



Faculté des Sciences Exacte et Informatique
Département de Mathématique

Mémoire de fin d'études
Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Probabilités et Statistique.

Thème

Sur l'estimation des copules

Présenté par :

♡ Merabti Oulia ♡

Devant le jury :

Président	: Hassen Cheraitia	M.C.B Université Mohammed Seddik Ben Yahia, Jijel
Encadreur	: Djoweyda Ghouil	M.A.A Université Mohammed Seddik Ben Yahia, Jijel
Examineur	: Fatima Yakoubi	M.A.A Université Mohammed Seddik Ben Yahia, Jijel

Dédicace

je remercie Dieu Tout-Puissant qui m'a aidé à accomplir ma note de fin d'études, qui a été mon succès de ses propres mains et je consacre le résultat de mes efforts :

Au regretté professeur **Gherda Mebrouk**, qui restera un souvenir intemporel pendant des générations, que Dieu vous bénisse professeur.

A mes chères parents,

A mon frère et mes sœurs,

A mes proches amies et collègues

Remerciements

A l'échéance de ce projet de fin d'étude, je dois en premier lieu l'énorme remerciement à notre dieu miséricorde, aussi que mes très chers parents pour leurs patience, leurs soutien et le grand sacrifice pour l'aboutissement de mes études.

Aussi mes remerciement les plus sincères à mon encadreur M^{me} **Djoweyda Ghouil**, qui a été toujours disponible, et qui m'a aidé du début à la fin de ce travail.

Aussi au jury à leur tête le président Mr : **Cheraitia Hassen** et l'examinatrice M^{me} **Yakoubi Fatima** pour avoir accepter de lire et juger ce travail.

Mes remerceiments sont adressées aussi à tous mes enseignants de département de mathématiques et plus particulièrement de Probabilités et Statistique, aussi à toute personne qui a contribué de près ou de loin pour mener à bien ce travail.

Table des matières

1	Les copules et les mesures de dépendance	11
1.1	Les mesures de dépendance :	11
1.1.1	Introduction :	11
1.1.2	Le coefficient de corrélation de Pearson :	11
1.1.3	Notion de concordance / discordance	12
1.1.4	Le coefficient de corrélation de Kendall	12
1.1.5	le coefficient de corrélation de Spearman :	13
1.2	La théorie des copules :	13
1.2.1	Définition d'une copule et quelques propriétés :	14
1.2.2	Propriétés des copules	16
1.3	Les bornes de Fréchet-Hoeffding	19
1.4	Densité des copules	20
1.5	Quelques types des copules	20
1.5.1	Les copules elliptiques	20
1.5.2	La famille des copules archimédiennes :	22
2	Estimation des Copules	26
2.1	Méthodes d'estimation d'un paramètre θ	26
2.1.1	Estimation ponctuelle :	27
2.1.2	Estimation par intervalle de confiance	30
2.2	Estimation des copules	32
2.2.1	Estimation paramétrique et semi paramétrique :	32
2.2.2	Estimation non paramétrique :	35

3	Simulation des copules	38
3.1	La méthode des distributions	38
3.1.1	Application sur la copule normale	39
3.2	La méthode des distributions conditionnelles	40
3.2.1	Cas des copules bivariées	40
3.2.2	Application de cet algorithme sur la copule de Frank	40
3.2.3	L'algorithme sous R	41
3.3	Les méthodes adaptées spécifiquement à une copule	42
3.3.1	L'algorithme sous R	43
3.3.2	La méthode des quantiles empiriques	44
3.4	Application numérique	44
	Bibliographie	55

Table des figures

1.1	La copule Gaussienne (à gauche) et sa Densité (à droite)	22
1.2	Densité de la copule de Frank pour $\alpha=2$	23
1.3	Densité de la copule de Gumbel	24
1.4	Densité de la copule de Clayton pour $\theta=2.582$	25
3.1	Nuages des pointes de Copule normale	39
3.2	40
3.3	Nuages des pointes de Copule de Frank	41
3.4	42
3.5	Nuages des pointes de Copule de Clayton	43
3.6	44
3.7	cote en fonction de volume	45
3.8	Distribution de cote	46
3.9	Distribution de volume	46
3.10	Copule de Clayton (à gauche) et Nuage des pointes (à droite)	48
3.11	Copule de Gumbel (à gauche) et Nuage des pointes (à droite)	48
3.12	Copule de Frank (à gauche) et Nuage des pointes (à droite)	48

Liste des tableaux

- 3.1 les données composé de côte et volume 45
- 3.2 Les mesure de dépendance 46
- 3.3 L'estimation des copules 47

Résumé

La modélisation de la dépendance entre variables aléatoires est une question délicate mais essentielle dans les applications de divers domaines comme la finance, l'hydrologique, l'actuariat, ...

La notion des copules est la meilleure placée pour modéliser cette dépendance, car elle se résume pas en un coefficient de corrélation comme dans le cas des vecteurs gaussiens, et aussi elle ne prend pas en compte les lois marginales des variables aléatoires.

Le but de ce mémoire est de mettre un accent sur la question d'estimation des copules. Nous avons présenté différentes méthodes d'estimation des copules à savoir la méthode du maximum de vraisemblance, du pseudo maximum de vraisemblance et la méthode d'inférence des marginales.

Comme la simulation est une solution magique lorsque les méthodes analytiques d'estimation ne sont pas efficaces, nous avons mis un accent particulier sur cette tâche dans le troisième chapitre de ce mémoire.

Introduction

La théorie des copules est une théorie relativement nouvelle dans le monde des probabilités et statistique. Le concept de copule permet de coupler les lois marginales des variables afin d'obtenir la loi jointe. Mesurer et modéliser la dépendance a été introduit à la fin des années 1950, et 1959 précisément, par un mathématicien américain du nom de Abe Sklar, professeur de mathématiques appliquées à l'Institut de technologies de l'Illinois. Il a toutefois fallu attendre plusieurs années pour que cette idée soit utilisée de façon beaucoup plus régulière en statistique. En effet, c'est dans les années 1970 que certains mathématiciens comme Kimeldorf, Sampson et Deheuvels ont décidé d'utiliser des copules dans leurs travaux de recherche.

L'étude systématique des copules, et le développement d'une théorie s'y intéressant débutent au milieu des années 1980 avec Christian Genest et son équipe de recherche. Fait intéressant, Christian Genest est un mathématicien québécois qui est à la fois professeur à l'université McGill à Montréal. À la fin des années 1990, de nombreux livres paraissent sur le sujet et la théorie prend de l'ampleur, notamment grâce au nombre grandissant de gens qui s'y intéressent.

Parmi les nouvelles recherches sur les copules, on peut citer l'estimation des paramètres d'une copule dans un cadre paramétrique, ou l'estimation de la copulle elle-même dans le cadre de l'estimation non paramétrique. Dans ce mémoire nous allons présenter les différentes approches classiques de l'estimation des copules.

Ainsi ce travail est organisé comme suit : Le premier chapitre contient deux principaux volets : Le premier volet est une introduction mathématique à la théorie des copules ; à savoir : les définitions de base des copules, leurs propriétés, ainsi que les principaux théorèmes liés à cette théorie, en particulier le théorème de Sklar. De même on y retrouve quelque exemples de familles paramétriques de copules les plus utilisés so.

Dans le deuxième volet nous présentons l'aspect des mesures d'association : la mesure de concordance, la mesure de dépendance en forme de copule , telle que le rho de Spearman et le tau de kendall. le deuxième chapitre réparti aussi en deux sections, la première section est consacrée à l'estimation comme important volet de la statistique Inférentielle, dans la théorie de l'estimation on étudie les propriétés des estimateurs ainsi que les méthodes générales classique comme celle du "Maximum de Vraisemblance". Dans la deuxième section on donne les différentes méthodes d'estimation paramétriques, semi paramétriques et non paramétrique pour l'estimation des copules.

Enfin le troisième chapitre est consacré à la question de la simulation des copules comme importante solution d'estimation lorsque les méthodes analytiques ne peuvent pas donner un résultat. Dans un premier lieu nous allons donner quelques méthodes pour simuler une copule sans avoir des données réelles, après nous donnons une application numérique des copules en hydrologique dont on modélise les données par différentes copules, on calcule les mesures de dépendance et enfin on estime le paramètre de la copule pour chaque type. Le traitement des données se fera informatiquement en utilisant le logiciel "R".

Les copules et les mesures de dépendance

1.1 Les mesures de dépendance :

1.1.1 Introduction :

L'étude de la dépendance n'a pas cessé d'intéresser les statisticiens. Une telle étude s'était restreinte pour longtemps aux distributions normales pour leurs propriétés remarquables surtout être internes par l'addition, l'équivalence entre l'indépendance et la non-corrélation et la gaussienneté de leurs marginales, cependant elles présentent des inconvénients, par exemple elle n'attribuent d'importance au queux des marginales qui peuvent présenter un très grand risque en cas de modélisation de risques. Une alternative de construction de fonction de répartition multivariées est basée sur les copules qui permettent un large choix de marginales et de type de dépendance.

1.1.2 Le coefficient de corrélation de Pearson :

le coefficient de corrélation de Pearson, également appelée le coefficient de corrélation linéaire, est la première mesure de dépendance à avoir été utilisée.

la covariance est donnée par : $\text{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X) E(Y)$

Elle mesure le surcroît de variabilité (ou la diminution) de la somme de deux variables aléatoires par rapport à la somme de leur variance. Elle nous renseigne donc par son signe sur le sens de la covariation entre X et Y

le coefficient de corrélation linéaire est une version normée, et a ainsi l'avantage d'être sans dimension

le coefficient de corrélation de pearson est définie par :

$$\rho(X, Y) = \frac{COV(X, Y)}{\sqrt{V(x)V(y)}}$$

plus ce coefficient est grand en valeur absolue, plus la dépendance entre les variables est forte, par contre, ce n'est pas une mesure de concordance

le coefficient de corrélation de pearson est tout à fait adapté lorsque l'on étudie les distribution normales ou de student multivariées. Cependant, ces distribution peut recourir aux coefficients de corrélation de rang, comme le tau de kendall et le rho de spearman. Il pourrait être nécessaire de définir la notions de concordance et de discordance .

1.1.3 Notion de concordance / discordance

Soient (x, y) et (x', y') deux réalisation d'un vecteur aléatoire continue (X, Y)

- (x, y) et (x', y') sont concordantes si $(x-x')(y-y') > 0$, autrement dit si $(x < x' \text{ et } y < y')$ ou $(x > x' \text{ et } y > y')$
- (x, y) et (x', y') sont discordantes si $(x-x')(y-y') < 0$, autrement dit si $(x < x' \text{ et } y > y')$ ou $(x > x' \text{ et } y < y')$

1.1.4 Le coefficient de corrélation de Kendall

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire et (X', Y') un vecteur en tout point identique au premier, le tau de kendall se définit comme la différence entre la probabilité de concordance et la probabilité de discordance :

$$\tau(X, Y) = P((X - X')(Y - Y') > 0) - P((X - X')(Y - Y') < 0)$$

le tau de kendall compare ainsi la probabilité que deux couples indépendants mais de même loi soient en concordance et la probabilité qu'il soient en discordance. Aussi, un τ positif signifiera qu'en probabilité, les couples considérés sont plus souvent en concordance qu'en discordance si (X, Y) a pour copule C , alors le tau de kendall s'écrit :

$$\tau(X, Y) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) \cdot C(u, v) du dv = 4E[C(U, V)] - 1 \text{ ou } U, V \sim [0, 1]$$

on peut construire un estimateur du tau de kendall à partir d'un échantillon $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ de (X, Y) de la manière suivante :

$$\hat{\tau}(X, Y) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \text{sign}[(x_i - x_j)(y_i - y_j)]$$

$$\text{ou } \text{sign}(z) = \begin{cases} 1, & \text{si } z \geq 0 \\ -1, & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

le tau de kendall est une mesure de concordance.

