République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....
№ de série : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse Fonctionnelle

Thème

Fonction proximale et application à un problème d'évolution

par

BENHAMMADA FOUZIA

Devant le jury

Président	S. Saidi	M.C.A. Université de Jijel
Encadreur	F. Aliouane	M.C.A Université de Jijel
Examinateur	I. Boutana	M.C.B Université de Jijel

Promotion **2020/2021**

REMERCIEMENTS

*Mes remerciements vont tout premièrement à **Dieu**, le tout puissant pour la volonté, la santé, et la patience qu'il m'a donné durant ces longues années d'étude et le courage pour terminer ce mémoire.*
*Je remercie chaleureusement mon encadreur **F. Aliouane** pour la pertinence de ses remarques et sa patience durant la réalisation de ce travail. J'admire beaucoups son sérieux et sa manière de diriger qui furent pour moi une grande source d'inspiration et de motivation.*
*Je remercie vivement Mme. **S. Saidi** pour avoir accepter de présider le jury de ma soutenance. J'adresse également mes vifs remerciements à l'examinatrice Mme. **I. Boutana** pour avoir accepter d'être membre de ce jury.*
Je veux aussi remercier tous les enseignants qui ont contribué à ma formation, ainsi qu'à toute l'équipe du département de mathématiques.
Enfin, c'est avec beaucoup de plaisir que je peux remercier profondément ma famille pour sons conseils et encouragement durant toutes les années de mes études.

DÉDICACE

Je dédie ce travail de fin d'études .

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur. Je sais que tu es fière de moi. Que dieu te garde, à toi ***mon père AHMED****, je t'aime.*

A la lumière de ma vie, la source de mes efforts et mon bonheur, ***maman NOURA*** *que j'adore.*

Aux personnes dont j'ai bien aimé leurs présence à ce jour, à tous mes très chers frères : ***MESSAOUD*** *et sa femme* ***SARA, HAMZA*** *et sa femme* ***MERIEM, SALAH, ABDELGHANI, MEHMOUD*** *et* ***ABDERRAZZAK****. A mes sœures* ***NAWEL*** *est son mari* ***NABIL, HALIMA*** *est son mari* ***NOUREDDINE****, pour leur soutien moral et leurs encouragements, que dieu vous protège. A* ***mes tantes, mes oncles et leurs enfants****.*

Aux enfants ***MOUNIB, DJIHAN, SIRINE, ALAA, SAMI, ILEF, DOHA*** *et* ***AWAB****.*

A toutes mes amies en particulier ***KHAOULA****. Elles n'ont cessé de consentir pour moi, par leur encouragement et leur profonde affection. Elles m'ont donné l'avantage de me consacrer entièrement et uniquement à mes études. Je vous souhaite du fond de mon cœur une belle vie plein de joie, de bonheur et de succès.*

A toute personne que j'ai une place dans son cœur, que je connais, j'estime et j'aime.

A tous les personnes qui m'aiment et que j'aime.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

L'un des problèmes du calcul différentiel classique est la recherche des points minimums et maximums d'une fonction à valeurs réelles. La théorie du sous-différentiel a trouvé plusieurs applications dans les travaux de Moreau et Rockafellar pendant les années 60
(voir [12]).
A l'heure actuelle, un large éventail de concepts et de méthodes calquées sur la théorie de l'analyse différentiable ont été développés.
Soit H un espace hilbertien réel, C une partie convexe fermée non vide de H et soit $z \in H$, on sait que l'application $u \mapsto \|z-u\|$ de C dans $\mathbb{R}$ atteint sa borne inférieure en un unique point x de C, usuellement appelée projection de z sur C (noté $x = Proj_C z$).
Les besoins de la mécanique, plus précisément la dynamique des systèmes matériels à liaisons unilatérales [15] et aussi la statique de tels systèmes (milieu élastique de compressibilité limitée de W. Prager [17]) ont conduit les chercheurs à l'extension suivante de l'idée de projection sur un convexe fermé :
Etant donné une fonction f propre convexe semi continue inférieurement partout définie sur H et z un point quelconque dans H, la fonction numérique $u \mapsto \frac{1}{2}\|z-u\|^2+f(u)$ atteint sa borne inférieure en un unique point x noté $prox_f z$. On retrouve la projection sur un ensemble convexe fermé C en prenant pour f la fonction indicatrice de cet ensemble, c'est-à-dire $f(u) = 0$ si $u \in C$ et $f(u) = +\infty$ si $u \notin C$.
La fonction proximale a donné lieu à de nombreuses applications, notamment l'étude des problèmes d'évolution non linéaires, à titre d'exemple ceux qui sont régis par la classe des

opérateurs maximaux monotones. Il est bien connu de la théorie de Hille-Yosida, que pour une condition initiale $x_0 \in D(A)$, il existe une unique solution $x \in \mathcal{C}^1_H(\mathbb{R}_+) \cap \mathcal{C}_H(D(A))$ de

$$x'(t) + Ax(t) = 0, \quad t > 0, \tag{1}$$

où $A : D(A) \subset H \to H$ est un opérateur maximal monotone sur un espace de Hilbert. Dans le cas multivoque, c'est à dire pour des inclusions différentielles, les problèmes gouvernés par les opérateurs maximaux monotones trouvent leurs motivations dans différentes applications en mécanique, élasto-plasticité, contrôle optimal, économétrie, etc... et englobent différentes classe de problèmes. Ce type de problème a été d'abord étudie lorsque A ne dépend pas du temps par H. Brezis [3] qui utilise la méthode de la régularisation de Yosida pour démontrer l'existence d'une unique solution du type Lipschitz de

$$-\frac{du}{dt} \in Au(t) \quad p.p. \quad t \in [0, T]. \tag{2}$$

Cependant dans le cas de la dépendance du temps, différentes contributions ont été données, citons [7], [8]. Lorsque l'opérateur A est le sous-différentiel d'une fonction convexe propre semi continue inférieurement φ, les hypothèses sont en général prises sur la fonction φ au lieu de l'opérateur $\partial\varphi$. Ce type de problèmes a été étudie par [16] . Dans le cas où φ est la fonction indicatrice d'un ensemble convexe fermé $C(\cdot)$, le problème (2) est connu sous le nom de processus de rafle et a été largement étudié par Moreau et ses étudiants, voir par exemple [13].

Ce mémoire vise l'étude des propriétés de la fonction proximale avec une application à un problème d'évolution. Dans le premier chapitre, nous introduisons d'une manière succincte, tous les résultats qui nous seront utiles par la suite " sans aller loin dans les détails", mais avec renvoi du lecteur y intéressé aux références que nous avons utilisés. Le deuxième chapitre intitulé " Étude des propriétés de la fonction proximale ", a pour objectif de donner des notions de bases sur l'application proximale, avec quelques simples exemples, ainsi qu'un théorème des fonctions duales. Ce même chapitre contient la fonction primitive d'une application proximale. Enfin dans le troisième chapitre, nous présentons l'étude dans un espace de Hilbert réel, une inclusion différentielle du premier ordre de type,

$$-\frac{du}{dt} \in \partial\varphi(t, u(t)) \quad p.p. \quad t \in [0, T],$$

où $\partial\varphi(t, \cdot)$ est le sous-différentiel d'une fonction propre convexe semi continue inférieurement $\varphi(t, \cdot)$.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES ET RÉSULTATS DE BASE

Dans ce premier chapitre, nous commençons par présenter des notations utilisées tout au long de ce mémoire, puis nous énonçons certains définitions et concepts fondamentaux de l'analyse convexe et l'analyse fonctionnelle qui vont nous servir de définitions à la bonne lecture du manuscrit et à la compréhension des preuves des résultats principaux.

1.1 Notations

On note par

- $\mathbb{R}$ Espace des nombres réels.
- $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.
- $\mathbb{R}_+$ L'ensemble des nombres réels positifs.
- $\mathbb{N}$ L'ensemble des entiers naturels.
- $[a, b]$ Un intervalle de $\mathbb{R}$ $(a < b)$ et $I = [0, T]$, $T > 0$.
- $(F, \mathcal{A}, \mu)$ Espace mesuré.
- X Espace vectoriel topologique.

- E Espace de Banach, E' son dual topologique et $\langle ., . \rangle$ leur produit de dualité et $\|.\|_E$ (resp. $\|.\|_{E'}$) la norme associée dans E (resp. E').
- H Espace hilbertien réel muni du produit scalaire $\langle ., . \rangle$ et la norme $\|.\|$.
- I_H Opérateur identité de H.
- $V(x_0)$ Ensemble des voisinages d'un point x_0.
- $B(x_0, \varepsilon)$ La boule ouverte de centre x_0 et de rayon $\varepsilon > 0$.
- $\overline{B}(0,1)$ (resp. $B(0,1)$) La boule unité fermé (resp. ouvert de E).
- C Une partie convexe fermée non vide de H.
- $Proj_C$ La projection sur le sous ensemble convexe fermé non vide C de H définie par

$$Proj_C(x) = \{y \in C, \quad d_C(x) = \|x - y\|\}, \quad (\forall x \in H)$$

telle que $d_C(x) = \inf\limits_{z \in C} \|x - z\|$.

- $dom(f)$ Le domaine effectif d'une fonction $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$.
- f^* (resp. f^{**}) La fonction conjuguée (resp. biconjuguée de f).
- $\limsup$ (resp. $\liminf$) Désigne la limite supérieure (resp. inférieure).
- $\Gamma_0(H)$ Ensemble des fonctions à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$ partout définies sur H, propre convexe, semi-continue inférieurement.
- $\sigma(E, E')$ La topologie faible de E.
- $x_n \to x$ Exprime que la suite $(x_n)_n$ converge fortement vers x.
- $x_n \rightharpoonup x$ Exprime que la suite $(x_n)_n$ converge faiblement vers x.
- $[., .]$ désigne le couple d'élément de $E \times E'$.
- A Un opérateur de H dans H.
- $D(A)$ Le domaine de A.
- $R(A)$ l'image de A dans H.
- Ψ_C La fonction indicatrice d'une partie non vide C de H, définie par

$$\Psi_C(x) = \begin{cases} 0, & si \quad x \in C; \\ +\infty, & sinon. \end{cases}$$

- χ_C La fonction caractéristique de C définie par

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 1, & si \quad x \in C; \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

- $\partial\varphi(x_0)$ Le sous différentiel de φ au point x_0.
- p.p. Presque partout.

