)$ est une fonction croissante du temps.*

Par exemple, *une durée de vie suivant la loi de gamma $\Gamma(a, \lambda)$ ou la loi de Weibull W (a, λ) est IFR pour $a > 1$. Quand le taux de panne est croissant, la fiabilité empire toujours, quel que soit l'âge de l'appareil.*

Proposition 2.2.2. *Soit X une durée de vie IFR. Alors pour tout couple d'instants successifs $t_1 \leq t_2$, on a $X_{t_2} \leq_{st} X_{t_1}$. En particulier,$X$ est NBU.*

Preuve. Si $h(t)$ est croissant, alors pour $t_1 \leq t_2$ et $s \geq 0$,on a :

$$h(t_1 + s) \leq h(t_2 + s).$$

Où $h(t+s)$ est le taux de panne de la durée de vie résiduelle X_t. Donc $X_{t_2} \leq_h X_{t_1}$, ce qui entraine $X_{t_2} \leq_{st} X_{t_1}$, pour $t = 0$, on obtient $X_{t_2} \leq_{st} X_{t_1}$,donc X est NBU.le contraire de NBU est NWU (New Worse than used). Une loi est NWU si un appareil d'occasion est plus able qu'un neuf. Le contraire de IFR est DFR (Decreasing Failure Rate). Comme dans la proposition précédente, si le taux de panne est décroissant alors la durée de vie X est NWU, c'est à dire les durées de vie résiduelles sont de plus en plus fiable.

On considère, en général, que le taux de panne a une "courbe en baignoire", on distingue trois périodes dans la vie d'un système :

* Période des défauts de jeunesse pendant laquelle le taux de panne est décroissant, c'est la phase de rodage.
* Période des défaillances aléatoires ou vie utile d'un appareil pendant la quelle le taux de panne est constant.
* Période des avaries d'usure pendant laquelle le taux de panne est croissant.

□

Proposition 2.2.3. *Si les durées de vie sont classées selon l'ordre en moyenne résiduelle* ($X_1 \leq_{mr} X_2$) *et si le rapport* $\frac{m_1(t)}{m_2(t)}$ *est une fonction croissante de* t *alors elles sont dans le même ordre pour la vitesse de défaillance :*$X_1 \leq_h X_2$.

Preuve. Premièrement nous écrivons la fonction $h(t)$ en fonction de $m(t)$ on a :

$$m(t) = \frac{1}{R(t)}$$

donc

$$m(t)R(t) = \int_t^\infty R(u)du$$

par dérivation, on obtient

$$m'(t)R(t) + m(t)R'(t) = -R(t),$$

et comme $h(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)}$, alors

$$h(t) = \frac{1 + m'(t)}{m(t)}$$

Le fait de supposer, à la fois, $\frac{m_1(t)}{m_2(t)}$ croissante, $m_1(t) \leq m_2(t)$ implique l'inégalité suivante, dans le cas des fonctions de répartition dérivables :

$$\frac{1 + m_1'(t)}{m_1(t)} \geq \frac{1 + m_2'(t)}{m_2(t)}$$

d'où : $X_1 \leq_h X_2$. □

Théorème 2.2.1. *La relation d'ordre convexe peut être définie de façon équivalente par l'inégalité suivante concernant les fiabilités :*

$$X_1 \leq_{icx} X_2 \Leftrightarrow \int_t^\infty R_1(u)du \leq \int_t^\infty R_2(u)du \quad \textit{pour tout } t \geq 0.$$

2.3 Condition suffisante

On a voulu exploité l'idée de J.L Bon pour démontrer la condition suffisante, malheureusement, on été affronté à la non symétrie de la fiabilité, ce qui nous amène à réaliser des simulations pour vérifier si notre condition reste suffisante. La condition suffisante n'est pas facile à démontrer du fait de le non symétrie de la fiabilité, et du coup on ne peut pas l'affirmer théoriquement. Par des simulations, on va voir que la condition $\mu \geq \left[\frac{1}{n-k+1}\sum_{i=1}^{n-k+1}\prod_{j=i}^{i+k-1}\lambda_j\right]^{\frac{1}{k}}$ est suffisant pour que $R(t,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n) = R(k,\mu)$, la démonstration de la condition suffisante reste un problème ouvert.

2.4 Simulation

Dans ce qui, on va illustrer ces résultats par des simulations et cela pour différents valeurs de R_i (dans le logiciel R)