1.1.5 le coefficient de corrélation de Spearman :

Pour calculer ce coefficient, on prend les deux paires (X, Y) et (X', Y') identiques définies dans le paragraphes précédent, [6] et on rajoute une troisième paire (X^*, Y^*) qui leur est identique

Étant donné ces couples, le rho de spearman est défini par :

$$\rho_s(X, Y) = P((X - X')(Y - Y^*) > 0) - P((X - X')(Y - Y^*) < 0)$$

si on a un échantillon $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ de réalisations de (X, Y) , on peut construire un estimateur du rho de Spearman :

$$\hat{\rho}_s = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})(S_i - \bar{S})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (S_i - \bar{S})^2}}$$

1.2 La théorie des copules :

soit (X, Y) un couple de variable aléatoire dont la fonction de répartition conjointe est définie en tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$

De plus, cette copule est unique lorsque les marges F et G sont continues

les lois marginales des variables X et Y sont obtenus et notées comme suit :

$$F(x) = P(X \leq x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} H(x, y)$$

$$G(y) = P(Y \leq y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} H(x, y)$$

on rappelle que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ssi :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = F(x)G(y)$$

1.2.1 Définition d'une copule et quelques propriétés :

Définition :

on appelle copule bivariée toute fonction C de $I^2 \rightarrow I$ qui possède les propriétés suivantes : [13]

1- La copule C est attachée, c-à-d :

$$\forall (u, v) \in I^2, C(u, 0) = C(0, v) = 0$$

2- Les marges sont uniformes, c-à-d :

$$\forall (u, v) \in I^2, C(u, 1) = u \text{ et } C(1, v) = v$$

3- La copule C est 2-croissante, c-à-d :

$\forall (u_1, u_2), (v_1, v_2) \in I^2$ avec $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$ on a :

$$C(u_1, v_1) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_2, v_2) \geq 0$$

Cette définition signifie que C est une distribution des marginales uniformes

Soient U_1, U_2 deux variables aléatoires uniformes, alors

$$C(u_1, u_2) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2)$$

.La propriété (1) implique que :

$$P(U_1 \leq 0, U_2 \leq u_2) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq 0) = 0$$

.la propriété (2) implique que :

$$P(U_1 \leq 1, U_2 \leq u_2) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq 1) = u$$

C est une distribution de probabilité ce qui implique que :

$$P(u_1 \leq U_1 \leq v_1, u_2 \leq U_2 \leq v_2) = C(u_1, v_1) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_2, v_2)$$

Exemples 1.2.1.

1. Copule min :

$\forall (u, v) \in I^2$: la fonction $M(u, v) = \min(u, v)$ définit une copule, en effet :

$\forall (u, v) \in I^2, \min(u, 0) = \min(0, v) = 0 \Rightarrow (1)$ est vérifiée

$\forall u \in I, \min(u, 1) = u$ et $\forall v \in I, \min(1, v) = v \Rightarrow (2)$ est vérifiée

$\forall (u_1, u_2), (v_1, v_2) \in I^2$, avec $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$

$\min(u_2, v_2) \leq \min(u_2, v_1)$ et $\min(u_1, v_2) \leq \min(u_1, v_1) \Rightarrow (3)$ est vérifiée

D'où M est une copule

2. Copule max :

$\forall (u, v) \in I^2$, la fonction $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ définit une copule.

3. Copule d'indépendance :

on a aussi $\forall (u, v) \in I^2$, $\Pi(u, v) = uv$ définit une copule appelé la copule d'indépendance

Théorème 1.2.1. (Théorème de Sklar)

Soit H une fonction de distribution bivariable ayant comme fonction de distribution marginale F et G , alors il existe une copule C telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $H(x, y) = C(F(x), G(y))$

Démonstration 1.2.1.

Pour démontrer ce théorème, voir [4] : on pose $U = F(X)$ et $V = G(Y)$

on a

$$\begin{aligned} H(x, y) &= P(X \leq x, Y \leq y) \\ &= P(F^{-1}(U) \leq x, G^{-1}(V) \leq y) \\ &= P(U \leq F(x), V \leq G(y)) \\ &= C(F(x), G(y)) \end{aligned}$$

Théorème 1.2.2.

Soit H la fonction de répartition bivariable des marginales F et G . La copule C associée à H est donnée par

$$\forall (u, v) \in I^2 : C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$$

Démonstration 1.2.2.

En appliquant le théorème de Sklar et en posant $U = F(x)$ et $V = G(y)$, on trouve que

$$\begin{aligned} C(u, v) &= P(U \leq u, V \leq v) \\ &= P(F(X) \leq u, G(Y) \leq v) \\ &= P(X \leq F^{-1}(u), Y \leq G^{-1}(v)) \\ &= H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) \end{aligned}$$

Si F et G sont continues, alors C est unique. Réciproquement, si C est la copule des variables aléatoires de X et Y . Alors H est une fonction de répartition jointe avec des marginales F et G respectivement .

Le théorème de Sklar suggère donc de modéliser la loi jointe d'un couple de variable aléatoire en deux étapes :

- Modélisation des lois marginales.
- Modélisation de la structure de dépendance après transformation des lois marginales en lois uniformes.

Exemple 1.2.1.

Soit H une fonction de répartition de paramètre $\theta \geq 1$ définie comme suit en tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$H(x, y) = \exp(-(\exp^{-\theta x} + \exp^{-\theta y}))^{1/\theta}$$

les marges sont alors données en tous $x, y \in \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} H(x, y) = \exp(-e^{-x})$$

$$G(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} H(x, y) = \exp(-e^{-y})$$

il s'ensuit que pour tous $u, v \in (0, 1)$, on a

$$F^{-1}(u) = -\ln(-\ln(u)), \quad G^{-1}(v) = -\ln(-\ln(v))$$

La copule correspondante donc définie en tous $u, v \in (0, 1)$ par

$$C(u, v) = \exp[-(\ln(1/v)^\theta) + \ln(1/v)^\theta]^{1/\theta}$$

Toute copule est continue, mais pas nécessairement absolument continue, lorsqu'une copule bivariée admet une densité, elle peut être calculée comme suit

Définition 1.2.1. (Inverse généralisé)

Soit F une fonction de distribution. L'inverse généralisé $F^{[-1]}$ de F est une fonction définie de la façon suivante : $F^{[-1]} = \inf(x/F(x) \geq t) = \sup(x/F(x) \leq t)$

– Si la fonction F est strictement croissante, alors la notion de l'inverse généralisé coïncide avec la notion d'inverse ou de réciproque c'est-à-dire $F^{[-1]} = F^{-1}$

1.2.2 Propriétés des copules

Dans cette section, nous allons présenter les propriétés principales d'une copule

1. la continuité :

Théorème 1.2.3. Soit C une Copule bivariées, $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$, avec $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$ on a :

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|$$

2. la différentiabilité :

Théorème 1.2.4. Soit C une Copule bivariée, $\forall u, v \in I$

Les dérivés partielle :

$$u \mapsto \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} \text{ et } v \mapsto \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} \text{ existent p.s et } 0 \leq \frac{\partial C(u, v)}{\partial u_j} \leq 1$$

Les fonctions de la forme $\frac{\partial C(u, v)}{\partial u_j}$ sont bien définies est décroissantes sur I p.s

Exemple 1.2.2.

Les dérivés partielle de la Copule $W(u, v) = \max(u+v-1, 0)$ existe à chaque fois $u+v-1 \neq 0$ c-à-d $v \neq 1-u$.

Depuis $\max(u+v-1, 0) = u+v-1$ à chaque fois que $v > 1-u$, elle sont :

$$\frac{\partial C(u, v)}{\partial u} = \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} = \begin{cases} 0, \text{ si } : v < 1-u \\ 1, \text{ si } : v > 1-u \end{cases}$$

Si $\frac{\partial C(u, v)}{\partial v}$ et $\frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}$ sont continues sur $[0, 1]$ et $\frac{\partial C(u, v)}{\partial u}$ existe $\forall u \in [0, 1]$ quand $v=0$, alors $\frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}$ et $\frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial v \partial u}$ existent dans $[0, 1]^2$ et $\frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}$

3. la convexité et concavité :

Théorème 1.2.5.

-on dit que C est **convexe** si

$$C(\lambda a_1 + (1-\lambda)b_1, \lambda a_2 + (1-\lambda)b_2) \leq \lambda C(a_1, a_2) + (1-\lambda)C(b_1, b_2)$$

-on dit que C est **concave** si

$$C(\lambda a_1 + (1-\lambda)b_1, \lambda a_2 + (1-\lambda)b_2) \geq \lambda C(a_1, a_2) + (1-\lambda)C(b_1, b_2)$$

4. La relation d'ordre partiel sur les copules

Définition 1.2.2. Soient C_1, C_2 deux copules, on dit que C_1 est plus petit que C_2 et on note : $C_1 < C_2$ Si $C_1(u, v) \leq C_2(u, v), \forall (u, v) \in [0, 1]$

Cette relation est une relation d'ordre partiel [16]

5. **symétrie** Soit X, Y deux variables aléatoires continue de fonction de répartition jointe H et de marginale F et G , et soit C la copule associée, on dit que X et Y sont échangeable ssi $F=G$ et $\forall (u, v) \in I^2$, Si $C(u, v) = C(v, u)$ on dit que C est symétrie

6. **Invariance fonctionnelle**

L'un des théorème essentiels à la théorie des Copules est celui de l'invariance par transformations strictement croissantes.

soient deux variables aléatoires X, Y de marges F, G et de copule C_{XY} , si α et β deux fonctions strictement croissantes des variables aléatoires, alors :

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)} = C_{XY}$$

Démonstration 1.2.3.

On peut démontrer ce théorème facilement à l'aide de lois de probabilités, comme suit :

Soit F_1, G_1, F_2, G_2 les fonctions de répartition de $X, Y, \alpha(X)$ et $\beta(Y)$ respectivement.

les fonctions α et β sont strictement croissantes, alors :

$$F_2 = P(\alpha(X) \leq x) = P(X \leq \alpha^{-1}(x)) = F_1(\alpha^{-1}(x))$$

$$\text{aussi } G_2 = P(\beta(Y) \leq y) = P(Y \leq \beta^{-1}(y)) = G_1(\beta^{-1}(y))$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} C_{\alpha(X)\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) &= P(\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y) \\ &= P(X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)) \\ &= C_{\alpha(X), \beta(Y)}(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y))) \\ &= C_{X,Y}(F_2(x), G_2(y)) \end{aligned}$$

Par Exemple, nous avons

$$\begin{aligned} C_{XY} &= C_{\ln X(Y)} \\ &= C_{\ln X \ln Y} \\ &= C_{X \exp(Y)} \\ &= C_{\sqrt{X} \exp(Y)} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Une transformation croissante ne modifie donc pas la Copule, mais seulement les lois marginales.

7. L'indépendance :

Si X et Y sont des variables aléatoires continues, alors X, Y sont indépendantes si et seulement si $C_{XY} = \Pi$ avec $\Pi(u, v) = uv$ pour tout $u, v \in I$

En effet, Si X et Y sont indépendantes alors :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, H(x, y) = F(x)G(y)$$

$$\forall u, v \in I,$$

$$\begin{aligned} C_{XY}(u, v) &= H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) \\ &= F(F^{-1}(u))G(G^{-1}(v)) \\ &= uv \\ &= \Pi(u, v) \end{aligned}$$

si $C_{XY} = \Pi$ alors $\forall x, y \in I$,

$$C_{XY}(u, v) = \Pi(u, v) = uv \Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}, H(x, y) = C_{XY}(F(x), G(y)) = \Pi(F(x), G(y)) = F(x)G(y)$$

les variables aléatoires sont donc indépendantes

1.3 Les bornes de Fréchet-Hoeffding

Tout Copule C admet une borne inférieure et une borne supérieure déterminée par le théorème suivantes : [12]

Théorème 1.3.1. (Fréchet-Hoeffding)

Soit C une Copule alors : $W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v), \forall u, v \in I$ telle que : $W(u, v) = \max(u+v-1, 0)$ et $M(u, v) = \min(u, v)$ représentent les bornes inférieure et supérieure de Fréchet-Hoeffding

Démonstration 1.3.1.

Soient deux événements quelconques A et B . On a [15]

$$P(A \cap B) \leq P(A) \text{ et } P(A \cap B) \leq P(B)$$

Par conséquent,

$$P(A \cap B) \leq \min \{P(A), P(B)\}$$

étant donné $x, y \in \mathbb{R}$, appliquons cette inégalité aux événements $A = X \leq x$ et $B = Y \leq y$. On trouve alors que

$$P(X \leq x, Y \leq y) \leq \min \{P(X \leq x), P(Y \leq y)\},$$

ce qui revient à dire que $H(x, y) \leq \min \{F(x), G(y)\}$, tel qu'annoncé.