- s.c.i. Semi continue inférieurement.
- $prox_f$ Le point proximal de la fonction f.
- $\frac{du}{dt}$ La dérivée au sens classique de u qu'on note souvent par u̇ , u' .
- $\mathcal{C}_Y(X)$ L'espace des fonctions continues de X dans Y muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$,

définie par

$$\|u\|_\infty = \sup\{\|u(x)\|, x \in X\}.$$

- $\mathcal{C}^1_H(I)$ L'espace des fonctions continues sur I à valeurs dans H telles que leur dérivées premières sont continues.
- $L^2_H(I)$ L'espace de Hilbert des fonctions carré Lebesgue-Bochner intégrables muni de sa norme habituelle définie par

$$\|f\|_{L^2_H} = \left(\int_I \|f(x)\|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

et $\langle ., . \rangle_{L^2_H}$ représente le produit scalaire associé.

- $W^{1,2}_H(I)$ Espace des fonctions assolement continues $u : I \to H$ telle que sa dérivée première dans $L^2_H(I)$.

1.2 Quelques rappels

Dans ce chapitre, nous allons exposer quelques résultats qui nous seront utiles dans la suite. Ces résultats ont été pris des références [1, 2, 3, 4, 5, 18, 14].

1.2.1 Fonctions absolument continues

Pour plus de détails voir [1].

Définition 1.2.1. *[2] Soient E, F deux espaces de Banach. On dit que la fonction $f : E \to F$ est du type Lipschitz de rapport k ou k-lipschitzienne si pour un certain scalaire positif k on a*

$$\|f(x) - f(x')\|_F \leq k\|x - x'\|_E,$$

pour tous $x, x' \in E$.

Définition 1.2.2. *Une fonction numérique f d'une variable réelle définie sur un intervalle J est dite continûment dérivable si elle est dérivable sur cet intervalle et si sa dérivée f' est continue sur cet intervalle.*

Définition 1.2.3. *[2] Soit E un espace de Banach et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est contractante (ou bien f est une contraction) si elle est k-lipschitzienne avec* $0 < k < 1$.

Définition 1.2.4. *Soit E un espace de Banach. Une fonction $f : [a,b] \to E$ est dite absolument continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tels que pour toute partition dénombrable de l'intervalle $[a,b]$ par des intervalles disjoints $[a_k, b_k]$, $k \in \mathbb{N}$ vérifiant*

$$\sum_{k\geq 0}(b_k - a_k) < \delta,$$

on a

$$\sum_{k\geq 0}\|f(b_k) - f(a_k)\|_E < \varepsilon.$$

Théorème 1.2.5. *Une fonction $f : [a,b] \to E$ est absolument continue si et seulement si elle est l'intégrale de sa dérivée, c'est-à-dire*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \dot{f}(t)dt.$$

Remarque 1.2.6. • *Toute application k-lipschitzienne est absolument continue.*
• *Toute application absolument continue est uniformément continue.*

1.2.2 Topologie faible

Pour plus de détails sur cette section, se référer à [2].

Définition 1.2.7. *Soit E un espace de Banach et $f \in E'$. Considérons la fonction*

$$\varphi_f : E \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \varphi_f(x) = \langle f, x\rangle.$$

Lorsque f décrit E', nous obtenons une famille d'applications $(\varphi_f)_{f\in E'}$ définies sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle topologie faible sur E, que l'on note $\sigma(E, E')$, la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f\in E'}$.

On note par $x_n \rightharpoonup x$ la convergence faible d'une suite $(x_n)_n \subset E$ vers x.

Proposition 1.2.8. *Soit* $(x_n)_n$ *une suite de points de* E*. Alors*

(i) $x_n \rightharpoonup x \Longleftrightarrow \langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle \quad \forall f \in E'$ *;*

(ii) $x_n \to x \Longrightarrow x_n \rightharpoonup x$ *;*

(iii) si $x_n \rightharpoonup x$*, alors* $(\|x_n\|_E)_n$ *est bornée et* $\|x\|_E \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|x_n\|_E$ *;*

(iv) si $x_n \rightharpoonup x$ *et si* $f_n \to f$ *fortement dans* E'*, alors* $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$ *.*

1.2.3 Quelques résultats de convexité

Pour plus de détails sur cette section et les deux sections qui suivent, le lecteur peut référer à [18].

Définition 1.2.9. *Une partie* A *d'un espace vectoriel* E *est dite convexe si pour tous* $x, y \in A$ *et tout* $\lambda \in [0,1]$*,* $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$*.*

Définition 1.2.10. *Soit* X *un espace vectoriel topologique réel et* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$*, on appelle domaine effectif de* f *qu'on note* $dom(f)$ *l'ensemble défini par*

$$dom(f) = \{x \in X : f(x) < +\infty\}.$$

Exemple 1.2.11. *Soit* C *une partie non vide d'un espace de Banach* E

$$dom(\Psi_C(\cdot)) = C.$$

Définition 1.2.12. *Soit* X *un espace vectoriel topologique réel et* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$*. On dit que* f *est convexe si et seulement si pour tous* $x, y \in dom(f)$ *et tout* $\lambda \in [0,1]$*, nous avons*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

f *est dite concave si* $(-f)$ *est convexe.*

Définition 1.2.13. *Soit* X *un espace vectoriel topologique réel et* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$*. On dit que* f *est strictement convexe si pour tous* $x, y \in dom(f)$ *avec* $x \neq y$ *et* $\lambda \in]0,1[$*, nous avons*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Exemple 1.2.14. *La fonction $u \mapsto \|u\|^2$ est strictement convexe. En effet,*

$$
\begin{aligned}
\|\lambda u+(1-\lambda)v\|^2-\lambda\|u\|^2-(1-\lambda)\|v\|^2 \leq{}& \lambda^2\|u\|^2+(1-\lambda)^2\|v\|^2+\\
&2\lambda(1-\lambda)\|u\|\|v\|-\lambda\|u\|^2-(1-\lambda)\|v\|^2\\
&=(\lambda^2-\lambda)\|u\|^2+\Big((1-\lambda)^2-(1-\lambda)\Big)\|v\|^2+2\lambda(1-\lambda)\|u\|\|v\|\\
&=\lambda(\lambda-1)\|u\|^2+(1-\lambda)(-\lambda)\|v\|^2+2\lambda(1-\lambda)\|u\|\|v\|\\
&=-\lambda(1-\lambda)\Big[\|u\|^2+\|v\|^2-2\|u\|\|v\|\Big]\\
&=-\lambda(1-\lambda)(\|u\|-\|v\|)^2<0 \quad (u\neq v).
\end{aligned}
$$

Définition 1.2.15. *Soient E un espace vectoriel normé et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est propre si $f : E \to]-\infty, +\infty]$ et $f \not\equiv +\infty$ (i.e. $\exists x_0 \in E : f(x_0) \neq +\infty$).*

1.2.4 Fonctions semi-continues inférieurements

Définition 1.2.16. *Soit X un espace topologique et soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.*
f est dite semi-continue inférieurement (s.c.i. en abrégé) au point $x_0 \in X$ si et seulement si,

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad h < f(x_0), \exists V \in V(x_0) \quad \text{tel que} \quad h < f(x), \quad \forall x \in V.$$

Exemple 1.2.17. *Toute fonction continue est s.c.i.*

Proposition 1.2.18. *[2] Soit E un espace de Banach, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction et soit $x_0 \in E$ alors, f est s.c.i. au point x_0 si et seulement si*

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) \geq f(x_0), \tag{1.1}$$

avec $\liminf\limits_{x\to x_0} f(x) = \sup\limits_{\varepsilon>0} \inf\limits_{x\in B(x_0,\varepsilon)} f(x)$.

Proposition 1.2.19. *Une fonction $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est dite séquentiellement s.c.i. au point $x_0 \in E$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \subset E$ telle que $(x_n)_n$ converge vers x_0, on a*

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x_0)$$

où

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} f(x_k).$$

Proposition 1.2.20. *Soit E un espace de Banach, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ alors, f est séquentiellement s.c.i. si et seulement si f est s.c.i.*

Proposition 1.2.21. *Soient E un espace vectoriel et $(f_i)_{i\in J}$ une famille quelconque de fonctions définies sur E si $(f_i)_{i\in J}$ est une famille de fonctions convexes s.c.i., alors $\sup_{i\in J} f_i$ est une fonction convexe s.c.i. sur E.*

Lemme 1.2.22. *[18] Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe s.c.i. Alors f admet une minorante affine continue. Plus précisément, pour chaque $u_0 \in H$ et chaque $\alpha_0 \in]-\infty, f(u_0)[$, il existe une fonction affine continue h telle que $h(u_0) = \alpha_0$ et $h \leq f$.*

Théorème 1.2.23. *[4] Soit $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre strictement convexe s.c.i. Si f est coercive i.e.*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty,$$

alors il existe un unique $y_0 \in H$ tel que $f(y_0) = \inf_{x\in H} f(x)$.

Soit C une partie non vide de E.