2.4.1 comparaison 1

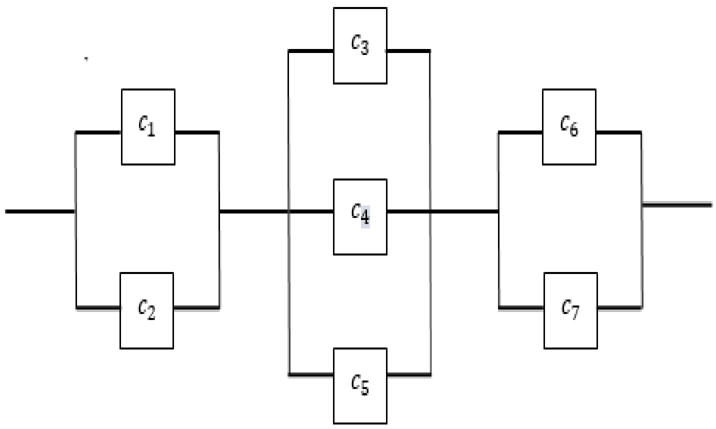

FIGURE 2.1 – Système parallèle-série

$$R_{sys1} = (1-(1-R_1)(1-R_2))(1-(1-R_3)(1-R_4)(1-R_5))(1-(1-R_6)(1-R_7))$$

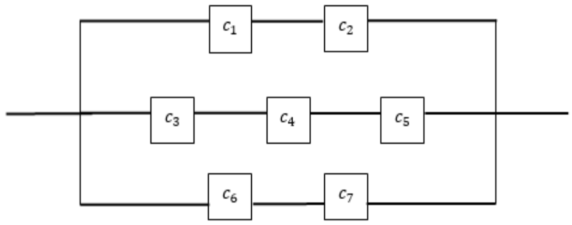

FIGURE 2.2 – Système série-parallèle

$$R_{sys2} = 1 - (1 - R_1R_2)(1 - R_3R_4R_5)(1 - R_6R_7)$$

Algorithm 1 comparaison 1

$t = 1 : 8;$

$R_1 = exp(-0.74 * t)$

R_1

$R_2 = exp(-0.93 * t)$

R_2

$R_3 = exp(-0.54 * t)$

R_3

$R_4 = exp(-0.85 * t)$

R_4

$R_5 = exp(-0.48 * t)$

R_5

$R_6 = exp(-0.65 * t)$

R_6

$R_7 = exp(-0.7 * t)$

R_7

$vec1 = rweibull(t, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7)$

systeme1

$R_{sys1} = (1 - (1 - R_1)(1 - R_2))(1 - (1 - R_3)(1 - R_4)(1 - R_5))(1 - (1 - R_6)(1 - R_7))$

R_{sys1}

systeme2

$R_{sys2} = 1 - (1 - R_1R_2)(1 - R_3R_4R_5)(1 - R_6R_7)$

R_{sys2}

if(R_{sys1} $>$ R $-$ $sys2$)"le systeme parallèle-serie est plus fiable" else "le systeme serie-parallèle est plus fiable"

plot(R_{sys1},type="l",col="black",xlab="le temp",

ylab="la fiabilité",main= "comparaison entre systeme serie-parallèle et systeme parallèle-serie")

points(R_{sys2},type="l",col="red")

legend("topright",legend=c("R_{sys1}=systeme parallèle-serie",

"R_{sys2}=systeme serie-parallèle"),fill=1 :2)

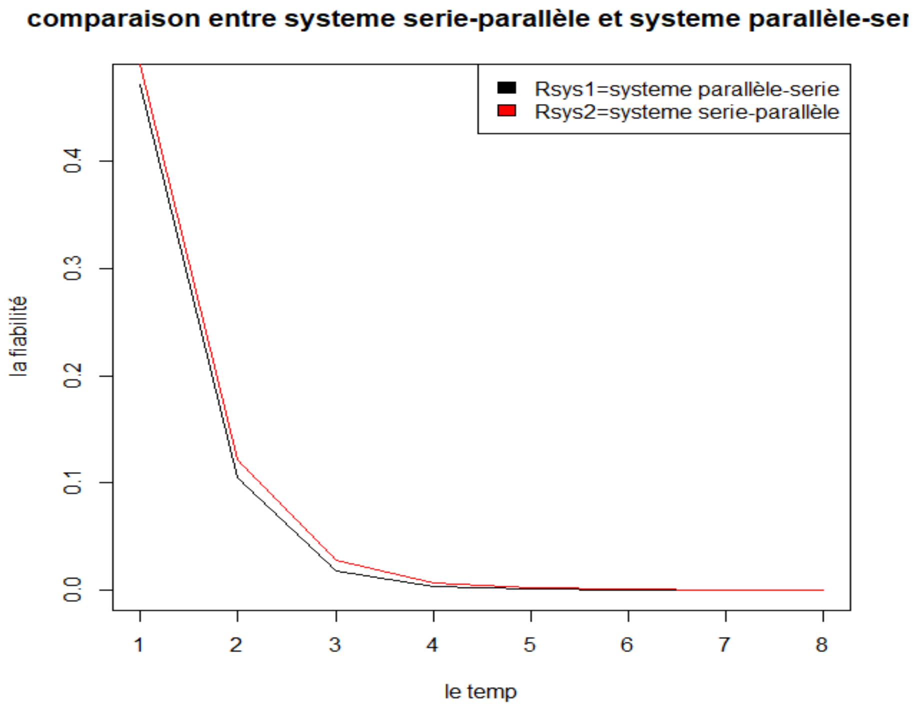

FIGURE 2.3 – Comparaison entre le système série-parallèle et parallèle -série comparaison 4

Commentaire :

