République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahya - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

№ d'ordre ....

№ de séries ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Thème

Problèmes d'évolution régis par des opérateurs maximaux monotones dépendant du temps à domaine entier

Présenté par

Ahlam Aliouat

Devant le jury composé de

Président	Amira Makhlouf	M.C.B.	Université de Jijel
Encadreur	Soumia Saïdi	M.C.A.	Université de Jijel
Examinateur	Fatiha Selamnia	M.C.B.	Université de Jijel

Promotion **2020/2021**

Remerciements

En premier lieu, je remercie ALLAH le tout puissant pour la volonté et la santé qu'il m'a donné tout au long des années de mes études pour terminer ce mémoire.

Je voudrai présenter mes sincères remerciements à mon encadreur Mme. Soumia Saïdi, Maître de Conférences A à l'université de Jijel, pour la qualité de son encadrement, et surtout pour sa disponibilité et sa gentillesse. Je tiens à remercier chaleureusement Mr. Emilio Vilches Professeur agrégé à l'institut des sciences de l'ingénieur, Université d'O'Higgins-Chili, pour la mise en disposition des références utiles et aussi pour des précisions sur certains points rencontrés lors de l'étude de l'article dont il est co-auteur.

J'exprime ma gratitude et mes remerciements à Mmes Amira Makhlouf et Fatiha Selamnia Maîtres de Conférences B à l'université de Jijel, d'avoir accepté d'être membres au jury.

Je remercie très sincèrement tous les enseignants du Département de Mathématiques.

Enfin, je souhaite remercier ma famille. Elle a toujours cru en moi. Elle m'a toujours soutenue au fil des années. Ce soutien sans faille est l'élément le plus précieux à mes yeux.

Ahlam Aliouat

Table des matières

Introduction

On a mené dans ce mémoire une étude détaillée du papier récent Vilches-Nguyen [19]. Ce thème (d'actualité) s'inscrit dans le cadre d'étude des inclusions différentielles du premier ordre gouvernées par des opérateurs maximaux monotones dépendant du temps avec perturbations. Dans la littérature, il existe des papiers sur ce sujet, on peut citer par exemple [1], [5], [6], [8], [11], [16], voir aussi les autres références en relation.

Un bref schéma du contenu présenté dans ce mémoire peut se décrire comme suit : Le premier chapitre est intitulé "Préliminaires". Il comporte des notations et quelques espaces usuels. Aussi, il réunit un ensemble de définitions, propositions et théorèmes sur l'analyse fonctionnelle ainsi que les propriétés fondamentales des opérateurs maximaux monotones qui vont nous servir de clé dans le chapitre qui suit. Dans le deuxième chapitre intitulé "Problèmes d'évolution gouvernés par des opérateurs maximaux monotones dépendant du temps", on démontre l'existence de solutions liée au problème suivant, sur un espace de Hilbert H,

$$(\mathcal{P})\begin{cases}\dot{x}(t) \in -A_t(x(t)) + f(t, x(t)) \text{ p.p. } t \in [0, T],\\ x(0) = x_0,\end{cases}$$

où A_t est un opérateur maximal monotone dépendant du temps de domaine $D(A)$ égal à H, et $f : [0, T] \times H \to H$ est une perturbation dépendant du temps et de l'état. Notre démonstration repose sur une méthode de régularisation. On construit une suite de fonctions "solutions" au problème régularisé

$$(\mathcal{P}_\lambda)\begin{cases}\dot{x}(t) = f(t, x(t)) - \frac{1}{\lambda}\Big(x(t) - J_\lambda^t(x(t))\Big) \text{ p.p. } t \in [0, T],\\ x(0) = x_0,\end{cases}$$

où J_λ^t est la résolvante Yosida. Ensuite, on montre sa convergence vers la solution du problème $(\mathcal{P})$.

On termine ce mémoire par une application du théorème d'existence et d'unicité aux inclusions différentielles du second-ordre de la forme

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} \ddot{x}(t) \in -A_t(\dot{x}(t)) + f(t, x(t)) \text{ p.p. } t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0. \end{cases}$$

La démonstration consiste à se ramener au cas du premier ordre, en effectuant un changement de variable convenable.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rassemblons des notions de base, quelques résultats fondamentaux utiles, notamment les définitions et les propriétés des multi-applications et celles des opérateurs maximaux monotones dans un espace de Hilbert.

1.1 Notations générales et espaces usuels

Tout au long de ce mémoire nous adoptons les notations suivantes :

- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.
- $|\cdot|$ est la valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des nombres réels positifs.
- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.
- H est un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $||\cdot||$.
- $w-$ désigne au sens de la topologie faible sur H.
- $\overline{conv}S$ est le plus petit convexe fermé contenant l'ensemble S ($S \subset H$).
- $\overline{B}_H(0, r)$ est la boule fermée dans H de centre 0 et de rayon r.
- Pour une multi-application $A : H \rightrightarrows H$, le domaine $D(A)$, le graphe $Gr(A)$ et l'image $R(A)$ sont définis par

$$D(A) = \{x \in H : \ Ax \neq \emptyset\}, \ R(A) = \bigcup_{x \in D(A)} Ax$$

$$Gr(A) = \{(x, y) \in D(A) \times H : y \in Ax\}.$$

- $\mathcal{P}(X)$ ou 2^X est l'ensemble des parties d'un ensemble X.
- $\rightharpoonup$ désigne la convergence faible.
- $\rightarrow$ désigne la convergence forte.
- $I := [0, T]$, $T > 0$ est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.
- $\mathbf{1}_S$ est la fonction caractéristique d'un sous-intervalle S de I, définie par $\mathbf{1}_S(x) = 1$ si $x \in S$ et 0 sinon.
- $C([0, T]; H)$ est l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans H muni de la norme de la convergence uniforme $||x||_\infty = \sup\limits_{t\in[0,T]} ||x(t)||$.
- $AC([0, T]; H)$ est l'espace des fonctions absolument continues de $[0, T]$ dans H.
- $\dot{x}$ (resp. $\ddot{x}$) est la dérivée première (resp. seconde) de $x : [0, T] \rightarrow H$ quand elles existent.
- $L^p([0, T]; H)$, $p \in [1, +\infty[$, est l'espace des fonctions mesurables $x : [0, T] \rightarrow H$ telles que $\displaystyle\int_0^T ||x(t)||^p dt < +\infty$ muni de la norme $||x||_{L^p([0,T];H)} = (\displaystyle\int_0^T ||x(t)||^p dt)^{1/p}$. Si $p = 2$ alors $L^2([0, T]; H)$ est un espace de Hilbert.
- $W^{1,2}([0, T]; H)$ est l'espace des fonctions $x : [0, T] \rightarrow H$ absolument continues à dérivée dans $L^2([0, T]; H)$.
- $W^{2,2}([0, T]; H)$ est l'espace des fonctions $x : [0, T] \rightarrow H$ absolument continues à dérivée w absolument continue avec $\dot{w}$ dans $L^2([0, T]; H)$.
- I_H est l'identité de H.
- p.p. presque partout.

Une bonne partie du contenu du chapitre a été prise des références [4], [8], [9], [18].

1.2 Rappels et résultats fondamentaux

Dans tout ce qui s'en suit X est un ensemble non vide.

Définition 1.1. *Soit $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$. Alors, Γ est dite topologie si*

1. *$\emptyset \in \Gamma$, $X \in \Gamma$.*
2. *Toute intersection finie d'éléments de Γ appartient à Γ.*
3. *Toute réunion quelconque d'éléments de Γ appartient à Γ.*

Dans ce cas, le couple (X, Γ) est dit espace topologique.

Les éléments de Γ sont appelés ensembles ouverts.

Les sous-ensembles fermés de X sont les complémentaires des ouverts.

Caractérisation 1.2.

Soit (X, Γ) un espace topologique. On dit qu'une partie V de X est un voisinage de $x \in X$ s'il existe un ouvert U de X tel que $x \in U \subset V$.

On appelle adhérence de A notée $\overline{A}$ le plus petit fermé contenant A.

On appelle intérieur de C noté $Int(C)$ le plus grand ouvert de X inclus dans C.

Définition 1.3. *On dit que X est un espace séparé si pour tous points distincts x et y dans X, il existe un voisinage V_x de x dans X, et un voisinage V_y de y dans X tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$.*

Définition 1.4. *On appelle tribu sur X toute famille Σ de parties de X telle que :*

1. $\emptyset \in \Sigma$.
2. *Σ est stable par passage aux complémentaires.*
3. *Σ est stable par passage aux réunions dénombrables.*

Dans ce cas, le couple (X, Σ) est appelé espace mesurable.

Définition 1.5. *(Application mesurable)*

Soient (X_1, Σ_1) et (X_2, Σ_2) deux espaces mesurables. Une application $f : (X_1, \Sigma_1) \to (X_2, \Sigma_2)$ est dite mesurable si $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$, pour tout $A \in \Sigma_2$.

Définition 1.6. *Soit (X, Σ) un espace mesurable. Une mesure sur (X, Σ) est une application $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ vérifiant*

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. *Pour toute famille $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ d'éléments de Σ deux à deux disjoints (c'est-à-dire que $A_n \bigcap A_m = \emptyset$ lorsque $n \neq m$), on a la propriété d'additivité dénombrable*
$$\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

On dit alors que $(\mathrm{X}, \Sigma, \mu)$ est un espace mesuré.

Lorsque $\mu(\mathrm{X}) < \infty$, on dit que la mesure μ est finie.

Un ensemble A est dit μ-négligeable s'il existe $B \in \Sigma$ tel que $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$.

Définition 1.7. *(Mesure de Lebesgue) Il existe une plus petite mesure définie sur une tribu de $\mathbb{R}^n$ qui soit complète et coïncide sur les pavés avec leur volume (c'est-à-dire le produit des longueurs de leurs côtés). Cette mesure est appelée la mesure de Lebesgue et sa tribu de définition la tribu de Lebesgue.*

Définition 1.8. (*Propriété vraie μ-presque partout*)
On dit qu'une propriété est vraie μ-presque partout sur l'espace mesuré $(\mathrm{X},\, \Sigma,\, \mu)$ *si la propriété est fausse sur une partie μ-négligeable de X, on note μ p.p.*
Si μ est la mesure de Lebesgue, on écrit p.p. pour simplicité.

Définition 1.9.
L'application $d : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to [0,\, +\infty[$ *est une distance sur* X *si pour tous* $x,\, y,\, z \in \mathrm{X}$, *on a*

1. $d(x,\, y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$,
2. $d(x,\, y) = d(y,\, x)$,
3. $d(x,\, z) \leq d(x,\, y) + d(y,\, z)$ (*inégalité triangulaire*).