Exemple 1.2.24. *La fonction Ψ_C appartient à $\Gamma_0(E)$ si et seulement si C est convexe fermé non vide. En effet, supposons que $\Psi_C(\cdot) \in \Gamma_0(E)$. Il est clair que $\Psi_C(\cdot)$ est propre. Soient $x, y \in C$ et $\lambda \in [0, 1]$, par définition de $\Psi_C(\cdot)$, on a*

$$\Psi_C(x) = \Psi_C(y) = 0,$$

or $\Psi_C(\cdot)$ étant convexe. Donc

$$\Psi_C(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\Psi_C(x) + (1-\lambda)\Psi_C(y) = 0,$$

d'où $\Psi_C(\lambda x + (1-\lambda)y) = 0$ et par conséquent $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$.
Soit $(x_n)_n \subset C$ telle que $(x_n)_n$ converge vers x. On montre que $x \in C$.
On a $\Psi_C(\cdot)$ est s.c.i. i.e.,

$$0 = \lim_{n\to\infty} \inf \Psi_C(x_n) \geq \Psi_C(x) \Longrightarrow \Psi_C(x) = 0 \Longrightarrow x \in C.$$

Donc C est fermé.
Supposons maintenant que C est convexe. Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in [0, 1]$:

- *si $x \in C$ et $y \in C$*

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in C \quad \text{et} \quad \Psi_C(x) = \Psi_C(y) = 0$$

alors

$$\Psi_C(\lambda x + (1-\lambda)y) = 0 \leq \lambda\Psi_C(x) + (1-\lambda)\Psi_C(y)$$

- *si* $x \notin C$ *donc*

$$\Psi_C(x) = +\infty \Longrightarrow \lambda\Psi_C(x) + (1-\lambda)\Psi_C(y) = +\infty$$

et donc $\Psi_C(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\Psi_C(x) + (1-\lambda)\Psi_C(y) = +\infty$*, d'où* Ψ_C *est convexe. Et comme* C *est fermé alors* $\Psi_C(\cdot)$ *est s.c.i. d'où le résultat.*

1.2.5 Différentiabilité des fonctions convexes

Soit E un espace vectoriel normé, E' son dual.

Définition 1.2.25 (Gâteaux différentiabilité). *Soit* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction et* $x_0 \in dom(f)$*. On dit que* f *est Gâteaux différentiable en* x_0 *si pour tout* $h \in E$*, il existe une forme linéaire continue* $u^*(u^* \in E')$ *telle que*

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x_0+th) - f(x_0)}{t} = \langle u^*, h\rangle \quad \textit{pour tout} \quad h \in E.$$

La forme linéaire continue u^* *est alors unique, et est appelée différentielle de Gâteaux (où encore gradient) de* f *au point* x_0*. On la note* $f'(x_0)$ *ou bien* $\nabla f(x_0)$*.*

Exemple 1.2.26. *Soit*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) = (xy, x+y). \end{aligned}$$

Soient $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$*,* $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$*, nous avons*

$$\begin{aligned} \lim_{t\downarrow 0} \frac{f((x_0,y_0) + t(h_1,h_2)) - f(x_0,y_0)}{t} &= \lim_{t\downarrow 0} \frac{(t(x_0h_2 + y_0h_1) + t^2h_1h_2, t(h_1+h_2))}{t} \\ &= \lim_{t\downarrow 0}(x_0h_2 + y_0h_1 + th_1h_2, h_1+h_2) \\ &= (x_0h_2 + y_0h_1, h_1+h_2) \\ &= (x_0h_2, h_2) + (y_0h_1, h_1) \\ &= (x_0, 1)h_2 + (y_0, 1)h_1. \end{aligned}$$

Donc f *est Gâteaux différentiable avec*

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} y_0 & x_0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.2.27 (Fréchet différentiabilité). *Soient $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction et x_0 un point où f est finie. On dit que f est Fréchet différentiable en x_0 s'il existe une forme linéaire continue u^* telle que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - \langle u^*, x - x_0 \rangle|}{\|x - x_0\|} = 0,$$

u^* est unique et est appelé la dérivée au sens de Fréchet de f au point x_0, on le note $df(x_0)$.

Nous avons toute fonction Fréchet différentiable est Gâteaux différentiable.

Exemple 1.2.28. *Soit $z \in H \longmapsto \varphi(z) = \frac{1}{2}\|z - x\|^2$. La fonction φ est Fréchet différentiable en z_0. En effet,*

$$\begin{aligned}
\varphi(z) - \varphi(z_0) &= \frac{1}{2}\|z - x\|^2 - \frac{1}{2}\|z_0 - x\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\langle z - x, z - x \rangle - \frac{1}{2}\langle z_0 - x, z_0 - x \rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle z - x, z - z_0 \rangle + \frac{1}{2}\langle z - x, z_0 - x \rangle - \frac{1}{2}\langle z_0 - x, z_0 - x \rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle z - x, z - z_0 \rangle + \frac{1}{2}\langle z - z_0, z_0 - x \rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle z - z_0, z - z_0 \rangle + \frac{1}{2}\langle z_0 - x, z - z_0 \rangle + \frac{1}{2}\langle z_0 - x, z - z_0 \rangle \\
&= \frac{1}{2}\|z - z_0\|^2 + \langle z_0 - x, z - z_0 \rangle.
\end{aligned}$$

donc

$$\varphi(z) - \varphi(z_0) - \langle z_0 - x, z - z_0 \rangle = \frac{1}{2}\|z - z_0\|^2.$$

En inter-changeant z et z_0, on aura

$$\varphi(z) - \varphi(z_0) - \langle z - z_0, z_0 - x \rangle = -\frac{1}{2}\|z_0 - z\|^2$$

d'où

$$\frac{\left|\varphi(z) - \varphi(z_0) - \langle z - z_0, z_0 - x \rangle\right|}{\|z - z_0\|} = \frac{1}{2}\|z - z_0\| \underset{z \to z_0}{\longrightarrow} 0.$$

Donc φ est Fréchet différentiable en z_0 avec $d\varphi(z_0) = z_0 - x$.

1.2.6 Fonctions conjuguées

Pour plus de détails sur cette section voir [18] et [4].

Soit E un espace vectoriel normé réel et soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$.

Une fonction affine continue $x \mapsto \langle x, x' \rangle - \beta$, $x' \in E$, $\beta \in \mathbb{R}$ minore f si et seulement si pour tout $x \in E$, $\langle x', x \rangle - \beta \leq f(x)$ i.e.,

$$\sup_{x \in E} \Big(\langle x', x \rangle - f(x) \Big) \leq \beta. \tag{1.2}$$

ce qui conduit à s'intéresser à la fonction $x' \mapsto \sup_{x \in E} \Big(\langle x', x \rangle - f(x) \Big)$.

Définition 1.2.29. *On appelle fonction conjuguée ou fonction duale de f, la fonction $f^* : E' \to \overline{\mathbb{R}}$ telle que*

$$f^*(x') = \sup_{x \in E} \Big(\langle x, x' \rangle - f(x) \Big) \quad (x' \in E').$$

La fonction conjuguée de f^* est la fonction $f^{**} : E \to \overline{\mathbb{R}}$ telle que

$$f^{**}(x) = \sup_{x' \in E'} \Big(\langle x', x \rangle - f^*(x') \Big),$$

appelée aussi la biconjuguée ou bien biduale de f.

Exemple 1.2.30. *1) Soit $j : E \to \mathbb{R}_+$ tel que $j(x) = \frac{1}{2}\|x\|_E^2$, on a*

$$\begin{aligned} j^*(x') &= \sup_{x \in E} \Big(\langle x, x' \rangle - \frac{1}{2}\|x\|_E^2 \Big) \\ &= \sup_{t \geq 0} \Big(\sup_{\|x\|_E = t} \Big(\langle x, x' \rangle - \frac{1}{2}t^2 \Big) \Big) \\ &= \sup_{t \geq 0} \Big(\sup_{\|x\|_E = 1} \Big(t\langle x, x' \rangle - \frac{1}{2}t^2 \Big) \Big) \\ &= \sup_{t \geq 0} \Big(t\|x'\|_{E'} - \frac{1}{2}t^2 \Big). \end{aligned}$$

Soit $h(t) = t\|x'\|_{E'} - \frac{1}{2}t^2$ alors $h'(t) = \|x'\|_{E'} - t$ qui s'annule en $t_0 = \|x'\|_{E'}$.
D'autre part, $h''(t) = -1 < 0$ donc $t_0 = \|x'\|_{E'}$ est un maximum, d'où

$$j^*(x') = h(t_0) = \frac{1}{2}\|x'\|_{E'}^2.$$

2) Soient $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions convexes. On définit l'inf-convolution, que l'on le note $f \square g$, la fonction définie par

$$x \longmapsto (f \square g)(x) = \inf_{u+v=x} \Big(f(u) + g(v) \Big).$$

Calculons à l'instant, $(f\Box g)^*$*. Soit* $x' \in E'$,

$$\begin{aligned}
(f\Box g)^*(x') &= \sup_{x\in E}\Big(\langle x', x\rangle - (f\Box g)(x)\Big)\\
&= \sup_{x\in E}\Big(\langle x', x\rangle - \inf_{u+v=x}\Big(f(u)+g(v)\Big)\Big)\\
&= \sup_{x\in E}\Big(\langle x', x\rangle + \sup_{u+v=x}\Big(-f(u)-g(v)\Big)\Big)\\
&= \sup_{x\in E}\sup_{u+v=x}\Big(\langle x', x\rangle - f(u)-g(v)\Big)\\
&= \sup_{u,v\in E}\Big(\langle x', u\rangle - f(u) + \langle x', v\rangle - g(v)\Big)\\
&= \sup_{u\in E}\Big(\langle x', u\rangle - f(u)\Big) + \sup_{v\in E}\Big(\langle x', v\rangle - g(v)\Big)\\
&= f^*(x') + g^*(x')\\
&= (f^*+g^*)(x').
\end{aligned}$$

3) Soient E *un espace vectoriel normé et* C *un ensemble non vide de* E*. La conjuguée de la fonction indicatrice de* C*, notée par* Ψ_C^* *est souvent désignée par*

$$\begin{aligned}
\Psi_C^*(x') &= \sup_{x\in E}(\langle x, x'\rangle - \Psi_C(x))\\
&= \sup\Big(\sup_{x\in C}\Big(\langle x, x'\rangle - \Psi_C(x)\Big), \sup_{x\notin C}\Big(\langle x, x'\rangle - \Psi_C(x)\Big)\Big)\\
&= \sup_{x\in C}\Big(\langle x, x'\rangle\Big).
\end{aligned}$$