Dans cette comparaison on remarque que le système série-parallèle est plus fiable que le système parallèle-série

2.4.2 comparaison 2

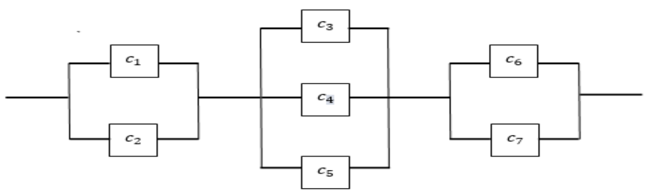

FIGURE 2.4 – Système parallèle-série

$$R_{sys1} = (1-(1-R)^2)^2(1-(1-R)^3)$$

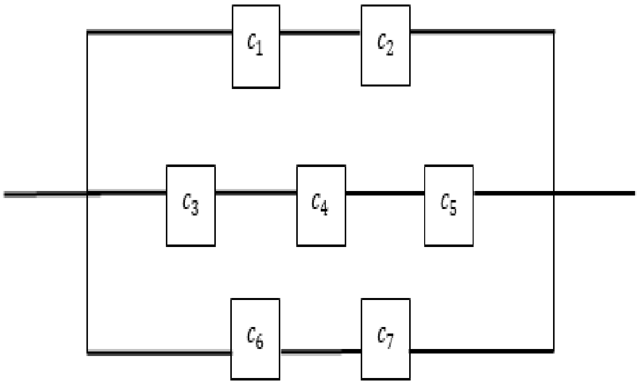

FIGURE 2.5 – Système série-parallèle

$$R_{sys2} = 1 - (1 - R^2)^2(1 - R^3)$$

Algorithm 2 comparaison 2

$t = 1 : 8;$

$R = exp(-0.62 * t)$

R

$vec1 = rweibull(t, R)$

systeme1

$R_{sys1} = (1 - (1 - R)^2)^2(1 - (1 - R)^3)$

R_{sys1}

systeme2

$R_{sys2} = 1 - (1 - R^2)^2(1 - R^3)$

R_{sys2}

if($R_{sys1} > R_{sys2}$)"le systeme parallèle-serie est plus fiable"else

"le systeme serie-parallèle est plus fiable"

plot(R_{sys1},type="l",col="black",xlab="le temp",ylab="la fiabilité",

main="comparaison entre systeme serie-parallèle et systeme parallèle-serie")

points(R_{sys2},type="l",col="red")

legend("topright", legend=c("R_{sys1}=systeme parallèle-serie",

"R_{sys2}=systeme serie-parallèle"),fill=1 :2)

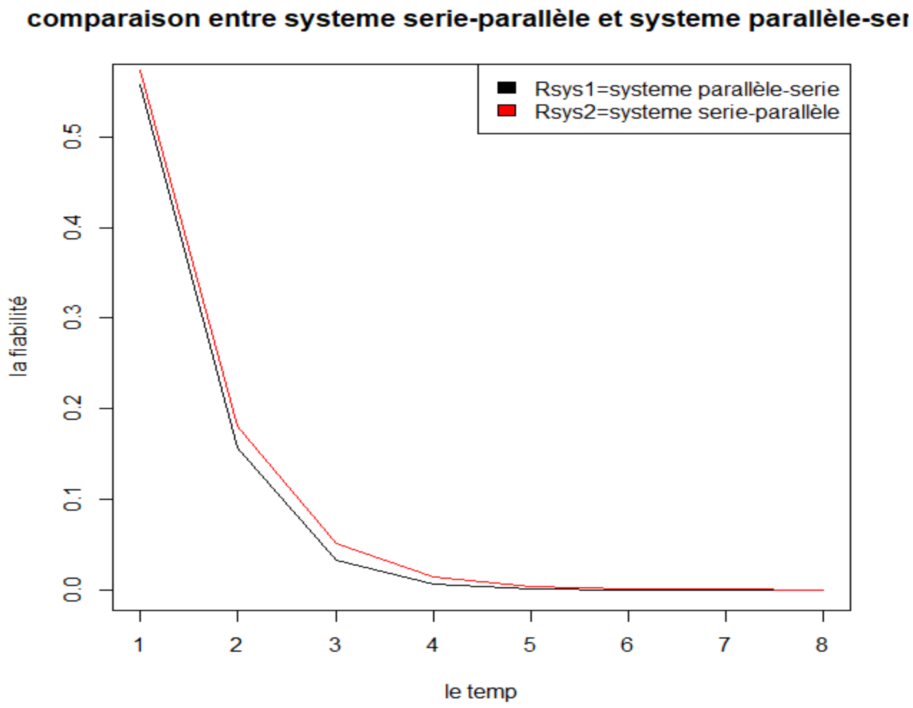

FIGURE 2.6 – Comparaison entre le système série-parallèle et parallèle -série comparaison 5

Commentaire :

Dans cette comparaison on remarque que le système série-parallèle est plus fiable que le système parallèle-série

