République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supèrieur et de la Recherche Scientifique
Université de Jijel

Faculté des Sciences Exacts et Informatique
Département de mathématiques

N° d'ordre :........

N° de série :.........

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse fonctionnelle.

Thème

Un problème de valeur initiale d'une équation différentielle à retard

Présenté par : Merimeche chahreddine

Devant le jury :

Président	: Yarou Mustapha Fateh	Professeur Université de Jijel
Encadreur	: Affane Doria	MCA Université de Jijel
Examinateur	: Menigher Hammoud	MAA Université de Jijel

Promotion **2020-2021**

⁂ *Remerciements* ⁂

Je tiens à remercier ALLAH, le tout puissant de m'avoir donné le courage et la volonté pour accomplir ce modeste travail.

Je tiens à exprimer tous mes reconnaissances à tous ceux qui ont contribué de prêt ou de loin à la réalisation de ce travail

Je tiens à présenter mon profonde gratitude à mon encadreur ***Doria Affane*** pour son disponibilité, ses remarques et conseils.

Mes remerciements vont également à l'ensemble de nos enseignants du département de mathématiques

⁜ *𝒟édicace* ⁜

J'ai le grand plaisir de dédier ce modeste mémoire :

♡ A mes très chers parents

♡ A nos frères et soeurs

♡ A tous mes proches sans exception

♡ A tous mes amis sans exception

♡ A tous ceux qui je connaissent

⁜ *𝒞HAHREDDINE* ⁜

TABLE DES MATIÈRES

Notations générales

$\mathbb{R}$	Ensemble des Nombres réels.
$\mathbb{R}^+$	Ensemble des Nombres réels Positives.
$\mathbb{R}^n$	Espace des vecteurs à n entrées réels.
$\mathbb{N}$	Ensemble des Nombres entiers Naturels.
$\mathbb{C}$	Ensemble des Nombres Complexe.
$[a, b]$	Intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b.
$[0, T]$	Un intervalle de $\mathbb{R}$, $\quad T > 0$.
$\lvert . \rvert$	Valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe.
$\lVert . \rVert$	Norme sur $\mathbb{R}^n$.
$C([0, T], \mathbb{R})$	L'espace de Banach des fonctions vectorielles définies sur $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$.
max	Fonction Maximum.
min	Fonction minimum.
sup	Fonction supérieurement
inf	Fonction Inférieurement.
$x' = \frac{dx}{dt}$	Dérivée de la variable x par rapport au temps t.
$\mathcal{M}$	Un sous ensemble de $C([0, T], \mathbb{R})$.
$x_n \to x$	Convergence forte de x_n vers x .

INTRODUCTION

Les équations différentielles à retard constituent un champ d'étude très important pour modéliser des phénomènes d'hérédité rencontrés en physique, biologie, chimie, économie, écologie, etc. Malgré que dans la plupart des modèles, le retard est estimé non indicatif et ignoré pour simplifier l'étude, il a été prouvé que dans de nombreux cas, le retard joue un rôle dominant dans plusieurs domaines et que les modèles avec retard fournissent des résultats plus précis et réalistes que leurs homologues sans retard.

À notre connaissance l'apparition de ces équations remonte au 18-ème siècle, elle est due à J. Bernoulli, L. Euler, J.L. Lagrange, P. Laplace, S. Poisson et d'autres : Par exemple, en 1728 dans ses expériences sur la corde vibrante et en partant d'une équation aux dérivées partielles de type hyper bolique, Bernoulli a trouvé l'équation à retard suivante :

$$y'(t) = y(t-1),$$

Mais malheureusement il décida la tenir pour fausse et il est dit qu'il y a eu plusieurs erreurs à déduire l'équation.

Ce type d'équations est resté cognitive jusqu'au début du 20 siècle et les travaux pionniers qui établissent le début de la théorie ont été dans la géométrie et la théorie des nombres et les premiers papiers traitant les équations fonctionnelles retardées linéaires sont dus à Polossuchin (1910) et Schmidt (1911).

Dans l'âge d'or de l'écologie théorique, l'étude de ce type d'équations connut un essor considérable avec les séries de travaux de V. Volterra, sur les modèles prédateur-proie et les modèles de viscoélasticité. Il a utilisé la méthode d'énergie pour étudier une classe générale d'équations

à retard non linéaires et il a écrit dans son œuvre majeure sur le rôle des êtes héréditaires sur les modèles de la dynamique de plusieurs espèces en interaction.
Il y a eu d'intensives recherches sur le sujet depuis 1940 (surtout en l'ex-Union soviétique). La régulation sur base de modèles linéaires et stationnaires avec retard fut abordée en 1941 par Y. Zypkin. En 1949 ; A. D. Myshkis a posé les bases de la théorie moderne des EDR. En particulier, il fut le premier à formuler l'énoncé du problème de Cauchy pour des équations à retard arbitraire.
Les années cinquante, ont vu une explosion de la théorie qui a été largement développée et les EDR fait partie du vocabulaire des chercheurs travaillant sur la viscoélasticité, les problèmes mécaniques, les réacteurs nucléaires, le lux de chaleur, les réseaux de neurones, la combustion, l'interaction des espèces, les modèles microbiologiques, épidémiologiques ou physiologiques, ainsi que beaucoup d'autres.
La littérature concernant les EDRs dans cette période est abondante et de nombreux travaux ont établi des résultats génériques dont on cite les résultats de Krasovskii, qui a étendu la deuxième méthode de Liapunov aux équations retardées, sans oublier aussi les travaux de Myshkis, Krasovskii , Bellman et Cooke, Halanay.
Les années suivantes ont donné naissance à un grand nombre de travaux dans cette direction, et surtout ceux qui concerne l'analyse de la stabilité des équations différentielles, avec un argument retardé comme Elsgol'ts et Norkin, Hale, Hale et Lunel, Diekmann, Van Gils Lunel et Walther.

Les équations différentielles avec des retards dépendant de l'état attirent l'intérêt des spécialistes car elles proviennent largement de modèles d'application, tels que le problème à deux corps de l'électrodynamique classique [14],[13], le contrôle de position [9],[6], les modèles mécaniques [20], transmission de maladies infectieuses [34], modèles de population [5],[27], la dynamique des systèmes économiques [4], etc. En tant que type spécial d'équations différentielles de retard dépendant de l'état, les équations différentielles itératives ont des caractéristiques distinctives et ont été étudiées ces dernières années, par ex. lissage [31],[10], équivariance [36], analyticité [32],[37],[38], monotonicité [16],[33], convexité [30] ainsi que solution numérique [28]. Dans la théorie des équations différentielles, l'un des problèmes fondamentaux et importants est le problème de la valeur initiale, il existe de nombreux résultats d'existence, [35] sur les équations différentielles itératives spéciales. En 1984, Eder [16] a prouvé l'existence de la solution monotone unique pour la 2-ème équation différentielle itérative

$$\begin{cases} y'(x) = y(y(x)), \\ y(x_0) = x_0,\ x_0 \in [-1, 1], \end{cases} \tag{1}$$

par principe de contraction. Plus tard, M. Fečkan [19] a étudié l'équation différentielle général 2-ème itérative

$$\begin{cases} y'(x) = f(y(y(x))), \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

et obtenu la solution locale appliquant le principe de contraction. En utilisant le théorème du point fixe de Schauder, Wang [35] a obtenu les solutions de l'équation (2) associées à $y(a) = a$, où a est un point final d'un intervalle bien défini. Par conséquent, Ge et Mo [20] ont fourni les conditions suffisantes pour le problème de valeur initiale de (2) associé à

$$y(x_0) = y_0,$$

sur un intervalle compact donné, où les extrémités de l'intervalle sont deux points nuls adjacents de f. La 2-ème équation non autonome

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x), y(y(x))), \\ y(0) = c,\ c > 0, \end{cases} \tag{3}$$

a été étudié par P. Andrzej [1] en utilisant l'approximation successive de Picard, où 0 est l'extrémité gauche du domaine.

Dans notre mémoire, nous nous intéressons aux travaux de *EL-Sayed A.M.A et Ebead H.R* [18, 17] où ils ont étudié le problème

$$(P) \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(g(t, x(t)))), \quad t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \in [0, T], \end{cases} \tag{4}$$

Sous deux conditions différentielles sur la fonction retard g donée comme suit
(1) $g : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \to [0, T]$ est une fonction continue et $g(t, x(t)) \leqslant t$.
(2) $g : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \to [0, T]$ est une fonction continue et $g(t, x(t)) \leqslant x(t)$. Le travail de ce mémoire est alors divisé en trois chapitres principaux :

$\star$ Dans le premier chapitre : ce titre qui nommé préliminaire nous avons donné quelques définitions et théorèmes par exemple :

— Théorème du point fixe de schauder.

— Théorème d'Arzela-Ascoli.

$\star$ Dans le deuxième chapitre, nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution, et sa dépendance continue sur les données initiales positives d'un problème de valeur initiale d'une équation différentielle avec retard dépendant t, et l'unicité de cette solution :

$$(P)\begin{cases}\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(g(t, x(t)))), \quad t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \in [0, T],\end{cases} \tag{5}$$

ou $g : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \to [0, T]$ est une fonction continue et $g(t, x(t)) \leqslant t$.
$\star$ Dans le troisième chapitre, nous traitons l'existence et l'unicité de la solution unique positive d'un problème de valeur initiale d'une équation différentielle avec retard auto-référence (dépendant $x(t)$) *i.e.* $g : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \to [0, T]$ est une fonction continue et $g(t, x(t)) \leqslant x(t)$.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRE

Le but de ce chapitre est de donner les definitions et les resultats essentielles utilisers dans ce memoire

1.0.1 Fonction bornée

Définition 1.0.1. *Une fonction f définie sur un ensemble X à valeurs réelles ou complexes est appelée bornée si l'ensemble de ses valeurs est borné. Autrement dit, il existe un nombre réel M tel que :*

$$|f(x)| \leq M,$$

pour tout x dans X (on remarque que M est nécessairement positif). Une fonction qui n'est pas bornée est dite non bornée. Si f est à valeurs réelles et si $f(x) \leq A$ pour tout x dans X, alors la fonction est dite majorée par A. Si $f(x) \geqslant B$ pour tout x dans X, alors la fonction est dite minorée par B. Une fonction à valeurs réelles est bornée si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée. Un cas particulier important est celui d'une suite bornée, où X est considéré comme l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$. Ainsi une suite : $f = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ est bornée s'il existe un nombre réel M tel que :

$$|a_n| \leq M,$$

pour chaque entier naturel n. L'ensemble de toutes les suites bornées forme l'espace des suites bornées, noté l^∞. La définition de borne peut être généralisée aux fonctions $f : X \to Y$ à valeurs dans un espace plus général Y en exigeant que l'image $f(x)$ soit un ensemble borné dans Y.