Ψ_C^* *est appelée la fonction support de* C *(ou la fonction d'appui de* C*).*

Remarque 1.2.31. *1) Si* $f(x) + f^*(x') = \langle x, x'\rangle$ *alors on dit que les deux points* x, x' *sont conjugués par rapport au couple des fonctions* f *et* f^**.*
2) Soit E *un espace vectoriel normé,* $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ *une fonction et* $\lambda > 0$*, alors*

$$\begin{aligned}
(\lambda f)^*(x') &= \sup_{x\in E}\Big(\langle x', x\rangle - \lambda f(x)\Big)\\
&= \lambda \sup_{x\in E}\Big(\Big\langle \frac{x'}{\lambda}, x\Big\rangle - f(x)\Big)\\
&= \lambda f^*\Big(\frac{x'}{\lambda}\Big)
\end{aligned}$$

3) Par la définition de f^**, nous avons toujours*

$$\forall x \in E, \quad \forall x' \in E', \langle x, x'\rangle \leq f(x) + f^*(x'), \tag{1.3}$$

(cette inégalité est connue par l'inégalité de Young-Fenchel).
4) De la relation (1.2)*, on déduit que* $f^* \in \Gamma_0(E')$ *puisque elle est l'enveloppe supérieure*

d'une famille non vide de fonctions affines continues et qu'elle n'est pas partout égale à $+\infty$ *(car* (1.2) *est satisfaite par au moine* $\beta \in \mathbb{R}$*).*

Proposition 1.2.32. *Soit* E *un espace vectoriel normé et soient* $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$*.*

- *Si* $f \leq g$ *alors* $g^* \leq f^*$*.*
- *Si* $f \in \Gamma_0(E)$ *alors* $f^{**} = f$*.*

1.2.7 La fonction sous-différentiel

Pour une étude détaillée des sous-différentiels, on peut se référer à [18].

Définition 1.2.33. *Soient* E *un espace vectoriel normé,* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *et* $x_0 \in dom(f)$*. On appelle sous-différentiel de* f *au point* x_0*, noté* $\partial f(x_0)$*, l'ensemble définie par*

$$\partial f(x_0) = \{x' \in E' : \langle x', x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0), \forall x \in E\}.$$

Un point $x' \in \partial f(x_0)$ *est dit sous-gradient de* f *au point* x_0*. On dit que* f *est sous différentiable au point* x_0 *si* $\partial f(x_0) \neq \emptyset$*.*
On a par convention, si f *est infinie en* x *alors* $\partial f(x) = \emptyset$*.*

Exemple 1.2.34. *Soit* C *une partie non vide de* E *et* $x_0 \in C$*.*

$$\begin{aligned}
\partial \Psi_C(x_0) &= \{x' \in E' : f(x) \geq f(x_0) + \langle x', x - x_0 \rangle, \forall x \in E\} \\
&= \{x' \in E' : \Psi_C(x) \geq \Psi_C(x_0) + \langle x', x - x_0 \rangle, \forall x \in E\} \\
&= \{x' \in E' : \langle x', x - x_0 \rangle \leq 0, \forall x \in C\} \\
&= N_C(x_0),
\end{aligned}$$

où $N_C(x_0)$ *est le cône normal de* C *au point* x_0*.*

Proposition 1.2.35. *Le sous-différentiel est toujours un ensemble convexe fermé (éventuellement vide) et on a pour* $x \in dom(f)$*.*

$$\partial f(x) = \{x' \in E' : f(x) + f^*(x') = \langle x, x' \rangle\}, \tag{1.4}$$

et nous avons si $f \in \Gamma_0(E)$*,*

$$x' \in \partial f(x) \Longleftrightarrow x \in \partial f^*(x'). \tag{1.5}$$

Exemple 1.2.36. *Soit*

$$\begin{aligned} j : E &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto j(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2. \end{aligned}$$

Soit $x' \in \partial j(x) \Longleftrightarrow j^*(x') + j(x) = \langle x, x'\rangle, \forall x \in E.$

D'autre part, par l'Exemple 1.2.30*,* $j^*(x') = \frac{1}{2}\|x'\|^2_{E'}$*, alors*

$$\frac{1}{2}\|x'\|^2_{E'}+\frac{1}{2}\|x\|^2= \langle x, x'\rangle \leq \|x'\|_{E'}\|x\|, \forall x \in E,$$

donc

$$\|x'\|^2_{E'}+\|x\|^2_E-2\|x'\|_{E'}\|x\|_E= 0 \Longleftrightarrow (\|x'\|_{E'}-\|x\|)^2_E = 0 \Longleftrightarrow \|x'\|_{E'}= \|x\|_E$$

et on a

$$\langle x, x'\rangle = \frac{1}{2}\|x\|^2_E+\frac{1}{2}\|x'\|^2_{E'}= \|x\|^2_E= \|x'\|^2_{E'}.$$

Alors

$$\partial j(x) = \{x' \in E' : \langle x, x'\rangle = \|x\|^2_E= \|x'\|^2_{E'}\}.$$

Remarque 1.2.37. *Évidemment, si f est sous-différentiable en un point x alors $f(x) < +\infty$. Mais le contre exemple suivant montre que si $f(x) < +\infty$ n'implique pas nécessairement que $\partial f(x) \neq \emptyset$.*

Contre exemple.

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par

$$f(x) = \begin{cases} -2\sqrt{x} & \textit{pour} \quad x \geq 0, \\ +\infty & \textit{pour} \quad x < 0. \end{cases}$$

Ce qui donne comme fonction duale

$$\begin{aligned} g(y) &= \sup_{x\in H}(\langle x, y\rangle - f(x)), \quad y \in \mathbb{R} \\ &= \sup\left(\sup_{x\geq 0}(xy + 2\sqrt{x}), \sup_{x<0}(xy - \infty)\right) \\ &= \sup_{x\geq 0}(xy + 2\sqrt{x}). \end{aligned}$$

On pose

$$h(x) = xy + 2\sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x}y + 2),$$

alors $h'(x) = y + \frac{1}{\sqrt{x}}$ *qui s'annule en* $\sqrt{x} = -\frac{1}{y}$. *Donc*
Si $y < 0$, *on trouve* $g(y) = -\frac{1}{y}$. *Sinon pour* $y \geq 0$, $g(y) = +\infty$.
Bien que $f(0) \neq +\infty$, *le point* 0 *ne possède pas de conjugué relativement à* f *et* g, *puisqu'un tel conjugué soit* y, *devrait vérifier* $f(0) + g(y) = 0.y$, *c'est-à-dire* $g(y) = 0$. *Or* g *ne prend nulle part la valeur* 0 *i.e.* $\partial f(0) = \emptyset$.

Remarque 1.2.38. *D'après la Définition* 1.2.29, *la borne inférieure de* f *est* $-f^*(0)$; *l'ensemble des points où* f *atteint cette borne est* $\partial f^*(0)$, *autrement dit, encore* f *présente un minimum au point* x *si et seulement si* $0 \in \partial f(x)$.

Théorème 1.2.39. *Soit* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction convexe et* $x_0 \in dom(f)$, *si* f *est Gâteaux différentiable (ou Fréchet différentiable) au point* x_0 *alors* $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.

Théorème 1.2.40. *Soient* $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *deux fonctions propres convexes alors s'il existe un point dans* $dom(f) \cap dom(g)$ *où* f *est continue alors*

$$\partial f(x) + \partial g(x) = \partial(f + g)(x) \quad \forall x \in E.$$

1.2.8 Notions d'opérateurs maximaux monotones

Dans la suite, on désigne par H un espace de Hilbert muni de la norme $\|\cdot\|$ et le produit scalaire $\langle ., . \rangle$. Pour plus de détails voir [3] et [4].

Définition 1.2.41. *Soit* A *un opérateur de* H.

- *On appelle domaine de* A *l'ensemble définie par,*

$$D(A) = \{x \in H; Ax \neq \emptyset\}.$$

- *On appelle l'ensemble des valeurs de* A *qu'on note* $R(A)$ *l'ensemble définie par*

$$R(A) = \bigcup_{x \in D(A)} Ax.$$

Définition 1.2.42. *Un opérateur* A *de* H *est dit monotone si pour tous* $x_1, x_2 \in D(A)$,

$$\forall y_1 \in Ax_1, \forall y_2 \in Ax_2 : \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0. \tag{1.6}$$

Définition 1.2.43. *Un opérateur A de H est dit maximal monotone s'il est maximal dans l'ensemble des opérateurs monotones. Explicitons cette définition, A est maximal monotone si et seulement si, A est monotone et pour tout $[x, y] \in H \times H$*
tel que $\langle y - \xi^*, x - \xi \rangle \geq 0, \forall \xi \in D(A)$ avec $\xi^* \in A\xi$. Alors, $y \in Ax$. Dans ce cas pour tout $x \in D(A)$, Ax est un sous ensemble fermé convexe de H.