2.4.3 comparaison 3

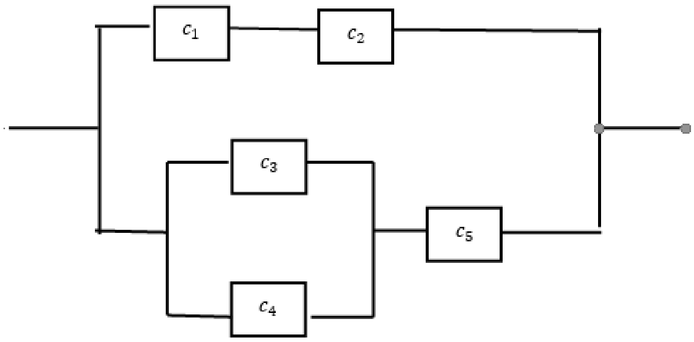

FIGURE 2.7 – Système parallèle-série

$$R_{sys1} = 1 - (1 - R_1R_2)(1 - (1 - (1 - R_3)(1 - R_4))R_5)$$

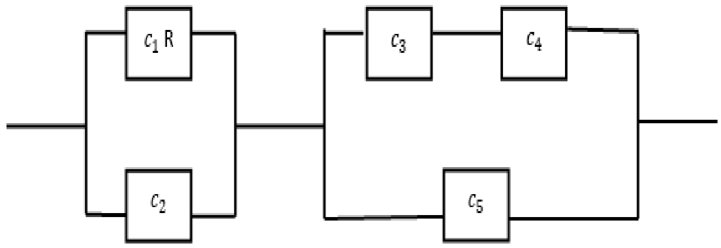

FIGURE 2.8 – Système série-parallèle

$$R_{sys2} = (1 - (1 - R_1)(1 - R_2))(1 - (1 - R_3R_4)(1 - R_5))$$

Algorithm 3 comparaison 3

$t = 1 : 6;$

$R_1 = exp(-0.62 * t)$

R_1

$R_2 = exp(-0.34 * t)$

R_2

$R_3 = exp(-0.9 * t)$

R_3

$R_4 = exp(-0.83 * t)$

R_4

$R_5 = exp(-0.7 * t)$

R_5

$vec1 = rweibull(t, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5)$

systeme1

$R_{sys1} = 1 - (1 - R_1R_2)(1 - (1 - (1 - R_3)(1 - R_4))R_5)$

R_{sys1}

systeme2

$R_{sys2} = (1 - (1 - R_1)(1 - R_2))(1 - (1 - R_3R_4)(1 - R_5))$

R_{sys2}

if($R_{sys1} > R_{sys2}$)"le systeme serie-parallèle est plus fiable"

else"le systeme parallèle-serie est plus fiable"

plot(R_{sys1},type="l",col="black",xlab="le temp",ylab="la fiabilité",

main= "comparaison entre systeme serie-parallèle et systeme parallèle-serie")

points(R_{sys2},type="l",col="red")

legend("topright",legend=c("R_{sys1}=systeme serie-parallèle",

"R_{sys2}=systeme parallèle-serie"),fill=1 :2)

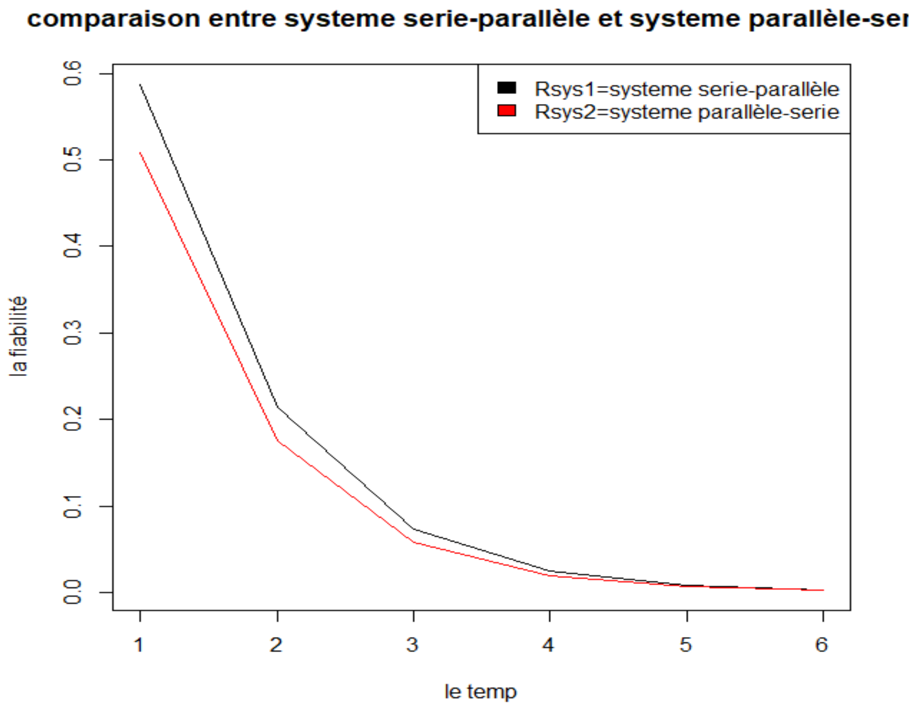

FIGURE 2.9 – Comparaison entre le système série-parallèle et parallèle -série comparaison 6

Commentaire :

Dans cette comparaison on remarque que le système série-parallèle est plus fiable que le système parallèle-série.