1.0.2 Fonction continue

Définition 1.0.2. *Soit* $f : D \to \mathbb{R}$

Soit $x_0 \in D$

• f *continue en* $x_0 \to f$ *a une limite finie en* x_0 *(qui est alors* $f(x_0)$*)*

$\Leftrightarrow f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$

$\Leftrightarrow f(x_0 + h) \xrightarrow[h \to 0]{} f(x_0)$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$

• *On dit que* f *est continue (sur* D*) lorsque* f *est continue en tout point* x_0 *de* D*, c'est-à-dire :*

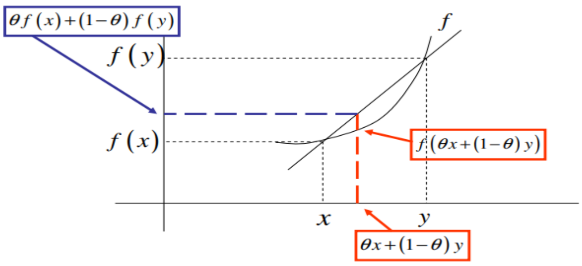
$$\forall x_0 \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon),$$

1.0.3 Fonctions et ensembles convexes

Définition 1.0.3. *Étant donné un ensemble convexe* $X \subset \mathbb{R}^n$*, une fonction a valeurs réelles* $f : X \to \mathbb{R}^1$ *est convexe si pour toute pair de points* $x, y \in X$*,*

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta)f(y), \quad \forall \theta \in [0,1]$$

$$x(\theta t_1 + (1-\theta)t_2) \leq \theta x(t_1) + (1-\theta)x(t_2), \quad \forall \theta \in [0,1]$$



1.0.4 Ensemble fermé

Définition 1.0.4. *Un ensemble* F *est fermé si et seulement si la limite (dans* E*) de toute suite généralisée à valeurs dans* F *appartient à* F*. L'espace* E *est dit séquentiel si cette caractérisation de ses fermés reste vraie en remplaçant « suite généralisée » par « suite ». Tout espace métrique est séquentiel.*

1.0.5 Fonction uniformément bornée

Définition 1.0.5. *Ça ne veut rien dire pour une fonction toute seule, l'expression "uniformément borné" ne peut s'appliquer qu'à un ensemble de fonctions, ou une suite de fonctions, alors cela veut dire que toutes ces fonctions sont bornées, avec des bornes "uniformes", c'est-à-dire que ces bornes sont les mêmes pour toutes ces fonctions.*
Considérons par exemple, une suite de fonctions réelles $(f_n), \quad n \in \mathbb{N}$.
Dire que pour chaque n*, la fonction* f_n *est bornée signifie que, il existe des bornes* $A(n)$ *et* $B(n)$ *(qui peuvent dépendre de* n*, mais pas de* x*) telles que, pour tout* x *:*

$$A(n) < f_n(x) < B(n).$$

Dire que la suite f_n *est uniformément bornée signifie qu'il existe des bornes* A *et* B*, telles pour tout* x *et pour tout* n

$$A < f_n(x) < B.$$

1.0.6 Fonction compacte

Définition 1.0.6. *Soit* K *une partie d'un espace métrique* E*. On dit que* K *est compacte s'il vérifie la propriété (Propriété de Borel-Lebesgue) de tout recouvrement de* K *par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

1.0.7 Equicontinuité

Définition 1.0.7. *Soient* $(X, d), (Y, d')$ *deux espaces métriques.Une partie* H *de* $F(X, Y)$ *est dite équicontinue au point* $x \in X$ *si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x' \in X, \forall f \in H : \|x - x'\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(x')\| \leq \varepsilon$$

• H *est dite équicontinue sur* X *si elle est équicontinue en tout point* $x \in X$.

1.0.8 Application lipschitzienne

Définition 1.0.8. *Soient* $(X_1, \|.\|_{X_1})$*,* $(X_2, \|.\|_{X_2})$ *deux espaces vectoriels normés, et* $f : X_1 \to X_2$ *une application. On dit que* f *est lipschitzienne si :*

$$\exists k > 0, \forall x, y \in X_1, \|f(x) - f(y)\|_{X_2} \leq k\|x - y\|_{X_1}$$

• k *est appelé le rapport de lipschizité de la fonction* f.

Proposition 1.0.1. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Si f est lipschitzienne, alors f est absolument continue.*

1.1 Théorème de point fixe de Schauder

Le théorème de point fixe de Schauder élaboré en 1930, assure l'existence d'au moins un point fixe pour une application continue sur un convexe compact dans un espace de Banach[7].

Théorème 1.1.1. *Soit M un sous ensemble convexe, fermé, borné et non vide d'un espace de Banach E et $T : M \to E$ une application compacte.*
Alors T possède un point fixe.

Remarque 1.1.1. *Si M est compact et convexe, il suffit que T soit continue pour avoir un point fixe pour T.*

1.2 Théorème d'Ascoli-Arzèla

Ci-dessous on rappelle le théorème d'Ascoli-Arzèla qui est un outil classique pour montrer qu'une partie de l'espace des fonctions continues sur un compact est relativement compacte [7].

Définition 1.2.1. *Soit M un sous ensemble de $E = C([a, b], \mathbb{R}), M$ est dit équicontinue si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in [a, b], \quad \exists \delta > 0, \forall y \in [a, b], \quad (\|x - y\| < \delta) \Rightarrow (\forall f \in M, |f(x) - f(y)| < \varepsilon,)$$

Exemple 1.2.1. *Si k est un nombre réel positif, alors l'ensemble des fonctions lipschitziennes de E dans $\mathbb{R}$ de rapport k est équicontinu. En effet, pour ε fixé, il suffit de prendre :*

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{M}.$$

Théorème 1.2.1. *Soit $\mathbb{C}([a, b], \mathbb{R}); -\infty < a < b < +\infty$; l'espace des fonctions continues définies sur le compact $[a; b]$ à valeurs réelles muni de la norme :*

$$\|u\| = \max_{a \leq x \leq b} |u(t)|.$$

Une partie F de $\mathbb{C}([a, b], \mathbb{R})$ est relativement compacte dans $\mathbb{C}([a, b], \mathbb{R})$ si et seulement si elle est uniformément bornée et équicontinue.

Remarque 1.2.1. *Le Théorème d'Ascoli-Arzela ne permet de caractériser que les ensembles relativement compacts de $\mathbb{C}(E_1, \mathbb{K})$, (avec E_1 compact et métrique, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et non les ensembles relativement compacts de n'importe quel espace de Banach.*

Exemple 1.2.2. *Soient k_1 et k_2 deux réels strictement positifs. Le sous-ensemble F des fonctions réelles continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ qui vérifient :*

$$|f(t)| \leq k_1 \text{ et } sup|f'(t)| \leq k_2,$$

pour tout $t \in [a, b]$ est relativement compact dans $\mathbb{C}([a, b], \mathbb{R})$.
En effet, pour tout $f \in F$; le théorème des accroissements finis, prouve que pour tout $t_0, t \in [a, b]$ il existe $c \in]t_0, t[$ tel que :

$$|f(t) - f(t_0)| = |f'(c)||t - t_0|,$$

Donc $|f(t) - f(t_0)| \leq k_2|t - t_0|$. On fixe $t_0 \in [a, b]$, soit $\varepsilon > 0$ et $\eta = \frac{\varepsilon}{k_2}$, alors

$$\forall t \in [a, b], \quad |t - t_0| \leq \eta \Longrightarrow |f(t) - f(t_0)| \leq \varepsilon.$$

Ce qui est exactement l'équicontinuité de F en t_0. Comme nous pouvons prendre pour t_0 n'importe quel point de $[a, b]$, on en déduit que F est équicontinue.
On a $|f(t)| \leq k_1$ pour tout $f \in F$ ce qui implique $\|f\|_\infty \leq k_1$ et partant

$$\forall f \in F, \quad f \in B'(0, k_1),$$

i.e.

$$F \subset B'(0, k_1).$$

D'où la bornitude de F.
Finalement, Comme F est borné et équicontinue, alors le Théorème d'Ascoli-Arzela assure que F est relativement compact.

1.3 Condition Caratheodory

On présente dans cette section quelques résultats connus sur l'existence et L'unicité de solutions au sens de Carathéodory d'un problème de Cauchy.

1.3.1 Problème de Cauchy

Définition 1.3.1. *Soit $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On appelle solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

Toute application $t \to x(t)$ continue, différentiable en tout point $t \in I \subset \mathbb{R}^+$ telle que $x(0) = x_0$ et qui est sur l'intervalle I satisfait la relation $x' = f(t,x)$.

Une fonction $t \to x(t)$ est solution du problème de Cauchy si et seulement si

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(x))ds, \forall t \in I, \tag{1.2}$$

Remarquons que si la fonction $f(t,x)$ est discontinue en t et continue en x alors la fonction qui satisfait l'équation (1.3.1) ne peut pas être une solution de l'équation $x' = f(t,x)$, dans ce cas en utilisant la notion de l'intégrale de Lebesgue on obtient la définition d'une solution qui est à la base de la théorie des équations différentielles au sens de Carathéodory.