   Dans ce cas, on dit que $(\mathrm{X},\, d)$ *est un espace métrique.*

Caractérisation 1.10. *Soit X un espace métrique.*
(*i*) *Un sous-ensemble K de X est dit relativement compact, si de toute suite dans K on peut extraire une sous-suite convergente dans X.*
(*ii*) *Un sous-ensemble D de X est dit compact, si de toute suite dans D on peut extraire une sous-suite convergente dans D.*

Définition 1.11. *On appelle norme sur un espace vectoriel* X *réel ou complexe, de dimension finie ou infinie, toute application* $x \mapsto ||x||$ *de* X *dans* $\mathbb{R}_+$ *vérifiant les conditions*
i) $\forall x \in \mathrm{X} :\ ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
ii) $\forall x \in \mathrm{X}, \forall \lambda \in \mathbb{R} :\ ||\lambda x|| = |\lambda|.||x||$,
iii) $\forall x,\, y \in \mathrm{X} :\ ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.
Toute norme définit naturellement une distance : $d(x, y) = ||x - y||$.

Définition 1.12. *On appelle espace vectoriel normé le couple* $(\mathrm{X}, ||\cdot||)$ *où* X *est un espace vectoriel et* $||\cdot||$ *est une norme sur* X.

Définition 1.13. *Soit* X *un espace métrique. La suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite une suite de Cauchy si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p,\, q \in \mathbb{N},\, p > q \geq n_0 :\ ||x_p - x_q|| < \varepsilon.$$

Définition 1.14. *Soit* $(\mathrm{X}, ||\cdot||)$ *un espace vectoriel normé. On dit que* $(\mathrm{X}, ||\cdot||)$ *est un espace complet si et seulement si toute suite de Cauchy pour* $||\cdot||$, *composée d'éléments de* X, *admet une limite dans* X. *On dit aussi que* X *est un espace de Banach.*

Définition 1.15. *(Continuité séquentielle)*
Soient $(\mathrm{X}_1,\, \Gamma_1)$, $(\mathrm{X}_2,\, \Gamma_2)$ *deux espaces topologiques et* $f : \mathrm{X}_1 \longrightarrow \mathrm{X}_2$. *La fonction f est*

dite séquentiellement continue en $x \in \mathrm{X}_1$ *si pour toute suite* $(x_n) \subset \mathrm{X}_1$ *telle que* $x_n \longrightarrow x$*, alors, on a* $f(x_n) \longrightarrow f(x)$.
La fonction f *est séquentiellement continue sur* X_1 *si elle est séquentiellement continue en tout point de* X_1.

Remarque 1.16. *Dans les espaces métriques, la continuité séquentielle est équivalente à la continuité.*

Définition 1.17. *Soit* $(\mathrm{X}, \mathit{\Gamma})$ *un espace topologique et soit* $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$*. On dit que* A *est dense dans* X *si* $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{X}$.

Définition 1.18. *On dit qu'un espace topologique* $(\mathrm{X}, \mathit{\Gamma})$ *est séparable s'il existe un sous-ensemble* $A \subset \mathrm{X}$ *dénombrable et dense dans* X.

Définition 1.19. (1) *Un recouvrement de* X *est une famille* $(A_i)_{i \in I}$ *de partie de* X *telle que* $X \subset \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.
Si de plus, I *est un ensemble fini, on dit que* $(A_i)_{i \in I}$ *est un recouvrement fini de* X.
(2) *Soit* $(A_i)_{i \in I}$ *un recouvrement de* X*. Soit* $J \subset I$ *tel que* $X \subset \bigcup\limits_{j \in J} A_j$*, on dit que* $(A_j)_{j \in J}$ *est un sous-recouvrement de* $(A_i)_{i \in I}$.
(3) *Un recouvrement ouvert de* X *est une famille d'ouverts* $(U_i)_{i \in I}$ *tel que* $X \subset \bigcup\limits_{i \in I} U_i$.

Définition 1.20. *On dit que* (X, Γ) *espace topologique est compact s'il est séparé et de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Définition 1.21. *Soit* (X, Γ) *un espace topologique. On dit que*

(i) $K \subset \mathrm{X}$ *est compact si de tout recouvrement de* K *par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

(ii) $A \subset \mathrm{X}$ *est relativement compact si* $\overline{A}$ *est compact.*

(iii) $D \subset \mathrm{X}$ *est compact si et seulement si* D *est fermé et relativement compact.*

Soient E, X deux espaces normés, $(f_n : X \to E)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications et $f : X \to E$.

Définition 1.22. (*Convergence ponctuelle*)
On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge ponctuellement vers* f *(sur* X*) si et seulement si, pour tout* x *de* X*, la suite* $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ *converge vers* $f(x)$ *dans* E.

Définition 1.23. *(Convergence uniforme)*

1) On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f(sur X) si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists N \in \mathbb{N},\, \forall n \in \mathbb{N},\, \forall x \in X, \quad (n \geq N \Rightarrow ||f_n(x) - f(x)|| < \varepsilon).$$

2) Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'application f sont bornées, alors pour montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X, il faut et il suffit de montrer que :

$$||f_n - f||_\infty \to 0.$$

Définition 1.24.
Soient X un espace topologique et $X' = \{f : X \to \mathbb{R}/f$ linéaire continue$\}$ son dual topologique. Soit $f \in X'$ et soit

$$\begin{aligned} \varphi_f : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi_f(x) = \langle f, x\rangle_{X',X}, \end{aligned}$$

où l'on note $\langle \cdot, \cdot\rangle_{X,X'}$ les crochets de dualité.
Lorsque f parcourt X', on obtient une famille d'applications $(\varphi_f)_{f\in X'}$. On appelle topologie faible sur X, la topologie la moins fine sur X rendant les applications $(\varphi_f)_{f\in X'}$ continues sur X et on la note $\sigma(X, X')$.

Définition 1.25. *(Convergence faible)*
Soit (x_n) une suite de points de X, alors on a

$$x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \langle f, x_n\rangle_{X',X} \longrightarrow \langle f, x\rangle_{X',X}\ \forall f \in X'.$$

On note que la convergence forte entraine la convergence faible.

Définition 1.26.
Soient X un espace topologique et X' son dual topologique. Soit $x \in X$ et soit

$$\begin{aligned} \varphi_x : X' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \varphi_x(f) = \langle f, x\rangle_{X',X}. \end{aligned}$$

Lorsque x parcourt X, on obtient une famille d'applications $(\varphi_x)_{x\in X}$. On appelle topologie faible sur X', la topologie la moins fine sur X' rendant les applications $(\varphi_x)_{x\in X}$ continues sur X' et on la note $\sigma^*(X', X)$.*

Définition 1.27. *(Convergence faible*)*
Soit (f_n) *une suite de points de* X'*, alors on a*

$$f_n \rightharpoonup^* f \Leftrightarrow \langle f_n, x\rangle_{X',X} \longrightarrow \langle f, x\rangle_{X',X} \ \forall x \in X.$$

Définition 1.28. *(Produit scalaire) Soit* H *un espace vectoriel réel. Un produit scalaire sur* H *est une application de* $H \times H$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui associe à tout couple* (x, y) *le produit scalaire noté* $\langle x, y\rangle$ *telle que*
(i) *L'application* $x \longmapsto \langle x, y\rangle$ *est linéaire, i.e., pour tous* $x, y_1, y_2 \in H$*,* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ *on a*

$$\langle x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\rangle = \alpha_1\langle x, y_1\rangle + \alpha_2\langle x, y_2\rangle,$$

(ii) *Pour tous* $x, y \in H$*, on a :* $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$*.*
(iii) *Pour tout* $x \in H$*, on a :* $\langle x, x\rangle \geq 0$ *et* $(\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0)$*.*

Définition 1.29. *Un espace préhilbertien (réel) est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$*. Sur cet espace, on définit une norme par* $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$*,* $x \in H$*, dite norme induite par le produit scalaire.*

Définition 1.30. *Un espace de Hilbert réel est un espace préhilbertien (réel) complet, i.e., un espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui est complet pour la norme associée.*

Théorème 1.31. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit* H *un espace préhilbertien, alors, on a pour tous* $x, y \in H$

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}. \tag{1.1}$$

De cette inégalité, résulte la continuité des applications de H *dans* $\mathbb{R}$ *:* $x \longmapsto \langle x, y\rangle$ *et* $y \longmapsto \langle x, y\rangle$*.*

Théorème 1.32. *(Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki)*
Soit E *un espace de Banach, soit* E' *son dual topologique. La boule unité fermée dans* E' *notée* $\overline{B}_{E'}(0,1)$ *est compacte pour la topologie* $\sigma^*(E', E)$*.*

Corollaire 1.33. *Soit* H *un espace de Hilbert. Alors*
Toute suite convergente de H *est bornée.*
Toute suite bornée dans H *admet une sous-suite faiblement convergente.*
Soit $(x_n) \subset H$*, si* $x_n \rightharpoonup x$*, alors* $(||x_n||)$ *est bornée et* $||x|| \leq \liminf_{n\to\infty} ||x_n||$*.*

Définition 1.34. *Un ensemble* $S \subset H$ *est convexe si*

$$\forall x,\, y \,\in\, S, \forall t \,\in\, [0,\, 1] : \quad tx + (1-t)y \in S.$$

Définition 1.35. *Soit un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Une fonction $\varphi : [a,b] \to H$ est dite absolument continue si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour toute suite finie $([a_n, b_n])_{n\leq N}$ de sous-intervalles de $[a,b]$ d'intérieurs disjoints,*

$$\sum_{n\geq 0}(b_n - a_n) < \delta \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} \|\varphi(b_n) - \varphi(a_n)\| < \varepsilon.$$

Théorème 1.36. *Soit un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Une fonction $\varphi : [a,b] \to H$ est dite absolument continue si et seulement si il existe une fonction g intégrable sur $[a,b]$ telle que pour tout $x \in [a,b]$ on a*

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \int_a^x g(t)dt,$$

$g \equiv \dot{\varphi}$ p.p.

Remarque 1.37.

1. *Toute fonction absolument continue est une fonction continue.*
2. *Toute fonction absolument continue est dérivable presque partout.*
3. *Toute fonction continue est mesurable.*

Définition 1.38. *(Fonction Lipschitz)*
Soit $\varphi : I \to H$. On dit que φ est Lipschitz de rapport L >0 si et seulement si

$$\forall\ x,\, y\ \in\ I:\ ||\varphi(x) - \varphi(y)|| \leq L|x-y|.$$

On dit que φ est une contraction si, elle est Lipschitz de rapport 0 < L < 1.

Remarque 1.39.
Toute fonction Lipschitz est absolument continue.

1.3 Multi-applications et sélections

Pour commencer, nous définissons les multi-applications, aussi appelées correspondances, applications multivoques ou multi-fonctions. Pour plus de détails sur les propriétés des multi-applications, on peut se référer par exemple à [4], [10], [12].

Définition 1.40. *Soient X, Y deux ensembles non vides, on appelle multi-application définie sur X à valeurs dans Y toute application de X ayant ses valeurs dans 2^Y. On note*

$$F : X \rightrightarrows Y \quad ou \quad F : X \to 2^Y,$$

c'est à dire pour tout x dans X : $F(x)$ est un sous-ensemble de Y.

Définition 1.41. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non vides. On appelle sélection de F toute application $f : X \longrightarrow Y$ vérifiant $f(x) \in F(x), \forall x \in X$.*

Définition 1.42.