Par ailleurs, en utilisant les De Morgan, on trouve que

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= 1 - P(A^c \cup B^c) \\ &= 1 - P(A^c) + P(B^c) - P(A^c \cap B^c) \\ &= P(A) + P(B) - 1 + P(A^c \cap B^c) \\ &\geq P(A) + P(B) - 1 \end{aligned}$$

Sachant que $P(A \cap B) \geq 0$, on a donc

$$P(A \cap B) \geq \max\{P(A) + P(B) - 1, 0\}$$

Dans le cas particulier ou $A = \{X \leq x\}$ et $B = \{Y \leq y\}$, on déduit que

$$H(x, y) \geq \{\max\{F(x) + G(y) - 1, 0\}\}$$

ce qui est le résultat annoncé

1.4 Densité des copules

Si les fonctions de répartition marginales F_1 , F_2 et la Copule C possèdent les densités respectives f_1 , f_2 et c , alors la densité conjointe f associée à la fonction de répartition F prend la forme suivante :[1]

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y)c(F_1(x), F_2(y))$$

où

$$f_1(x) = \frac{d}{dx}F_1(x), \quad f_2(y) = \frac{d}{dy}F_2(y) \quad \text{et} \quad c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}$$

Si la fonction de répartition conjointe H est absolument continue, en utilisant le théorème de SKlar nous pouvons exprimer la densité d'un vecteur aléatoire (X, Y) en fonction de densité de sa Copule et de ses fonctions de répartition marginale F et G , ainsi que les fonctions de densités f et g par : $h(x, y) = c(F(x), G(y))f(x)g(y)$.

1.5 Quelques types des copules

1.5.1 Les copules elliptiques

Les Copules elliptiques sont les copules aux distributions elliptiques multivariées.

Définition 1.5.1. *On dira que X suit une distribution elliptique si seulement si on peut écrire*

$$X = \mu + RAU$$

où

$\mu = (u_1, \dots, u_n)$ est moyenne

R une variable aléatoire positive indépendante de U

A une matrice de dimension $n \times n$ telle que $\Sigma = AA^T$ est non singulière

Σ une matrice de forme (matrice de variance-covariance)

U une variable aléatoire uniformément distribuée sur la sphère unité de \mathbb{R}^n

la fonction de densité d'une distribution elliptique, si elle existe, est donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, par $h_g(x) = |\Sigma|^{-1/2} g((x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu))$ [7]

Définition 1.5.2. *On appelle copule elliptique toute copule de la forme*

$\forall u, v \in I$

$C_\theta(u, v) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \left(-\frac{s^2 - 2\theta st + t^2}{2(1-\theta^2)} \right) ds dt$ où $\theta \in [-1, 1]$, et ϕ^{-1} est l'inverse de distribution Gaussienne univariée

Copule de student :

Dans le cas univariée, la fonction de répartition de student est définie par :[14]

$$t_v(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{\Pi v(v+2)}} \left(1 + \frac{s^2}{v}\right)^{\frac{-v+1}{2}} ds$$

telle que Γ est la fonction d'Euler

Dans le cas bivarié soit $r \in [-1, 1]$, alors la fonction de répartition bivariée est :

$$t_{r,v}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{1}{2\Pi\sqrt{1-r^2}} \left(1 + \frac{s^2 + t^2 - 2rst}{v(1-r^2)}\right)^{\frac{-v+2}{2}} dsdt$$

Définition 1.5.3. *la Copule de student est une Copule paramétrique, paramétrée par le coefficient de corrélation linéaire r et le degré de liberté v , cette copule est définie par :*

$$C_{r,v}^t(u, v) = \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(v)} \frac{1}{2\Pi\sqrt{1-r^2}} \left(1 + \frac{s^2 + t^2 - 2rst}{v(1-r^2)}\right)^{\frac{-v+2}{2}} dsdt$$

Remarque 1.5.1.

La copule gaussienne et la copule de student appartient à la famille de copule elliptique

Si le degré de liberté $v \rightarrow \infty$, alors la copule de student converge vers la copule gaussienne.[3]

copule gaussienne :

la Copule gaussienne de deux v.a X,Y gaussienne de moyenne μ et de matrice de covariance $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{bmatrix}$ est définie par $C_r^\Phi(u, v) = \Phi_r(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))$ telle que Φ_r est la fonction de répartition jointe de la loi normale bivariée, de coefficient de corrélation linéaire $r \in [-1, 1]$, Φ est la fonction de la loi normale standard, par suit :

$$\Phi_r(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\Pi\sqrt{1-r_{X,Y}^2}} \exp\left(\frac{2r_{X,Y}st - s^2 - t^2}{1-r_{X,Y}^2}\right) dsdt$$

Cette copule est paramétrée par le coefficient de corrélation linéaire r

Si $r=0$ alors $C_r^\Phi(u, v) = \Pi$

Si $r=-1$ alors $C_r^\Phi(u, v) = w(u, v)$

Si $r=1$ alors $C_r^\Phi(u, v) = M(u, v)$

[16]

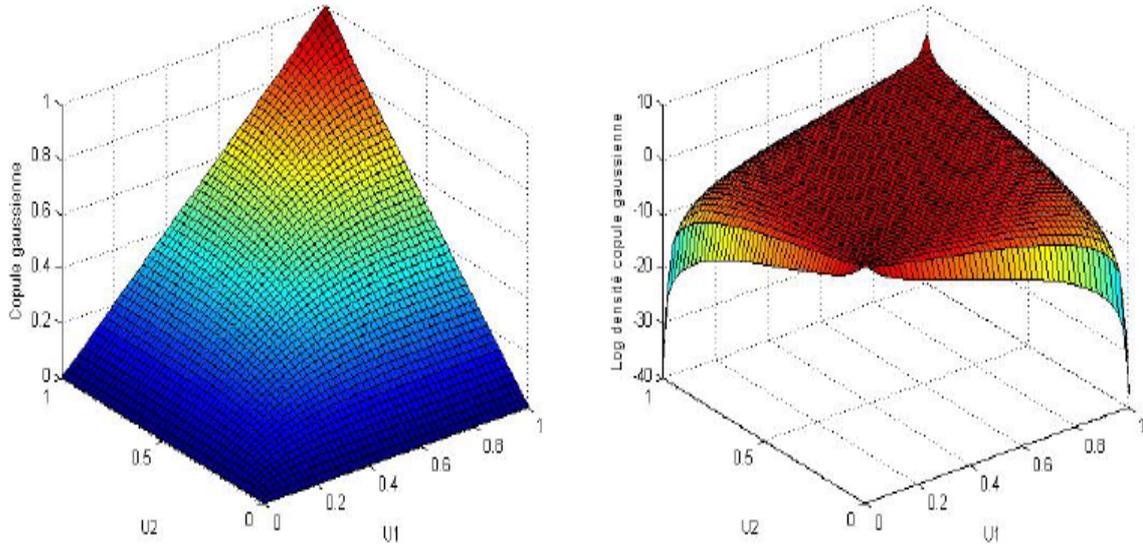


FIGURE 1.1 – La copule Gaussienne (à gauche) et sa Densité (à droite)

Copule Farlie-Gumbel-Morgenstern :

la copule Farlie-Gumbel-Morgenstern (F-G-M) est définie pour un paramètre de dépendance $\alpha \in [-1,1]$ comme suit : $C_\alpha(u_1, u_2) = u_1u_2 + \alpha u_1u_2\bar{u}_1\bar{u}_2$ telle que $\bar{u}_j = 1 - u_j, j = 1, 2$
Dont la densité est :

$$c_\alpha(u_1, u_2) = 1 + \alpha(1 - 2u_1 - 2u_2 + 4u_1u_2)$$

aussi Joe(1997) introduit la famille de Copule F-G-M multi-paramétrique pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ comme suit :

$$C_\alpha(u_1u_2) = u_1u_2 + \sum_{j=1}^n \alpha_j (u_1, u_2)^{[j/2]+1} (\bar{u}_1\bar{u}_2)^{[j/2+1/2]}$$

ou [t] est la partie entière de t et pour r=2 on obtient la copule avec deux paramètre :

$$C_{\alpha_1, \alpha_2}(u_1, u_2) = u_1u_2(1 + \alpha_1\bar{u}_1\bar{u}_2 + \alpha_2u_1u_2\bar{u}_1\bar{u}_2)$$

telle que les paramètre (α_1, α_2) sont définie dans la région :

$$R = \{(\alpha_1, \alpha_2), | \alpha_1 | \leq 1, \alpha_1 + \alpha_2 \geq -1, \alpha_2 \leq 1/2[3 - \alpha_1 + (9 - 6\alpha_1 - 3\alpha_1^2)^{1/2}]\}$$

1.5.2 La famille des copules archimédiennes :

Cette section est consacré à une classe générale de Copule appelées Copules archimédiennes, introduite par Genest-Mackay(1986)

Définition 1.5.4. On dit qu'une Copule bidimensionnelle est archimédienne si elle s'exprime en tout $u, v \in (0, 1)$ sous la forme

$$C_{\Phi}(u, v) = \Phi^{-1}\{\Phi(u) + \Phi(v)\}$$

en terme d'une fonction $\Phi : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ décroissante et convexe, continue telle que $\Phi(1) = 0$. Cette fonction est appelée un générateur de C_{Φ}

1. Copule de Frank(1979) :

Cette copule est symétrique de paramètre de dépendance $\alpha \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, [8] elle est définie par :

$$C_{\alpha}^{Fr}(u, v) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{(e^{-u\alpha} - 1)(e^{-v\alpha} - 1)}{e^{-\alpha} - 1} \right)$$

De générateur et de densité : $\varphi_{\alpha}(t) = -\ln \left[\frac{\exp(-\alpha t)}{\exp(-\alpha) - 1} \right]$

$$C_{\alpha}^{Fr}(u, v) = \frac{(\alpha - 1) \ln \alpha^{u+v}}{(\alpha - 1 + (\alpha^u - 1)(\alpha^v - 1))^2}$$

si $\alpha \rightarrow 0$ alors $C_{\alpha}^{Fr} \rightarrow \Pi$

si $\alpha \rightarrow +\infty$ alors $C_{\alpha}^{Fr} \rightarrow M$

si $\alpha \rightarrow -\infty$ alors $C_{\alpha}^{Fr} \rightarrow W$

[22]

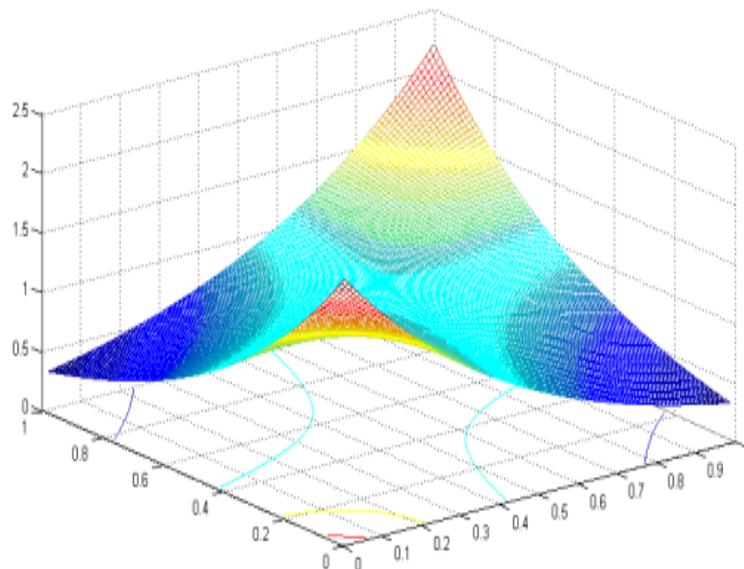


FIGURE 1.2 – Densité de la copule de Frank pour $\alpha=2$

2. Copule de Gumbul (1960) :

c'est une copule asymétrique, elle est définie par [9] :

$$C_{\alpha}^{Gum}(u, v) = \exp\{-(-\ln u)^{\alpha} + (-\ln v)^{\alpha}\}^{1/\alpha}$$

et dont le générateur est : $\varphi_{\alpha}(t) = (-\ln t)^{\alpha}$

ou le paramètre de dépendance $\alpha \in [1, \infty[$, [9], [11] et [19], nous avons :

si $\alpha \rightarrow 1$ alors $C_{\alpha}^{Gum} \rightarrow \Pi$

si $\alpha \rightarrow +\infty$ alors $C_{\alpha}^{Gum} \rightarrow M$

[23]

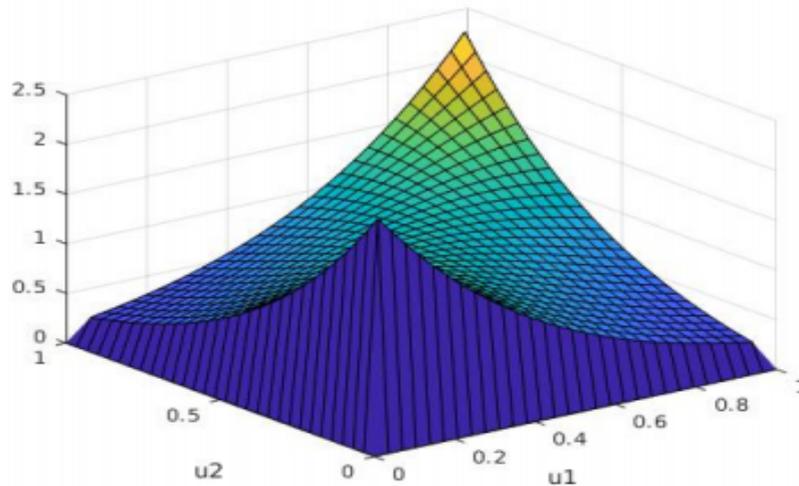


FIGURE 1.3 – Densité de la copule de Gumbel

3. Copule de Clayton (1978) :

La copule de Clayton s'appelle aussi la copule de cook et johnson (1981) [6], et d'abord étudié par kimeldorf et Sampson (1975)