Définition 1.3.2. *L'équation $x' = f(t,x)$ où $x(t)$ est un scalaire ou un vecteur et la fonction f satisfait les conditions de Carathéodory est appelée U équation de Carathéodory.*

Définition 1.3.3. *Une fonction $x(t)$ définie sur un intervalle (fermé et borné) I est une solution de l'équation de Carathéodory si elle est absolument continue sur chaque intervalle $[\alpha, \beta] \subset I$ et elle satisfait l'équation $x' = f(t,x)$ presque partout sur I ou si elle satisfait l'équation intégrale (1.3.1) pour $t_0 \in I$ en satisfaisant les conditions de Carathéodory.*

Lemme 1.3.1. *Soit la fonction f qui satisfait les conditions de Carathéodory et soit la fonction $x(t)$ qui est mesurable sur $I = [a,b]$ alors la fonction composée $f(t, x(t))$ est intégrable sur I.*

Théorème 1.3.1. ***Théorème d'existence de solutions au sens de Carathéodory*** *[26]. Pour $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + a$ et $|x - x_0| \leqslant b$, supposons que la fonction $f(t,x)$ satisfait les conditions de Carathéodory, alors il existe une solution du problème de Cauchy (1.1) dans un intervalle fermé $[t_0, t_0 + d]$ où $d > 0$.*
Dans ce cas on définie un nombre arbitraire d qui satisfait l'inégalité :

$$\varphi(t_0 + d) \leqslant b \quad \text{où } 0 < d < a \quad \text{avec } \varphi(t) = \int_{t_0}^t m(s)ds, \tag{1.3}$$

Théorème 1.3.2. ***Théorème de convergence dominée de Lebesgue***.
Soit $(f_n)_{n\in N}$ *une suite de fonctions mesurables sur l'espace mesuré* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, qui converge simplement* $-p.p.$ *(pour* μ*) vers une fonction* f*. Supposons qu'il existe une fonction intégrable positive* $g : X \to \bar{R_+}$*, dite dominante, telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g - p.p.$$

Alors :

1. f *et* f_n *sont intégrables (pour tout* $n \in \mathbb{N}$*).*
2. $\lim\limits_n \int |f_n - f| d\mu = 0$ *(autrement dit* $\|f - f_n\|_1 \to 0$ *lorsque* $n \to +\infty$*).*
3. $\lim\limits_n \int f_n d\mu = \int f d\mu$.

CHAPITRE 2

SOLUTION POSITIVES D'UN PROBLÈME DE VALEUR INITIALE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE AVEC RETARD $G(T, X(T)) \leqslant T$

Dans ce chapitre on va étudier l'existence et l'unicité de la solution positive du problème de valeur initiale de l'équation suivant :

$$(P)\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(g(t, x(t)))), \quad t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \in [0, T] \end{cases} \tag{2.1}$$

On considère $g(t, x(t)) \leqslant t$, supposons que la fonction $f : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$et $g : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \to [0, T]$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $f : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ satisfait la condition caratheodory.
2. Il existe une fonction mesurable bornée $m : [0, T] \to \mathbb{R}^+$ tel que $M = \sup_{t\in[0,T]} |m(t)|$ et une constante $b \geqslant 0$ telle que :
$$|f(t, x)| \leqslant |m(t)| + b|x|.$$
3. $\sup_{t\in[0,T]} |f(t, 0)| \leqslant M$.
4. $bT < 1$.

   On définit l'ensemble S_L de $C([0, T])$ par

$$S_L = \{x \in C([0, T]) : |x(t_2) - x(t_1)| \leqslant L|t_2 - t_1|\},$$

où L est une constante donnée par :

$$L = \frac{M + b|x_0|}{1 - bT},$$

5. $|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant b|x - y|$.

6. $g : [0,T] \times \mathbb{R}^+ \to [0,T]$ est continue et $g(t, x(t)) \leqslant t$.

7. Il existe une constante $k \in (0,1)$ tels que

$$|g(t,x) - g(t,y)| \leqslant k|x - y|.$$

2.1 Existence de solution

Dans le théorème suivant on va montrer que le problème (P) admet une solution.

Théorème 2.1.1. *Si les hypothèse (1),(2),(4),(6) sont satisfaites, alors le problème (P) a au moins une solution positive $x \in S_L$ de $C([0,T])$.*

Preuve 1. *Soit $x \in S_L$ une solution du problème (P). En intégrant l'équation différentielle (2.1), nous obtenons l'équation intégrale correspondante.*

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(g(t, x(s))))ds > 0, \quad t \in [0,T] \tag{2.2}$$

$x(t)$ est positive car $x_0 > 0$ et $f : [0,T] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$.
Étape 1 *:*
Montrons que S_L est un sous ensemble non vide fermé borné et convexe de $C([0,T])$. En effet,
• *$0 \in S_L$ alors, S_L non vide.*
• *S_L **est fermé** : soit (x_n) une suite dans S_L qui converge vers l, supposons que $l \in S_L$, alors pour touts $t_1, t_2 \in [0,T]$, on a*

$$\begin{aligned} |l(t_1) - l(t_2)| &= |\lim_{n\to+\infty}(x_n(t_1) - x_n(t_2))| \\ &= \lim_{n\to+\infty}|(x_n(t_1) - x_n(t_2))| \\ &\leqslant \lim_{n\to+\infty} L|t_1 - t_2|, \end{aligned}$$

car $x_n \in S_L$, d'où

$$|l(t_1) - l(t_2)| \leqslant L|t_1 - t_2|.$$

Donc $l \in S_L$ *est* S_L *est fermée.*

• S_L ***est bornée*** *: Soit* $x \in S_L$*, comme* $x(0) = x_0 \in [0,T]$*. Alors*

$$\begin{aligned}|x(t) - x(0)| &= |x(t) - x_0| \\ &\leqslant L|t-0|,\end{aligned}$$

donc

$$|x(t)| \leqslant Lt + x_0 \leqslant LT + T = T(L+1), t \in [0,T],$$

où $\|x\| = \sup\limits_{t\in[0,T]} |x(t)| \leqslant T(L+1)$
d'où S_L *est bornée.*

•S_L ***est convexe*** *:*
Soit $x_1, x_2 \in S_L$ *et* $\alpha \in [0,1]$*. On a :* $\forall t_1, t_2 \in [0,T]$ *tel que*

$$|x_1(t_2) - x_1(t_1)| \leqslant L|t_2 - t_1|,$$

et

$$|x_2(t_2) - x_2(t_1)| \leqslant L|t_2 - t_1|,$$

donc

$$|\alpha(x_1(t_2) - x_1(t_1))| \leqslant \alpha L|t_2 - t_1|,$$

et

$$|(1-\alpha)(x_2(t_2) - x_2(t_1))| \leqslant (1-\alpha)L|t_2 - t_1|,$$

par addition on trouve :

$$|[\alpha x_1(t_2) + (1-\alpha)x_2(t_2)] - [\alpha x_1(t_1) + (1-\alpha)x_2(t_1)]| \leqslant L|t_2 - t_1|$$

$$|(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)(t_2) - (\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)(t_1)| \leqslant L|t_2 - t_1|,$$

d'ou $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in S_L$*.*
Donc l'ensemble S_L *est convexe.*

Étape 2 *: Définissons l'opérateur* F *associé à l'équation (2.2) par :*

$$Fx(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(g(t, x(s))))ds.$$

Montrons que l'opérateur F *est définie de* S_L *dans* S_L*, de plus il est uniformément borné, compact.*

1- F est uniformément borné *: Soit $x \in C([0,T])$, alors pour $t \in [0,T]$ on a*

$$\begin{aligned}
|Fx(t)| &\leqslant |x_0| + \int_0^t |f(s, x(g(s, x(s))))| ds \\
&\leqslant |x_0| + \int_0^t \Big(|m(s)| + b|x(g(s, x(s)))| \Big) ds \\
&\leqslant |x_0| + \int_0^t \Big(M + b|x(g(s, x(s)))| \Big) ds,
\end{aligned}$$

comme, $x \in S_L$ on a

$$\begin{aligned}
|x(g(s, x(s)))| - |x_0| &\leqslant |x(g(s, x(s))) - x(0)| \\
&= L|g(t, x(t))|.
\end{aligned}$$

Donc

$$|x(g(s, x(s)))| \leqslant Lg(t, x(t))| + |x_0|. \tag{2.3}$$

Alors

$$\begin{aligned}
|Fx(t)| &\leqslant |x_0| + \int_0^t (M + b(L|g(s, x(s))| + |x_0|)) ds \\
&\leqslant |x_0| + \int_0^t (M + b(Ls + |x_0|)) ds \\
&\leqslant |x_0| + (M + b(LT + |x_0|))t \\
&\leqslant |x_0| + ((M + b|x_0|) + bLT)t \\
&\leqslant |x_0| + (L(1 - bT) + bLT)t \\
&\leqslant LT + |x_0|.
\end{aligned}$$

Cela prouve que les fonctions de classe(Fx) sont uniformément bornées sur S_L.

2 - F est compact *: Soit $x \in S_L$ et $t_1, t_2 \in [0,T]$ avec $t_1 < t_2$ tels que $|t_1 - t_2| < \delta$ alors :*

$$\begin{aligned}
|Fx(t_2) - Fx(t_1)| &= |\int_{t_1}^{t_2} f(s, x(g(s, x(s)))) ds| \\
&\leqslant \int_{t_1}^{t_2} |f(s, x(g(s, x(s))))| ds \\
&\leqslant \int_{t_1}^{t_2} (M + b|x(g(s, x(s)))|) ds \\
&\leqslant \int_{t_1}^{t_2} (M + b(L|g(s, x(s))| + |x_0|)) ds \\
&\leqslant \int_{t_1}^{t_2} (M + b(Ls + |x_0|)) ds \\
&\leqslant L|t_2 - t_1|.
\end{aligned}$$

Donc $F : S_L \to S_L$ et la classe de fonction (Fx) Sont équicontinue sur S_L. Par le Théorème d'Arzèla Ascoli [7], F est relativement compact sur S_L.