Soient (X, Γ) un espace mesurable, Y un espace métrique, et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-fonction. On dit que F est mesurable si pour tout ouvert V de Y

$$F^{-1}(V) = \{x \in X,\ F(x) \cap V \neq \emptyset\} \in \Gamma.$$

Théorème 1.43. *Soient (X, Γ) un espace mesurable, Y un espace métrique complet séparable et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application mesurable à valeurs non-vides fermées. Alors, F admet au moins une sélection mesurable.*

Exemples 1.44. 1) *Toute multi-application constante est mesurable.*
2) *Soient (X, Γ) un espace mesurable, Y_1, Y_2 deux espaces métriques séparables, et $F_1 : X \rightrightarrows Y_1$, $F_2 : X \rightrightarrows Y_2$ deux multi-applications mesurables. Alors, la multi-application $F : X \rightrightarrows Y_1 \times Y_2$, définie pour tout $x \in X$ par $F(x) = F_1(x) \times F_2(x)$ est mesurable.*

Définition 1.45. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On dit que F est semi-continue supérieurement (scs) au point $t_0 \in X$ si pour tout ouvert V de Y tel que $F(t_0) \subset V$, il existe un voisinage W de t_0 tel que $F(t) \subset V$, $\forall t \in W$.*
On dit que F est scs sur X si elle est scs en tout point de X.

Proposition 1.46. *Soient X, Y deux espaces topologiques. Soient $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application et $f : X \to Y$ une application. Si $F(x) = \{f(x)\}$ alors F est semi-continue supérieurement si et seulement si f est continue.*

On rappelle Proposition 5 [1].

Proposition 1.47. *Soit X un espace de Banach. Soit $F : [0,T] \times X \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs non-vides convexes fermées telle que pour tout $x \in X$: $F(\cdot, x)$ est mesurable, et pour presque tout $t \in [0,T]$: $F(t, \cdot)$ est semi-continue supérieurement de X dans X muni de la topologie faible. Soient u_n, $f_n : [0,T] \to X$ $(n \in \mathbb{N})$ des fonctions mesurables telles que (u_n) converge presque partout sur $[0,T]$ vers une fonction $u : [0,T] \to X$, et (f_n) converge faiblement dans $L^1([0,T]; X)$ vers $f : [0,T] \to X$. Si $f_n(t) \in F(t, u_n(t))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $t \in [0,T]$, alors $f(t) \in F(t, u(t))$, p.p. sur $[0,T]$.*

On rappelle Théorème 10.5 [13].

Théorème 1.48. *Soit $F : I \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs convexes fermées telle que :*

(a) $F(\cdot, x)$ a une sélection mesurable, $F(t, \cdot)$ est semi-continue supérieurement,

(b) pour tous $(t, x, y) \in I \times H \times H$, $f(t) \in F(t, x)$, $g(t) \in F(t, y)$,

$$\langle f(t) - g(t), x - y \rangle \leq k(t)||x - y||^2,$$

où $k(\cdot) \in L^1(I; \mathbb{R})$,

(c) $\sup\{\|y\|,\ y \in F(t, x)\} \leq c(t)(1 + ||x||)$ sur $I \times H$ où $c(\cdot) \in L^1(I; \mathbb{R})$.

Alors, l'inclusion différentielle

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \text{ p.p. } t \in I,\ x(0) = x_0,$$

admet une unique solution sur I.

1.4 Opérateurs maximaux monotones

Définition 1.49. *Un opérateur $A : H \rightrightarrows H$ est dit monotone si pour tous $x_1, x_2 \in D(A)$ et tous $y_1 \in Ax_1$, $y_2 \in Ax_2$, on a*

$$\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \geq 0. \tag{1.2}$$

Définition 1.50. *Un opérateur $A : H \rightrightarrows H$ est dit maximal monotone s'il est monotone et si toute extension monotone de A coïncide avec A.*

Proposition 1.51. *Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$, on a équivalence entre les deux propriétés suivantes :*

1. *A est maximal monotone.*
2. *A est monotone et $R(I_H + A) = H$.*

Caractérisation 1.52. *Si $A : H \rightrightarrows H$ est un opérateur maximal monotone, alors pour tout $x \in Int(D(A))$, Ax est un ensemble non-vide convexe fermé, faiblement compact. De plus, il existe $y \in Ax$ unique que l'on appelle élément de norme minimale de Ax tel que $||y|| = |Ax|$, où $|Ax| = \inf\{||z||, z \in Ax\}$.*

Définition 1.53. *Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$. On appelle l'opérateur $J_\lambda : H \to H$ défini par*

$$J_\lambda = (I_H + \lambda A)^{-1}, \tag{1.3}$$

la résolvante de A, et l'opérateur $A_\lambda : H \to H$ défini par

$$A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I_H - J_\lambda),$$

l'approximation de Yosida de A, pour tout $\lambda > 0$.
Les opérateurs A_λ, J_λ sont univoques et définis sur l'espace H tout entier.

On aura besoin du résultat suivant (voir Théorème 6.1.7 [7] ou Exercice 1.17 [17]).

Théorème 1.54. *Soit $A : H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone, alors la multi-application $x \mapsto Ax$ est fortement-faiblement semi-continue supérieurement sur $Int(D(A))$ (de H muni de la topologie forte vers H muni de la topologie faible).*

1.5 Quelques résultats utiles

On rappelle le théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

Théorème 1.55. *(Théorème de la convergence dominée de Lebesgue)*
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dans $L^p([0,T];H)$, $1 \leq p < +\infty$. On suppose que

1) *$f_n(t) \longrightarrow f(t)$ p.p sur $[0,T]$.*
2) *Il existe une fonction $g \in L^p([0,T];\mathbb{R}_+)$ telle que pour tout n : $||f_n(t)|| \leq g(t)$ p.p sur $[0,T]$.*

Alors, on a $f \in L^p([0,T];H)$ et $||f_n - f||_{L^p([0,T];H)} \longrightarrow 0$.

On rappelle Définition 2.3.30 [14].

Définition 1.56. *Soit $\{A_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{P}(H) \setminus \{0\}$. On pose*

$$w - \limsup_{n\to+\infty} A_n = \{x \in H : \ x_{n_k} \rightharpoonup x \ (k \to +\infty), \ x_{n_k} \in A_{n_k}, \ n_1 < n_2 < \cdots\}.$$

On rappelle Proposition 2.3.31 [14].

Proposition 1.57. *Soient $(u_n) \subset L^p([0,T];H)$ et $u \in L^p([0,T];H)$, $p \in [1,+\infty]$ tels que*

$$(u_n) \text{ converge faiblement vers } u \text{ dans } L^p([0,T];H),$$

et pour presque tout $t \in [0,T]$, la suite $(u_n(t))$ est relativement faiblement compacte, alors on a

$$u(t) \in \overline{conv}\ w - \limsup_{n\to+\infty}\{u_n(t)\} \text{ p.p. } t \in [0,T].$$

On termine ce chapitre par rappeler le lemme de Gronwall (voir [3]).

Lemme 1.58. (*Lemme de Gronwall*)
Soient $\rho : [T_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction absolument continue sur* $[T_0, T]$, $a : [T_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $b : [T_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ *des fonctions intégrables sur* $[T_0, T]$.
Si pour presque tout $t \in [T_0, T]$ *on a*

$$\dot{\rho}(t) \leq b(t) + a(t)\rho(t),$$

alors, il résulte pour tout $t \in [T_0, T]$

$$\rho(t) \leq \rho(T_0) \exp\Big(\int_{T_0}^{t} a(s)ds\Big) + \int_{T_0}^{t} b(\tau) \exp\Big(\int_{\tau}^{t} a(s)ds\Big)d\tau.$$

Chapitre 2

Problèmes d'évolution gouvernés par des opérateurs maximaux monotones dépendant du temps

Tout au long de ce chapitre, on considère H un espace de Hilbert séparable. Notre but est d'étudier l'existence et l'unicité de la solution au problème

$$(\mathcal{P})\begin{cases}\dot{x}(t) \in -A_t(x(t)) + f(t, x(t)) \text{ p.p. } t \in [0, T],\\ x(0) = x_0,\end{cases}$$

où A_t est un opérateur maximal monotone tel que $D(A_t) = H$ pour tout $t \in [0, T]$. La démonstration fera appel au problème régularisé suivant

$$(\mathcal{P}_\lambda)\begin{cases}\dot{x}(t) = f(t, x(t)) - \frac{1}{\lambda}\Big(x(t) - J^t_\lambda(x(t))\Big) \text{ p.p. } \ t \in [0, T],\\ x(0) = x_0,\end{cases}$$

pour tout $\lambda > 0$. Ensuite, on passe à l'étude du cas du second ordre.

Pour mener cette étude, nous allons adopter les hypothèses suivantes :

Hypothèses sur les opérateurs $A_t : D(A_t) = H \rightrightarrows H$

$(\mathcal{H}_A)$ (a) Pour tout $t \in [0, T]$, l'opérateur $A_t : H \rightrightarrows H$ est maximal monotone.

(b) Pour tout $x \in H$, la multi-application $t \mapsto A_t(x)$ est mesurable.

(c) Pour tout $t \in [0, T]$ et tout $x \in H$

$$|A_t(x)| \leq \alpha(t)||x|| + \beta(t),$$

où $\alpha,\ \beta \in L^2([0, T]; \mathbb{R})$.

Hypothèses sur l'application $f : [0,T] \times H \to H$

$(\mathcal{H}_f)$ (a) Pour tout $x \in H$, l'application $t \longmapsto f(t,x)$ est mesurable.

(b) Pour p.p. $t \in [0,T]$ et tous $x, y \in H$

$$||f(t,x) - f(t,y)|| \leq k(t)||x - y||,$$

où $k \in L^2([0,T];\mathbb{R})$.

(c) Pour p.p. $t \in [0,T]$ et tout $x \in H$,

$$||f(t,x)|| \leq \gamma(t)||x|| + \delta(t),$$

où $\gamma,\ \delta \in L^2([0,T];\mathbb{R})$.

2.1 Existence et unicité de la solution au problème du premier ordre

Avant d'aller plus loin, on introduit quelques résultats : Proposition 5.1, Définition 5.2, et Proposition 5.5 [15] (voir aussi [2]), utiles dans la démonstration du Lemme 2.4.

Proposition 2.1. *Si $A_t : H \rightrightarrows H$ est maximal monotone pour tout $t \in [0,T]$, alors les deux propriétés sont équivalentes :*

(a) *La multi-application de $[0,T]$ dans $H \times H$ définie par $t \mapsto Gr(A_t)$ est mesurable.*

(b) *Pour tout $\lambda > 0$, et tout $x \in H$, l'application $t \longmapsto (I + \lambda A_t)^{-1}(x)$ est mesurable de $[0,T]$ dans H.*

Définition 2.2. *La famille d'opérateurs maximaux monotones $A_t : H \rightrightarrows H$ $(t \in [0,T])$ est dite mesurable si (a) ou (b) de Proposition 2.1 est satisfaite.*

Proposition 2.3. *Si $A_t : H \rightrightarrows H$ $(t \in [0,T])$ est une famille d'opérateurs maximaux monotones, alors on a équivalence*

(a) *$\{A_t\}_{t\in[0.T]}$ est une famille mesurable (au sens de Définition 2.2).*

(b) *Pour tout $x \in H$, la multi-application de $[0,T]$ dans H définie par $t \mapsto A_t x$ est mesurable.*

Le lemme suivant rassemble certaines propriétés importantes de l'approximation de Yosida d'un opérateur maximal monotone A_t dépendant du temps.