Remarque 1.2.44. *Si A est maximale monotone, alors λA est aussi maximale monotone pour tout $\lambda > 0$.*

Proposition 1.2.45. *Soit A un opérateur définie sur H tel que $D(A) = H$. On a l'équivalence entre les trois propriétés suivantes,*

1. *A est maximal monotone,*
2. *A est monotone et $R(I_H + A) = H$,*
3. *Pour tout $\lambda > 0$, $(I_H + \lambda A)^{-1}$ est une contraction définie sur H tout entier.*

Proposition 1.2.46. *Tout opérateur maximal monotone défini sur H est demi fermé, i.e. si $x_n \in D(A)$: $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ forte et $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ faible tel que $y_n \in Ax_n$ p.p. $\forall n$, alors $y \in Ax$ et $x \in D(A)$.*

Théorème 1.2.47. *[4] Le sous-différentiel d'une fonction f à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$ convexe propre définie sur un espace de Hilbert est un opérateur monotone. Si on suppose de plus que la fonction f est s.c.i., alors son sous-différentiel est un opérateur maximal monotone.*

Définition 1.2.48. *[3] Soit H un espace de Hilbert et A un opérateur maximal monotone définie sur H.*

1) *Pour $\lambda > 0$, l'opérateur $J_\lambda : H \to D(A) \subset H$ définie par $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ est appelé la résolvante de A.*
2) *Pour $\lambda > 0$, l'opérateur $A_\lambda : H \to D(A) \subset H$ définie par $A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$, est appelé approximation de Yosida de A.*

Proposition 1.2.49. *Soit H un espace de Hilbert et soit A de H un opérateur maximale monotone. Alors*

1. *J_λ, A_λ sont univoques.*
2. *A_λ est du type Lipschitz.*

Proposition 1.2.50. *Soit A un opérateur maximal monotone. On a*

$$A_\lambda x \in AJ_\lambda x \quad \forall x \in H \quad \text{et} \quad \forall \lambda > 0.$$

1.3 Résultats divers

Définition 1.3.1. *[11] Étant donnée une fonction $f : I \to E$, on appelle variation totale de f sur I l'expression*

$$Var(f;I) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} \|f(t_k) - f(t_{k-1})\|, \quad \forall 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\right\}$$

Si $Var(f;I) < +\infty$, on dit que f est à variation bornée.

Proposition 1.3.2 (Formule de Moreau). *[11] Soit $u : I \to H$ une application continue à variation bornée. Alors, la formule de Moreau est donnée par*

$$d(\|u\|^2) = 2\langle u, du\rangle. \tag{1.7}$$

Définition 1.3.3. *[18] Un ensemble $C \subset H$ est un cône si*

$$\forall x \in C, \quad \forall \lambda \geq 0, \quad \lambda x \in C.$$

Définition 1.3.4. *[18] Soient dans H deux cônes convexes fermés, P et Q mutuellement polaires, c'est-à-dire que*

$$Q = \{x \in H : \langle x, y\rangle \leq 0 \quad pour \quad tout \quad y \in P\}.$$

(relation symétrique entre P et Q).

Définition 1.3.5. *[1] Soit E un ensemble non vide, $f : E \to E$ une application. Un point $a \in E$ est un point fixe de f si et seulement si $f(a) = a$.*

Théorème 1.3.6 (Théorème d'existence de Cauchy). *[3] Soient H une espace de Hilbert réel et $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \times H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction propre continue et du type Lipschitz par rapport à la deuxième variable, soit $y_0 \in H$ fixé. Alors l'équation différentielle suivante,*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

admet une solution unique $y(\cdot) \in \mathcal{C}^1_H([a, b])$.

Théorème 1.3.7 (Théorème de convergence dominé de Lebesgue). *[9] Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables mesurables sur un espace mesuré $(F, \mathcal{A}, \mu)$, à valeurs* *dans H, telle que :*

- *la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur F vers une fonction f ;*
- *il existe une fonction intégrable à valeurs positives g telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in F, \quad \|f_n(x)\| \leq g(x).$$

Alors f est intégrable et

$$\lim_{n\to\infty} \int_F |f_n(t) - f(t)| d\mu(t) = 0.$$

En particulier :

$$\lim_{n\to\infty} \int_F f_n d\mu = \int_F \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_F f d\mu.$$

Définition 1.3.8 (**Equicontinuité**)**.** *[19] Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Une famille Λ de fonctions continues de X dans Y est dite équicontinue en $x \in X$ si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad \forall f \in \Lambda \quad \forall x' \in X \quad [d_X(x, x') < \delta] \Rightarrow [d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon].$$

$\mathcal{A}$ est dite uniformément équicontinue si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad \forall f \in \Lambda \quad \forall x, x' \in X \quad [d_X(x, x') < \delta] \Rightarrow [d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon].$$

Définition 1.3.9 (**Relativement compacte**)**.** *[19] Soit $K \subset X$ une partie d'un espace topologique. On dit que K est relativement compacte si son adhérence est compacte.*

Théorème 1.3.10 (**Ascoli-Arzéla**)**.** *[19] Soient X un espace topologique compact et Y un espace métrique complet. Soit une partie Λ de $\mathcal{C}_Y(X)$ telle que*

1. *Λ est équicontinue.*
2. *Pour tout x dans X, l'ensemble $\Lambda(x) = \{f(x) : f \in \Lambda\}$ est relativement compacte dans Y.*

Alors Λ est relativement compacte dans $\mathcal{C}_Y(X)$ pour la topologie de la convergence uniforme. Autrement dit, toute suite dans Λ a une sous-suite convergeant uniformément.

Lemme 1.3.11. *[16] Si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'élément d'un espace hilbertien H, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante de réels positifs telle que*

$$\langle z_n - z_m, \lambda_n z_n - \lambda_m z_m \rangle \leq 0, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \tag{1.8}$$

alors la suite $(\|z_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Si de plus $(\|z_n\|)_n$ est bornée, alors la suite $(z_n)_n$ converge dans H.

Démonstration. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ telle que $n > m$. Nous avons

$$\begin{aligned}
2\langle z_n - z_m, \lambda_n z_n - \lambda_m z_m\rangle &= 2(\lambda_n \|z_n\|^2 + \lambda_m \|z_m\|^2 - (\lambda_n + \lambda_m)\langle z_n, z_m\rangle) \\
&= 2\lambda_n \|z_n\|^2 + 2\lambda_m \|z_m\|^2 - 2(\lambda_n + \lambda_m)\langle z_n, z_m\rangle \\
&= (\lambda_n + \lambda_m)\Big[\|z_n\|^2 + \|z_m\|^2 - 2\langle z_n, z_m\rangle\Big] + (\lambda_n - \lambda_m)\Big(\|z_n\|^2 - \|z_m\|^2\Big) \\
&= (\lambda_n + \lambda_m)\|z_n - z_m\|^2 + (\lambda_n - \lambda_m)\Big(\|z_n\|^2 - \|z_m\|^2\Big).
\end{aligned}$$

En combinant avec (1.8) implique que

$$0 \leq (\lambda_n + \lambda_m)\|z_n - z_m\|^2 \leq (\lambda_n - \lambda_m)\Big(\|z_m\|^2 - \|z_n\|^2\Big). \tag{1.9}$$

En vertu de (1.9), on a

$$(\lambda_n - \lambda_m)\Big(\|z_m\|^2 - \|z_n\|^2\Big) \geq 0.$$

Puisque (λ_n) est strictement décroissante alors $\lambda_n < \lambda_m$ d'où

$$\|z_m\|^2 - \|z_n\|^2 \leq 0.$$

i.e. $\|z_n\| \geq \|z_m\|$. D'où, $(\|z_n\|)_n$ est croissante.
D'autre part, par la relation (1.9), on a

$$0 \leq (\lambda_n + \lambda_m)\|z_n - z_m\|^2 \leq (\lambda_m - \lambda_n)\Big(\|z_n\|^2 - \|z_m\|^2\Big).$$

Puisque (λ_n) est strictement décroissante i.e. $\lambda_n < \lambda_m$

$$\left(\frac{\lambda_n + \lambda_m}{\lambda_m - \lambda_n}\right)\|z_n - z_m\|^2 \leq \|z_n\|^2 - \|z_m\|^2. \tag{1.10}$$

Or

$$\frac{\lambda_n + \lambda_m}{\lambda_m - \lambda_n} = 1 + \frac{2\lambda_n}{\lambda_m - \lambda_n} \geq 1.$$

On aura de (1.10),

$$\|z_n - z_m\|^2 \leq \left(\frac{\lambda_n + \lambda_m}{\lambda_m - \lambda_n}\right)\|z_n - z_m\|^2 \leq \Big(\|z_n\| - \|z_m\|\Big)\Big(\|z_n\| + \|z_m\|\Big).$$

Comme $(\|z_n\|)_n$ est bornée, un passage à la limite quand $n, m \to +\infty$, nous affirme que $(z_n)_n$ est une suite de Cauchy dans H qui est complet, donc elle converge dans H. Ce qui finit la démonstration du Lemme. ■

CHAPITRE 2

ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION PROXIMALE

Dans la suite, on désigne par H un espace de Hilbert réel et $f \in \Gamma_0(H)$ et $g = f^*$. Les résultats de ce chapitre ont été pris de la référence [12].

2.1 Application proximale

Définition 2.1.1. *Soit $u \in H$. On considère la fonction*

$$u \longmapsto \Phi(u) = \frac{1}{2}\|u - z\|^2 + f(u). \tag{2.1}$$

L'unique point où Φ atteint son minimum sera noté $x = prox_f z$, et est appelé point proximal de z relativement à la fonction f.

Proposition 2.1.2. *Soit $f \in \Gamma_0(H)$ et soit $z \in H$. Alors la fonction $\Phi(\cdot)$ possède un minimum.*

Démonstration. Il est clair que la fonction Φ est propre strictement convexe (d'après l'Exemple 1.2.14). Montrons qu'elle est s.c.i. Soit $(u_n)_n \subset H$ telle que $(u_n)_n$ converge fortement vers u, on a en vertu de la s.c.i. de f

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to+\infty} \Phi(u_n) &= \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\|u_n - z\|^2 + f(u_n)\right) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\langle u_n - z, u_n - z\rangle + f(u_n)\right) \\
&\geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\Big(\|u_n\|^2 - 2\langle u_n, z\rangle + \|z\|^2\Big) + \liminf_{n\to\infty} f(u_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \lim_{n\to\infty} \langle u_n, z\rangle + \frac{1}{2}\|z\|^2 + \liminf_{n\to\infty} f(u_n) \\
&\geq \frac{1}{2}\Big(\|u\|^2 - 2\langle u, z\rangle + \|z\|^2\Big) + f(u) \\
&= \frac{1}{2}\|u - z\|^2 + f(u) = \Phi(u), \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

d'où la fonction Φ est s.c.i. sur H.