Elle définie par : $C_{\alpha}^{cla}(u, v) = (u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1)^{-\frac{1}{\alpha}}$ ou le générateur et le pseudo inverse sont :

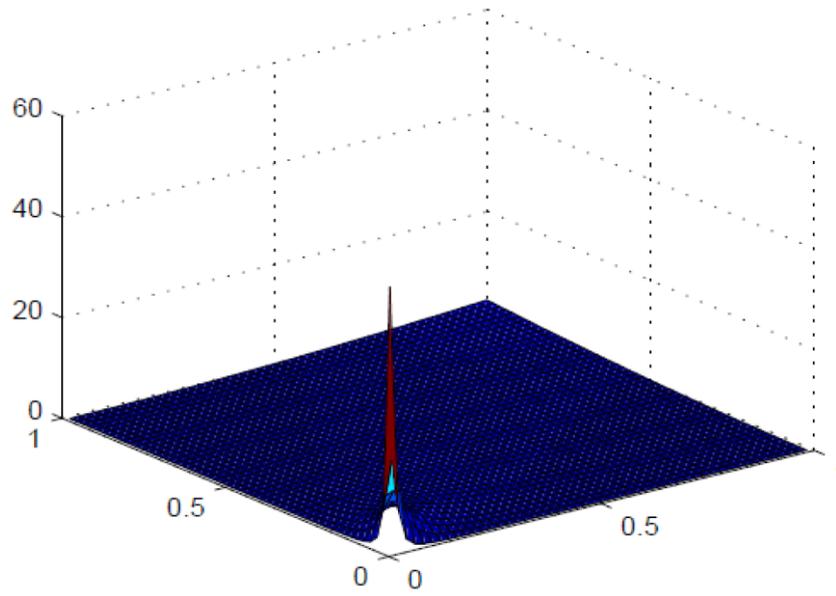
$$\varphi_{\alpha}(t) = \frac{1}{\alpha}(t^{-\alpha} - 1)$$

$$\implies \varphi_{\alpha}^{-1}(t) = (t + 1)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

avec le paramètre de dépendance $\alpha \in [-1, 0[\cup]0, +\infty[$

Si le paramètre $\alpha \rightarrow 0$ alors les marginales sont indépendantes

Si $\alpha \rightarrow +\infty$ alors on obtient la copule de borne supérieure de Fréchet-Hoeffding M

FIGURE 1.4 – Densité de la copule de Clayton pour $\theta=2.582$

Estimation des Copules

Dans la théorie statistique, comme de probabilité, le hasard intervient fortement. Mais dans la théorie de probabilité, on suppose que la loi connue précisément et on cherche à donner les caractéristiques de la variable qui suit cette loi.

L'objectif de la statistique est le connaître : à partir de la connaissance de la variable, que peut on dire de la loi de cette variable.

L'estimation est une opération qui s'intéresse à quantifier l'inconnu dans le modèle.

Si la loi de la variable aléatoire est connue mais paramétrée par un paramètre inconnu, ou plus on cherche donc à estimer ce paramètre et on parle alors de l'estimation paramétrique. En revanche, on parle de l'estimation non paramétrique si la loi de la variable aléatoire elle même est inconnue.

Dans ce chapitre, nous allons donner les méthodes principales pour estimer un paramètre θ qui est l'intérêt de la première partie du chapitre. Puis dans la deuxième partie, on va s'intéresser à l'estimation des copules en donnant aussi que quelques méthodes principales.

Estimer un paramètre c'est en chercher une valeur approchée en se basant sur les résultats obtenue dans un échantillon.

2.1 Méthodes d'estimation d'un paramètre θ

Il existe deux types d'estimation : Estimation ponctuelle et par intervalle

L'estimation d'un paramètre quelconque θ est ponctuelle si l'on associe une seule valeur à l'estimateur $\hat{\theta}$ à partir des données observables sur échantillon aléatoire.

L'estimation par intervalle associe à un échantillon aléatoire, un intervalle $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ qui recouvre θ avec une certaine probabilité.

2.1.1 Estimation ponctuelle :

Dans ce cas on estime le paramètre de la population avec un seul nombre.

Définition 2.1.1.

Un n -échantillon de X est un n -uplet (X_1, \dots, X_n) tel que les X_i ont la même loi que X et sont indépendantes.

Une réalisation de l'échantillon est alors un n -uplet (x_1, \dots, x_n) de valeurs prises par l'échantillon.

Définition 2.1.2.

Une statistique T de l'échantillon est la variable aléatoire :

$$T = \varphi(X_1, \dots, X_n)$$

où φ est une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}

Exemples 2.1.1.

$$X_n = \max(X_1, \dots, X_n), \quad X_1 = \min(X_1, \dots, X_n)$$

Définition 2.1.3.

Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) , un n -échantillon *i.i.d* de la variables aléatoires X (discrète ou continue) et θ un paramètre associé à la loi de probabilité suivi par X , un estimateur du paramètre θ est la v.a $\hat{\theta} = f(X_1, \dots, X_n)$

Une estimation est la valeur de l'estimateur correspondant a une réalisation de l'échantillon.

Propriétés d'un estimateur**Estimateur sans biais :**

. le biais d'un estimateur noté $b(\hat{\theta})$ est la différence moyenne entre sa valeur et celle du paramètre qu'il estime, et est définie comme suit :

$$b(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta) = E(\hat{\theta}) - E(\theta) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

. si $b(\hat{\theta}) = 0$ i.e $E(\hat{\theta}) = \theta$ on dit que l'estimateur $\hat{\theta}$ est sans biais.

. $\hat{\theta}_n$ est asymptotiquement sans biais si $\lim E[\hat{\theta}_n] = \theta_0$

Estimateur convergent :

Un estimateur $\hat{\theta}$ est convergent en probabilité s'il tends vers la valeur réelle du paramètre θ

$$\forall \epsilon > 0, P((|\hat{\theta} - \theta|) > \epsilon) \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

Ceci équivaut à dire qu'en limite $\hat{\theta} \rightarrow \theta$ lorsque $n \rightarrow \infty$

Propriété 2.1.1. *Un estimateur $\hat{\theta}$ de θ asymptotiquement sans biais et dont la variance tend vers 0 est convergent*

Théorème 2.1.1. *Un estimateur $\hat{\theta}$ dont l'espérance mathématique tend vers θ et la variance tend vers 0 est convergent pour θ ceci résulte de la conséquence de convergence en probabilité. Ainsi \bar{X}_n, S_n^2 sont des estimateurs convergents de $E[X]$ et $Var[X]$.*

Estimateur exhaustif :

On dit que $\hat{\theta}$ est un estimateur exhaustif pour $\theta \in \Theta$ si la loi conditionnelle de (X_1, \dots, X_n) sachant $\hat{\theta}$ ne dépend pas de θ

Estimateur efficace

Un estimateur sans biais est efficace si sa variance est la plus petite parmi les autres estimateurs sans biais. Si deux estimateurs sont convergents et sans biais, le plus efficace est celui qui a la variance la plus faible car ses valeurs sont en moyenne plus proches de la quantité estimée. i.e. $V(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2$ est minimale.

Théorème 2.1.2. *(Inégalité de Gramer-Rao au de Fréchet)*

Soit $\hat{\theta}$ un estimateur sans biais pour θ . Sous certaines conditions de régularité on a nécessairement pour tout $\theta \in \Theta : V_{\theta}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{nI(\theta)}$ ou $I(\theta)$ est l'information de Fisher, qui vaut :

$$I(\theta) = E \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x, \theta) \right)^2 \right]$$

Si l'estimateur sans biais pour θ atteint la borne de Gramer-Rao, on dit qu'il est efficace

Remarque 2.1.1. *Quand les estimateurs sont biaisés, leur comparaison n'est pas simple. Ainsi un estimateur peu biaisé mais de variance très faible, pourrait même être préféré à un estimateur sans biais mais de grande variance.*

La méthode de maximum de vraisemblance :

Soit X une v.a réelle de loi paramétrique (discrète ou continue) dont on veut estimer le paramètre θ . Alors on définit une fonction f telle que :

$$f(x, \theta) = \begin{cases} f_{\theta}(x), & \text{si } X \text{ est continue} \\ P_{\theta}(X = x), & \text{si } X \text{ est discrète} \end{cases}$$

Définition 2.1.4. On appelle fonction de vraisemblance de θ , pour une réalisation (x_1, \dots, x_n) de même loi que x , la fonction de θ définie telle que :

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

la fonction $l(\theta) = \log L(\theta)$ s'appelle la fonction log-vraisemblance du modèle.

Définition 2.1.5. L'estimateur $\hat{\theta}$ de θ par la méthode de maximum de vraisemblance (EMV) est la valeur de θ qui maximise la fonction de vraisemblance L ou la fonction log vraisemblance l .

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax} L(\theta) \text{ ou } \hat{\theta} = \operatorname{argmax} l(\theta)$$

Pour résoudre ce problème, on utilise le fait que si L est dérivable et si L admet un maximum global en une valeur, alors la dérivée première s'annule en θ , et la dérivée seconde est négative. En pratique, on détermine l'estimateur $\hat{\theta}$ de θ en deux étapes :

1. la condition nécessaire :

$$\frac{\partial L(x_1, \dots, x_n)}{\partial \theta} = 0 \text{ ou } \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = 0 \text{ permet de trouver la valeur de } \hat{\theta}$$

2. $\theta = \hat{\theta}$ est un maximum local si la condition suffisante est remplie au point critique.

$$\frac{\partial^2 L(x_1, \dots, x_n; \theta)}{\partial \theta^2} \leq 0 \text{ ou } \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^2} \leq 0$$

Remarque 2.1.2. L'estimateur de maximum de vraisemblance n'existe pas toujours et n'est pas toujours unique.

Exemples 2.1.2. Le modèle de la loi exponentielle $\Theta = \mathbb{R}^+$, $f_\theta(x) = \theta e^{-\theta x}$ on a

$$L(\theta) = \prod_i^n f_\theta(x) = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i}$$

$$l(\theta) = \log L(\theta) = n \log \theta - \theta \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n x_i = 0 \iff \hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\bar{X}}$$

L est une application concave car on a

$$\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{-n}{\theta^2}$$

Donc, $\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{X}}$ est l'estimateur de maximum de vraisemblance dans le cas d'un modèle de la loi exponentielle

La méthode des moments :

L'idée de base de cette méthode est d'estimer une espérance mathématique par une moyenne empirique, une variance par une variance empirique, etc...

Si la loi des X_i a un paramètre θ tels que $\theta = E(X)$, alors l'estimateur de θ par la méthode des moments est $\hat{\theta} = \bar{X}_n = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)$

Plus généralement, pour $\theta \in \mathbb{R}$, si $E(X) = \varphi(\theta)$ où φ est une fonction inversible, alors $\hat{\theta}_n = \varphi^{-1}(\bar{X}_n)$

Exemple 2.1.1. *La loi Gamma*

Si X_1, \dots, X_n sont indépendantes et de même loi gamma $G(\alpha, \lambda)$, $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$ et $\text{Var}(X) = \frac{\alpha^2}{\lambda^2}$. on en déduit facilement que

$$\lambda = \frac{\mathbb{E}(X)}{\text{Var}(X)} \text{ et } \alpha = \frac{[\mathbb{E}(X)]^2}{\text{Var}(X)}$$

Donc les EMM de α et λ sont

$$\hat{\lambda}_n = \frac{\bar{X}_n}{S_n^2} \text{ et } \hat{\alpha}_n = \frac{\bar{X}_n^2}{S_n^2}$$

Remarque 2.1.3. *Dans certains cas, l'estimation par la méthode des moments est moins bonne que l'estimation par maximum de vraisemblance. Néanmoins, dans le cas de la loi Gamma par exemple, le calcul de la fonction de vraisemblance peut poser des problèmes (l'utilisation de l'ordinateur et d'algorithmes numériques est indispensable) tandis que l'estimation des moments est très facilement accessible. Lorsque la taille de l'échantillon n'est pas suffisamment grande, la loi des grands nombres ne s'applique pas et par conséquent, les moments empiriques n'approchent pas suffisamment les moments théoriques.*

2.1.2 Estimation par intervalle de confiance

Soit θ un paramètre de la population on veut déterminer un intervalle $[a, b]$ recouvrant la vraie valeur de θ . Fournir un tel intervalle s'appelle une estimation par intervalle de confiance de θ :

Définition 2.1.6. *Soit $\alpha \in [0, 1]$, on appelle intervalle de confiance pour le paramètre θ , de niveau de confiance $1 - \alpha$ la famille des ensembles $C_\alpha(\theta)$ telle que :*

$$P(\theta \in C_\alpha(\theta)) = 1 - \alpha$$

Estimation de la moyenne d'une loi normale

Nous considérons une variable X de loi $N(\mu, \sigma^2)$, donc de loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 . Nous cherchons à estimer μ à l'aide d'un échantillon (X_1, \dots, X_n) de variables aléatoires indépendantes toutes de loi $N(\mu, \sigma^2)$.