Lemme 2.4. *Soit $A_t : H \rightrightarrows H$ un opérateur tel que $D(A_t) = H$ et tel que* *(a) Pour tout $t \in [0,T]$, l'opérateur $A_t : H \rightrightarrows H$ est maximal monotone.*

(b) Pour tout $x \in H$, la multi-application $t \mapsto A_t(x)$ est mesurable.

Alors, les assertions suivantes ont lieu

(i) Pour tout $x \in H$ et $t \in [0,T]$,

$$\frac{1}{\lambda}\Big(x - J_\lambda^t(x)\Big) \in A_t\Big(J_\lambda^t(x)\Big).$$

(ii) Pour tout $x, y \in H$ et pour $t \in [0,T]$,

$$||J_\lambda^t(x) - J_\lambda^t(y)|| \leq ||x - y||.$$

(iii) Pour tout $x \in H$, l'application $t \longmapsto J_\lambda^t(x)$ est mesurable.

(iv) Pour tout $x \in H$ et $t \in [0,T]$

$$||x - J_\lambda^t(x)|| \leq \lambda |A_t(x)|.$$

(v) Pour tout $t \in [0,T]$, l'opérateur $x \mapsto A_t(x)$ est fortement-faiblement semi-continue supérieurement.

A noter que J_λ^t est donné par (1.3), en substituant A par A_t.

Démonstration. (i) Soit $x \in H$. On pose $v = J_\lambda^t(x) = (I_H + \lambda A_t)^{-1}x$. Alors, il résulte $x = v + \lambda y$ où $y \in A_t v$. On pose pour tout $t \in [0,T]$ et tout $\lambda > 0$: $A_\lambda^t(x) = \frac{1}{\lambda}(x - J_\lambda^t(x))$, on trouve

$$A_\lambda^t(x) = \frac{1}{\lambda}(x - v) = y \in A_t v.$$

Or $v = J_\lambda^t(x)$, on conclut que

$$\frac{1}{\lambda}(x - J_\lambda^t(x)) \in A_t(J_\lambda^t(x)).$$

(ii) Soient $x, y \in H$ alors, d'après (i) on a :

$$\frac{1}{\lambda}(x - J_\lambda^t(x)) \in A_t(J_\lambda^t(x)),$$

$$\frac{1}{\lambda}(y - J_\lambda^t(y)) \in A_t(J_\lambda^t(y)).$$

Comme A_t est monotone pour tout $t \in [0,T]$ (voir Définition 1.49) alors,

$$\langle \frac{1}{\lambda}(x - J_\lambda^t(x)) - \frac{1}{\lambda}(y - J_\lambda^t(y)), J_\lambda^t(x) - J_\lambda^t(y)\rangle \geq 0.$$

Après simplification, on obtient

$$\frac{1}{\lambda}\langle x - y, J_\lambda^t(x) - J_\lambda^t(y)\rangle - \frac{1}{\lambda}\langle J_\lambda^t(x) - J_\lambda^t(y), J_\lambda^t(x) - J_\lambda^t(y)\rangle \geq 0,$$

ce qui donne

$$-\frac{1}{\lambda}\langle x-y, J_\lambda^t(x)-J_\lambda^t(y)\rangle+\frac{1}{\lambda}\langle J_\lambda^t(x)-J_\lambda^t(y), J_\lambda^t(x)-J_\lambda^t(y)\rangle \leq 0.$$

Enfin, en utilisant (1.1), on trouve

$$\begin{aligned}||J_\lambda^t(x)-J_\lambda^t(y)||^2 &\leq \langle x-y, J_\lambda^t(x)-J_\lambda^t(y)\rangle\\ &\leq ||x-y||||J_\lambda^t(x)-J_\lambda^t(y)||,\end{aligned}$$

ce qui donne

$$||J_\lambda^t(x)-J_\lambda^t(y)|| \leq ||x-y||.$$

L'assertion (iii) se déduit facilement en combinant Proposition 2.1, Définition 2.2, et Proposition 2.3.

(iv) Soit

$$y \in A_t(x) \text{ tel que } ||y|| = |A_t(x)|, \tag{2.1}$$

pour $x \in H$ et $t \in [0,T]$ (voir Caractérisation 1.52). D'après (i), on a

$$\frac{1}{\lambda}(x-J_\lambda^t(x)) \in A_t(J_\lambda^t(x)).$$

Comme A_t est monotone, alors il résulte que

$$\langle y-\frac{1}{\lambda}(x-J_\lambda^t(x)), x-J_\lambda^t(x)\rangle \geq 0.$$

En utilisant (1.1), on obtient après simplification

$$||x-J_\lambda^t(x)||^2 \leq \lambda||y||||x-J_\lambda^t(x)||.$$

En tenant compte de (2.1), il résulte

$$||x-J_\lambda^t(x)|| \leq \lambda|A_t(x)|.$$

Comme A_t est maximal monotone, l'assertion (v) résulte directement du Théorème 1.54. La démonstration du lemme est alors complète. ■

Nous allons démontrer le résultat principal du chapitre.

Théorème 2.5. *Supposons que $(\mathcal{H}_A)$ et $(\mathcal{H}_f)$ soient satisfaites. Alors, pour tout $x_0 \in H$, il existe une unique solution $x(\cdot;x_0) \in W^{1,2}([0,T];H)$ de l'inclusion différentielle $(\mathcal{P})$*

$$(\mathcal{P})\begin{cases}\dot{x}(t) \in -A_t(x(t))+f(t,x(t)) \text{ p.p. } t \in [0,T],\\ x(0)=x_0.\end{cases}$$

De plus, l'application $x_0 \mapsto x(\cdot; x_0)$ est du type Lipschitz, et pour p.p. $t \in [0,T]$ on a

$$\begin{cases} ||x(t;x_0)|| \leq \rho(t) := \Big(||x_0|| + \int_0^t (\beta(s)+\delta(s))ds\Big) \exp\Big(\int_0^t (\alpha(s)+\gamma(s))ds\Big) \\ ||\dot{x}(t;x_0)|| \leq \theta(t) := (\alpha(t)+\gamma(t))\rho(t) + (\beta(t)+\delta(t)). \end{cases} \tag{2.2}$$

où α, β, γ et δ sont les fonctions définies dans $(\mathcal{H}_A)$ et $(\mathcal{H}_f)$.

Démonstration. Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres strictement positives telle que $\lambda_n \downarrow 0$. Pour $n \geq 1$, on considère la famille des équations différentielles

$$(\mathcal{P}_n) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t,x(t)) - A^t_{\lambda_n}(x(t)) \text{ p.p. } t \in [0,T], \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où $A^t_{\lambda_n}(x(t)) = \frac{1}{\lambda_n}\Big(x(t) - J^t_{\lambda_n}(x(t))\Big)$.

On va démontrer que le problème $(\mathcal{P}_n)$ admet une unique solution x_n et que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers l'unique solution $x \in AC([0,T];H)$ de l'inclusion $(\mathcal{P})$. La démonstration sera divisée en plusieurs étapes.

Étape 1 : Dans un premier temps, on va montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe une unique solution x_n au problème $(\mathcal{P}_n)$. De plus, les estimations

$$||x_n(t)|| \leq \rho(t) \text{ et } ||\dot{x}_n(t)|| \leq \theta(t) \text{ pour p.p. } t \in [0,T], \tag{2.3}$$

sont vérifiées où ρ et θ sont les fonctions définies dans (2.2).

Pour tout $n \geq 1$, on définit g_n et F_n sur $[0,T] \times H$ par

$$g_n(t,x) = f(t,x) - \frac{1}{\lambda_n}(x - J^t_{\lambda_n}(x)), \ F_n(t,x) = \{g_n(t,x)\}.$$

Le problème régularisé $(\mathcal{P}_n)$ s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = g_n(t,x(t)) \text{ p.p. } t \in [0,T], \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{2.4}$$

On va utiliser Théorème 1.48 pour montrer que (2.4) admette une unique solution.

On remarque que $g_n(\cdot,x)$ est mesurable pour tout $x \in H$. En effet, cela se justifie par le fait que $g_n(\cdot,x)$ est la somme de fonctions mesurables $f(\cdot,x)$ (par hypothèse $(\mathcal{H}_f)$ (a)) et $t \mapsto J^t_{\lambda_n}(x)$ (par Lemme 2.4 (iii)), pour tout $x \in H$. Ainsi, la multi-application $F_n(\cdot,x)$ admet une sélection mesurable $g_n(\cdot,x)$.

Montrons $g_n(t,\cdot)$ est continue pour tout $t \in [0,T]$:

On a pour tout $t \in [0,T]$ et tous $x, y \in H$

$$\begin{aligned}
||g_n(t,x) - g_n(t,y)|| &= ||f(t,x) - \frac{1}{\lambda_n}(x - J^t_{\lambda_n}(x)) - f(t,y) + \frac{1}{\lambda_n}(y - J^t_{\lambda_n}(y))|| \\
&\leq ||f(t,x) - f(t,y)|| + \frac{1}{\lambda_n}\Big[||x-y|| + ||J^t_{\lambda_n}(x) - J^t_{\lambda_n}(y)||\Big].
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse $(\mathcal{H}_f)$ (b) et Lemme 2.4 (ii), on trouve

$$\begin{aligned}
||g_n(t,x) - g_n(t,y)|| &\leq k(t)||x-y|| + \frac{1}{\lambda_n}\Big[||x-y|| + ||x-y||\Big] \\
&= k(t)||x-y|| + \frac{2}{\lambda_n}||x-y||.
\end{aligned}$$

Donc,

$$||g_n(t,x) - g_n(t,y)|| \leq k_n(t)||x-y||; \tag{2.5}$$

où $k_n \in L^1([0,T];\mathbb{R})$ est définie par $k_n(t) = k(t) + \frac{2}{\lambda_n}$ pour tout $t \in [0,T]$ (car $L^2([0,T];\mathbb{R}) \subset L^1([0,T];\mathbb{R})$). Il résulte que $g_n(t,\cdot)$ est continue pour tout $t \in [0,T]$. Ainsi, d'après Proposition 1.46, il s'en suit que $F_n(t,\cdot)$ est semi-continue supérieurement. D'où la condition (a) du Théorème 1.48 est vérifiée.

En utilisant (1.1) et (2.5), on trouve

$$\begin{aligned}
\langle g_n(t,x) - g_n(t,y), x-y\rangle &\leq ||g_n(t,x) - g_n(t,y)||||x-y|| \\
&\leq k_n(t)||x-y||^2.
\end{aligned}$$

La condition (b) du Théorème 1.48 est donc vérifiée.