On montre à présent que Φ est coercive. Sachant par le Lemme 1.2.22 que $f \in \Gamma_0(H)$ possède au moins une minorante affine continue. Donc, ils existent $\beta \in \mathbb{R}$, $a \in H$ tel que $f(u) \geq \langle a, u\rangle + \beta$, $\forall u \in H$.

Soit $u \mapsto \langle a, u\rangle + \beta$ de sorte que $\Phi(u)$ est minorée par l'expression

$$\frac{1}{2}\|u - z\|^2 + \langle a, u\rangle + \beta, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad a \in H$$

ceci entraine que

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &\geq \frac{1}{2}\|u - z\|^2 + \langle a, u\rangle + \beta \\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\|z\|^2 - \langle u, z\rangle + \langle a, u\rangle + \beta \\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\|z\|^2 - \langle u, z - a\rangle + \beta \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \|u\|\|z - a\| + \beta \\
&= \|u\|\Big(\frac{1}{2}\|u\| - \|z - a\|\Big) + \beta.
\end{aligned}$$

Un passage à la limite quand $\|u\| \to \infty$ assure que $\Phi(u) \to \infty$. En utilisant le Théorème 1.2.23 il existe un unique y_0 dans H tel que $\Phi(y_0) = \inf_{u\in H} \Phi(u)$. ■

Exemple 2.1.3. *1. Prenons pour f la fonction affine continue*

$$f(u) = \langle a, u\rangle - \beta \ \text{(où } a \in H \text{ et } \beta \in \mathbb{R}\text{)}.$$

Nous avons,

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \frac{1}{2}\langle u-z, u-z\rangle + \langle a, u\rangle - \beta \\
&= \frac{1}{2}\Big\langle u-z+a-a, u-z+a-a\rangle + \langle a, u\Big\rangle - \beta \\
&= \frac{1}{2}\langle u-z+a, u-z+a\rangle - \langle u-z+a, a\rangle + \frac{1}{2}\|a\|^2 + \langle a, u\rangle - \beta \\
&= \frac{1}{2}\|u-z+a\|^2 + \frac{1}{2}\|a\|^2 + \langle a, u-u+z-a\rangle - \beta \\
&= \frac{1}{2}\|u-z+a\|^2 + \frac{1}{2}\|a\|^2 + \langle a, z-a\rangle - \beta \\
&= \frac{1}{2}\|u-z+a\|^2 + \frac{1}{2}\|a\|^2 + \langle a, z\rangle - \|a\|^2 - \beta \\
&= \frac{1}{2}\|u-(z-a)\|^2 + \langle a, z\rangle - \frac{1}{2}\|a\|^2 - \beta, \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

qui atteint son minimum en $u = z - a$. Donc $prox_f z = z - a$.

2. *Soient C une partie convexe fermée non vide de H, et $f = \Psi_C$.*

   Dans ce cas Φ prend la valeur $+\infty$ hors de C ; c'est donc quelque part sur C que cette fonction présente son minimum. Comme pour $u \in C$, on a

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \frac{1}{2}\|u-z\|^2 + f(u) \\
&= \frac{1}{2}\|u-z\|^2 + 0 \\
&= \frac{1}{2}\|u-z\|^2
\end{aligned}$$

   On sait que l'application $u \to \frac{1}{2}\|u-z\|^2$ de C dans $\mathbb{R}$ atteint sa borne inférieure en un unique point c de C tel que $c = Proj_C z$. D'où

$$prox_f z = Proj_C z.$$

3. *Un cas usuel est la synthèse des deux exemples précédents. En appellent encore C un ensemble convexe fermé, on prend*

$$f(u) = \langle a, u\rangle - \beta + \Psi_C(u),$$

   c'est-à-dire, que f vaut $+\infty$ hors de C et se réduit sur C à une fonction affine continue. On trouve par le même calcul fait dans (2.3) que

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \frac{1}{2}\|u-z\|^2 + \langle a, u\rangle - \beta + \Psi_C(u) \\
&= \frac{1}{2}\|u-z\|^2 + \langle a, u\rangle - \beta \quad (u \in C) \\
&= \frac{1}{2}\|u-(z-a)\|^2 + \langle a, z\rangle - \frac{1}{2}\|a\|^2 - \beta \quad (u \in C)
\end{aligned}$$

   d'après 1. et 2. on trouve alors

$$prox_f z = Proj_C(z-a).$$

2.2 Théorème des fonctions duales

Proposition 2.2.1. *Soient $f, g \in \Gamma_0(H)$ deux fonctions duales l'une de l'autre i.e. $f^* = g$ et soient x, y, z trois éléments de H. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

(a) $z = x + y$, $f(x) + g(y) = \langle x, y\rangle$ *i.e.* $y \in \partial f(x)$.

(b) $x = prox_f z$, $y = prox_g z$.

Démonstration. 1) Soient $x, y, z \in H$ possédant la propriété *(a) [implique que* $x \in dom(f)$*]. Il résulte de l'inégalité de Young-Fenchel (relation* (1.3)*), que pour tout* $u \in H$

$$f(u) + g(y) \geq \langle u, y\rangle.$$

Par la relation (2.1) *et cette dernière inégalité, on trouve (prenant en compte (a))*

$$\begin{aligned}
\Phi(u) - \Phi(x) &= \frac{1}{2}\|u - z\|^2 + f(u) - \frac{1}{2}\|x - z\|^2 - f(x)\\
&= \frac{1}{2}\|u - x - y\|^2 + f(u) - \frac{1}{2}\|x - x - y\|^2 - f(x)\\
&= \frac{1}{2}\|u - x - y\|^2 + f(u) - \frac{1}{2}\|y\|^2 - f(x)\\
&\geq \frac{1}{2}\|u - x - y\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2 + \langle u, y\rangle - g(y) - f(x)\\
&= \frac{1}{2}\|u - x - y\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2 + \langle u, y\rangle - \langle x, y\rangle\\
&= \frac{1}{2}\|u - x - y\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2 + \langle u - x, y\rangle
\end{aligned} \tag{2.4}$$

et ce dernier membre se réduit à $\frac{1}{2}\|u - x\|^2$ *car*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|u - x - y\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2 + \langle u - x, y\rangle &= \frac{1}{2}\langle u - x - y, u - x - y\rangle - \frac{1}{2}\|y\|^2 + \langle u - x, y\rangle\\
&= \frac{1}{2}\|u - x\|^2 - \langle u - x, y\rangle + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2 + \langle u - x, y\rangle\\
&= \frac{1}{2}\|u - x\|^2 \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Alors,

$$\Phi(x) \leq \Phi(u), \forall u \in H \tag{2.6}$$

i.e. x *est un minimum de* $\Phi(\cdot)$. *Donc, d'après la Proposition 2.1.2*

$$x = prox_f z.$$

De même, procéder en inter-changeant f, g *et* x, y, *on déduit que* $y = prox_g z$.

2) Réciproquement, soit $z \in H$ *et soit* $x = prox_f z$ *c'est à dire,* x *est le point où* Φ *atteint* *son minimum, [cela implique que $f(x) \neq +\infty$].*

Soit $y' = z - x$. Pour tout $u \in H$ et tout $\lambda \in]0,1[$, la convexité de f donne

$$f(\lambda u + (1-\lambda)x) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda) f(x),$$

et comme la fonction $\Phi(\cdot)$ atteint son minimum au point x, on a

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda u + (1-\lambda)x) &= \frac{1}{2}\|\lambda u + (1-\lambda)x - z\|^2 + f(\lambda u + (1-\lambda)x)\\ &= \frac{1}{2}\|\lambda(u-x) + x - z\|^2 + f(\lambda(u-x)+x)\\ &\geq \frac{1}{2}\|x-z\|^2 + f(x) = \Phi(x). \end{aligned} \tag{2.7}$$

En rapprochant ces deux inégalités, on obtient

$$\begin{aligned} f(\lambda u + (1-\lambda)x) &\geq \frac{1}{2}\|x-z\|^2 + f(x) - \frac{1}{2}\|\lambda(u-x) + x - z\|^2\\ &\geq \frac{1}{2}\|y'\|^2 + f(x) - \frac{1}{2}\|\lambda(u-x) - y'\|^2, \end{aligned} \tag{2.8}$$

d'où

$$\frac{1}{2}\|y'\|^2 + f(x) - \frac{1}{2}\|\lambda(u-x) - y'\|^2 \leq \lambda f(u) + (1-\lambda) f(x).$$

Il vient que,

$$\frac{1}{2}\|y'\|^2 - \frac{1}{2}\|\lambda(u-x) - y'\|^2 \leq \lambda f(u) - \lambda f(x)$$

donc

$$\frac{1}{2}\|y'\|^2 - \frac{1}{2}\lambda^2\|u-x\|^2 - \frac{1}{2}\|y'\|^2 + \lambda\langle u-x, y'\rangle \leq \lambda f(u) - \lambda f(x)$$

alors

$$\lambda\Big(-\frac{1}{2}\lambda\|u-x\|^2 + \langle u-x, y'\rangle\Big) \leq \lambda\Big(f(u) - f(x)\Big). \tag{2.9}$$

Puisque $\lambda > 0$, cela équivaut à

$$-\frac{1}{2}\lambda\|u-x\|^2 + \langle u-x, y'\rangle \leq f(u) - f(x),$$

autrement dit,

$$-\frac{1}{2}\lambda\|u-x\|^2 + \langle u, y'\rangle - \langle x, y'\rangle \leq f(u) - f(x),$$

par conséquent,

$$\langle u, y'\rangle - f(u) \leq \langle x, y'\rangle - f(x) + \frac{1}{2}\lambda\|u-x\|^2. \tag{2.10}$$

Comme λ peut être pris arbitrairement voisin de zéro, il en résulte que

$$\langle u, y'\rangle - f(u) \leq \langle x, y'\rangle - f(x), \forall u \in H.$$