2.4.4 comparaison 4

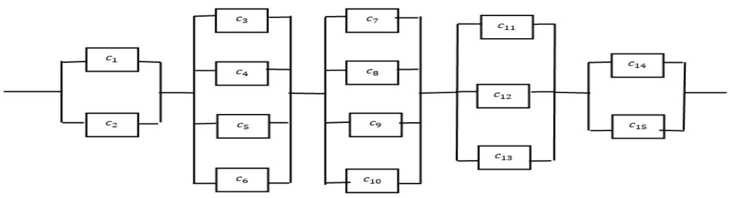

FIGURE 2.10 – Système parallèle-série

$$R_{sys1} = (1 - (1 - R)^2)^2 (1 - (1 - R)^4)^2 (1 - (1 - R)^3)$$

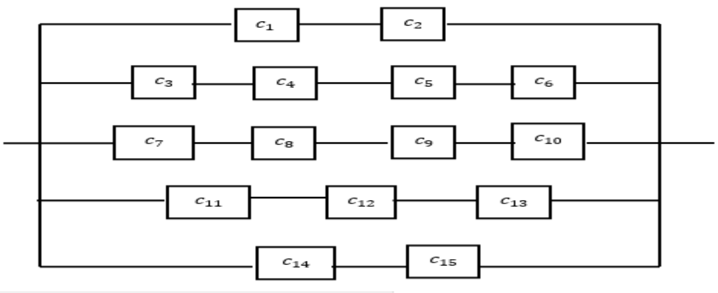

FIGURE 2.11 – Système série-parallèle

$$R_{sys2} = 1 - (1 - R^2)^2(1 - R^4)^2(1 - R^3)$$

Algorithm 4 comparaison 4

$t = 1 : 6;$

$R = exp(-0.73 * t)$

$vec1 = rweibull(t, R)$

systeme1

$R_{sys1} = (1 - (1 - R)^2)^2(1 - (1 - R)^4)^2(1 - (1 - R)^3)$

R_{sys1}

systeme2

$R_{sys2} = 1 - (1 - R^2)^2(1 - R^4)^2(1 - R^3)$

R_{sys2}

if($R_{sys1} > R_{sys2}$) "le systeme parallèle-serie est plus fiable" else

"le systeme serie-parallèle est plus fiable"

plot(R_{sys1},type="l",col="black",xlab="le temp",

ylab="la fiabilité",main="comparaison entre systeme serie-parallèle et systeme parallèle-serie")

points(R_{sys2},type="l",col="red") legend("topright",legend=c("R_{sys1}="systeme parallèle-serie",

"R_{sys2}="systeme serie-parallèle"),fill=1 :2)

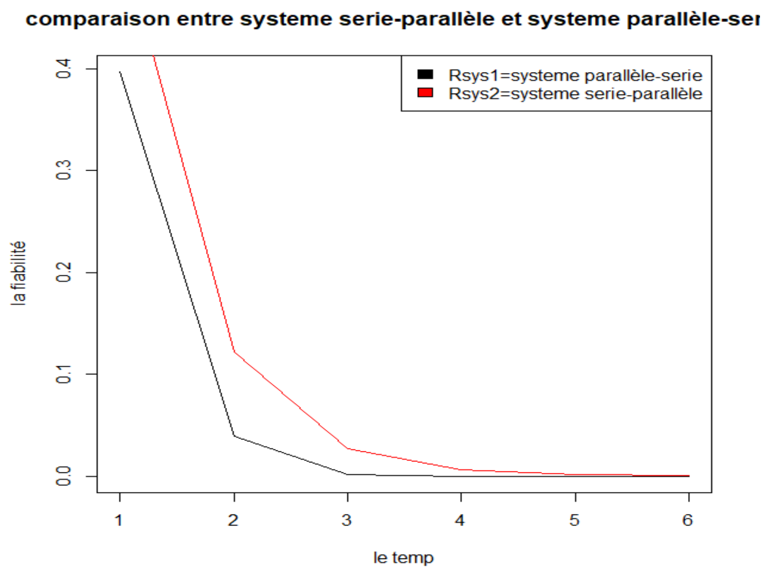

FIGURE 2.12 – Comparaison entre le système série-parallèle et parallèle -série comparaison 2

Commentaire :

Dans cette comparaison on remarque que le système série-parallèle est plus fiable que le système parallèle-série