Montrons qu'il existe $c \in L^1([0,T];\mathbb{R})$ telle que

$$||g_n(t,x)|| \leq c(t)(1 + ||x||),\ (t,x) \in [0,T] \times H.$$

On a par définition des g_n, pour tout $(t,x) \in [0,T] \times H$

$$\begin{aligned}
||g_n(t,x)|| &= ||f(t,x) - \frac{1}{\lambda_n}(x - J^t_{\lambda_n}(x))|| \\
&\leq ||f(t,x)|| + \frac{1}{\lambda_n}||(x - J^t_{\lambda_n}(x))||.
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse $(\mathcal{H}_f)$ (c) et Lemme 2.4 (iv), on trouve

$$\begin{aligned}
||g_n(t,x)|| &\leq \gamma(t)||x|| + \delta(t) + \frac{1}{\lambda_n}\lambda_n|A_t(x)| \\
&= \gamma(t)||x|| + \delta(t) + |A_t(x)|.
\end{aligned}$$

De plus, d'après l'hypothèse $(\mathcal{H}_A)$ (c) on obtient

$$\begin{aligned}
||g_n(t,x)|| &\leq \gamma(t)||x|| + \delta(t) + \alpha(t)||x|| + \beta(t) \\
&= (\gamma(t) + \alpha(t))||x|| + (\delta(t) + \beta(t)) \\
&\leq c(t)(1 + ||x||),
\end{aligned}$$

où $c \in L^1([0,T];\mathbb{R})$ est définie par $c(t) = \gamma(t) + \alpha(t) + \delta(t) + \beta(t)$ pour tout $t \in [0,T]$ (car α, γ, δ, $\beta \in L^2([0,T];\mathbb{R})$ et $L^2([0,T];\mathbb{R}) \subset L^1([0,T];\mathbb{R})$). Il résulte que la condition (c) du Théorème 1.48 est vérifiée.

Par conséquent, g_n satisfait toutes les hypothèses du Théorème 1.48, alors l'équation (2.4) admet une unique solution x_n. Le problème $(\mathcal{P}_n)$ admet donc une unique solution $x_n \in AC([0,T];H)$, pour tout $n \geq 1$.

Montrons que pour tout $t \in [0,T]$

$$||x_n(t)|| \leq \rho(t) \text{ et } ||\dot{x}_n(t)|| \leq \theta(t), \tag{2.6}$$

où les fonctions ρ, θ sont définies dans (2.2).

Soit x_n la solution de $(\mathcal{P}_n)$, $n \geq 1$. D'une part, pour tout $t \in [0,T]$ on a

$$\dot{x}_n(t) = f(t, x_n(t)) - \frac{1}{\lambda_n}(x_n(t) - J^t_{\lambda_n}(x_n(t))),$$

et

$$\begin{aligned} ||\dot{x}_n(t)|| &= ||f(t, x_n(t)) - \frac{1}{\lambda_n}(x_n(t) - J^t_{\lambda_n}(x_n(t)))|| \\ &\leq ||f(t, x_n(t))|| + \frac{1}{\lambda_n}||x_n(t) - J^t_{\lambda_n}(x_n(t))||. \end{aligned} \tag{2.7}$$

D'après Lemme 2.4 (iv), pour tout $t \in [0,T]$,

$$||x_n(t) - J^t_{\lambda_n}(x_n(t))|| \leq \lambda_n |A_t(x_n(t))|.$$

Or d'après l'hypothèse $(\mathcal{H}_A)$ (c), on a pour tout $t \in [0,T]$

$$|A_t(x_n(t))| \leq \alpha(t)||x_n(t)|| + \beta(t).$$

De retour à (2.7), en tenant compte de l'hypothèse $(\mathcal{H}_f)$ (c)

$$||\dot{x}_n(t)|| \leq \gamma(t)||x_n(t)|| + \delta(t) + \alpha(t)||x_n(t)|| + \beta(t).$$

Il résulte que

$$||\dot{x}_n(t)|| \leq (\alpha(t) + \gamma(t))||x_n(t)|| + (\beta(t) + \delta(t)). \tag{2.8}$$

D'autre part, pour tout $t \in [0,T]$ on a

$$\begin{aligned} ||x_n(t)|| &= ||x_0 + \int_0^t \dot{x}_n(s)ds|| \\ &\leq ||x_0|| + ||\int_0^t \dot{x}_n(s)ds|| \\ &\leq ||x_0|| + \int_0^t ||\dot{x}_n(s)||ds. \end{aligned}$$

Alors,

$$||x_n(t)|| \leq \psi(t),$$

où pour tout $t \in [0,T]$: $\psi(t) = ||x_0|| + \int_0^t ||\dot{x}_n(s)||ds$.
En tenant compte de (2.8), on trouve pour tout $t \in [0,T]$

$$\dot{\psi}(t) \leq (\alpha(t) + \gamma(t))\psi(t) + (\beta(t) + \delta(t)).$$

D'après le lemme de Gronwall (voir Lemme 1.58), on trouve

$$\psi(t) \leq \psi(0) \exp\Big(\int_0^t (\alpha(s) + \gamma(s))ds\Big) + \int_0^t (\beta(\tau) + \delta(\tau)) \exp\Big(\int_\tau^t (\alpha(s) + \gamma(s))ds\Big)d\tau.$$

Pour $0 \leq \tau < t \leq T$ on a

$$\int_\tau^t (\alpha(s) + \gamma(s))ds \leq \int_0^t (\alpha(s) + \gamma(s))ds.$$

Il s'en suit alors que

$$\begin{aligned}
\psi(t) &\leq \psi(0) \exp\Big(\int_0^t (\alpha(s) + \gamma(s))ds\Big) + \exp\Big(\int_0^t (\alpha(s) + \gamma(s))ds\Big) \int_0^t (\beta(\tau) + \delta(\tau))d\tau \\
&= \Big(\psi(0) + \int_0^t (\beta(\tau) + \delta(\tau))d\tau\Big) \exp\Big(\int_0^t (\alpha(s) + \gamma(s))ds\Big) \\
&= \Big(||x_0|| + \int_0^t (\beta(\tau) + \delta(\tau))d\tau\Big) \exp\Big(\int_0^t (\alpha(s) + \gamma(s))ds\Big).
\end{aligned}$$

On rappelle de ce qui précède que $||x_n(t)|| \leq \psi(t)$. D'où,

$$||x_n(t)|| \leq \rho(t), \tag{2.9}$$

où pour tout $t \in [0,T]$:

$$\rho(t) = \Big(||x_0|| + \int_0^t (\beta(s) + \delta(s))ds\Big) \exp\Big(\int_0^t (\alpha(s) + \gamma(s))ds\Big).$$

De plus, de (2.8) on a pour tout $t \in [0,T]$

$$||\dot{x}_n(t)|| \leq \theta(t), \tag{2.10}$$

où pour tout $t \in [0,T]$:

$$\theta(t) = (\alpha(t) + \gamma(t))\rho(t) + (\beta(t) + \delta(t)).$$

Étape 2 : Nous allons montrer qu'il existe une fonction $\sigma \in L^1([0,T];\mathbb{R})$ telle que pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, les estimations suivantes :

$$||x_n(t) - x_m(t)||^2 \leq 4(\lambda_n + \lambda_m) \int_0^t \sigma(s)ds \quad t \in [0,T],$$

ont lieu, où x_n (resp. x_m) est l'unique solution du problème $(\mathcal{P}_n)$ (resp. $(\mathcal{P}_m)$).
On définit la fonction h par $h(t) = \frac{1}{2}||x_n(t)-x_m(t)||^2$, pour tout $t \in [0,T]$, pour $n,m \in \mathbb{N}^*$.
Alors h est absolument continue et de la formule de Moreau on a pour tout $t \in [0,T]$

$$\dot{h}(t) = \langle \dot{x}_n(t) - \dot{x}_m(t), x_n(t) - x_m(t)\rangle.$$

On a pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}\dot{h}(t) &= \langle \dot{x}_n(t) - \dot{x}_m(t), x_n(t) - J^t_{\lambda_n}(x_n(t))\rangle \\ &+ \langle \dot{x}_n(t) - \dot{x}_m(t), J^t_{\lambda_n}(x_n(t)) - J^t_{\lambda_m}(x_m(t))\rangle \\ &+ \langle \dot{x}_n(t) - \dot{x}_m(t), J^t_{\lambda_m}(x_m(t)) - x_m(t)\rangle. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Comme x_n vérifie

$$\dot{x}_n(t) = f(t,x_n(t)) - \frac{1}{\lambda_n}\Big(x_n(t) - J^t_{\lambda_n}(x_n(t))\Big) \text{ p.p. } t \in [0,T],\ x_n(0) = x_0,$$

et x_m vérifie

$$\dot{x}_m(t) = f(t,x_m(t)) - \frac{1}{\lambda_m}\Big(x_m(t) - J^t_{\lambda_m}(x_m(t))\Big) \text{ p.p. } t \in [0,T],\ x_m(0) = x_0,$$

alors, il résulte

$$\begin{aligned}&\langle \dot{x}_n(t) - \dot{x}_m(t), J^t_{\lambda_n}(x_n(t)) - J^t_{\lambda_m}(x_m(t))\rangle \\ &= \langle f(t,x_n(t)) - f(t,x_m(t)) + \frac{1}{\lambda_m}(x_m(t) - J^t_{\lambda_m}(x_m(t))) \\ &- \frac{1}{\lambda_n}(x_n(t) - J^t_{\lambda_n}(x_n(t))), J^t_{\lambda_n}(x_n(t)) - J^t_{\lambda_m}(x_m(t))\rangle \\ &= \langle f(t,x_n(t)) - f(t,x_m(t)), J^t_{\lambda_n}(x_n(t)) - J^t_{\lambda_m}(x_m(t))\rangle \\ &+ \Big\langle \frac{1}{\lambda_m}\Big(x_m(t) - J^t_{\lambda_m}(x_m(t))\Big) - \frac{1}{\lambda_n}\Big(x_n(t) - J^t_{\lambda_n}(x_n(t))\Big), J^t_{\lambda_n}(x_n(t)) - J^t_{\lambda_m}(x_m(t))\Big\rangle.\end{aligned}$$

On a d'après Lemme 2.4 (i), pour tout $t \in [0,T]$ et tous $n,m \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{\lambda_n}\Big(x_n(t) - J^t_{\lambda_n}(x_n(t))\Big) \in A_t(J^t_{\lambda_n}(x_n(t))),$$

$$\frac{1}{\lambda_m}\Big(x_m(t) - J^t_{\lambda_m}(x_m(t))\Big) \in A_t(J^t_{\lambda_m}(x_m(t))).$$