3- F est continue : *Soit $(x_n) \subset S_L$ une suite qui converge vers $x \in [0,T]$, i.e,*

$$|x_n(t) - x(t)| \leqslant \varepsilon_1 \Rightarrow |x_n(g(t, x_n(t))) - x(g(t, x(t)))| \leqslant \varepsilon_2,$$

pour tout $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geqslant 0$ arbitraire, on peut obtenir

$$\begin{aligned}
|x_n(g(t,x_n(t))) - x(g(t,x(t)))| &= |x_n(g(t,x_n(t))) - x_n(g(t,x(t))) + x_n(g(t,x(t))) - x(g(t,x(t)))| \\
&\leqslant |x_n(g(t,x_n(t))) - x_n(g(t,x(t)))| + |x_n g(t,x(t)) - x(g(t,x(t)))| \\
&\leqslant L|(g(t,x_n(t))) - g(t,x(t))| + |x_n g(t,x(t)) - x(g(t,x(t)))| \\
&\leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc $x_n(g(t, x_n(t)))$ converge vers $x(g(t, x(t)))$. De la continuité de la fonction f, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} f(t, x_n(g(t, x_n(t)))) = f(t, x(g(t, x(t)))).$$

D'après le Théorème de convergence dominé de Lebesgues, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} x_n(t) = x_0 + \lim_{x\to\infty} \int_0^t f(s, f(s, x_n(g(s, x_n(s))))) ds = x_0 + \int_0^t f(s, x(g(s, x(s)))) ds.$$

Alors l'opérateur F est continu.

Étape 3 *: Maintenant toutes les conditions du Théorème du point fixe de schauder [7] sont satisfaites, alors l'opérateur F a au moins un point fixe $x \in S_L$. Par conséquent, il existe au moins une solution positive $x \in C([0,T])$ de l'équation intégrale (2.2).*

Pour compléter la démonstration, On dérivons l'équation intégrale (2.2) nous obtenons l'équation différentielle (1). Si on pose $t = 0$ dans (2.2), nous obtenons la donnée initiale (2).

D'ou on aura l'équivalence entre le problème (P) et l'équation intégrale (2.2). Par conséquent le problème (P) a au moins une solution positive $x \in C([0,T])$.

2.2 Unicité de la solution

Dans cette partie, nous prouvons l'unicité de la solution de l'équation intégrale (2.2).
Supposons que les hypothèses suivantes :

3. $\sup_{t\in[0,T]} |f(t, 0) \leqslant M$.
5. $|f(t, x) - f(t, y)| \leqslant b|x - y|$.

7. Il existe une constante $k \in (0,1)$ tell que

$$|g(t,x) - g(t,y)| \leqslant k|x-y|.$$

Théorème 2.2.1. *Soit les hypothèses (1),(4),(6) du Théorème 2.1.1 et (3),(5) et (7) satisfaites, si $bT(LK+1) < 1$, alors la solution de l'équation intégrale (2.2) est unique.*

Preuve 2. *Soit $y_0 = 0$ dans l'équation (2.3) on obtient :*

$$\begin{aligned}
\|x(t) - y(t)\| &= |\int_0^t f(s, x(g(s,x(s))))ds - \int_0^t f(s, y(g(s,y(s))))ds| \\
&\leqslant \int_0^t |f(s, x(g(s,x(s)))) - f(s, y(g(y,y(s))))|ds \\
&\leqslant b\int_0^t |x(g(s,x(s))) - y(g(s,y(s))))|ds \\
&\leqslant b\int_0^t |x(g(s,x(s))) - x(g(s,y(s)))|ds + b\int_0^t |x(g(s,y(s))) - y(g(s,y(s)))|ds \\
&\leqslant bL\int_0^t |g(s,x(s)) - g(s,y(s))|ds + b\int_0^t |x(g(s,y(s))) - y(g(s,y(s)))|ds \\
&\leqslant bLk\int_0^t |x(s) - y(s)|ds + b\int_0^t |x(g(s,y(s))) - y(g(s,y(s)))|ds \\
&\leqslant bLk\|x-y\|\int_0^t 1ds + b\|x-y\|\int_0^t 1ds \\
&\leqslant bLk\|x-y\|t + b\|x-y\|t \\
&\leqslant bLkT\|x-y\| + bT\|x-y\| \\
&= bT(LK+1)\|x-y\|,
\end{aligned}$$

et

$$\|x-y\| \leqslant bT(Lk+1)\|x-y\|.$$

Comme $bT(LK+1) < 1$, il s'en suit que $x(t) = y(t)$, $t \in C([0,T])$, et la solution de l'équation (2.2) est unique, d'après le Théorème2.2.1.

2.3 Dépendance continue

Nous montrons ici que la solution de l'équation intégrale (2.2) dépend continuellement des données initiales x_0 et de la fonction retardée g.

2.3.1 Dépendance continue par rapport à condition initial

Définition 2.3.1. *La solution de l'équation intégrale (2.2) dépend continuellement de la donnée initiales x_0 si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |x_0 - x_0^*| \leqslant \delta \Rightarrow \|x - x^*\| \leqslant \varepsilon, \tag{2.4}$$

où

x est la solution du problème avec condition initiale x_0.

x^* est la solution du problème avec condition initiale x_0^*.

Donc on a

$$x^*(t) = x_0^* + \int_0^t f(s, x^*(g(s,(x^*(s)))))ds, \quad t \in [0,T] \tag{2.5}$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(g(s,(x(s)))))ds, \quad t \in [0,T]$$

On Suppose les hypothèses suivantes :

• $f : [0,T] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est de carathéodory, c'est-à-dire que f est mesurable en t pour tout $x \in C([0,T])$ et continue en x pour presque tout $t \in [0,T]$.

• $g : [0,T] \times \mathbb{R}^+ \to [0,T]$ est continue et $g(t, x(t)) \leqslant t$.

• $bT < 1$ On définir l'ensemble S_L de $C([0,T])$ par

$$S_L = \{x \in C([0,T]) : |x(t_2) - x(t_1)| \leqslant L|t_2 - t_1|\},$$

où L est une constante définir par :

$$L = \frac{M + b|x_0|}{1 - bT}.$$

• $|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant b|x - y|$,

$\sup\limits_{t\in[0,T]} |f(t,0) \leqslant M.$

• Il existe une constante $k \in (0,1)$ tell que

$$|g(t,x) - g(t,y)| \leqslant k|x - y|.$$

Théorème 2.3.1. *Supposons que les hypothèses du théorème 2.2.1 sont satisfaites, alors la solution de (2.2) dépend continuellement des données initiales x_0.*

Preuve 3. *Soit x, x^* de solution des équations intégrale (2.2) et (2.5), alors pour tout $t \in [0,T]$ on a :*

$$\begin{aligned}
|x(t) - x^*(t)| &= |x_0 + \int_0^t f(s, x(g(s, x(s))))ds - x_0^* + \int_0^t f(s, x^*(g(s, x(s))))ds| \\
&\leqslant |x_0 - x_0^*| + \int_0^t |f(s, x(g(s, x(s)))) - f(s, x^*(g(s, x^*(s))))|ds \\
&\leqslant |x_0 - x_0^*| + b\int_0^t |x(g(s, x(s))) - x^*(g(s, x^*(s)))|ds \\
&\leqslant |x_0 - x_0^*| + bL\int_0^t |g(s, x(s)) - g(s, x^*(s))|ds + b\int_0^t |x(g(s, x^*(s))) - x^*(g(s, x^*(s)))|ds \\
&\leqslant |x_0 - x_0^*| + bLK\int_0^t |x(s) - x^*(s)|ds + b\int_0^t |x(g(s, x^*(s))) - x^*(g(s, x^*(s)))|ds \\
&\leqslant \delta + bLk\|x - x^*\|T + b\|x - x^*\|T \\
&\leqslant \delta + bT(LK+1)\|x - x^*\|,
\end{aligned}$$

donc

$$\sup_{t\in[0,T]} |x(t) - x^*(t)| \leqslant \delta + bT(LK+1)\|x - x^*\|$$

$$\|x - x^*\| \leqslant \delta + bT(LK+1)\|x - x^*\|,$$

alors

$$\|x - x^*\| \leqslant \frac{\delta}{(1 - bT(Lk+1))},$$

puisque $bT(LK+1) < 1$, il s'ensuite que la solution de (2.2) dépend continuellement des données initiales x_0.

2.3.2 Dépendance continue par rapport à g

Définition 2.3.2. *La solution de l'équation intégrale (2.2) dépend continuellement de la fonction g si :*
$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0$

$$|g(t, x(t)) - g^*(t, x(t))| \leqslant \delta \Rightarrow \|x - x^*\| \leqslant \varepsilon, \tag{2.6}$$

et

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x^*(g^*(s, (x^*(s)))))ds, \quad t \in [0,T].$$

Théorème 2.3.2. *Si les hypothèses du Théorème 2.2.1 sont satisfaites, alors la solution de (2.2) dépend continuellement de la fonction g.*

Preuve 4. *Soit x, x^* les solutions des équations intégrales (2.2) et (2.5). Alors on a :*

$$\begin{aligned}
|x(t)-x^*(t)| &= |x_0+\int_0^t f(s,x(g(s,x(s))))ds - x_0 - \int_0^t f(s,x^*(s,x^*(s)))ds| \\
&\leqslant \int_0^t |f(s,x(g(s,x(s)))) - f(s,x^*(s,x^*(s)))|ds \\
&\leqslant b\int_0^t |x(g(s,x(s))) - x^*(g^*(s,x^*(s)))|ds \\
&\leqslant b\int_0^t |x(g(s,x(s))) - x(g^*(s,x^*(s)))|ds + b\int_0^t |x(g^*(s,x^*(s))) - x^*(g^*(s,x^*(s)))|ds \\
&\leqslant bL\int_0^t |g(s,x(s)) - g^*(s,x^*(s))|ds + b\|x-x^*\|\int_0^t 1ds \\
&\leqslant bL\int_0^t |g(s,x(s)) - g^*(s,x^*(s))|ds + b\|x-x^*\|t \\
&\leqslant bL\int_0^t |g(s,x(s)) - g(s,x^*(s))|ds + bL\int_0^t |g(s,x^*(s)) - g^*(s,x^*(s))|ds + b\|x-x^*\|T \\
&\leqslant bLK\int_0^t |x(s)-x^*(s)|ds + \delta bL\int_0^t 1ds + b\|x-x^*\|T \\
&\leqslant bLK\|x-x^*\|\int_0^t 1ds + \delta bLt + b\|x-x^*\|T \\
&\leqslant bLK\|x-x^*\|t + \delta bLT + b\|x-x^*\|T \\
&\leqslant bLKT\|x-x^*\| + \delta bLT + b\|x-x^*\|T \\
&\leqslant bT(1+Lk)\|x-x^*\| + \delta bLT,
\end{aligned}$$

et

$$\|x-x^*\| \leqslant bT(1+Lk)\|x-x^*\| + \delta bLT$$
$$\|x-x^*\| \leqslant \frac{\delta bLT}{(1-bT(Lk+1))},$$

puisque $bT(Lk+1)<1$.
Il s'en suit que la solution de (2.2) dépend continuellement de la fonction g.