Alors

$$\begin{aligned}\langle x, y'\rangle - f(x) &= \sup_{u\in H}\Big(\langle u, y'\rangle - f(u)\Big)\\ &= g(y'),\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\langle x, y'\rangle = f(x) + g(y') \quad \textit{avec} \quad y' = x - z.$$

D'autre part, on reprend les même étapes en permutant f, g et x, y, il en résulte que y, y', z possèdent la propriété (a). Ce qui achève la démonstration. ■

Remarque 2.2.2. *Pour $z \in H$, nous avons*

$$z = prox_f z + prox_g z.$$

Cette formule est appelée "décomposition de Moreau". En effet, par la relation (1.5)

$$\begin{aligned}x = prox_f z &\Leftrightarrow z - x \in \partial f(x)\\ &\Leftrightarrow x \in \partial g(z - x)\\ &\Leftrightarrow z - x = prox_g z.\end{aligned}$$

Corollaire 2.2.3. *Si P et Q sont deux cônes mutuellement polaires dans H et x, y, z trois éléments de H. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

(a) $z = x + y, \quad x \in P, \quad y \in Q, \quad \langle x, y\rangle = 0\,;$

(b) $x = Proj_P z, \quad y = Proj_Q z.$

Démonstration. On prend $f(\cdot) = \Psi_P(\cdot)$ (où P est le cône convexe fermé). On voit immédiatement que la fonction conjuguée

$$g(y) = \sup_{x\in P}\langle x, y\rangle,$$

qui est la fonction indicatrice du cône convexe fermé de

$$Q = \Big\{y \in H : \langle x, y\rangle \leq 0, \forall x \in P\Big\}.$$

La relation des points conjugués $f(x) + g(y) = \langle x, y\rangle$ implique que $f(x)$ et $g(y)$ sont finis, exige ici $f(x) = g(y) = 0$. Cette relation se réduit donc dans le cas présent à l'orthogonalité

$$\langle x, y\rangle = 0 \quad \text{avec} \quad x \in P \quad \textit{et} \quad y \in Q.$$

Soit $u \in P$, on a $\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u - z\|^2$. On voit que cette fonction atteint sa borne inférieure en un unique point $x \in P$, appelé projection de z sur P. Alors l'application $prox_f$ (resp. $prox_g$) est $Proj_P$ (resp. $Proj_Q$) (d'après l'Exemple 2.1.3 (2)). ■

Proposition 2.2.4 (Contraction des distances). *Soient z et z' dans H, on a*

$$\|prox_f z - prox_f z'\| \leq \|z - z'\|, \tag{2.11}$$

de sorte que l'application $prox_f$ est continue de H dans H muni de la topologie forte.

Démonstration. Soient $z, z' \in H$, on pose

$$x = prox_f z, \quad x' = prox_f z';$$
$$y = prox_g z, \quad y' = prox_g z'.$$

Nous avons d'après la Proposition 2.2.1 *(a) ;*

$$z = x + y, \quad z' = x' + y', \quad y \in \partial f(x) \quad \text{et} \quad y' \in \partial f(x').$$

En utilisant la monotonie du sous-différentiel de f (Théorème 1.2.47), il vient que

$$\begin{aligned} \langle z' - z, x' - x \rangle &= \langle x' + y' - (x + y), x' - x \rangle \\ &= \|x' - x\|^2 + \langle y' - y, x' - x \rangle \\ &\geq \|x' - x\|^2. \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} \|prox_f z' - prox_f z\|^2 &\leq \langle prox_f z' - prox_f z, z' - z \rangle \\ &\leq \|prox_f z' - prox_f z\| \|z' - z\|. \end{aligned}$$

D'où

$$\|prox_f z' - prox_f z\| \leq \|z' - z\|,$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

2.3 Questions d'images

Proposition 2.3.1. *L'image réciproque d'un point $a \in H$ par l'application $prox_f$ est l'ensemble convexe fermé (éventuellement vide)*

$$prox_f^{-1}(a) = a + \partial f(a). \tag{2.12}$$

Démonstration. Pour que $prox_f z = a$, il faut et il suffit, d'après la Proposition 2.2.1, que $z = a + y$ tel que $f(a) + g(y) = \langle a, y\rangle$ i.e., $y \in \partial f(a)$. Autrement dit,

$$prox_f z = a \Rightarrow z \in prox_f^{-1}(a).$$

Comme $z = a + y$ avec $y \in \partial f(a)$ alors

$$prox_f^{-1}(a) = a + \partial f(a).$$

qui est un ensemble convexe fermé (éventuellement vide).
Ce qui achève la démonstration. ■

L'image réciproque en question est non vide si et seulement si $\partial f(a)$ est non vide i.e.,

$$prox_f^{-1}(a) \neq \emptyset \Longleftrightarrow \partial f(a) \neq \emptyset.$$

Corollaire 2.3.2. *L'image $prox_f(H)$ de l'espace entier H est l'ensemble des points où la fonction f est sous-différentiable, qui est appelé assise de f i.e.*

$$prox_f(H) = \{x \in H : \partial f(x) \neq \emptyset\}.$$

Remarque 2.3.3. *En rapprochant le Corollaire 2.3.2 de la Proposition 2.1.2 (existence du point proximal), on voit que l'assise de $f \in \Gamma_0(H)$ ne peut pas être vide.*

Proposition 2.3.4. *L'ensemble (éventuellement vide) des points fixes de l'application $prox_f$ coïncide avec l'ensemble $\partial g(0)$ des points où la fonction f atteint sa borne inférieure (Remarque 1.2.38).*

Démonstration. Soit $z \in H$ par la Remarque 2.2.2, on a

$$z = prox_f z + prox_g z.$$

On voit que z est un point fixe de $prox_f$ si et seulement si

$$prox_g z = 0,$$

c'est-à-dire, par la Proposition 2.3.1, $z \in prox_g^{-1} 0 = \partial g(0)$. ■

2.4 Fonction primitive d'une application proximale

La fonction proximale étant par définition le point où la fonction $\Phi(\cdot)$ (relation (2.1)) atteint son minimum, il est naturel de s'intéresser à la valeur de ce minimum considéré comme fonction de z.

Définition 2.4.1. *La fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, partout définie sur H,*

$$z \longmapsto \varphi(z) = \frac{1}{2}\|y\|^2 + f(x), \tag{2.13}$$

où $x = prox_f z$ et $y = prox_g z$, est appelée fonction primitive de l'application $prox_g$.

Proposition 2.4.2. *La fonction φ appartient à $\Gamma_0(H)$ et sa duale est la fonction*

$$y \longmapsto \theta(y) = \frac{1}{2}\|y\|^2 + g(y).$$

Démonstration. 1) Soit κ un élément quelconque de H et soient $\xi = prox_f \kappa$ et $\eta = prox_g \kappa$. La fonction affine continue

$$z \longmapsto \mu_\kappa(z) = \langle \eta, z\rangle - \frac{1}{2}\|\eta\|^2 - g(\eta), \quad z \in H, \tag{2.14}$$

est une minorante de φ. En effet, on a

$$\varphi(z) - \mu_\kappa(z) = \frac{1}{2}\|y\|^2 + f(x) - \langle \eta, z\rangle + \frac{1}{2}\|\eta\|^2 + g(\eta) \tag{2.15}$$

et en vertu de l'inégalité de Young-Fenchel (relation (1.3))

$$f(x) + g(\eta) - \langle \eta, x\rangle \geq 0, \quad \forall x \in H,$$

La relation (2.15) donne (en évoquant $x + y = z$)

$$\begin{aligned}
\varphi(z) - \mu_\kappa(z) &\geq \frac{1}{2}\|y\|^2 + \frac{1}{2}\|\eta\|^2 - \langle \eta, z\rangle + \langle \eta, x\rangle \\
&= \frac{1}{2}\|y\|^2 + \frac{1}{2}\|\eta\|^2 - \langle \eta, z - x\rangle \\
&= \frac{1}{2}\|y\|^2 + \frac{1}{2}\|\eta\|^2 - \langle \eta, y\rangle \\
&= \frac{1}{2}\|y - \eta\|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

En outre, μ_κ est une minorante de φ. Elle prend au point κ la même valeur que φ puisque, d'après la Proposition 2.2.1, on a

$$\xi + \eta = \kappa \quad avec \quad f(\xi) + g(\eta) = \langle \xi, \eta\rangle.$$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned}
\mu_\kappa(z) &= \langle \eta, z\rangle - \frac{1}{2}\|\eta\|^2 - g(\eta) \\
&= \langle \eta, z\rangle - \frac{1}{2}\|\eta\|^2 - \langle \xi, \eta\rangle + f(\xi) \\
&= \langle \eta, z\rangle - \frac{1}{2}\|\eta\|^2 - \langle \kappa - \eta, \eta\rangle + f(\xi) \\
&= \langle z, \eta\rangle - \frac{1}{2}\|\eta\|^2 - \langle \kappa, \eta\rangle + \|\eta\|^2 + f(\xi) \\
&= \langle z - \kappa, \eta\rangle + \frac{1}{2}\|\eta\|^2 + f(\xi) \\
&= \langle z - \kappa, \eta\rangle + \varphi(\kappa). \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

Donc

$$\varphi(z) = \sup_{\kappa\in H} \mu_\kappa(z). \qquad (2.17)$$

Cela montre que φ appartient à $\Gamma_0(H)$, puisque φ est l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions affines continues (Proposition 1.2.21).