Comme A_t est monotone pour tout $t \in [0,T]$ (voir (1.2)), il résulte alors que

$$\Big\langle \frac{1}{\lambda_n}\Big(x_n(t) - J^t_{\lambda_n}(x_n(t))\Big) - \frac{1}{\lambda_m}\Big(x_m(t) - J^t_{\lambda_m}(x_m(t))\Big), J^t_{\lambda_n}(x_n(t)) - J^t_{\lambda_m}(x_m(t))\Big\rangle \geq 0,$$

ce qui donne

$$\Big\langle \frac{1}{\lambda_m}\Big(x_m(t) - J^t_{\lambda_m}(x_m(t))\Big) - \frac{1}{\lambda_n}\Big(x_n(t) - J^t_{\lambda_n}(x_n(t))\Big), J^t_{\lambda_n}(x_n(t)) - J^t_{\lambda_m}(x_m(t))\Big\rangle \leq 0.$$

Donc,

$$\langle \dot{x}_n(t)-\dot{x}_m(t), J^t_{\lambda_n}(x_n(t))-J^t_{\lambda_m}(x_m(t))\rangle \leq \langle f(t,x_n(t))-f(t,x_m(t)), J^t_{\lambda_n}(x_n(t))-J^t_{\lambda_m}(x_m(t))\rangle.$$

De retour à (2.11), on trouve

$$\begin{aligned}\dot{h}(t) \leq \langle \dot{x}_n(t)-\dot{x}_m(t), x_n(t)-J^t_{\lambda_n}(x_n(t))\rangle + \langle \dot{x}_n(t)-\dot{x}_m(t), J^t_{\lambda_m}(x_m(t))-x_m(t)\rangle \\ +\langle f(t,x_n(t))-f(t,x_m(t)), J^t_{\lambda_n}(x_n(t))-J^t_{\lambda_m}(x_m(t))\rangle. \qquad (2.12)\end{aligned}$$

En utilisant (1.1) et (2.10), on obtient

$$\begin{aligned}\langle \dot{x}_n(t)-\dot{x}_m(t), x_n(t)-J^t_{\lambda_n}(x_n(t))\rangle &\leq ||\dot{x}_n(t)-\dot{x}_m(t)||||x_n(t)-J^t_{\lambda_n}(x_n(t))||,\\ &\leq 2\theta(t)||x_n(t)-J^t_{\lambda_n}(x_n(t))||.\end{aligned}$$

D'après Lemme 2.4 (iv), il résulte que

$$\langle \dot{x}_n(t)-\dot{x}_m(t), x_n(t)-J^t_{\lambda_n}(x_n(t))\rangle \leq 2\theta(t)\lambda_n|A_t(x_n(t))|,$$

qui se simplifie encore par l'hypothèse $(\mathcal{H}_A)$ (c)

$$\langle \dot{x}_n(t)-\dot{x}_m(t), x_n(t)-J^t_{\lambda_n}(x_n(t))\rangle \leq 2\theta(t)\lambda_n\Big(\alpha(t)||x_n(t)||+\beta(t)\Big).$$

De (2.9), il s'en suit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\langle \dot{x}_n(t)-\dot{x}_m(t), x_n(t)-J^t_{\lambda_n}(x_n(t))\rangle \leq 2\theta(t)\lambda_n\Big(\alpha(t)\rho(t)+\beta(t)\Big). \qquad (2.13)$$

De manière analogue, de (1.1) et (2.10), on a

$$\begin{aligned}\langle \dot{x}_n(t)-\dot{x}_m(t), J^t_{\lambda_m}(x_m(t))-x_m(t)\rangle &\leq ||\dot{x}_n(t)-\dot{x}_m(t)||||J^t_{\lambda_m}(x_m(t))-x_m(t)||\\ &\leq 2\theta(t)||J^t_{\lambda_m}(x_m(t))-x_m(t)||.\end{aligned}$$

Du Lemme 2.4 (iv), de l'hypothèse $(\mathcal{H}_A)$ (c), on trouve

$$\begin{aligned}\langle \dot{x}_n(t)-\dot{x}_m(t), J^t_{\lambda_m}(x_m(t))-x_m(t)\rangle &\leq 2\theta(t)\lambda_m|A_t(x_m(t))|\\ &\leq 2\theta(t)\lambda_m\Big(\alpha(t)||x_m(t)||+\beta(t)\Big).\end{aligned}$$

De (2.9), il résulte

$$\langle \dot{x}_n(t)-\dot{x}_m(t), J^t_{\lambda_m}(x_m(t))-x_m(t)\rangle \leq 2\theta(t)\lambda_m\Big(\alpha(t)\rho(t)+\beta(t)\Big). \qquad (2.14)$$

Maintenant de (1.1), on sait que

$$\langle f(t,x_n(t))-f(t,x_m(t)), J^t_{\lambda_n}(x_n(t))-J^t_{\lambda_m}(x_m(t))\rangle$$

$$\leq ||f(t,x_n(t)) - f(t,x_m(t))|| ||J^t_{\lambda_n}(x_n(t)) - J^t_{\lambda_m}(x_m(t))||.$$

D'après l'hypothèse $(\mathcal{H}_f)$ (b), on trouve

$$\langle f(t,x_n(t)) - f(t,x_m(t)), J^t_{\lambda_n}(x_n(t)) - J^t_{\lambda_m}(x_m(t))\rangle$$

$$\leq k(t)||x_n(t) - x_m(t)|| ||J^t_{\lambda_n}(x_n(t)) - J^t_{\lambda_m}(x_m(t))||,$$

et alors

$$\langle f(t,x_n(t)) - f(t,x_m(t)), J^t_{\lambda_n}(x_n(t)) - J^t_{\lambda_m}(x_m(t))\rangle \leq k(t)||x_n(t) - x_m(t)|| \Big[||J^t_{\lambda_n}(x_n(t)) - x_n(t)|| + ||x_n(t) - x_m(t)|| + ||J^t_{\lambda_m}(x_m(t)) - x_m(t)|| \Big]$$

$$= k(t)||x_n(t)-x_m(t)||^2 + k(t)||x_n(t)-x_m(t)|| \Big[||J^t_{\lambda_n}(x_n(t))-x_n(t)|| + ||J^t_{\lambda_m}(x_m(t))-x_m(t)|| \Big].$$

Du Lemme 2.4 (iv), on obtient

$$\langle f(t,x_n(t)) - f(t,x_m(t)), J^t_{\lambda_n}(x_n(t)) - J^t_{\lambda_m}(x_m(t))\rangle$$

$$\leq k(t)||x_n(t) - x_m(t)||^2 + k(t)||x_n(t) - x_m(t)|| \Big[\lambda_n |A_t(x_n(t))| + \lambda_m |A_t(x_m(t))| \Big].$$

De l'hypothèse $(\mathcal{H}_A)$ (c), on trouve

$$\langle f(t,x_n(t)) - f(t,x_m(t)), J^t_{\lambda_n}(x_n(t)) - J^t_{\lambda_m}(x_m(t))\rangle$$

$$\leq k(t)||x_n(t) - x_m(t)||^2 + k(t)||x_n(t) - x_m(t)||$$

$$\Big[\lambda_n \Big(\alpha(t)||x_n(t)|| + \beta(t) \Big) + \lambda_m \Big(\alpha(t)||x_m(t)|| + \beta(t) \Big) \Big].$$

En tenant compte de (2.9), il résulte pour tout $t \in [0,T]$
$\langle f(t,x_n(t)) - f(t,x_m(t)), J^t_{\lambda_n}(x_n(t)) - J^t_{\lambda_m}(x_m(t))\rangle$

$$\leq k(t)||x_n(t) - x_m(t)||^2 + k(t) \Big[\lambda_n \Big(\alpha(t)\rho(t) + \beta(t) \Big) + \lambda_m \Big(\alpha(t)\rho(t) + \beta(t) \Big) \Big] ||x_n(t) - x_m(t)||$$

$$\leq k(t)||x_n(t) - x_m(t)||^2 + k(t) \Big[\lambda_n \Big(\alpha(t)\rho(t) + \beta(t) \Big) + \lambda_m \Big(\alpha(t)\rho(t) + \beta(t) \Big) \Big] \Big(||x_n(t)|| + ||x_m(t)|| \Big)$$

$$\leq k(t)||x_n(t) - x_m(t)||^2 + k(t) \Big[\lambda_n \Big(\alpha(t)\rho(t) + \beta(t) \Big) + \lambda_m \Big(\alpha(t)\rho(t) + \beta(t) \Big) \Big] \Big(\rho(t) + \rho(t) \Big)$$

$$\leq k(t)||x_n(t) - x_m(t)||^2 + 2k(t)(\lambda_n + \lambda_m) \Big(\alpha(t)\rho(t) + \beta(t) \Big) \rho(t).$$

On rappelle que $h(t) = \frac{1}{2}||x_n(t) - x_m(t)||^2$, on peut simplifier l'estimation précédente
$\langle f(t,x_n(t)) - f(t,x_m(t)), J^t_{\lambda_n}(x_n(t)) - J^t_{\lambda_m}(x_m(t))\rangle$

$$\leq 2k(t)h(t) + 2(\lambda_n + \lambda_m)k(t) \Big(\alpha(t)\rho(t) + \beta(t) \Big) \rho(t). \tag{2.15}$$

De retour à (2.12), en combinant (2.13), (2.14), et (2.15), il s'en suit
$\dot{h}(t) \leq$

$$2(\lambda_n + \lambda_m)\theta(t) \Big(\alpha(t)\rho(t) + \beta(t) \Big) + 2k(t)h(t) + 2(\lambda_n + \lambda_m)k(t) \Big(\alpha(t)\rho(t) + \beta(t) \Big) \rho(t),$$

et alors,

$$\dot{h}(t) \leq 2(\lambda_n + \lambda_m)\Big(\theta(t) + k(t)\rho(t)\Big)\Big(\alpha(t)\rho(t) + \beta(t)\Big) + 2k(t)h(t).$$

On remarque que $h(0) = 0$, une application du lemme de Gronwall (Lemme 1.58) donne

$$h(t) \leq 2(\lambda_n + \lambda_m)\int_0^t \Big(k(s)\rho(s) + \theta(s)\Big)\Big(\alpha(s)\rho(s) + \beta(s)\Big)\exp\Big(2\int_s^t k(\tau)d\tau\Big)ds.$$

Comme par définition $h(t) = \frac{1}{2}||x_n(t) - x_m(t)||^2$, pour tout $t \in [0,T]$ alors,

$$||x_n(t)-x_m(t)||^2 \leq 4(\lambda_n+\lambda_m)\int_0^t \Big(k(s)\rho(s)+\theta(s)\Big)\Big(\alpha(s)\rho(s)+\beta(s)\Big)\exp\Big(2\int_s^t k(\tau)d\tau\Big)ds.$$

D'où, l'estimation

$$||x_n(t) - x_m(t)||^2 \leq 4(\lambda_n + \lambda_m)\int_0^t \sigma(s)ds \quad t \in [0,T], \tag{2.16}$$

a lieu, en définissant $\sigma \in L^1([0,T];\mathbb{R})$ par

$$\sigma(s) = \Big(k(s)\rho(s) + \theta(s)\Big)\Big(\alpha(s)\rho(s) + \beta(s)\Big)\exp\Big(2\int_s^t k(\tau)d\tau\Big), \; s \in [0,T].$$

Étape 3 : On va montrer que $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $C([0,T];H)$ et, par conséquent, elle converge uniformément vers une fonction $x \in C([0,T];H)$.
De (2.16), on a pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$

$$||x_n(t) - x_m(t)||^2 \leq 4(\lambda_n + \lambda_m)\eta, \;\; t \in [0,T],$$

ce qui donne

$$\sup_{t\in[0,T]} ||x_n(t) - x_m(t)||^2 \leq 4(\lambda_n + \lambda_m)\eta,$$

où $\eta = \int_0^T \sigma(s)ds < +\infty$ est une constante positive.
En faisant tendre n et m vers l'infini, il s'en suit que

$$\lim_{n,m\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} ||x_n(t) - x_m(t)|| = 0,$$

i.e.,

$$\lim_{n,m\to\infty} ||x_n(\cdot) - x_m(\cdot)||_\infty = 0.$$

Alors, $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $C([0,T];H)$ qui est complet. D'où, $(x_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers une certaine fonction x dans $C([0,T];H)$.
Étape 4 : Tout d'abord, on remarque que $(\dot{x}_n)_{n\geq 1}$ est une suite bornée dans $L^2([0,T];H)$ (d'après (2.10)). Alors, on peut extraire de $(\dot{x}_n)_{n\geq 1}$ une sous suite notée encore $(\dot{x}_n)_{n\geq 1}$ qui converge faiblement dans $L^2([0,T];H)$ vers v dans $L^2([0,T];H)$ (et donc dans $L^1([0,T];H)$),

lorsque $n \to \infty$ (voir Corollaire 1.33).