Exemple 2.3.1. *Considérons l'équation différentielle non linéaire :*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t+5} + \frac{3}{4}\left|x\left(\frac{t\ sin^2 x(t)}{2+x^4(t)}\right)\right|, \qquad t\in[0,1] x(0)=\frac{1}{5}, \end{cases} \tag{2.7}$$

donc $f:[0,1]\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ définie par

$$f(t,x) = \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t+5} + \frac{3}{4}|x|,$$

et $g:[0,1]\times\mathbb{R}^+\to[0,1]$ définie par

$$g(t,x) = \frac{tsin^2 x}{2+x^4},$$

On va montrer que le problème (2.7) admet une solution unique, alors il suffit de vérifier que les conditions (1),(2),(4),(6) sont satisfaites :

1. *on montre que f est lipschitzienne il suffit de montrer que* $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ *et* $t \in [0,1]$, $\exists ! b > 0$ *tel que*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant b|x-y|.$$

On a

$$\begin{aligned}\Big|f(t,x) - f(t,y)\Big| &= \left|\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t+5} + \frac{3}{4}|x| - \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t+5} + \frac{3}{4}|y|\right| \\ &\leqslant \left|\frac{3}{4}|x| - \frac{3}{4}|y|\right| \\ &\leqslant \frac{3}{4}\Big||x| - |y|\Big| \\ &\leqslant \frac{3}{4}|x-y|,\end{aligned}$$

alors $\exists b = \frac{3}{4}$ *tel que* $\Big|f(t,x(t)) - f(t,y(t))\Big| \leqslant b\Big|x(t) - y(t)\Big|$.
D'où f est une fonction lipschitzienne donc f est continue.
On remarque que le constante de lipschizité est le même par rapport à la deuxième variable de la croissance linéaire.

2. *On va montrer qu'il existe une fonction bornée mesurable m(t) et une constante* $b \geqslant 0$ *telle que :*

$$|f(t,x)| \leqslant |m(t)| + b|x|,$$

on a

$$\begin{aligned}|f(t,x)| &= \left|\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t+5} + \frac{3}{4}|x|\right| \\ &\leqslant \left|\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t+5}\right| + \frac{3}{4}|x|,\end{aligned}$$

donc $m(t) = \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t+5}$ *et* $b = \frac{3}{4}$.
Posons
$M = \sup_{t\in[0,1]} |m(t)| = \sup_{t\in[0,1]} \left|\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t+5}\right| = \frac{1}{5}$

3. *Maintenant On montre que* $g : [0,1] \times \mathbb{R}^+ \to [0,1]$ *est continue et* $g(t, x(t)) \leqslant t$
   On a

$$g(t, x(t)) = \frac{tsin^2x(t)}{2 + x^4(t)},$$

   g est une fonction continue car c'est une division de deux fonctions continues.
   D'autre part on a :

$$\begin{aligned} g(t, x(t)) &= \frac{tsin^2x(t)}{2 + x^4(t)} \\ &\leqslant \frac{t}{2 + x^4(t)}. \end{aligned}$$

   Donc

$$g(t, x(t)) \leqslant t.$$

4. *On va montrer que* $bT < 1$
   on a $b = \frac{3}{4}$ *et* $T = 1$ *, donc* $bT < 1$.
   Alors on définie l'ensemble $S_L = \{x \in C([0,1]) : |x(t_2) - x(t_1)| \leqslant \frac{7}{5}|t_2 - t_1|\}$

$$\begin{aligned} L &= \frac{M + b|x_0|}{1 - bT} \\ &= \frac{\frac{1}{5} + \frac{3}{4}|\frac{1}{5}|}{1 - \frac{3}{4}}, \\ &= \frac{7}{5}. \end{aligned}$$

   D'après le théorème (2.1.1) le problème (2.7) admet une solution positive $x \in S_L$.

Exemple 2.3.2. *On a l'équation différentielle non linéaire suivante*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}ln(1 + \frac{2t}{3}) + \frac{1}{4}\left|x\left(\frac{te^{-2x^4(t)-1}}{1+x^2(t)}\right)\right| & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Soit $f : [0, \frac{1}{2}] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$$f(t, x) = \frac{1}{3}ln(1 + \frac{2t}{3}) + \frac{1}{4}|x|.$$

Soit $g : [0, \frac{1}{2}] \times \mathbb{R}^+ \to [0, \frac{1}{2}]$

$$g(t, x) = \frac{te^{-2x^4-1}}{1 + x^2}.$$

Pour montrer que le problème (2.8) admet une solution unique.

On va vérifier que Les conditions sont : du (1),(2),(4),(6) sont satisfaites :

1. *On va prouver que f est lipschitzienne alors il suffit de montrer que* $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ *et* $t \in [0, \frac{1}{2}]$, $\exists! b > 0$ *tel que*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant b|x-y|.$$

On a

$$\begin{aligned}
\Big|f(t,x) - f(t,y)\Big| &= \left|\frac{1}{3}ln(1+\frac{2t}{3}) + \frac{1}{4}|x| - \frac{1}{3}ln(1+\frac{2t}{3}) - \frac{1}{4}|y|\right| \\
&\leqslant \left|\frac{1}{4}|x| - \frac{1}{4}|y|\right| \\
&\leqslant \frac{1}{4}|x-y|.
\end{aligned}$$

Donc

$$\exists b = \frac{1}{4} \ telque \ \Big|f(t,x(t)) - f(t,y(t))\Big| \leqslant b\Big|x(t) - y(t)\Big|.$$

D'où f est une fonction lipschitzienne alors f est continue.

2. *On montre qu'il existe une fonction bornée mesurablem et une constante $b \geqslant 0$ telle que :*

$$|f(t,x)| \leqslant |m(t)| + b|x|.$$

On a

$$\begin{aligned}
|f(t,x)| &= \left|\frac{1}{3}ln(1+\frac{2t}{3}) + \frac{1}{4}|x|\right| \\
&\leqslant \left|\frac{1}{3}ln(1+\frac{2t}{3})\right| + \frac{1}{4}|x|.
\end{aligned}$$

Donc

$$m(t) = \frac{1}{3}ln(1+\frac{2t}{3}) \ et \ b = \frac{1}{4},$$

posons

$$M = \sup_{t\in[0,\frac{1}{2}]} |m(t)| = \sup_{t\in[0,\frac{1}{2}]} \left|\frac{1}{3}ln\Big(1+\frac{2t}{3}\Big)\right| = \frac{1}{9}.$$

3. *On va prouver que* $g : [0, \frac{1}{2}] \times \mathbb{R}^+ \to [0, \frac{1}{2}]$ *est continue et* $g(t, x(t)) \leqslant t$
On a
$$g(t, x(t)) = \frac{te^{-2x^4(t)-1}}{1+x^2(t)},$$
g est une fonction continue car c'est une division de deux fonctions continues.
D'autre part, on a
$$\begin{aligned} g(t, x(t)) &= \frac{te^{-2x^4(t)-1}}{1+x^2(t)} \\ &\leqslant \frac{t}{1+x^2(t)} \\ &\leqslant t \end{aligned}$$
Donc $g(t, x(t)) \leqslant t$
4. *On montre que* $bT < 1$
on a $b = \frac{1}{4} < 1$, $T = \frac{1}{2}$, *alors* $bT = \frac{1}{8} < 1$.
Et cette condition est remplie.
On définie l'ensemble $S_L = \{x \in C([0, \frac{1}{2}]) : |x(t_2) - x(t_1)| \leqslant L|t_2 - t_1|\}$
$$S_L = \{x \in C([0, \frac{1}{2}]) : |x(t_2) - x(t_1)| \leqslant \frac{8}{63}|t_2 - t_1|\}$$
$$\begin{aligned} L &= \frac{M + b|x_0|}{1 - bT} \\ &= \frac{\frac{1}{9} + \frac{1}{4}|0|}{1 - \frac{1}{8}} \\ &= \frac{8}{63}. \end{aligned}$$

D'après le théorème (2.1.1) le problème (2.8) admet une solution positive $x \in S_L$.

CHAPITRE 3

SOLUTION POSITIVES D'UN PROBLÈME DE VALEUR INITIALE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE AVEC RETARD $G(T, X(T)) \leqslant X(T)$

Dans ce chapitre on va étudier l'existence et l'unicité d'une solution positive du problème de valeur initiale :

$$(P)\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(g(t, x(t)))), \quad t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \in [0, T] \end{cases} \tag{3.1}$$

On considère $g(t, x(t)) \leqslant x(t)$, supposons que la fonction $f : [0, T] \times [0, T] \to \mathbb{R}^+$et $g : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \to [0, T]$ vérifiant les conditions suivantes

1. $f : [0, T] \times [0, T] \to \mathbb{R}^+$ satisfait la condition carathéodory, c'est-à-dire que f est mesurable en t pour tout $x \in C([0, T])$ et continue en x pour presque tout $t \in [0, T]$.
2. il existe une fonction bornée mesurable $m(t)$ et une constante $b > 0$ telle que $|f(t, x)| \leqslant |m(t)| + b|x|$.
3. $|f(t, x) - f(t, y)| \leqslant b|x - y|$.
4. $|f(t, 0)| \leqslant M$.
5. $L = M + bT < 1$.
6. $LT + |x(0)| \leqslant T$.
7. $g : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \to [0, T]$ est continue telque : $g(t, x(t)) \leqslant x(t)$.

8. $|g(t,x) - g(t,y)| \leqslant k|x-y|$.