Le premier cas est celui où σ est connue, l'intervalle de confiance qu'on choisit, alors est

$$\left[\bar{X}_n - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

où $z_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi normale $N(0,1)$.

Lorsque σ n'est pas connu, on considère

$$\left[\bar{X}_n - t_{1-\alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + t_{1-\alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right]$$

où $t_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi Student à $n-1$ degré de liberté.

Estimation de la variance d'une loi normale

Soient $X \sim N(m, \sigma^2)$ et X_1, \dots, X_n n variables i.i.d selon la loi de X .

Cas m est connue :

Soit $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2$. on a

$$n \frac{S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

D'où

$$P \left(\chi_{\frac{\alpha_1}{2}}^2 \leq n \frac{S_n^2}{\sigma^2} \leq \chi_{1-\frac{\alpha_2}{2}}^2 \right) = 1 - \alpha$$

où $\chi_{\alpha_1}^2$ est le fractile d'ordre α_1 de la loi $\chi^2(n)$ et $\chi_{1-\alpha_2}^2$ est le fractile d'ordre $1 - \alpha_2$ de la loi $\chi^2(n)$.

L'intervalle de confiance pour la variance d'une loi normale s'écrit donc au niveau $1 - \alpha$ sous la forme suivante

$$IC(\sigma^2) = \left[n \frac{S_n^2}{\chi_{1-\frac{\alpha_2}{2}}^2}, n \frac{S_n^2}{\chi_{\frac{\alpha_1}{2}}^2} \right]$$

cas où m est inconnue :

On considère la variance empirique $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$. on sait que

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

On a donc

$$P \left(\mathcal{X}_{\frac{\alpha_1}{2}}^2 \leq (n-1) \frac{S_n^2}{\sigma^2} \leq \mathcal{X}_{1-\frac{\alpha_2}{2}}^2 \right) = 1 - \alpha$$

ou $\mathcal{X}_{\alpha_1}^2$ est le fractile d'ordre α_1 de la loi $\mathcal{X}^2(n-1)$ et $\mathcal{X}_{1-\alpha_2}^2$ est le fractile d'ordre $1 - \alpha_2$ de la loi $\mathcal{X}^2(n-1)$. L'intervalle de confiance pour la variance d'une loi normale s'écrit donc au niveau $1 - \alpha$ sous la forme suivante.

$$C(\sigma^2) = \left[(n-1) \frac{S_n^2}{\mathcal{X}_{1-\frac{\alpha_2}{2}}^2}, (n-1) \frac{S_n^2}{\mathcal{X}_{\frac{\alpha_1}{2}}^2} \right]$$

2.2 Estimation des copules

2.2.1 Estimation paramétrique et semi paramétrique :

Il existe beaucoup de méthodes d'estimation telle que la méthodes du maximum de vraisemblance(méthode classique), la méthodes des moments, ...

La méthode de maximum de vraisemblance :

D'après le théorème de Sklar $H(x,y)=C(F(x),G(y))$, on déduit par dérivation l'expression de la densité du vecteur (X_1, \dots, X_n) : [11]

$$f(x_1, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$$

où $c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1, \dots, \partial u_n}$ désigne la densité de la copule

L'expression log-vraisemblance $L(\theta)$ est définie comme suit :

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \sum_{j=1}^n \ln f(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \ln c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \\ &= \sum_{j=1}^n (\ln c(F_1)(x_1), \dots, F_n(x_n)) + \ln \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \\ &= \sum_{j=1}^n \ln c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \ln f_i(x_i) \end{aligned}$$

On déduit l'estimateur de maximum de vraisemblance de θ , noté $\hat{\theta}_{ML}$, est donné par

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg \max_{\theta} L(\theta)$$

$\hat{\theta}_{ML}$ est un estimateur sans biais, convergent et asymptotiquement normal sous certaines hypothèses que nous ne détaillerons par ici (Durrleman, et al .2000)

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{ML} - \theta) \xrightarrow{loi} N(0, I^{-1}(\theta))$$

où $I(\theta)$ représente la matrice d'information de Fisher.

Notons que la maximisation de la fonction $L(\theta)$ est difficile lorsque le nombre de paramètre est très élevé, et peut alors engendrer des calculs très longs.

Méthodes des fonctions d'inférence des marginales (IFM) :

Cette méthode a été proposé par shib et louis(1995) dans le but d'éviter les erreurs pouvant découler de l'estimation des paramètres des lois marginales et ceux de la copules d'une façon simultanée.

L'idée de base de cette méthode est de faire cette estimation en deux étapes :

1. Estimer des paramètres γ_j des marginales
2. Etant données ces estimations, estimer ensuite du paramètre θ de la copule.

On estime d'abord les paramètres des distributions marginales univariées γ_j en maximisant $L_j(\gamma_j) = \sum_{i=1}^n \ln f_j(x_{ij})$, on obtient $\hat{\gamma}_j = \arg \max L_j(\gamma_j)$ où f_j est la densité de F_j , puis on estime θ , En utilisant les estimateurs $\hat{\gamma}_j$, nous avons alors :

$$\hat{\theta}_n^{IFM} = \arg \max L(\theta)$$

où $L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln c_{\theta} \{F_{\hat{\gamma}_1}(x_{i1}), \dots, F_{\hat{\gamma}_d}(x_{id})\}$

là encore, L'estimateur $\hat{\theta}_n^{IFM}$ est également convergente, asymptotiquement normal et sans biais :

l'estimateur $\hat{\theta}_n^{IFM}$ vérifier la propriété de normalité asymptotique démontré par Joe (1997) : $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{IFM} - \theta) \rightarrow N(0, v^{-1}(\theta))$ avec $v(\theta)$ est la matrice d'information de Godambe, définie par : $v(\theta) = D^{-1}M(D^{-1})^t$

$$\text{où } D = E \left[\frac{\partial(g(\theta))^t}{\partial \theta} \right], M = E [g(\theta)^t g(\theta)] \text{ et } g(\theta) = \left(\frac{\partial L_1}{\partial \gamma_1}, \dots, \frac{\partial L_d}{\partial \gamma_d} \right) \quad [17]$$

Méthode des moments

Cette méthode est notamment utilisée pour les mesures de dépendance, l'estimateur des moments de la mesure de dépendance considérée est alors simplement obtenu en égalant l'expression paramétrique (analytique) de la mesure avec un estimateur non paramétrique de cette

même mesure.[8]

La méthode de moment consiste à estimer les paramètres $\beta_i, i = 1, \dots, n$ des lois marginales et le paramètres α de la copule, i.e

1. Résoudre le système des n équation à n inconnues

$$\begin{cases} \bar{X}_t &= f(\beta_1, \dots, \beta_n) \\ S_t^2 &= g(\beta_1, \dots, \beta_n) \\ \mu_{3,t} &= h(\beta_1, \dots, \beta_n) \\ \vdots & \end{cases}$$

ou n désigne le dimension de α et f,g et h sont les expressions des moments d'ordre 1,2 et 3 en fonction des paramètres β_i . Répéter cette étape pour tout les marginales.

2. Inverser le tau de kendall ou le rho de spearman pour obtenir le paramètre α de la copule

Exemple 2.2.1. Pour la copule de Gumbel de paramètre θ , on a

$$\tau = 1 - \frac{1}{\theta}$$

Nous en déduisons que :

$$\theta = \frac{1}{1 - \tau}$$

Si nous avons une estimation $\hat{\tau}$ du tau de Kendall, nous pouvons obtenir une estimation du paramètre de la copule en posant :

$$\hat{\theta} = \frac{1}{1 - \hat{\tau}}$$

Dans le cas général, on a l'estimateur non paramétrique du tau de Kendall est donné par :

$$\hat{\tau} = \frac{c - d}{c + d}$$

où c et d sont respectivement le nombre de paires disjointes concordantes et discordantes

Méthode de pseudo-maximum de vraisemblance(maximum de vraisemblance canonique)

cette méthode a été proposé dans le cas ou les marginales F_1, \dots, F_d associées aux X_1, \dots, X_d sont inconnues, elle se compose de deux étapes :

-On remplace les marginales F_1, \dots, F_d par leurs estimations naturelles (estimateur empirique) définie par : $\hat{F}_{j,n}(x_{ij}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P(X_{ij} \leq x)$

-En maximisant la pseudo log-vraisemblance pour estimer θ , telle que :

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln c_{\theta} \left\{ \hat{F}_{1,n}(x_{1i}), \dots, \hat{F}_{d,n}(x_{id}) \right\}$$

alors l'estimateur $\hat{\theta}_n^{PMV} = \operatorname{argmax} L(\theta)$

2.2.2 Estimation non paramétrique :

le cadre général de l'estimation non paramétrique d'une loi marginale s'appuie sur la fonction de répartition empirique, définie par : $F_k(x) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbb{1}_{\{x_i \leq x\}}$

Pour un n-échantillon (x_1, \dots, x_k) de la loi F. En dimension n, si on se donne $(x_1^k, \dots, x_n^k)_{1 \leq k \leq K}$ un K-échantillon du vecteur (de dimension n) X, on peut généraliser l'expression de la fonction de répartition empirique en posant : $F_k(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbb{1}_{(x_1^k \leq x_1, \dots, x_n^k \leq x_n)}$
cet estimateur conduit à un estimateur non paramétrique naturel d'une copule

Fonction de répartition empirique

Définition 2.2.1. soit (X_1, \dots, X_n) un échantillon de taille n de loi F, la fonction de répartition empirique est donc définie par : $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P(X_i \leq x)$
cet estimateur conduit à un estimateur non paramétrique naturel d'une copule

Propriétés asymptotique :

- F_n est un estimateur sans biais $E(F_n(x)) = F(x)$
- Par la loi forte des grands nombres $F_n(x) \xrightarrow{p.s} F(x)$
- F_n est asymptotiquement normale de variance $F(x)(1 - F(x))$
 $\sqrt{n}(F_n(x) - F(x)) \longrightarrow N(0, F(x)(1 - F(x)))$
- F_n est un estimateur uniformément consistant de F, c-à-d $\| F_n - F \| \xrightarrow{p.s} 0$

Définition 2.2.2.

Soit comme ci-dessus $(x_1^k, \dots, x_n^k)_{1 \leq k \leq K}$ un K-échantillon du vecteur (de dimension n) X, En observant que à partir des versions empiriques des fonctions de répartition de cette expression : $C_k(U_1, \dots, U_n) = F_k(F_{1,k}^{-1}(U_1), \dots, F_{n,k}^{-1}(U_n))$ avec $F_{j,k}^{-1}(U) = \inf \{t / F_{j,k}(t) \geq u\}$. Cette notion a été introduite par Deheuvels[1979]

La copule empirique

La copule empirique a été introduite pour la première fois par Deheuvels(1979)

Cas des copules bivariées :

Définition 2.2.3. Soit $f(x_k, y_k)_{k=1}^n$ un échantillon de taille n d'un couple de variables aléatoires.

La copule empirique est la fonction \hat{C} définie par

$$\hat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \frac{\text{Nombre des paires } (x,y) \text{ dans l'échantillon tels que } x \leq x_i \text{ et } y \leq y_j}{n}$$

ou x_i et y_j représentent les statistiques d'ordre associées à l'échantillon. La fonction densité empirique de la copule \hat{C} notée \hat{c} est donnée par :

$$\hat{c}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } (x_i, y_j) \text{ est un élément de l'échantillon} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il existe une relation entre \hat{C} et \hat{c} donnée par :

$$\hat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \sum_{p=1}^i \sum_{q=1}^j \hat{c}\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right)$$

et

$$\hat{c}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \hat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) - \hat{C}\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j}{n}\right) - \hat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j-1}{n}\right) + \hat{C}\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j-1}{n}\right)$$

Généralisation dans le cas multivariées :

En dimension T , $(x_t^1, \dots, x_t^n)_{t=1}^T$ est un échantillon de taille n , la copule empirique est définie de façon analogue au cas bivarié, \hat{C} est donnée comme suit :

$$\hat{C}\left(\frac{t_1}{T}, \dots, \frac{t_n}{T}\right) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{si } (x_t^1 \leq x(t_1)^1, \dots, x_t^n \leq x(t_n)^n) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les copules empiriques peuvent être utilisées pour estimer les mesures de dépendance à savoir le ρ de Spearman et le τ de Kendall.