On note que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n est absolument continue

$$x_n(t) = x_0 + \int_0^t \dot{x}_n(s)ds,\ t \in [0,T].$$

De la continuité absolue des x_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $e \in H$ et pour $0 \leq s \leq t \leq T$, on trouve

$$\begin{aligned}\langle e, \int_s^t \dot{x}_n(\tau)d\tau\rangle &= \int_0^T \langle e\mathbf{1}_{]s,t]}(\tau), \dot{x}_n(\tau)\rangle d\tau \\ &= \langle e, x_n(t) - x_n(s)\rangle,\end{aligned}$$

où $\mathbf{1}_{]s,t]}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $]s,t]$.

Ensuite, par un passage à la limite quand $n \to \infty$, il résulte

$$\langle e, \int_s^t v(\tau)d\tau\rangle = \langle e, x(t) - x(s)\rangle.$$

Ainsi, étant donné $s,t \in [0,T]$ avec $s \leq t$, on obtient $\int_s^t v(\tau)d\tau = x(t) - x(s)$, et alors $x(\cdot)$ est absolument continue et $v(\cdot)$ coïncide p.p. sur $[0,T]$ avec $\dot{x}(\cdot)$. D'où,

$$\dot{x}_n \to \dot{x} \quad \text{faiblement dans } L^1([0,T];H) \text{ quand } n \to \infty. \tag{2.17}$$

Étape 5 : Nous allons établir

$$\dot{x}(t) \in -A_t(x(t)) + f(t,x(t)) \text{ p.p. } t \in [0,T].$$

Montrons que

$$\dot{x}_n(t) \in f(t,x_n(t)) - A_t(J^t_{\lambda_n}(x_n(t))) \text{ p.p. } t \in [0,T]. \tag{2.18}$$

On a d'après Lemme 2.4 (i) pour tout $t \in [0,T]$

$$\frac{1}{\lambda_n}\Big(x_n(t) - J^t_{\lambda_n}(x_n(t))\Big) \in A_t(J^t_{\lambda_n}(x_n(t))),$$

et alors

$$-\frac{1}{\lambda_n}\Big(x_n(t) - J^t_{\lambda_n}(x_n(t))\Big) + f(t,x_n(t)) \in -A_t(J^t_{\lambda_n}(x_n(t))) + f(t,x_n(t)).$$

Or on sait que

$$\dot{x}_n(t) = f(t,x_n(t)) - \frac{1}{\lambda_n}\Big(x_n(t) - J^t_{\lambda_n}(x_n(t))\Big),$$

alors, il s'en suit que (2.18) est établie.

Montons que $J^t_{\lambda_n}(x_n(t)) \to x(t)$, **lorsque** $n \to \infty$ **:**

D'après Lemme 2.4 (iv), pour tout $t \in [0,T]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$||x_n(t) - J^t_{\lambda_n}(x_n(t))|| \leq \lambda_n |A_t(x_n(t))|,$$

et

$$\begin{aligned}||J_{\lambda_n}^t(x_n(t)) - x(t)|| &= ||J_{\lambda_n}^t(x_n(t)) - x_n(t) + x_n(t) - x(t)|| \\ &\leq \lambda_n |A_t(x_n(t))| + ||x_n(t) - x(t)||\end{aligned}$$

De l'hypothèse $(\mathcal{H}_A)$ (c) et (2.9), il résulte

$$|A_t(x_n(t))| \leq \alpha(t)||x_n(t)|| + \beta(t) \leq \alpha(t)\rho(t) + \beta(t),$$

i.e., la suite $(|A_t(x_n(t))|)$ est bornée. Il s'en suit que $\lambda_n |A_t(x_n(t))| \to 0$ quand $n \to \infty$. De plus, de la convergence uniforme de (x_n) vers x, il résulte que pour tout $t \in [0, T]$

$$||x_n(t) - x(t)|| \to 0 \text{ quand } n \to \infty. \tag{2.19}$$

Par conséquent, pour tout $t \in [0, T]$ on obtient

$$J_{\lambda_n}^t(x_n(t)) \to x(t) \text{ quand } n \to \infty. \tag{2.20}$$

On rappelle que pour tout $x \in H$ et tout $t \in [0, T]$, $A_t(x)$ est un ensemble non-vide convexe fermé (voir Caractérisation 1.52). On note que de l'hypothèse $(\mathcal{H}_A)$ (b) : Pour tout $x \in H$, la multi-application $t \mapsto A_t(x)$ est mesurable. D'après Lemme 2.4 (v) : Pour tout $t \in [0, T]$, la multi-application $x \mapsto A_t(x)$ est fortement-faiblement semi-continue supérieurement.

En combinant l'hypothèse $(\mathcal{H}_f)$ (b), et (2.19), on conclut que pour presque tout $t \in [0, T]$

$$f(t, x_n(t)) \to f(t, x(t)) \text{ quand } n \to \infty. \tag{2.21}$$

Cette convergence avec les hypothèses $(\mathcal{H}_f)$ (a)-(c), et (2.9) entrainent que

$$||f(t, x_n(t))|| \leq g(t) = \gamma(t)\rho(t) + \delta(t) \text{ p.p. } t \in [0, T],$$

où $g \in L^1([0, T]; \mathbb{R})$.

Par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (voir Théorème 1.55), on déduit que

$$f(\cdot, x_n(\cdot)) \to f(\cdot, x(\cdot)) \text{ dans } L^1([0, T]; H) \text{ quand } n \to \infty,$$

ce qui implique

$$f(\cdot, x_n(\cdot)) \to f(\cdot, x(\cdot)) \text{ faiblement dans } L^1([0, T]; H) \text{ quand } n \to \infty. \tag{2.22}$$

En combinant cette convergence avec (2.17), (2.20), et de ce qui précède les conditions de Proposition 1.47 étant satisfaites, on conclut que x est un solution de $(\mathcal{P})$.

Il nous reste à vérifier les estimations (2.2) **:**
Soit x la solution du problème $(\mathcal{P})$. Alors, du Corollaire 1.33, (2.9) et (2.19), on en déduit

$$||x(t)|| \leq \rho(t) \text{ p.p. } t \in [0, T].$$

On rappelle de (2.17) que

$$\dot{x}_n \to \dot{x} \text{ faiblement dans } L^1([0, T]; H) \text{ quand } n \to \infty.$$

De plus, on a de (2.10) pour presque tout $t \in [0, T]$

$$||\dot{x}_n(t)|| \leq \theta(t), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*,$$

cela dit que $(\dot{x}_n(t))$ est bornée dans H, donc elle est faiblement relativement compacte pour presque tout $t \in [0, T]$.
De Proposition 1.57, on en déduit que

$$\dot{x}(t) \in \overline{conv}\ w - \limsup_{n \to \infty} \{\dot{x}_n(t)\} \text{ p.p. } t \in [0, T]. \tag{2.23}$$

On fixe maintenant $t \in [0, T]$ pour lequel $\dot{x}(t)$ existe. Alors, pour tout $v(t) \in w - \limsup_{n \to \infty} \{\dot{x}_n(t)\}$, il existe une sous-suite $(\dot{x}_{n_k})_{k \geq 1}$ de $(\dot{x}_n)$ telle que $\dot{x}_{n_k}(t) \rightharpoonup v(t)$. Alors, du Corollaire 1.33, on obtient que

$$\|v(t)\| \leq \liminf_{k \to \infty} \|\dot{x}_{n_k}(t)\| \leq \theta(t),$$

la dernière inégalité est due à (2.10), ce qui implique que

$$w - \limsup_{n \to \infty} \{\dot{x}_n(t)\} \subset \overline{B}_H(0, \theta(t)).$$

D'où,

$$\overline{conv}\ w - \limsup_{n \to \infty} \{\dot{x}_n(t)\} \subset \overline{B}_H(0, \theta(t)).$$

Enfin, en utilisant (2.23), on trouve $\dot{x}(t) \in \overline{B}_H(0, \theta(t))$, ce qui justifie l'estimation de $x(\cdot)$ dans (2.2).
La démonstration du théorème est alors complète. ■

2.2 Application au problème du second ordre

On présente dans cette section une application du Théorème 2.5 aux problèmes d'évolution du second-ordre régis par des opérateurs maximaux monotones dépendant du temps à domaine $D(A_t) = H$.

Corollaire 2.6. *Supposons que les hypothèses* $(\mathcal{H}_A)$ *et* $(\mathcal{H}_f)$ *soient satisfaites. Alors, pour tous* x_0, $v_0 \in H$, *il existe une unique solution* $x(\cdot; x_0) \in W^{2.2}([0,T]; H)$ *de l'inclusion différentielle*

$$(\mathcal{S})\begin{cases} \ddot{x}(t) \in -A_t(\dot{x}(t)) + f(t, x(t)) \text{ p.p. } t \in [0,T], \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0. \end{cases}$$

Démonstration. Pour tout $t \in [0,T]$, on définit l'opérateur $B_t : H \times H \rightrightarrows H \times H$ par

$$B_t(x,v) = \{0\} \times A_t v \text{ pour tout } (x,v) \in H \times H.$$

Soit l'application $g : [0,T] \times H \times H \to H \times H$ définie par

$$g(t,x,v) = (v, f(t,x)) \text{ pour tout } (t,x,v) \in I \times H \times H.$$

Montrons que B_t est un opérateur maximal monotone satisfaisant aux hypothèses du Théorème 2.5 :

Montrons d'abord que B_t satisfait l'hypothèse $(\mathcal{H}_A)$ (a) :

Montrons que B_t est monotone :

Soient (x,v), (x',v'), (y,z), $(y',z') \in H \times H$ tels que $(y,z) \in B_t(x,v)$, $(y',z') \in B_t(x',v')$. De la définition de l'opérateur B_t, $(y,z) \in B_t(x,v) = \{0\} \times A_t v$ entraine que $y = 0$, $z \in A_t v$, et $(y',z') \in B_t(x',v') = \{0\} \times A_t v'$ entraine que $y' = 0$, $z' \in A_t v'$. Or, A_t est un opérateur monotone (voir (1.2)) alors $\langle v - v', z - z'\rangle \geq 0$. En simplifiant, on trouve

$$\begin{aligned} \langle (x,v) - (x',v'), (y,z) - (y',z')\rangle &= \langle (x - x', v - v'), (y - y', z - z')\rangle \\ &= \langle (x - x', v - v'), (0, z - z')\rangle \\ &= \langle x - x', 0\rangle + \langle v - v', z - z'\rangle \\ &= \langle v - v', z - z'\rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, B_t est un opérateur monotone pour tout $t \in [0,T]$.