Quelques exemples pour la fonction g

1. $g(t,x(t)) = \frac{t^2}{a+3x^4(t)}, \quad a \geqslant 0$
2. $g(t,x(t)) = \frac{x^2(t)e^{-ax(t)}}{1+b\ \cos^2 t}, \quad a,b \geqslant 0$
3. $g(t,x(t)) = \frac{x^2(t)+3t}{1+ae^{x^2(t)+t}}, \quad a \geqslant 0$

Existence de solution :

Théorème 3.0.1. *Soit les hypothèses (1),(2),(5),(6),(7) satisfaites alors le problème (P) a au moins une solution $x \in S_L$.*

Preuve 5. *Soit x une solution du problème (P) En intégrant l'équation différentielle 3.1, nous obtenons l'équation intégrale correspondante :*

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(g(t,x(s))))ds > 0, \quad t \in [0,T] \tag{3.2}$$

$x(t)$ est positive car $x_0 > 0$ et $f : [0,T] \times [0,T] \to \mathbb{R}^+$.
Étape 1 *:*
Définir L par $L = M + bT$ et S_L est un sous-ensemble non vide, fermé, borné et convexe de $C([0,T])$.
Définissons l'opérateur F associé à l'équation (3.2) par

$$Fx(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(g(t,x(s))))ds, \quad t \in [0,T]$$

Montrons que l'opérateur F est définie de S_L dans S_L, de plus il est uniformément borné, compact.
1- F est uniformément borné *: Soit $x \in C([0,T])$ alors pour $t \in [0,T]$ on a*

$$\begin{aligned} |Fx(t)| &\leqslant |x_0| + \int_0^t |f(s, x(g(s,x(s))))|ds, \quad t \in [0,T] \\ &\leqslant |x_0| + \int_0^t (m(s) + b|x(g(s,x(s)))|)ds \\ &\leqslant |x_0| + \int_0^t (M + b|x(g(s,x(s)))|)ds. \end{aligned}$$

Comme, $x \in S_L$ *on a*

$$|x(g(t,x(t)))| - |x_0| \leqslant L|x(g(t,x(t))) - x(0)| \leqslant L|g(t,x(t))|$$

Donc

$$|x(g(t,x(t)))| \leqslant L|g(t,x(t))| + |x_0|. \tag{3.3}$$

En utilisant *(3.3) nous obtenons :*

$$\begin{aligned}
|Fx(t)| &\leqslant |x_0| + \int_0^t (M + b(L|x(s)| + |x_0|))ds \\
&\leqslant |x_0| + \int_0^t (M + b(LT + |x_0|))ds \\
&\leqslant |x_0| + (M + b(LT + |x_0|))t \\
&\leqslant |x_0| + (M + bT)T \\
&\leqslant LT + |x_0| \\
&\leqslant T.
\end{aligned}$$

Cela prouve que les fonctions de classe Fx *sont uniformément bornés.*

2- F ***est compact :*** *Soit* $x \in S_L$ *et* $t_1, t_2 \in [0,T]$ *avec* $t_1 < t_2$ *tel que* $|t_1 < t_2| < \delta$ *alors :*

$$\begin{aligned}
|Fx(t_2) - Fx(t_1)| &= \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(g(s,x(s))))ds \right| \\
&\leqslant \int_{t_1}^{t_2} |f(s, x(g(s,x(s))))|ds \\
&\leqslant \int_{t_1}^{t_2} (m(s) + b|x(g(s,x(s)))|)ds \\
&\leqslant \int_{t_1}^{t_2} (M + b|x(g(s,x(s)))|)ds \\
&\leqslant \int_{t_1}^{t_2} (M + b(L|g(s,x(s))| + |x_0|))ds \\
&\leqslant \int_{t_1}^{t_2} (M + b(L|x(s)| + |x_0|))ds \\
&\leqslant \int_{t_1}^{t_2} (M + bT)ds \\
&\leqslant L|t_2 - t_1|.
\end{aligned}$$

Ceci prouve que Fx *est équi-continues.*

D'après le Théorème d'Ascoli-Arzèla [7], F *est compact.*

3- F ***est continue :***

Soit $(x_n) \subset S_L$ *une suite qui converge ver* $x \in [0,T]$ *alors*

$$\begin{aligned}|x_n(g(t,x_n(t))) - x(g(t,x(t)))| &= |x_n(g(t,x_n(t))) - x_n(g(t,x(t))) + x_n(g(t,x(t))) - x(g(t,x(t)))| \\ &\leqslant |x_n(g(t,x_n(t))) - x_n(g(t,x(t)))| + |x_n(g(t,x(t))) - x(g(t,x(t)))| \\ &\leqslant L|g(t,x_n(t)) - g(t,x(t))| + |x_n(g(t,x(t))) - x(g(t,x(t)))| \\ &\leqslant L|g(t,x_n(t)) - g(t,x(t))|.\end{aligned}$$

Ce qui implique que $x_n(g(t,x_n(t)))$ *converge vers* $x(g(t,x(t)))$ *dans* S_L.

Aussi, à partir de la continuité de la fonction par rapport à la $2^{\text{ème}}$ variable on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} f(t,x_n(g(t,x_n(t)))) = f(t,x(g(t,x(t))))$$

$$f(t,x_n(g(t,x_n(t)))) \to f(t,x(g(t,x(t)))).$$

En utilisant l'hypothèse (2) et le théorème de convergence dominé de Lebesgue, nous déduisons que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} x_n(t) &= x_0 + \lim_{n\to+\infty}\int_0^t f(s,x_n(g(t,x_n(t))))ds \\ &= x_0 + \int_0^t f(s,x(g(t,x_n(t))))ds.\end{aligned}$$

Alors F est continue.

Étape 2 :

Maintenant toutes les conditions du Théorème du point fixe de schauder [7] sont satisfaites, alors l'opérateur F a au moins un points fixe.$x \in S_L$. Par conséquent, il existe au moins une solution $x \in C([0,T])$ de l'équation intégrale (3.2).

Maintenant, pour compléter la preuve on dérivons l'équation intégrale (3.2), nous obtenons l'équation differentielle (1). On pose $t = 0$ dans (3.2), nous obtenons les données initiales de le problème (P).

D'où on aura de l'équivalence entre le problème (P) et l'équation intégrale (3.2). Ainsi le problème (P) a au moins une solution positive $x \in C([0,T])$ qui complète la démonstration.

Maintenant, nous avons le corollaire suivant qui généralise les résultats en [2].

Corollaire 3.0.1. *Supposons que les hypothèses du Théorème (3.0.1) satisfaites si*

$$g(t,x(t)) = x(t),$$

alors le problème admet une solution

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(x(s)))ds \quad t \in [0, T],$$

a au moins une solution $x \in C([0, T])$*conséquent le premier problème de valeur*

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(x(t))), \quad t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{3.4}$$

a au moins une solution $x \in C([0, T])$.

3.1 Unicité de la solution

Dans cette section, nous prouvons l'unicité de la solution pour l'équation intégrale (3.2) Supposons que les hypothèses suivantes :

(3) $|f(t, x) - f(t, y)| \leqslant b|x - y|$,

(4) $|f(t, 0)| \leqslant M$,

(8) $|g(t, x) - g(t, y)| \leqslant k|x - y|$,

Théorème 3.1.1. *Soit les hypothèses (1), (2), (3) du Théorème (3.0.1) et et (3), (4), (8) il satisfait, si* $bT(Lk + 1) < 1$, *alors la solution de l'équation (3.2) est unique.*

Preuve 6. *L'hypothèse (2) du Théorème (3.0.1) peut être déduite des hypothèses(3), (4), en mettant* $y = 0$ *dans (3) on obtient :*

$$|f(t, x)| \leqslant b|x| + |f(t, 0)|.$$

Par conséquent, nous en déduisons que toutes les hypothèses du Théorème (3.0.1) sont satisfaites.

Alors la solution de l'équation (3.2) existe. Maintenant supposons x, y *sont deux solutions de (3.2)*

Alors

$$\begin{aligned}
|x(t)-y(t)| &= |\int_0^t f(s,x(g(s,x(s))))ds - \int_0^t f(s,y(g(s,y(s))))ds| \\
&\leqslant b\int_0^t |f(s,x(g(s,x(s)))) - f(s,y(g(s,y(s))))|ds| \\
&\leqslant b\int_0^t |x(g(s,x(s))) - x(g(s,y(s)))|ds + b\int_0^t |x(g(s,y(s))) - y(g(s,y(s)))|ds \\
&\leqslant b\int_0^t |x(g(s,x(s))) - x(g(s,y(s)))|ds + b\int_0^t |x(g(s,y(s))) - y(g(s,y(s)))|ds \\
&\leqslant bL\int_0^t |g(s,x(s)) - g(s,y(s))|ds + b\int_0^t |x(g(s,y(s))) - y(g(s,y(s)))|ds \\
&\leqslant bLk\int_0^t |x(s)-y(s)|ds + b\int_0^t |x(g(s,y(s))) - y(g(s,y(s)))|ds \\
&\leqslant bLk\|x-y\|\int_0^t 1ds + b\|x-y\|\int_0^t 1ds \\
&\leqslant bLk\|x-y\|t + b\|x-y\|t \\
&\leqslant bLkT\|x-y\| + bT\|x-y\| \\
&= bT(Lk+1)\|x-y\|,
\end{aligned}$$

donc

$$\|x(t)-y(t)\| = \sup_{t\in[0,T]} |x(t)-y(t)|$$
$$\sup_{t\in[0,T]} |x(t)-y(t)| \leqslant bT(Lk+1)\|x-y\|$$
$$\|x-y\| \leqslant bT(Lk+1)\|x-y\|.$$

Comme $bT(Lk+1) < 1$, il s'en suit que $x(t) = y(t)$, $t \in C([0,T])$, la solution de l'équation (3.2) est unique d'après le Théorème(3.1.1).

3.2 Dépendance continue

Nous montrons ici que la solution de l'équation (3.2) dépend continuellement des données initiales x_0.