Théorème 2.2.1. Soient \hat{C} et \hat{c} la copule empirique et sa fonction de densité respectivement de l'échantillon $(x_k, y_k)_{k=1}^n$. Le tau de Kendall et le rho de Spearman sont estimés par les formules suivantes :

$$\hat{\tau} = \frac{2n}{n-1} \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n \sum_{p=1}^{i-1} \sum_{q=1}^{j-1} (\hat{c}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) \hat{c}\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) - \hat{c}\left(\frac{i}{n}, \frac{q}{n}\right) \hat{c}\left(\frac{p}{n}, \frac{j}{n}\right))$$

et

$$\hat{\rho} = \frac{12}{n^2-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\hat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) - \frac{ij}{n^2} \right)$$

Estimation de la copule C par les méthodes à noyau

Malgré les quantités de C_n , cet estimateur présente des discontinuités. Dans cette partie, nous présentons les estimateurs à noyau les plus utilisés en pratique et qui résoud ce problème. Fermanian, Radulovic et Wegkamp[2004] ont proposé une version lisse notée SE (Smooth version of empirical copula) pour la copule empirique, à savoir :

$$\hat{C}_n^{(SE)}(u, v) = \hat{H}_n(\hat{F}_n^{-1}(u), \hat{G}_n^{-1}(v)).$$

où les quantités \hat{H}_n , \hat{F}_n , \hat{G}_n sont données par :

$$\hat{H}_n(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_n(x - X_i, y - Y_i),$$

$$\hat{F}_n(x) = \hat{H}_n(x, +\infty), \quad \hat{G}_n(y) = \hat{H}_n(+\infty, y),$$

$$K_n(x, y) = K\left(\frac{x}{b_n}, \frac{y}{b_n}\right), K(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y k(s, t) ds dt,$$

où $k(s, t)$ est la fonction densité du noyau bidimensionnelle, et b_n est un paramètre de lissage qui tend vers zéro quand n converge vers l'infini.

Cependant cet estimateur souffre du problème du biais, ce biais typique associé à l'estimation à noyaux est présent puisque le support d'une copule est borné sur $[0, 1]^2$. L'estimateur $\hat{C}_n^{(SE)}$ n'est pas convergent. Pour trouver solution à ce problème, plusieurs méthodes sont proposées. La première méthode est basée sur la transformation des données proposées par Gijbels, Omelka et Veraverbeke [2009]. La seconde méthode est l'estimateur de chen et Huang [2007], qui ont proposé d'utiliser un noyau linéaire local afin de faire face aux biais près des frontières du carré unité.

Simulation des copules

La simulation des variables aléatoires complexes repose sur la simulation des variables aléatoires très simples, auxquelles sont appliquées des transformations adéquates. La variable aléatoire de base dans toutes les méthodes de simulation est celle de la loi uniforme sur $[0, 1]$. Cette simulation repose précisément sur les générateurs des nombres aléatoires qui génèrent des variables uniformément réparties sur $[0, 1]$.

Les copules sont particulièrement intéressantes pour simuler des vecteurs aléatoires du fait qu'elles sont des lois de vecteurs dont les marges sont uniformes sur $[0, 1]$. Or on cherche à simuler un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ dont la distribution est $F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$, ce problème revient à simuler le vecteur aléatoire $U = (U_1, \dots, U_n)$ dont la loi est la copule C , supposée dérivable. L'idée naturelle est d'utiliser la décomposition à l'aide des lois conditionnelles itérées.

Nous présentons dans ce qui suit quelques méthodes pour obtenir des nombres aléatoires de C . Parfois, les marginales (F_1, \dots, F_n) ne sont pas connues analytiquement. Dans ce cas, nous utilisons la méthode dite " des quantiles empiriques ".

3.1 La méthode des distributions

Cette méthode est intéressante lorsque la distribution générée par la copule est plus facile que la copule elle-même. C'est par exemple le cas de la copule gaussienne : un vecteur gaussien de dimension d est facile à simuler alors que la copule gaussienne n'est pas simple à simuler directement.

Nous utilisons la transformation

$$X = (F_1^{-1}(U_1), \dots, F_n^{-1}(U_n))$$

Nous avons donc

$$F(U_1, \dots, U_n) = C(F_1^{-1}(U_1), \dots, F_n^{-1}(U_n)).$$

Pour simuler $U = (U_1, \dots, U_n)$, nous pouvons simuler le vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ de fonction de distribution F et appliquer la transformation $U = (F_1(X_1), \dots, F_n(X_n))$.

3.1.1 Application sur la copule normale

L'algorithme sous R

```
> theta = 8
> library(MASS)
> V = rnorm(nsim,c(0,0),matrix(c(1,theta,theta,1),2))
> U = sapply(1 :2, function(t) pnorm(V[,t], 0, 1))
> plot(U)
```

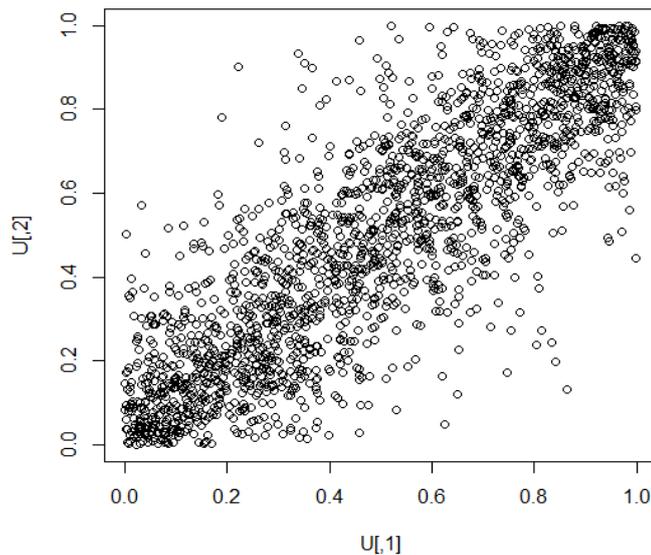


FIGURE 3.1 – Nuages des pointes de Copule normale

```
>est = fitCopula(normalCopula(),data=V, method="ml")
>est
```

```

> est<-fitCopula(normalCopula(),data=V, method="ml")
> est
Call: fitCopula(copula, data = data, method = "ml")
Fit based on "maximum likelihood" and 2000 2-dimensional observations.
Copula: normalCopula
rho.1
0.9164
The maximized loglikelihood is 1222
Optimization converged

```

FIGURE 3.2 –

3.2 La méthode des distributions conditionnelles

3.2.1 Cas des copules bivariées

Théorème 3.2.1. *Soit C une copule et soit (U_1, U_2) un vecteur aléatoire de loi C . On définit pour tout $(u_1, u_2) \in (0, 1)^2$*

$$C_{u_1}(u_2) = C_{2|1}(u_1, u_2) = P(U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1) = \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2)$$

Soient maintenant V_1 et V_2 deux variables aléatoires indépendantes telle que $V_1 \sim U_{(0,1)}$ et $V_2 \sim U_{(0,1)}$.

Si $U_1 = V_1$ et $U_2 = C_{u_1}^{-1}(v_2)$, alors le couple (U_1, U_2) est de loi C .

On peut déduire de ce théorème un algorithme de simulation d'une copule C comme suit :

1. On génère deux variables aléatoires V_1, V_2 uniformément réparties sur $[0, 1]$ et indépendantes.
2. On pose $U_1 = V_1$ et $U_2 = C_{u_1}^{-1}(v_2)$
3. La copule désirée est (U_1, U_2) de loi C .

3.2.2 Application de cet algorithme sur la copule de Frank

Cet algorithme est suggéré par Genest et MacKay (1986). Il est utilisé par Genest (1987) pour simuler la copule Frank. Comme nous avons vu dans le premier chapitre, une copule archimédienne C s'écrit en tous $(u_1, u_2) \in (0, 1)$ sous la forme $C_\Phi(u_1, u_2) = \Phi^{-1}\{\Phi(u_1) + \Phi(u_2)\}$. Et par définition, on a :

$$C_{u_1}(u_2) = \frac{\partial}{\partial u_1} C(U_1, U_2) = \frac{\Phi'(u_1)}{\Phi'[\Phi^{-1}\{\Phi(u_2) + \Phi(u_1)\}]}$$

Ainsi l'inverse de $C_{u_1}(u_2)$ est donné en tout $u \in (0, 1)$ par

$$C_{u_1}^{-1}(u) = \Phi^{-1}\left[\Phi\left[(\Phi')^{-1}\left\{\frac{\Phi'(u_1)}{u}\right\}\right] - \Phi(u_1)\right]$$

Dans le cas d'une copule de Frank de paramètre $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$C(u_1, u_2) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)} \right)$$

D'où

$$C_{2|1}(u_1, u_2, \theta) = \frac{(e^{-\theta u_2} - 1)e^{-\theta u_1}}{(e^{-\theta} - 1) + (e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}$$

Ainsi

$$U_2 = C_{u_1}^{-1}(u_2) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{u(e^{-\theta} - 1)}{u + (1 - u)e^{-\theta u_1}} \right)$$

L'algorithme de simulation par la méthode des distributions conditionnelles pour tirer une observation d'une copule de Frank est donc :

1. Générer deux variables aléatoires indépendantes V_1, V_2 qui sont uniformes sur $(0, 1)$.
2. On pose

$$U = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{v_2(e^{-\theta} - 1)}{v_2 + (1 - v_2)e^{-\theta v_1}} \right)$$

3.2.3 L'algorithme sous R

```
> theta = 10
> nsim = 2000
> V = matrix(runif(nsim*2),nsim,2)
> U = cbind(V[,1],-1/theta*log(1+(V[,2]*(exp(-theta)-1))/(exp(-theta*V[,1])*(1-V[,2])+V[,2])))
> plot(U)
```

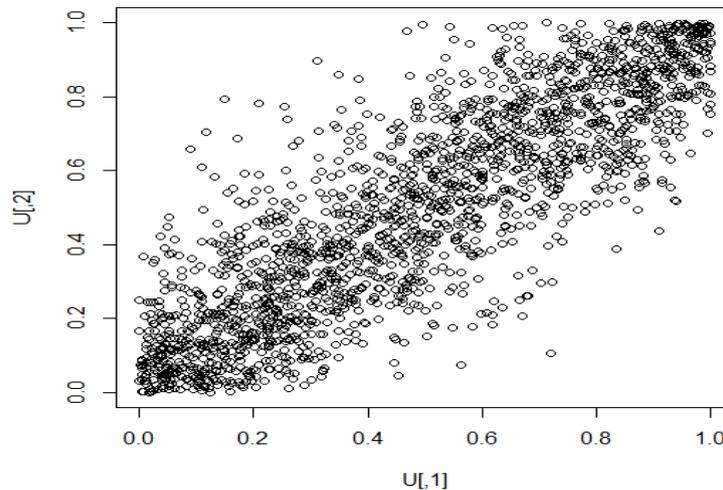


FIGURE 3.3 – Nuages des pointes de Copule de Frank

```

> library(copula)
> est = fitCopula(francCopula(),data=V, method="mpl")
> est

  > est<-fitCopula(francCopula(),data=V, method="mpl")
  > est
  Call: fitCopula(copula, data = data, method = "mpl")
  Fit based on "maximum pseudo-likelihood" and 2000 2-dimensional observations.
  Copula: francCopula
  alpha
  0.1512
  The maximized loglikelihood is 0.6331
  Optimization converged
  . |

```

FIGURE 3.4 –

La méthode bivariée s'étend sans difficultés (sur le plan mathématique) au cas multivarié. Prenons par exemple le cas trivarié. Nous avons l'algorithme suivant :

1. Simuler trois variables aléatoires uniformes v_1 , v_2 et v_3
2. Prendre u_1 égal à v_1
3. Soit $C(u_2, u_1) = C_{2|1}(u_1, u_2; 1)$. Prendre u_2 égal à $C^{-1}(v_2, u_1)$.
4. Soit $C(u_3; u_1, u_2) = C_{3|1,2}(u_1, u_2, u_3)$. Prendre u_3 égal à $C^{-1}(v_3; u_1, u_2)$.