Montrons que B_t est maximal :

Pour cela, on va montrer que $R(I_{H\times H} + B_t) = H \times H$ (voir Proposition 1.51). Il suffit de montrer que $H \times H \subset R(I_{H\times H} + B_t)$ (l'inclusion $R(I_{H\times H} + B_t) \subset H \times H$ est évidente). Soit $(y,z) \in H \times H$, on étudie l'existence de $(x,v) \in H \times H$ tel que

$$(y,z) \in (I_{H\times H} + B_t)(x,v) = (x,v) + B_t(x,v) = (x,v) + \{0\} \times A_t v. \tag{2.24}$$

On sait que A_t est maximal alors $R(I_H + A_t) = H$, et donc $z \in H$, il existe $v \in H$: tel que $z \in (I_H + A_t)v = v + A_t v$. D'où, il existe $(x,v) \in H \times H$ tel que (2.24) soit vérifiée (il suffit de prendre $x = y$). Par conséquent, l'opérateur B_t est maximal monotone.

Montrons que B_t satisfait l'hypothèse $(\mathcal{H}_A)$ (b) :

Soit $t \in [0, T]$, l'opérateur B_t est défini pour tout $(x, v) \in H \times H$ par $B_t(x, v) = \{0\} \times A_t v$, qui s'écrit $B_t(x, v) = (F_1(t), F_2(t))$. Les multi-applications $F_1,\ F_2 : [0, T] \rightrightarrows H$ définies par $F_1(t) = \{0\}$ multi-application constante mesurable (voir Exemples 1.44), $F_2(t) = A_t v$ (par hypothèse $(\mathcal{H}_A)$ (b) : $t \mapsto A_t v$ est mesurable) sont mesurables. Il est clair que d'après Exemples 1.44, l'espace H étant métrique séparable, la multi-application $F : [0, T] \rightrightarrows H \times H$ définie par $F(t) = (F_1(t), F_2(t))$, pour tout $(x, v) \in H \times H$ est mesurable. D'où le résultat.

Montrons que B_t satisfait l'hypothèse $(\mathcal{H}_A)$ (c) :

On a pour tout $t \in [0, T]$, et tout $(x, v) \in H \times H$

$$\begin{aligned} |B_t(x, v)| &= \inf\{||(0, z)|| : z \in A_t v\} \\ &= \inf\{||z|| : z \in A_t v\} \\ &= |A_t v| \\ &\leq \alpha(t)||v|| + \beta(t) \\ &\leq \alpha(t)||(x, v)|| + \beta(t). \end{aligned}$$

L'inégalité se justifie par le fait que l'opérateur A_t vérifie l'hypothèse $(\mathcal{H}_A)$ (c).

Montrons que l'application g satisfait aux hypothèses du Théorème 2.5 :

D'abord, montrons que g satisfait l'hypothèse $(\mathcal{H}_f)$ (a).

Il est clair que l'application $t \longmapsto g(t, x, v) = (v, f(t, x))$ est mesurable tout $(x, v) \in H \times H$ car f satisfait l'hypothèse $(\mathcal{H}_f)$ (a).

Montrons que g satisfait l'hypothèse $(\mathcal{H}_f)$ (b) :

Soient (t, x, v), $(t, x', v') \in [0, T] \times H \times H$, alors on a

$$\begin{aligned} ||g(t, x, v) - g(t, x', v')|| &= ||(v, f(t, x)) - (v', f(t, x'))|| \\ &= ||(v - v', f(t, x) - f(t, x'))|| \\ &= ||v - v'|| + ||f(t, x) - f(t, x')||. \end{aligned}$$

Comme f satisfait l'hypothèse $(\mathcal{H}_f)$ (b), alors

$$\begin{aligned} ||g(t, x, v) - g(t, x', v')|| &\leq ||v - v'|| + k(t)||x - x'|| \\ &\leq (1 + k(t))(||v - v'|| + ||x - x'||) \\ &\leq (1 + k(t))||(x, v) - (x', v')|| \\ &\leq k_1(t)||(x, v) - (x', v')||, \end{aligned}$$

où $k_1 \in L^2([0,T];\mathbb{R})$, $k_1(t) = (1 + k(t))$, $t \in [0,T]$.
Montrons que g satisfait l'hypothèse $(\mathcal{H}_f)$ (c) :
Soit $(t,x,v) \in [0,T] \times H \times H$, alors on a

$$\begin{aligned} ||g(t,x,v)|| &= ||(v, f(t,x))|| \\ &= ||v|| + ||f(t,x)||. \end{aligned}$$

Comme f satisfait l'hypothèse $(\mathcal{H}_f)$ (c), alors on trouve

$$\begin{aligned} ||g(t,x,v)|| &\leq ||v|| + \gamma(t)||x|| + \delta(t) \\ &\leq (\gamma(t)+1)(||x|| + ||v||) + \delta(t) \\ &\leq \gamma_1(t)||(x,v)|| + \delta(t), \end{aligned}$$

où $\gamma_1 \in L^2([0,T];\mathbb{R})$, $\gamma_1(t) = (1 + \gamma(t))$, $t \in [0,T]$.
Ainsi, une application du Théorème 2.5 assure l'existence d'une unique solution absolument continue $X = (x, \dot{x})$ (telles que $x, \dot{x} \in W^{1,2}([0,T];H)$) au problème suivant

$$\begin{cases} \dot{X}(t) \in -B_t X(t) + g(t, X(t)) \text{ p.p. } t \in [0,T], \\ X(0) = (x_0, v_0) \in H \times H, \end{cases}$$

qui équivaut à

$$\begin{cases} (\dot{x}(t), \ddot{x}(t)) \in \{0\} \times -A_t(\dot{x}(t))) + (\dot{x}(t), f(t, x(t))) \text{ p.p. } t \in [0,T], \\ x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = v_0. \end{cases}$$

On en conclut que le problème du second ordre

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} \ddot{x}(t) \in -A_t(\dot{x}(t)) + f(t, x(t)) \text{ p.p. } \ t \in [0,T], \\ x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = v_0, \end{cases}$$

admet une unique solution $x \in W^{2,2}([0,T];H)$.
La démonstration du corollaire est alors complète. ∎

Conclusion

Ce mémoire concerne le papier récemment publié [19] qui établit dans le cadre d'un espace de Hilbert un résultat d'existence et d'unicité de la solution au problème régi par des opérateurs maximaux monotones dépendant du temps, à domaine égal à l'espace tout entier, et une perturbation du type Lipschitz par rapport à sa deuxième variable. La technique adoptée est celle de la régularisation Moreau-Yosida. Dans l'étude de sujets en relation, d'autres auteurs utilisent la discrétisation, le théorème du point fixe... Le lecteur peut s'adresser à divers travaux existant dans la littérature concernant différentes classes d'inclusions différentielles avec perturbations (univoques ou multivoques) gouvernées par des opérateurs maximaux monotones sous des hypothèses appropriées.

Bibliographie

[1] Aizicovici, S., Staicu, V. : Multivalued evolution equations with nonlocal intial conditions in Banach spaces, NoDEA, Nolinear Diff. Equ. Appl., 14(3) (2007), 361-376.

[2] Attouch, H. : Familles d'opérateurs maximaux monotones et mesurabilité, Ann. Mat. Pura Appl., 120 (1979), 35-111.

[3] Aubin, J.P., Cellina, A. : Differential Inclusions, Grundlehren Math. Wiss., vol. 264., Springer, (1984).

[4] Aubin, J.P., Frankowska, H., Set valued analysis, Birkouiser, Boston, (1990).

[5] Azzam-Laouir, D., Belhoula, W., Castaing, C., Monteiro Marques, M.D.P. : Multivalued perturbation to evolution problems involving time dependent maximal monotone operators, Evol. Equ. Control Theory, 9(1) (2020), 219-254.

[6] Azzam-Laouir, D., Castaing, C., Monteiro Marques, M.D.P. : Perturbed evolution problems with continuous bounded variation in time and applications, Set-Valued Var. Anal., 26 (2018), 693-728.

[7] Borwein, J., Vanderwerff, J. : convex Functions : Conctructions, Characterizations and Counterexamples, Encyclopedia Math Appl., Vol. 109. Cambridge University Press, Cambridge, (2010).

[8] Brézis, H. : Opérateurs maximaux monotone et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, North-Holland, Amesterdam, London, (1973).

[9] Brézis, H. : Analyse fonctionnelle théorie et applications, Masson, (1993).

[10] Castaing, C. : Sur les multi-applications mesurables, Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, tome 1, no 1 (1967), 91-126.

[11] Castaing, C., Monteiro Marques, M.D.P., Raynaud de Fitte, P. : Second-order evolution problems with time-dependent maximal monotone operator and applications, Adv. Math. Econ., 22 (2018), 25-77.

[12] Castaing, C., Valadier, M. : Convex analysis and measurable multifunctions, Lecture Notes in Math, 580, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1977).

[13] Deimling, K. : Multivalued Differential Equations, de Gruyter Ser. Nonlinear Anal Appl., Vol. 1. Walter de Gruyter co., Berlin (1992).

[14] Gasiński L., Papageorgiou N.S. : Nonlinear Analysis, Series in Mathematical Analysis and Applications, Volume 9, (2005).

[15] Hu, S., Papageorgiou N.S. : Handbook of Multivalued Analysis, Vol I : Theory, Kluwer Academic Publishers, (1997).

[16] Kunze, M., Monteiro Marques, M.D.P. : BV solutions to evolution problems with time-dependent domains, Set-Valued Anal., 5 (1997), 57-72.

[17] Phelps, R.R. : Lectures on maximal monotone operators, Extracta Math., 12(3) (1997), 193-230.

[18] Sonntag, Y. : Topologie et analyse fonctionnelle, ellipses, édition marketing S.A, (1998).

[19] Vilches E., Nguyen, B.T. : Evolution inclusions governed by time-dependent maximal monotone with a full Domain, Set-Valued Var. Anal., 28 (2020), 569-581.