2.4.5 comparaison 5

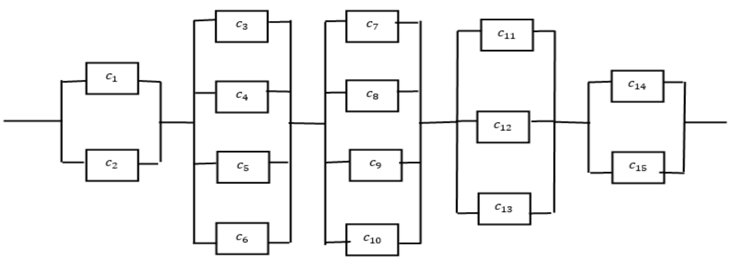

FIGURE 2.13 – Système parallèle-série

$$R_{sys1} = (1-(1-R_1)(1-R_2))(1-(1-R_3)(1-R_4)(1-R_5)(1-R_6))(1-(1-R_7)(1-R_8)$$
$$(1-R_9)(1-R_{10}))(1-(1-R_{11})(1-R_{12})(1-R_{13}))(1-(1-R_{14})(1-R_{15}))$$

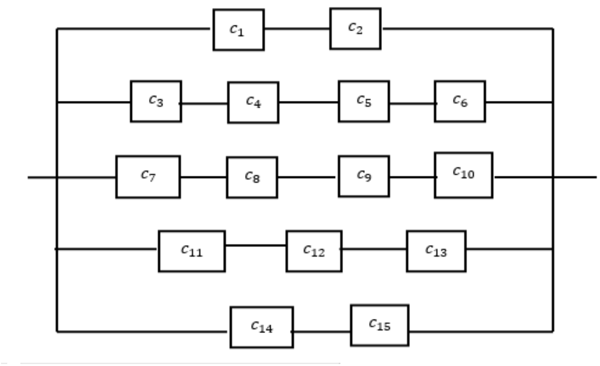

FIGURE 2.14 – Système série-parallèle

$$R_{sys2} = 1 - (1 - R_1R_2)(1 - R_3R_4R_5R_6)(1 - R_7R_8R_9R_{10})(1 - R_{11}R_{12}R_{13})(1 - R_{14}R_{15})$$

Algorithm 5 comparaison 5

$t = 1 : 5;$

$R_1 = exp(-0.32 * t)$

R_1

$R_2 = exp(-0.44 * t)$

R_2

$R_3 = exp(-0.9 * t)$

R_3

$R_4 = exp(-0.8 * t)$

R_4

$R_5 = exp(-0.66 * t)$

R_5

$R_6 = exp(-0.38 * t)$

R_6

$R_7 = exp(-0.72 * t)$

R_7

$R_8 = exp(-0.49 * t)$

R_8

$R_9 = exp(-0.52 * t)$

R_9

$R_{10} = exp(-0.73 * t)$

R_{10}

$R_{11} = exp(-0.91 * t)$

R_{11}

$R_{12} = exp(-0.87 * t)$

R_{12}

$R_{13} = exp(-0.6 * t)$

R_{13}

$R_{14} = exp(-0.8 * t)$

R_{14}

$R_{15} = exp(-0.83 * t)$

R_{15}

$vec1 = rweibull(t, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_9, R_{10}, R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14}, R_{15})$

Algorithm 6 suite de comparaison 5

systeme1

$R_{sys1} = (1-(1-R_1)(1-R_2))(1-(1-R_3)(1-R_4)(1-R_5)(1-R_6))(1-(1-R_7)(1-R_8)$
$(1-R_9)(1-R_{10}))(1-(1-R_{11})(1-R_{12})(1-R_{13}))(1-(1-R_{14})(1-R_{15}))$

R_{sys1}

systeme2

$R_{sys2} = 1-(1-R_1R_2)(1-R_3R_4R_5R_6)(1-R_7R_8R_9R_{10})(1-R_{11}R_{12}R_{13})(1-R_{14}R_{15})$

R_{sys2}

if($R_{sys1} > R_{sys2}$)"le systeme parallèle-serie est plus fiable"

else"le systeme serie-parallèle est plus fiable"

plot(Rsys1,type="l",col="black",xlab="le temp",ylab="la fiabilité",main="comparaison entre systeme serie-parallèle et systeme parallèle-serie")

points($R_{sys2}, type = "l", col = "red"$)

legend("topright", legend=c("R_{sys1}=systeme parallèle-serie",
"R_{sys2}=systeme serie-parallèle"),fill=1 :2)

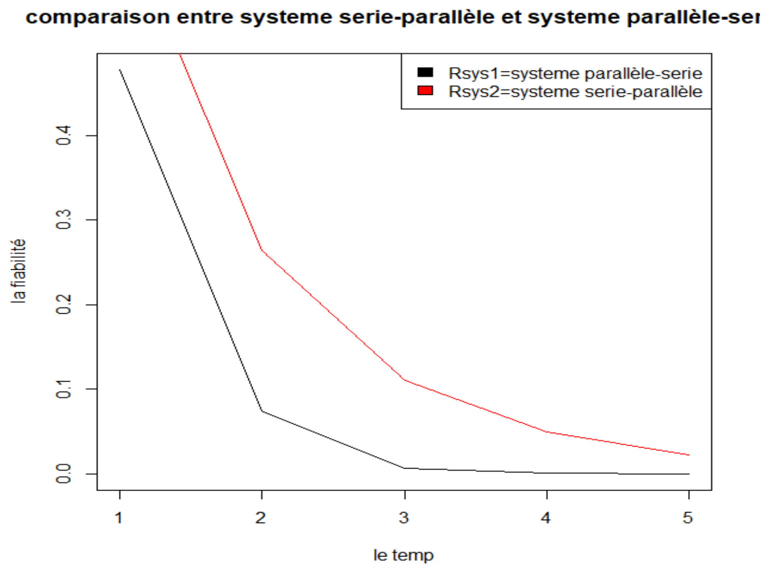

FIGURE 2.15 – Comparaison entre le système série-parallèle et parallèle -série comparaison 1