Définition 3.2.1. *La solution de l'équation intégrale (3.2) dépend des données initiales x_0 si*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \quad |x_0 - x_0^* \leqslant \delta \Longrightarrow \|x - x^*\| \leqslant \varepsilon, \tag{3.5}$$

x est la solution du problème avec condition initiale x_0
où x^* est la solution unique de l'équation intégrale.

$$x^*(t) = x_0^* + \int_0^t f(s,x^*(g(s(x^*(s))))) ds, \qquad \forall t \in [0,T] \tag{3.6}$$

Théorème 3.2.1. *Supposons que les hypothèses du Théorème(3.1.1) satisfaites alors la solution (3.2) dépend continuellement de la donnée initiale x_0.*

Preuve 7. *Soit x, x^* deux solutions des équations intégrales (3.2) et (3.6), alors on a pour tout $t \in [0,T]$*

$$\|x(t) - x^*(t)\| = sup_{t\in[0,T]}|x(t) - x^*(t)|,$$

donc

$$\begin{aligned}
|x(t) - x^*(t)| &= |x_0 + \int_0^t f(s, x(g(s, x(s))))ds - x_0^* + \int_0^t f(s, x^*(g(s, x^*(s))))ds| \\
&\leqslant |x_0 - x_0^*| + \int_0^t |f(s, x(g(s, x(s)))) - f(s, x^*(g(s, x^*(s))))|ds \\
&\leqslant |x_0 - x_0^*| + b\int_0^t |x(g(s, x(s))) - x^*(g(s, x^*(s)))|ds \\
&\leqslant |x_0 - x_0^*| + bL\int_0^t |g(s, x(s)) - g(s, x^*(s))|ds \\
&+ b\int_0^t |x(g(s, x^*(s)))) - x^*(g(s, x^*(s)))|ds \\
&\leqslant |x_0 - x_0^*| + bLk\int_0^t |x(s) - x^*(s))|ds \\
&+ b\int_0^t |x(g(s, x^*(s)))) - x^*(g(s, x^*(s)))|ds \\
&\leqslant |x_0 - x_0^*| + bLk\|x - x^*\|\int_0^t 1ds \\
&+ b\|x - x^*\|\int_0^t 1ds \\
&\leqslant |x_0 - x_0^*| + bLk\|x - x^*\|t + b\|x - x^*\|t \\
&\leqslant |x_0 - x_0^*| + bLk\|x - x^*\|T + b\|x - x^*\|T \\
&\leqslant \delta + bLk\|x - x^*\|T + b\|x - x^*\|T \\
&\leqslant \delta + bT(LK + 1)\|x - x^*\|.
\end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{t\in[0,T]} |x(t) - x^*(t)| \leqslant \delta + bT(LK + 1)\|x - x^*\|$$

$$\|x - x^*\| \leqslant \delta + bT(LK + 1)\|x - x^*\|,$$

alors

$$\|x - x^*\| \leqslant \frac{\delta}{(1 - bT(LK + 1))},$$

car $bT(Lk + 1) < 1$, il s'en suit que la solution de (3.2) dépend continuellement des données initiales x_0.

Définition 3.2.2. *La solution de l'équation intégrale (3.2) dépend continuellement de la fonction g si* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ *telle que*

$$|g(t, x(t)) - g^*(t, x(t))| \leqslant \delta \Longrightarrow \|x - x^*\| < \varepsilon, \tag{3.7}$$

x *la solution du problème avec condition initiale* x_0
x^* *la solution du problème avec condition initiale* x_0^*

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x^*(g^*(s, (x^*(s)))))ds, \quad t \in [0, T] \tag{3.8}$$

Théorème 3.2.2. *Si les hypothèses du Théorème (3.1.1) satisfaites,*
alors la solution de l'équation (3.2) dépend continuellement de fonction g.

Preuve 8. *Soit* x, x^* *solution de l'équation intégrale (3.2) et (3.8). Alors nous avons soit* x, x^* *La solution des équations intégrales (3.2) et (3.6) En suite nous avons :*

$$\begin{aligned}
\|x(t) - x^*(t)\| &= |x_0 + \int_0^t f(s, x(g(s, x(s))))ds - x_0 + \int_0^t f(s, x^*(g^*(s, x^*(s))))ds| \\
&\leqslant \int_0^t |f(s, x(g(s, x(s)))) - f(s, x^*(g^*(s, x^*(s))))|ds \\
&\leqslant b \int_0^t |x(g(s, x(s))) - x^*(g^*(s, x^*(s)))|ds \\
&\leqslant b \int_0^t |x(g(s, x(s))) - x(g^*(s, x^*(s))|ds \\
&+ b \int_0^t |x(g^*(s, x^*(s)))) - x^*(g^*(s, x^*(s)))|ds \\
&\leqslant bL \int_0^t |g(s, x(s)) - g^*(s, x^*(s))|ds \\
&+ bL \int_0^t |g^*(s, x^*(s))) - g^*(s, x^*(s))|ds + b\|x - x^*\| \int_0^t 1ds \\
&\leqslant bL \int_0^t |g(s, x(s)) - g^*(s, x^*(s))|ds \\
&+ bL \int_0^t |g^*(s, x^*(s))) - g^*(s, x^*(s))|ds + b\|x - x^*\|t \\
&\leqslant bL \int_0^t |g(s, x(s)) - g^*(s, x^*(s))|ds \\
&+ bL \int_0^t |g^*(s, x^*(s))) - g^*(s, x^*(s))|ds + bT\|x - x^*\| \\
&\leqslant bLTk\|x - x^*\| + bLT\delta + bT\|x - x^*\| \\
&\leqslant bLT\delta + bT(Lk + 1)\|x - x^*\|,
\end{aligned}$$

donc

$$\sup_{t \in [0,T]} |x(t) - x^*(t)| \leqslant bLT\delta + bT(Lk + 1)\|x - x^*\|$$

$$\|x - x^*\| \leqslant bLT\delta + bT(Lk+1)\|x - x^*\|,$$

alors

$$\|x - x^*\| \leqslant \frac{bLT\delta}{(1 - bT(Lk+1))}.$$

Comme $bT(Lk+1) < 1$ il s'en suit que la solution de (P) dépend continuellment sur la fonction g.

Exemple 3.2.1. *Considérations l'équation différentielle non linéaire*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{7}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}t)^2 + \frac{1}{6}x\left(\frac{x(t)e^{-x(t)}}{3+cos^2x(t)}\right) \\ x(0) = \frac{1}{28} \end{cases} \tag{3.9}$$

Soit : $f : [0,2] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *définie par*

$$f(t,x) = \frac{1}{7}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}t)^2 + \frac{1}{6}x.$$

Soit $g : [0,2] \times \mathbb{R}^+ \to [0,2]$ *définie par*

$$g(t,x) = \frac{xe^{-x}}{3 + cos^2x}.$$

On va montrer que le problème (3.9) admet une solution unique, c'est à dire vérifier Les conditions (1),(2),(5),(6),(7).

1. ***La lipschitzité de*** f *: il suffit de montrer que*
   $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ *et* $\exists! b > 0$ *, tel que*

$$\Big| f(t,x) - f(t,y) \Big| \leqslant b|x - y|.$$

On a

$$\begin{aligned} \Big| f(t,x) - f(t,y) \Big| &= \Big| \frac{1}{7}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}t)^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{7}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}t)^2 - \frac{1}{6}y \Big| \\ &= |\frac{1}{6}x - \frac{1}{6}y\Big| \\ &= \frac{1}{6}|x - y|. \end{aligned}$$

Donc il existe une constante b tel que

$$\Big|f(t,x) - f(t,y)\Big| \leqslant b|x-y|,$$

f est une fonction lipschitzienne alors f est continue.

2. *Montrer qu' il existe une fonction bornée mesurable $m(t)$ et une constante $b \geqslant 0$ telle que :*

$$|f(t,x)| \leqslant |m(t)| + b|x|.$$

On a

$$\begin{aligned}|f(t,x)| &= \left|\frac{1}{7}(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}t)^2 + \frac{1}{6}x\right| \\ &\leqslant \left|\frac{1}{7}(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}t)^2 + \right| + \frac{1}{6}|x|.\end{aligned}$$

Donc $m(t) = \frac{1}{7}(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}t)^2$ et $b = \frac{1}{6}$.
Posons $M = \sup\limits_{t\in[0,2]} |m(t)|$, alors$M = \sup\limits_{t\in[0,2]} \left|\frac{1}{7}(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}t)^2\right| = \frac{1}{5}$.

3. ***Montrons que*** $g : [0,2]\times\mathbb{R}^+ \to [0,2]$ ***est continue et*** $g(t,x(t)) \leqslant x(t)$
On a

$$g(t,x(t)) = \frac{x(t)e^{-x(t)}}{3+cos^2x(t)},$$

g est une fonction continue car c'est une division de deux fonctions continues.
Montrons que $g(t,x(t)) \leqslant x(t)$

$$\begin{aligned}g(t,x(t)) &= \frac{x(t)e^{-x(t)}}{3+cos^2x(t)} \\ &\leqslant \frac{x(t)}{3+cos^2x(t)} \\ &\leqslant |x(t)|.\end{aligned}$$

Donc pour tout $t\in[0,2]$on a $g(t,x(t)) \leqslant x(t)$.

4. *Montrer que $L = M + bT < 1$.*
On a $b = \frac{1}{6}$ et $M = \frac{7}{36}$ et $T = 2$.

On définie l'ensemble $S_L = \{x \in C([0,2]) : |x(t_2) - x(t_1)| \leqslant L|t_2 - t_1|\}$ *avec*

$$L = M + bT$$
$$L = \frac{7}{36} + \frac{1}{6} \times 2$$
$$L = \frac{19}{36}$$

d'ou : $L = \frac{19}{36} < 1$

Et cette condition est remplie.

5. $LT + |x(0)| \leqslant T$

   On a $T = 2$ *et* $L = \frac{19}{36}$ *et* $|x(0)| = \frac{1}{28}$,

   donc

   $\frac{19}{36} \times 2 + \frac{1}{28} = \frac{19}{18} + \frac{1}{28} = \frac{550}{504} < 2.$

D'après le Théorème (3.0.1) le problème (3.9) admet une solution unique.