Il existe plusieurs algorithmes pour simuler les copules Archimédiennes. Genest et MacKay (1986) prônent l'idée de simuler la distribution conjointe du vecteur aléatoire X en procédant par des simulations récursives des distributions conditionnelles de X_j sachant X_i .

1. Générer un nombre aléatoire uniformément distribué U_1 .
2. Poser $X_1 = F_1^{-1}(U_1)$
3. Pour $j = 2, \dots, n$, on calcule récursivement :

$$U_j = F_j(X_j \setminus x_1, \dots, x_{j-1}) = \frac{\varphi^{-1(j-1)}[c_{j-1} + \varphi(F_j(x_j))]}{\varphi^{-1(j-1)}(c_{j-1})}$$

où $c_j = \varphi(F_1(x_1)) + \dots + \varphi(F_j(x_j))$ et $\varphi^{-1(j)}$ est la j^{ime} dérivée de la fonction inverse de la fonction φ .

4. Poser $X_j = F_j^{-1}(U_j)$

3.3 Les méthodes adaptées spécifiquement à une copule

Dans ce paragraphe, la simulation est spécifique à chaque copule ou à un type de copule. Pour simuler la copule Clayton (pour $\theta > 0$), nous pouvons employer l'algorithme donné par

Devroye (1986) :

1. Simuler deux variables aléatoires exponentielles standards x_1 et x_2 .
2. Simuler une variable aléatoire x de fonction de distribution $\Gamma(1, \theta)$.
3. Prendre $u_1 = (1 + x_1/x)^{-\theta}$ et $u_2 = (1 + x_2/x)^{-\theta}$.

3.3.1 L'algorithme sous R

```
> theta = 5
> nsim = 2000
> V = matrix(runif(nsim*3),nsim,3,byrow=T)
> T = qgamma(V[,1],1/theta,1)
> Y = sapply(1 :2, function (t) qexp(V[,t+1],T))
> U = (1+Y)**(-1/theta)
> plot(U)
```

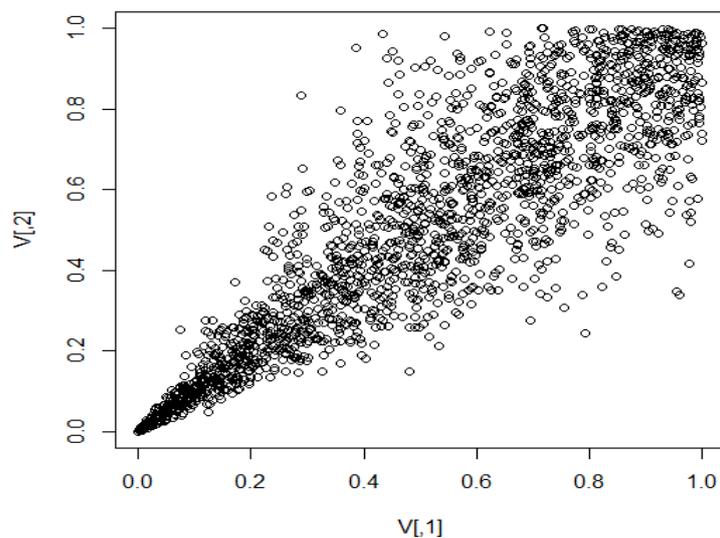


FIGURE 3.5 – Nuages des pointes de Copule de Clayton

```
> library(copula)
> est = fitCopula(claytonCopula(),data=V, methode="ml")
> est
```

```

> est<-fitCopula(claytonCopula(),data=V, method="ml")
> est
Call: fitCopula(copula, data = data, method = "ml")
Fit based on "maximum likelihood" and 2000 2-dimensional observations.
Copula: claytonCopula
alpha
5.129
The maximized loglikelihood is 1942
Optimization converged

```

FIGURE 3.6 –

3.3.2 La méthode des quantiles empiriques

Le problème de cette section n'est plus la simulation du vecteur U dont la distribution est une copule C , mais concerne la simulation du vecteur X dont la copule est C et les marginales pas forcément uniformes. Dans les sections précédentes, X est simulé à partir de la transformation suivante :

$$\begin{array}{c} F_1^{-1}(U_1) \\ \vdots \\ F_n^{-1}(U_n) \end{array}$$

Cela implique la connaissance des distributions F_1, \dots, F_n . Ce qui n'est pas toujours le cas. Néanmoins, s'il est possible de simuler les marginales F_1, \dots, F_n , alors, nous pouvons simuler la distribution multidimensionnelle F grâce à la méthode des quantiles empiriques. Soit $F_{i,m}$ le processus de distribution empirique (non normalisé). Nous avons le résultat suivant :

$$\sup |F_{i,m} - F_i(x)| \xrightarrow{a.s.} 0 \text{ lorsque } m \rightarrow 0$$

Soient U_m et F_m les processus de distribution empirique correspondants aux distributions $C(u_1, \dots, u_n)$ et $F(x_1, \dots, x_n)$. En utilisant un argument de type Glivenko-Cantelli, nous avons

$$\sup |U_p(F_{1,m}(u_1), \dots, F_{n,m}(u_n))| \xrightarrow{a.s.} 0, \text{ lorsque } m \wedge p \rightarrow 0$$

avec \wedge indique le maximum.

3.4 Application numérique

Dans cette partie, nous avons un ensemble de données composé de côte et volume du Barrage Beni Haroune dans la période du 1 janvier 2004 au 31 décembre 2013.

	cote	volume
1	142.77	45.882
2	142.6	45.248
3	142.42	44.576
⋮	⋮	⋮
701	199.94	995.797
702	199.91	994.745
703	199.89	994.044

TABLE 3.1 – les données composé de côte et volume

L'objectif de cette partie est de modéliser la dépendance entre ces données par trois types de copules et pour chaque type, donner une estimation de paramètre de la copule. Le traitement des données sera effectué informatiquement, en utilisant le logiciel R. la représentation graphique des données côte et volume est présentée dans la figure (3.7).

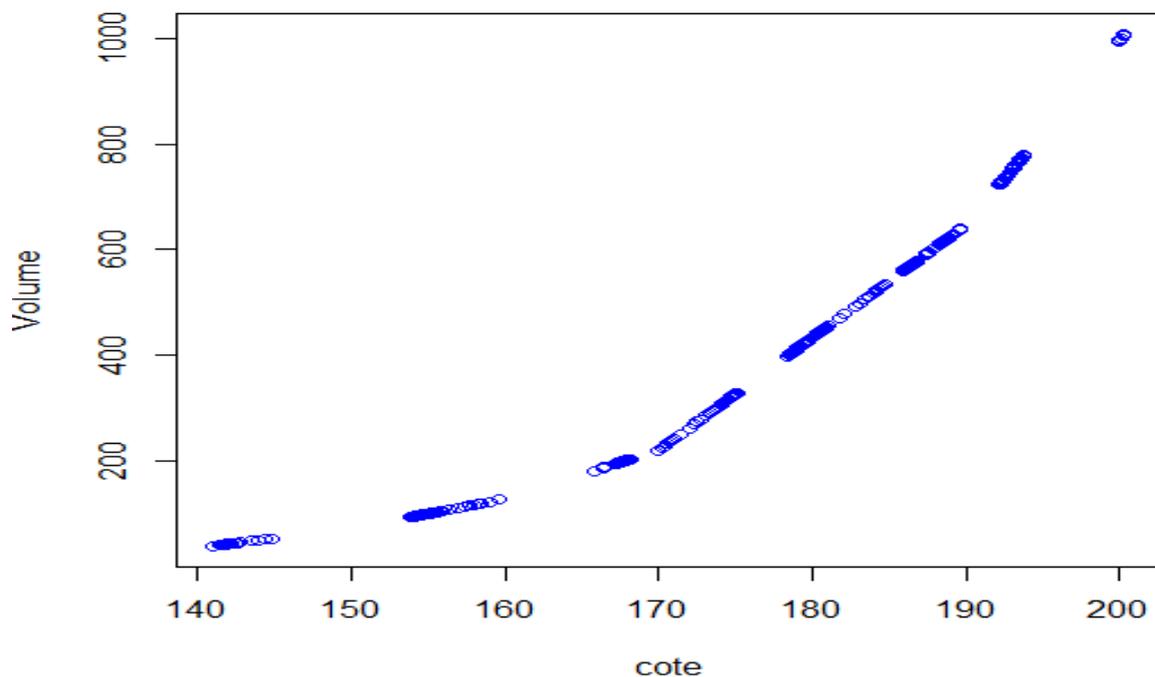


FIGURE 3.7 – cote en fonction de volume

D'après cette figure on constate une forte corrélation entre les données. Ce que le montre le tableau suivant Ces résultats confirment que la relation linéaire entre ces deux variable est effectivement très forte et positive.

Coefficient	Valeur
ρ pearson	0.9584381
τ kendall	0.9999939
ρ_s spearman	1

TABLE 3.2 – Les mesure de dépendance

Les figures (3.8) et (3.9) représentent les distributions marginales des variables côte et volume respectivement.

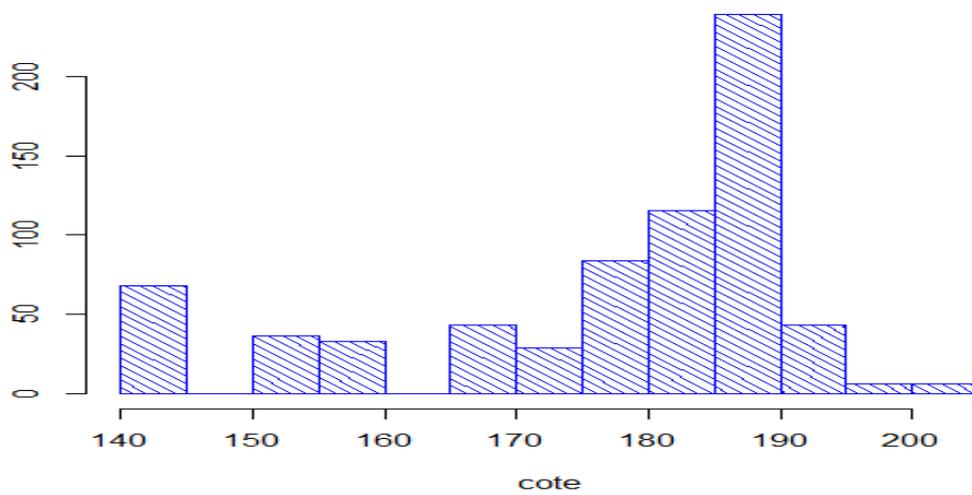


FIGURE 3.8 – Distribution de cote

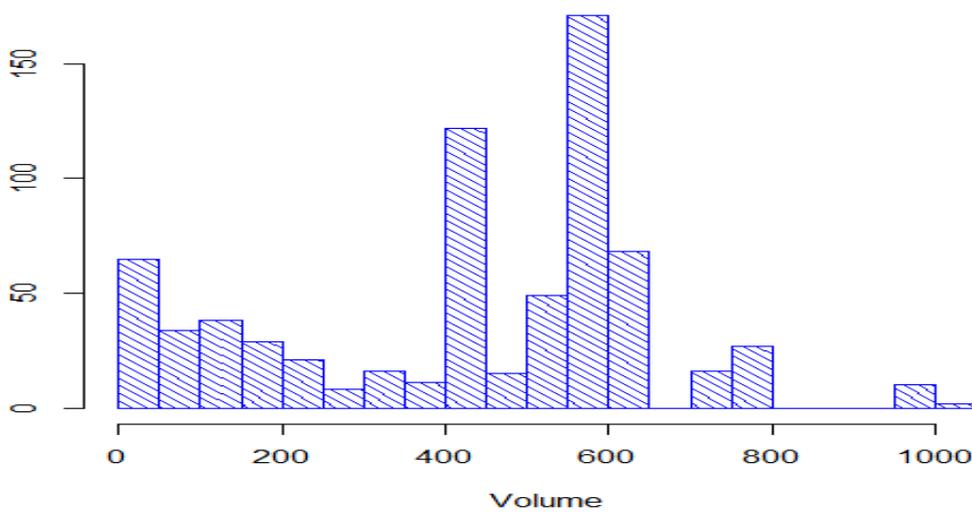


FIGURE 3.9 – Distribution de volume

Modélisation de la dépendance entre côte et volume par une copule :

Le but de cette partie est de modéliser la dépendance entre ces données par trois type de copules : Clayton, Frank et Gumbel, en utilisant le logiciel R.