Commentaire :

Dans cette comparaison on remarque que le système série-parallèle est plus fiable que le système parallèle-série

2.4.6 comparaison 6

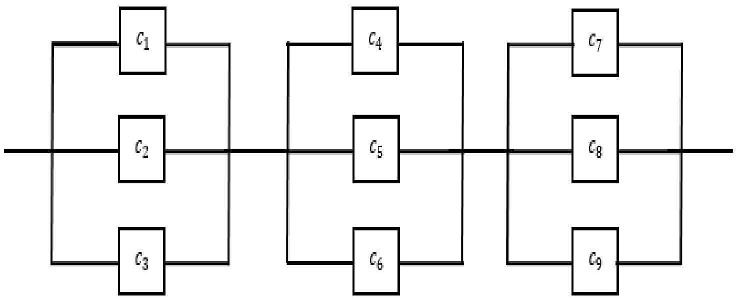

FIGURE 2.16 – Système parallèle-série

$$R_{sys1} = (1-(1-R_1)(1-R_2)(1-R_3))(1-(1-R_4)(1-R_5)(1-R_6))(1-(1-R_7)(1-R_8)(1-R_9))$$

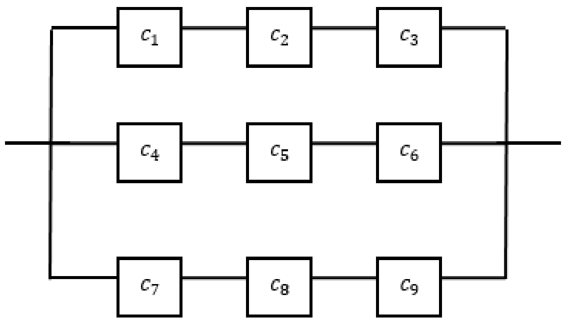

FIGURE 2.17 – Système série-parallèle

$$R_{sys2} = 1-(1-R_1R_2R_3)(1-R_4R_5R_6)(1-R_7R_8R_9)$$

Algorithm 7 comparaison 6

$t = 1 : 7;$

$R_1 = exp(-0.6 * t)$

R_1

$R_2 = exp(-0.32 * t)$

R_2

$R_3 = exp(-0.8 * t)$

R_3

$R_4 = exp(-0.3 * t)$

R_4

$R_5 = exp(-0.7 * t)$

R_5

$R_6 = exp(-0.5 * t)$

R_6

$R_7 = exp(-0.1 * t)$

R_7

$R_8 = exp(-0.9 * t)$

R_8

$R_9 = exp(-0.8 * t)$

R_9

$vec1 = rweibull(t, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_9)$

systeme1

$R_{sys1} = (1-(1-R_1)(1-R_2)(1-R_3))(1-(1-R_4)(1-R_5)(1-R_6))(1-(1-R_7)(1-R_8)(1-R_9))$

R_{sys1}

plot(R_{sys1},type="l",col="black",xlab="le temp",ylab= "la fiabilité",

main="comparaison entre systeme serie-parallèle et systeme parallèle-serie")

systeme2

$R_{sys2} = 1 - (1 - R_1R_2R_3)(1 - R_4R_5R_6)(1 - R_7R_8R_9)$

R_{sys2}

points(R_{sys2},type="l",col="red")

if($R_{sys1} > R_{sys2}$)"le systeme parallèle-serie est plus fiable"

else "le systeme serie-parallèle est plus fiable"

legend("topright",legend=c("Rsys1= systeme parallèle-serie”,

"R_{sys2}= systeme serie-parallèle"), fill=1 :2)