Exemple 3.2.2. *Considérations l'équation différentielle non linéaire*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{5}(t^2+1)e^{-t^3} + \frac{1}{3}x\left(\frac{x(t)-\frac{1}{2}}{1+x^4(t)}\right) \\ x(0) = \frac{1}{5} \end{cases} \tag{3.10}$$

Soit : $f : [0, \frac{1}{2}] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *définie par*

$$f(t,x) = \frac{1}{5}(t^2+1)e^{-t^3} + \frac{1}{3}x$$

$g : [0, \frac{1}{2}] \times \mathbb{R}^+ \to [0, \frac{1}{2}]$, *définie par*

$$g(t,x) = \frac{x - \frac{1}{2}}{1 + x^4}.$$

On va montrer que le problème (3.10) admet une solution unique, c'est à dire vérifier Les conditions (1),(2),(5),(6),(7).

1. ***On va montrer que*** f ***est lipschitzienne*** *il suffit de montrer que*

   $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ *et* $\exists! b > 0$, *tel que*

$$\left| f(t,x) - f(t,y) \right| \leqslant b|x - y|$$

On a

$$\begin{aligned}|f(t,x)-f(t,y)| &= \left|\frac{1}{5}(t^2+1)e^{-t^3}+\frac{1}{3}x-\frac{1}{5}(t^2+1)e^{-t^3}+\frac{1}{3}y\right| \\ &= |\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y\Big| \\ &\leqslant \frac{1}{3}|x-y|.\end{aligned}$$

Donc il existe une constante b *tel que*

$$\Big|f(t,x)-f(t,y)\Big| \leqslant b|x-y|,$$

f *est lipschitzienne alors* f *est continue.*

2. *Montrer qu'il existe une fonction bornée mesurable* $m(t)$ *et une constante* $b \geqslant 0$ *telle que :*

$$|f(t,x)| \leqslant |m(t)| + b|x|,$$

On a

$$\begin{aligned}|f(t,x)| &= \left|\frac{1}{5}(t^2+1)e^{-t^3}+\frac{1}{3}x\right| \\ &\leqslant \left|\frac{1}{5}(t^2+1)e^{-t^3}\right| + \frac{1}{3}|x|.\end{aligned}$$

Donc
$m(t) = \frac{1}{5}(t^2+1)e^{-t^3}$ *et* $b = \frac{1}{3}$.
Posons $M = \sup\limits_{t\in[0,\frac{1}{2}]} |m(t)|$ *donc* $M = \sup\limits_{t\in[0,\frac{1}{2}]} \left|\frac{1}{5}(t^2+1)e^{-t^3}\right| = \frac{1}{5}.$

3. ***Montrons que*** $g : [0,\frac{1}{2}] \times \mathbb{R}^+ \to [0,\frac{1}{2}]$ ***est continue et*** $g(t,x(t)) \leqslant x(t)$
On a

$$g(t,x(t)) = \frac{x(t)-\frac{1}{2}}{1+x^4(t)},$$

g *est une fonction continue car c'est une division de deux fonctions continues.*

Montrons que $g(t,x(t)) \leqslant x(t)$

$$\begin{aligned} g(t,x(t)) &= \frac{x(t)-\frac{1}{2}}{1+x^4(t)} \\ &\leqslant \frac{x(t)}{1+x^4(t)} \\ &\leqslant x(t). \end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in [0, \frac{1}{2}]$, $g(t,x(t)) \leqslant x(t)$.

4. *On va montrer que* $L = M + bT < 1$
   On a $b = \frac{1}{3}$ *et* $M = \frac{1}{5}$ *et* $T = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} L &= M + bT \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{11}{30} \\ &= \frac{11}{30}, \end{aligned}$$

   d'ou : $L = \frac{11}{30} < 1$
   Et cette condition est remplie.

5. *montrer que* $LT + |x(0)| \leqslant T$
   On a $T = \frac{1}{2}$ *et* $L = \frac{11}{30}$ *et* $|x(0)| = \frac{1}{5}$
   $\frac{11}{30} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{11}{60} + \frac{12}{60} = \frac{23}{60} < \frac{1}{2}$.
   D'après le Théorème (3.0.1) le problème (3.10) admet une solution positive $x \in S_L$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Andrzej ; On some iterative differential equations I, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellonskiego, Prace Matematyczne. 12 (1968), 53-56.

[2] P. K. Anh, N. T. T. Lan, N. M. Tuan, Solutions to systems of partial differential equations with weighted self-reference and heredity, Electronic Journal of Differential Equations 2012 (2012) 1–14.

[3] J. Banas, J. Cabrera, On existence and asymptotic behaviour of solutions of a functional integral equation, Nonlinear Analysis : Theory, Methods et Applications 66 (2007) 2246–2254.

[4] J. Bèlair, C. Mackey ; Consumer memory and price uctuations on commodity markets : an integro-differential model, J. Dyn. Dif. Eqs., 1(1989), 299-325.

[5] J. Bèlair ; Population models with state-dependent delays, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 131, Dekker, New York, 1991, pp. 165-176.

[6] V. Berinde, Existence and approximation of solutions of some first order iterative differential equations, Miskolc Mathematical Notes 11 (2010) 13–26.

[7] Bouakkaz .A, Thechnique de points fixes et applications aux équations diff"rentielles fonctionnelles non linnéaires à retard, Thèse Doctorat,(2018), université Badji Mokhtar Annaba.

[8] A. Buicà, Existence and continuons dependence of solutions of some functional differential equation, seminar on Fixed point Theory 3 (1995) 1-14.

[9] M. Büger, M. R. W. Martin ; Stabilizing control for an unbounded state-dependent delay differential equation, Dynamical Systems and Differential Equations, Kennesaw, GA, 2000, Discrete and Continuous Dynamical Systems (Added Volume), (2001), 56-65.

[10] S. Cheng, J. Si, X. Wang An existence theorem for iterative functional-differential equations, Acta Math. Hungar., 94(1-2)(2002), 1-17.

[11] R.F.Curtain,A.J.Pritchard,Functional Analysis in Modern Applied Mathematics. Academic press,1977.

[12] N.Dunford, J.T. Schwartz, Linear Operators, (Part 1), General Theory, NewYork Interscience,1957.

[13] R. Driver ; A functional differential system of neutral type arising in a two-body problem of classical electrodynamics, in : Proceedings of International Symposium on Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics, Academic Press, New York, 1963, pp. 474-484.

[14] R. Driver ; A two-body problem of classical electrodynamics : the one-dimensional case, Ann.Phys., 21(1963), 122-142.

[15] M. Edelstein,*"A remark on a theorem of M. A. Krasnoselski,"* Amer. Math. Monthly, vol. 73, pp. 509-510, 1966.

[16] E. Eder ; The functional differential equation x0(t) = x(x(t)), J. Diff. Equa., 54(1984), 390-400.

[17] A.M.A El-Sayed, H.R. Ebead, E. Hamdallah, Positive solutions of an initial value problem of a delay-self-reference nonlinear differential equation, Malaya journal of matematik, Vol. 8, No. 3, 1001-1006, 2020.

[18] A.M.A El-Sayed, H.R. Ebead, On an initial value problem of delay-refereed differential equation, International journal of mathematics Trends and Technology (IJMTT) - Volume 66 Issue 5 - May 2020.

[19] M. Fečkan ; On a certain type of functional differential equations, Math. Slovaca. 43(1993), 39-43.

[20] W. Ge and Y. Mo ; Existence of solutions to differential-iterative equation, Journal of Beijing Institute of Technology, 6(3)(1997), 192-200.

[21] Georges Skandalis, Topologie générale, Masson.

[22] L. J. Grimm, K. Schmitt ; Boundary value problem for differential equations with deviating arguments, Aequationes Math., 4(1970), 176-190.

[23] R. Johnson ; Functional equations, approximations, and dynamic response of systems with variable time-delay, IEEE Trans. Automatic Control, 17(1972), 398-401.

[24] M. A. Krasnoselskii, *"Twe remarks on the method of successive approximations"*, Vspehi Mat. Nauk (N.S.), vol,10,no, 1(63), pp.123-127,1955.

[25] A.N.Kolmogorov.S.V.Fomin, Elements of the Theory of fonctions and functional analysis, (Vol.1), Metric and normed spaces, 1957.

[26] LACHACHI .G , Etude de l'existance et de l'unicité des solutions d'équations defférentièlle ordinaires contenues en x et discontinues eb t, septembre 2013.

[27] R. M. Nisbet, W. S. C. Gurney ; The systematic formulation of population models for insects with dynamically varying instar duration, Theoret. Population Biol., 23(1983), 114-135.

[28] O. Nicola ; Numerical solutions of first order iterative functional-differential equations by spline functions of even degree, Scientific Bulletin of the Petru Maior University of Tirgu Mures, 6(2009), 34-37.

[29] H. Schaefer, *"Uber die Methode sukzessiver Approximationen",* Jber. Deutsch. Math. Verein., vol. 59, no. Abt.1,pp.131-140,1957.

[30] J. Si, X. Wang, S. Cheng, Nondecreasing and convex C2-solutions of an iterative functional-differential equation, Aequ. Math., 60(2000), 38-56.

[31] J. Si, X. Wang ; Smooth solutions of a nonhomogeneous iterative functional differential equa- tion with variable coefficients, J. Math. Anal. Appl., 226(1998), 377-392.

[32] J. Si and W. Zhang, Analytic solutions of a class of iterative functional differential equations, J. Comp. Appl. Math., 162(2004), 467-481.

[33] S. Staněk ; On global properties of solutions of functional differential equation x0(t) = x(x(t)) + x(t), Dynamic Systems Appl., 4(1995), 263-278.

[34] P. Waltman ; Deterministic threshold models in the theory of epidemics, Lecture Notes in Biomath., Vol. 1, Springer, New York (1974).

[35] K. Wang ; On the equation x0(t) = f(x(x(t))), Funk. Ekva., 33(3)(1990), 405-425.

[36] D. Yang and W. Zhang ; Solutions of equivariance for iterative differential equations, Appl. Math. Lett., 17(2004), 759-765.

[37] P. Zhang, Analytic solutions for iterative functional differential equations, Electron. J. Diff. Equ., 2012(180)(2012), 1-7.

[38] P. Zhang, L. Mi ; Analytic solutions of a second order iterative functional differential equation, Appl. Math. Comp., 210(2009), 277-283.