Les résultats de l'estimation des paramètres pour chaque type de copules en utilisant ces données dans le tableau suivant :

Clayton	Frank	Gumbel
327543.7	655089.7	55598.95

TABLE 3.3 – L'estimation des copules

Les résultats de la modélisation sont résumés dans les figures suivantes et pour la programmation en R voir annex.

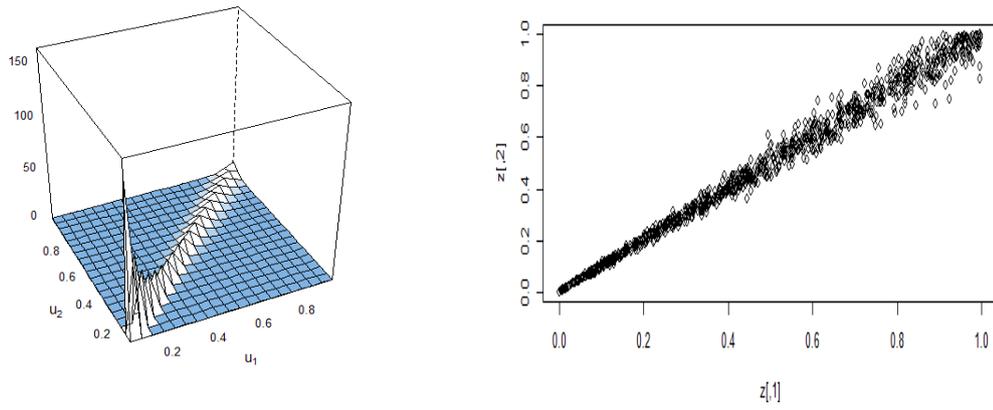


FIGURE 3.10 – Copule de Clayton (à gauche) et Nuage des points (à droite)

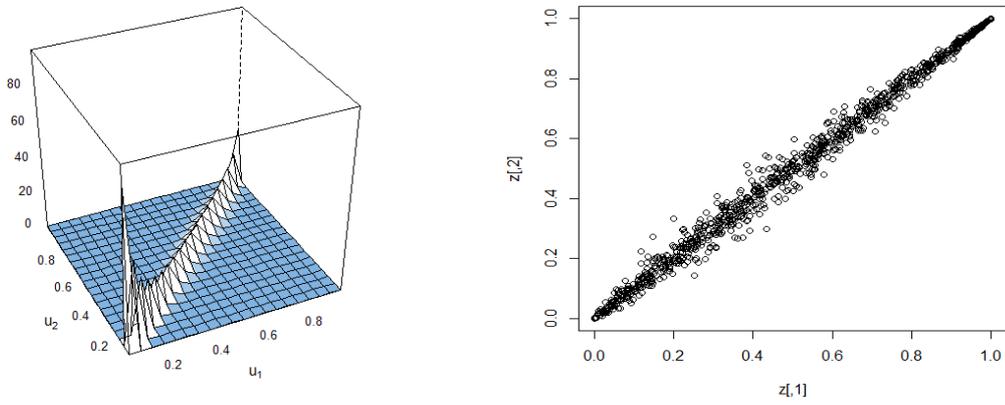


FIGURE 3.11 – Copule de Gumbel (à gauche) et Nuage des points (à droite)

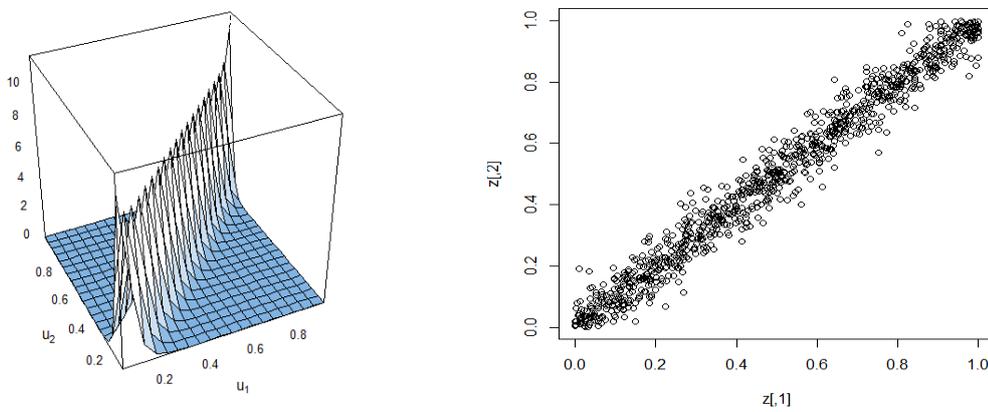


FIGURE 3.12 – Copule de Frank (à gauche) et Nuage des points (à droite)

Remarques

- La copule de Clayton simule bien la dépendance dans les parties inférieures des queues d'une distribution conjointe
- La copule de Gumbel permet de bien représenter la dépendance dans les parties supérieures des queues de distribution
- La copule de Frank simule à la fois les parties inférieures et supérieures des distribution
- La copule de Clayton a une dépendance de queue inférieur, au contraire de la copule de Gumbel qui possède une dépendance de queue supérieure, elle est à ce titre particulièrement adaptée en assurance et en finance pour étudier l'impact de la survenance d'évènement de forte intensité sur la dépendance entre branches d'assurances ou actif financiers, et pour la copule de Frank il n'existe aucune dépendance de queue ni inférieur ni supérieur.

Conclusion

En statistique, une copule est un objet mathématique venant de la théorie des probabilités qui permet de modéliser la dépendance entre les différentes coordonnées d'un vecteur aléatoire sans se préoccuper de ses lois marginales. Le choix de la copule adéquate pour modéliser cette dépendance a fait toujours l'objet de toutes les premières recherches dans ce domaine. On peut citer entre autre les travaux de Genest & Rivest (1993), Fermanian (2005) et Genest, Quessy & Rémillard (2006).

Dans ce mémoire, nous avons présenté différentes méthodes d'estimation et de la simulation des copules. Une application numérique a été effectuée sur des données réelles du Barrage Beni Haroune, où la dépendance entre les deux variables a été modélisée par trois types de copules : Clayton, Frank et Gumbel.

Pour chaque type, nous avons donné une estimation du paramètre de la copule à titre d'application des méthodes présentés dans le mémoire.

Nous avons choisi de modéliser par les copules archimédiennes de fait qu'elles sont préférées dans plusieurs domaines, mais il faut noter que d'autres types de copules peuvent être utilisées.

Annexe

```
> mydata<-read.table(file=file.choose(),sep=";",dec=".",header=TRUE)
> X <- mydata[,1]
> cote <- X
> x.mean <- mean(Surface)
> x.var <- var(Surface)
> x.rate <-  $x.mean / x.var$ 
> x.shape <-  $((x.mean)^2) / x.var$ 
> hist(cote, breaks = 20, col = "green", density = 20)
> Y <- mydata[,2]
> Volume <- Y
> y.mean <- mean(Volume)
> y.var <- var(Volume)
> y.rate <-  $y.mean / y.var$ 
> y.shape <-  $((y.mean)^2) / y.var$ 
> hist(Volume, breaks = 20, col = "green", density = 20)
> cor(mydata, method = "kendall")
> library(VineCopula)
> u <- pobs(mydata)[,1]
> v <- pobs(mydata)[,2]
> selectedCopula <- BiCopSelect(u, v, familysset = NA)
> selectedCopula
> plot(selectedCopula)
> library(copula)
> pmy.dist <- mvdc(claytonCopula(param = 0.05, dim = 2), margins = c("gamma", "gamma"),
paramMargins = list(list(shape = x.shape, rate = x.rate), list(shape = y.shape, rate = y.rate)))
```

```
> cop.model <- claytonCopula(dim = 3)
> m <- pobs(as.matrix(data))
> fit <- fitCopula(cop.model, m, method = 'ml')
> coef(fit)
> library(copula)
> cc=claytonCopula(28)
> z=rCopula(1000,cc)
> plot(z)
> gc=gumbelCopula(17)
> z=rCopula(1000,gc)
> plot(z)
> fc=frankCopula(35)
> z=rCopula(1000,fc)
> plot(z)
```

Notations et abréviations

X, Y	variables aléatoires
U, V	variables aléatoires uniforme
C	copule
c	densité de la copule
$C_{X,Y}$	copule bivariée
M	copule min
W	copule max
Π	copule produit
C_α^{Gum}	copule de Gumbel
C_α^{Fr}	copule de Frank
C_α^{cla}	copule de Clayton
$C_{r,v}^t$	copule de student
C_r^ϕ	copule gaussienne
F_1, \dots, F_d	fonctions de répartitions univariées
F^{-1}	inverse généralisé de F
$L(\theta)$	fonction de maximum de vraisemblance
MV	méthode de maximum de vraisemblance
$\tau(X, Y)$	tau de Kendall
$\rho(X, Y)$	rho de Spearman
θ_n	estimateur de θ
θ_n^{IFM}	estimateur de θ par la méthode de IFM
θ_n^{MV}	estimateur de θ par la méthode de MV
H	fonction de répartition jointe
I	la matrice d'information de Fisher
IFM	fonction d'inférence des marginales

ssi si est seulement si

v.a Variable aléatoire

$E(x)$ Espérance mathématique de la v.a X

$\text{var}(x)$ Variance mathématique de la v.a X

i.i.d identiquement et indépendante distribuée

i.e c'est à dire

Bibliographie

- [1] **ABDELILAH MAHFOUD**, calcul de la vraisemblance d'une copule basée sur les rangs, Université du Québec à Montréal, août 2017
- [2] **Aghilès MALOUM**, sur les copules, applications et simulation, université des sciences et de la technologie houari boumediene
- [3] **Balakrishnan,N,Lai, C.D** (2008), continuous bivariate distribution, Springer-Dordrecht Heidelberg, London
- [4] **BENELMIR Imane**, Modélisation de la Dépendance par les copules, Université mohamed khider, biskra, 2018
- [5] **Christelle Andriantavy**,Tempetes : prise en compte de la dépendance spatiale avec la théorie des copule,université Paris Dauphine et l'institut des Actuaires, novembre 2008
- [6] **Cook,R.D., Johnson, M.E.** (1981), A family of distributions for modelling nonelliptically symmetric multivariate data, Royal Statistical Society, 43, 210-218
- [7] **Durante F. et Sempi C.**, Copula Theory : An Introduction. , Dans : Jaworski, P., Durante, F., Haerdle, W., Rychlik, T. :(eds). Copula Theory and Its Applications, Proceedings of the Workshop,Warsaw 25-26 sept 2009, Springer, Dordrecht (2010).
- [8] **Frédéc Planchet**, modèle financiers en assurance et analyse dynamique, mars 2021
- [9] **Genest, C** (1987).Frank's family of bivariate distributions, Biometrika. 74, 549-555
- [10] **Gherda mebrouk** cours statistique inférentielle, 2021
- [11] **Gherda mebrouk**, cours théorie des copules et valeurs extreme, 2020
- [12] **Gildas.Mazo** construction et estimation de copules en grande dimension. Autres [stat.ML] . université de Grenoble, 2014. francais.
- [13] **Gumbel, E.J** (1960). Distributions des valeurs extreme en plusieurs dimensions, Institut de Statistique de l'Université de Paris. 9, 171-173

-
- [14] **Hutchinson, T. P, Lai, C.D** (1990), Continuous Bivariate Distributions, Emphasizing Applications, Adelaide : Rumsby Scientific Publishing
- [15] **Johnson N.L., Kotz, S**, On some generalized Farlie-Gumbel-Morggenstern distributions-H : regression, correlation and further generalizations, Statistical Theory Methods, 6, 485-496
- [16] **Julien Sthoeher**, cours Monte-Carlo, Université Paris Dauphine, 2020-2021
- [17] **KHALED SALEM**, a propos de la covariance limite du processus de copule empirique ,université du québe,novembre 2015
- [18] **Lounas Fadhila**, Modélisation de la dépendance par les copules et applications, Université de Mouloud Mammeri, Tizi ouzou, 2011
- [19] **Slimani**, Estimation des paramètres d'une copule, Université Mohamed Khider, Biskra, 2011-2012
- [20] **Vose, D** (2008), Risk analysis : a quantitative guide, John wiley and sons, England
- [21] **Yannick, M, Sornette, D.** (2006). Extrme financial risks : from dependance to risk management.Birkhauser
- [22] [http : //perso.univ-lemans.fr/apopier/enseignement/M2_risque_credit/slides_copule.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/apopier/enseignement/M2_risque_credit/slides_copule.pdf)
- [23] [http : //www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/0/59f3eff9eace9a3cc12576fd00345](http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/0/59f3eff9eace9a3cc12576fd00345)
- [24] [https : //arxiv.org/pdf/2003.05710.pdf](https://arxiv.org/pdf/2003.05710.pdf)