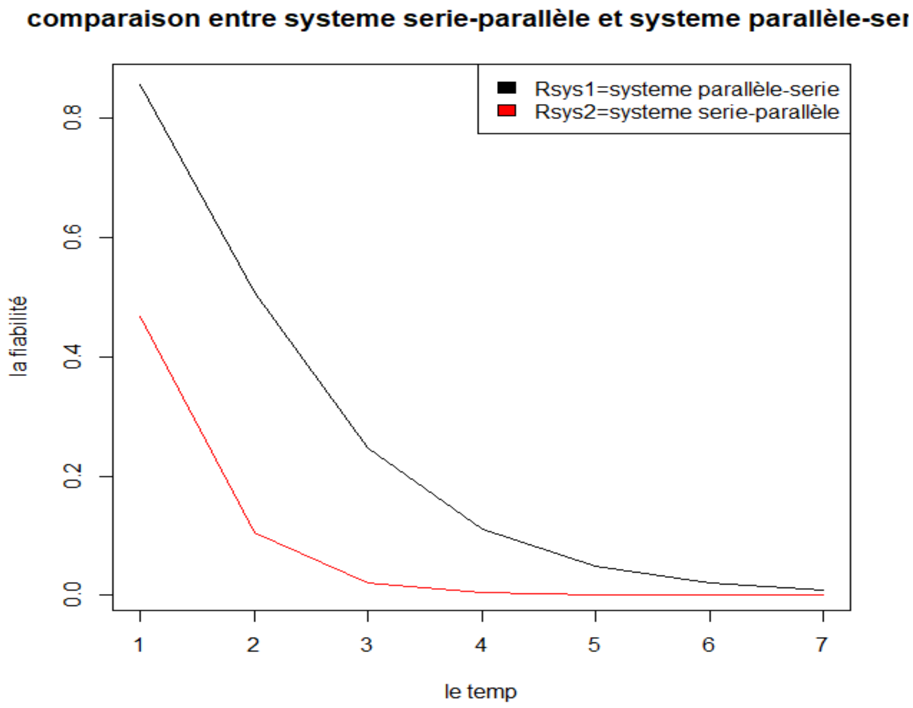

FIGURE 2.18 – Comparaison entre le système série-parallèle et parallèle -série comparaison 3

Commentaire :

Dans ce cas on remarque que le système parallèle-série est plus fiable que le système série-parallèle

Commentaire général :

D'aprés les graphes et l'étude comparative des fiabilités des systèmes mixtes on confirme que le système série-parallèle est souvent plus fiable que le système parallèle-série.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Notre travail est une étude comparative des fiabilités des systèmes mixtes Cette étude a été consacrée entièrement à deux types de systèmes à savoir les systèmes série-parallèle et les systèmes parallèle-série. Comme simulation nous avons comparé la fiabilité du système série-parallèle et système parallèle-série. On remarque que le système série-parallèle est souvent plus fiable que le système parallèle-série.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **A. Aissani,** Modele stockastique de théorie de fiabilité, office des publications universitaire 11-1992.

[2] **A. BUSIC,** Comparaison stochastiques de modèles markovieus, thèse de doctorat, Université de versailles Stain-Quentin, soutenue le 16 Juillet 2007.

[3] **B. Yacart**. Notions de fiabilité et files d'Attente, Centre de publications universitaires, tunis, 2004.

[4] **G. Cocozza Thivent**. Processus stochastique et Fiabilité, Springer, 1997.

[5] **I.G. Macdonald**. Symetric functions and Hall polynomials, Cxford Univ. Press, Oxford, 1979.

[6] **J.L. Bon and E. Paltanea,** Comparaison of order statistics in a Randon sequence to the same statistics with IID variables, academic.

[7] **J.L. Bon,** la fiabilité des systèmes- Méthodes mathématiques, masson, paris, 1995.

[8] **JP. Charbert**. Equations Algèbriques et fonctions symétriques, P.1-36.

[9] **k. B. Misra,** Riliability analysis and prediction, Elsivier Amestrdam-Oxford-Newyork-Tokyo, 1992.

[10] **Macdonald, I.G** Symmetric Functions And Hall polynomials, Clarendon Press, Second edition, Oxford (1995).

[11] **S. Belaloui**. Evaluation de systèmes de fiabilité a configuration complèxe, Thèse Université Mentourie Constantine, 2009.

⁎ *Résumé* ⁎

La théorie de la fiabilité décrit la capacité du système à accomplir la tache dont il est responsable à un moment précis. C'est l'un des piliers de l'ingénierie qui aide à améliorer les systèmes et à réduire les risques de défaillance. Dans ce travail, nous avons fournis une comparaison de la fiabilité d'un système dont les véhicules étaient fixés en série-parallèle par rapport au système dont les composés ont été fixés en parallèle-série, en fonction de l'état.

Mots Clés : Fiabilité, comparaison stochastique, système série-parallèle, système parallèle-série.

⁎ *Abstract* ⁎

Reliability theory describes the ability of the system to complete the taske for which it is responsible at a specified time. It is one of the pillars of engineering that helps improve systems and reduce their chances of failure. In this work, we provided a comparison of the reliability of a system whose vehicles were attached to the series-parallel versus a system whose compounds were connected to the parallel-to-serial depending of the condition.

Keywords : Reliability, stochastic comparison, series-parallel, parallel-to-serial.

ملخص

نظرية الموثوقية تصف قدرة النظام على إتمام المهمة المسؤول عنها في وقت محدد، وهي من إحدى دعائم الهندسة التي تساعد على تحسين الأنظمة وتقليل فرص فشلها.
وفي هذا العمل قدمنا مقارنة لموثوقية نظام ربطة مركباته على التفرع مع التسلسل مقابل نظام ربطة مركباته على التسلسل مع التفرع معتمدين في ذلك على الشرط الكافي.

الكلمات المفتاحية : الموثوقية، المقارنة العشوائية، نظام التفرع مع التسلسل، نظام التسلسل مع التفرع.