2) Pour chercher la fonction duale de φ, on écrit (2.17) sous la forme

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= \sup_{\kappa\in H} \left[\langle \eta, z\rangle - \frac{1}{2}\|\eta\|^2 - g(\eta)\right] \\
&= \sup_{\eta\in prox_g H} \left[\langle \eta, z\rangle - \frac{1}{2}\|\eta\|^2 - g(\eta)\right] \\
&\leq \sup_{\eta\in H}[\langle \eta, z\rangle - \theta(\eta)] = \theta^*(z),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que φ est majorée par la fonction duale de θ. Donc par la Proposition 1.2.32 $\theta^{**} \leq \varphi^*$ et puisque $\theta \in \Gamma_0(H)$, car de la relation (2.14)

$$\theta(\eta) = \langle \eta, z\rangle - \mu_\kappa(z), \quad z \in H$$

donc

$$\begin{aligned}
\theta(\eta) &= \sup_{z\in H}\Big(\langle \eta, z\rangle - \mu_\kappa(z)\Big) \\
&= \mu_\kappa^*(\eta),
\end{aligned}$$

on en déduit que $\theta^{**} = \theta$. D'où

$$\theta \leq \varphi^*. \qquad (2.18)$$

Il reste à prouver l'inégalité inverse,

$$\theta(y) \geq \sup_{\kappa\in H}[\langle \kappa, y\rangle - \varphi(\kappa)] = \varphi^*(y), \quad \forall y \in H,$$

ceci revient à montrer que, pour tous y, $\kappa \in H$,

$$\theta(y) - \langle \kappa, y \rangle + \varphi(\kappa) \geq 0.$$

Notons que (g étant la fonction duale de f)

$$f(\xi) + g(y) \geq \langle \xi, y \rangle, \quad \forall \xi \in H.$$

On aura donc

$$\begin{aligned}
\theta(y) - \langle \kappa, y \rangle + \varphi(\kappa) &= \frac{1}{2}\|y\|^2 + g(y) - \langle \kappa, y \rangle + \frac{1}{2}\|\eta\|^2 + f(\xi) \\
&\geq \frac{1}{2}\|y\|^2 + \frac{1}{2}\|\eta\|^2 - \langle \kappa, y \rangle + \langle \xi, y \rangle \\
&= \frac{1}{2}\|y\|^2 + \frac{1}{2}\|\eta\|^2 - \langle \kappa - \xi, y \rangle \\
&= \frac{1}{2}\|y\|^2 + \frac{1}{2}\|\eta\|^2 - \langle \eta, y \rangle \\
&= \frac{1}{2}\|\eta - y\|^2 \geq 0,
\end{aligned}$$

par conséquent $\theta = \varphi^*$. Ce qui achève la démonstration. ■

Proposition 2.4.3. *En tout point z de H, la fonction φ est différentiable au sens de Fréchet et son gradient en ce point est $y = prox_g z$.*

Démonstration. Puisque la fonction μ_κ telle qu'elle est exprimée en (2.14) minore φ, on a d'après (2.16)

$$\mu_\kappa(z) - \varphi(\kappa) = \langle z - \kappa, \eta \rangle$$

et par (2.17), on trouve

$$\varphi(z) - \varphi(\kappa) \geq \langle z - \kappa, \eta \rangle \quad \forall \kappa \in H, \tag{2.19}$$

avec $\eta = prox_g \kappa$. De même, échangeant z et κ,

$$\varphi(\kappa) - \varphi(z) \geq \langle \kappa - z, y \rangle \quad \forall z \in H, \tag{2.20}$$

avec $y = prox_g z$. En évoquant (2.19) et (2.20), on obtient

$$\begin{aligned}
0 \leq \varphi(\kappa) - \varphi(z) - \langle y, \kappa - z \rangle &\leq \langle \kappa - z, \eta \rangle - \langle \kappa - z, y \rangle \\
&= \langle \kappa - z, \eta - y \rangle.
\end{aligned}$$

Comme η et y sont les images respectives de κ et z par l'application $prox_g$, laquelle contracte les distances (relation (2.11)), le dernier membre admet la majoration

$$\begin{aligned}\langle \eta - y, \kappa - z\rangle &= \langle prox_g\kappa - prox_g z, \kappa - z\rangle \\ &\leq \|prox_g\kappa - prox_g z\| \|\kappa - z\| \leq \|\kappa - z\|^2.\end{aligned}$$

Donc

$$0 \leq \lim_{\kappa \to z} \frac{\Big|\varphi(\kappa) - \varphi(z) - \langle y, \kappa - z\rangle\Big|}{\|\kappa - z\|} \leq \lim_{\kappa \to z}\|\kappa - z\| = 0.$$

Ceci montre que la fonction φ est Fréchet différentiable au point z avec $d\varphi(z) = y$.
Ce qui achève la démonstration. ■

Exemple 2.4.4. *Comme dans l'Exemple 2.1.3, on prend $f = \Psi_C$ (C une partie convexe fermée non vide de H). Alors*

$$x = Proj_C z \quad i.e. \quad \|x - z\| = d_C(z).$$

Donc

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}\|z - x\|^2 = \frac{1}{2}d_C^2(z).$$

Il est élémentaire que cette fonction est différentiable au sens de Fréchet et que son gradient est $y = z - x$ (voir Exemple 1.2.28).

CHAPITRE 3

PROBLÈME D'ÉVOLUTION RELATIF A UN OPÉRATEUR SOUS-DIFFÉRENTIEL

L'objectif de ce chapitre est l'étude, dans un espace hilbertien réel, d'une inclusion différentielle du premier ordre de type,

$$(\mathcal{P})\begin{cases} -\frac{du}{dt}(t) \in \partial\varphi(t, u(t)) \quad p.p. \quad t \in I \\ u(0) = x; \end{cases}$$

où $\partial\varphi(t, \cdot)$ est le sous différentiel d'une fonction propre convexe s.c.i. $\varphi(t, \cdot)$.
Les résultats de ce chapitre sont pris de [16].

Hypothèses

Soit $\varphi : I \times H \to]-\infty, +\infty]$ vérifiant :
$(\mathcal{H}_1)$ Pour chaque $t \in I, u \longmapsto \varphi(t, u)$ est convexe s.c.i. et différente de la constate $+\infty$.
$(\mathcal{H}_2)$ Il existe deux fonctions $k : H \to \mathbb{R}_+$ lipschitzienne de rapport ρ et $a : I \to \mathbb{R}$ absolument continue et à dérivée dans $L^2_H(I)$ telle que pour chaque $t, s \in I$

$$\gamma(t, u) \leq \gamma(s, u) + k(u)|a(t) - a(s)| \tag{3.1}$$

où $\gamma(t,\cdot)$ représente la fonction duale de $\varphi(t,\cdot)$ (c'est-à-dire, $\varphi^*(t,\cdot)$).
$(\mathcal{H}_3)$ $0 \in dom(\gamma)$ (qui ne dépend pas de t d'après l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$).

Remarque 3.0.1. *On a*

$$\inf_{u\in H} \varphi(T,u) = -\gamma(T,0).$$

En effet, on a par définition

$$\begin{aligned} -\gamma(T,0) &= -\varphi^*(T,0) \\ &= -\sup_{u\in H}\Big(\langle 0,u\rangle - \varphi(T,u)\Big) \\ &= -\sup_{u\in H}\Big(-\varphi(T,u)\Big) \\ &= \inf_{u\in H}\varphi(T,u) \end{aligned}$$

et donc quitte à remplacer la fonction φ par $\tilde{\varphi}$, définie par

$$\tilde{\varphi}(t,u) = \varphi(t,u) - \inf_{v\in H}\varphi(T,v),$$

et nous avons

$$\begin{aligned} (\tilde{\varphi})^*(t,w) &= \sup_{u\in H}\Big(\langle w,u\rangle - \tilde{\varphi}(t,u)\Big) \\ &= \sup_{u\in H}\Big(\langle w,u\rangle - \varphi(t,u) + \inf_{v\in H}\varphi(T,v)\Big) \\ &= \varphi^*(t,w) + \inf_{v\in H}\varphi(T,v) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \partial\tilde{\varphi}(t,u) &= \Big\{w\in H, \tilde{\varphi}(t,u) + (\tilde{\varphi})^*(t,w) = \langle u,w\rangle\Big\} \\ &= \Big\{w\in H, \varphi(t,u) - \inf_{v\in H}\varphi(T,v) + \varphi^*(t,w) + \inf_{v\in H}\varphi(T,v) = \langle u,w\rangle\Big\} \\ &= \Big\{w\in H, \varphi(t,u) + \varphi^*(t,w) = \langle u,w\rangle\Big\} = \partial\varphi(t,u) \end{aligned}$$

on peut supposer que

$$\varphi(T,u) \geq 0, \forall u \in H. \tag{3.2}$$

c'est ce que nous fairons désormais.

Théorème 3.0.2. *Soit $\varphi : I \times H \to]-\infty,+\infty]$ une fonction satisfaisant $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$ et $(\mathcal{H}_3)$. Alors, il existe pour chaque $x \in dom(\varphi(0,\cdot))$ une fonction unique $u : I \to H$ absolument continue telle que* *a)* $\frac{du}{dt} \in L^2_H(I)$;

b) $u(t) \in D(\partial\varphi(t,\cdot))$ *et* $-\frac{du}{dt}(t) \in \partial\varphi(t, u(t))$ *p.p.* $t \in I$

c) $u(0) = x$.

Autrement dit, le problème $(\mathcal{P})$ *admet une solution unique* $u \in W^{1,2}_H(I)$.

Démonstration. La démonstration est répartie en plusieurs étapes.
Si nous proposons pour chaque $t \in I$, $A(t) = \partial\varphi(t,\cdot)$, il est bien connu par $(\mathcal{H}_1)$ et le Théorème 1.2.47 que chaque opérateur $A(t)$ est maximal monotone. Dans le cas présent,

$$A_\lambda(t) = \partial\varphi_\lambda(t,\cdot)$$

où $\varphi_\lambda(t,\cdot)$ est la fonction

$$\varphi_\lambda(t,u) = \inf_{v\in H}\Big(\frac{1}{2\lambda}\|u-v\|^2+\varphi(t,v)\Big). \tag{3.3}$$

Étape 1 : "Régularisation du problème".

Par la relation (3.3), on peut écrire pour tout $u \in H$

$$\varphi_\lambda(t,u) = \frac{1}{\lambda}\inf_{v\in H}\Big(\frac{1}{2}\|u-v\|^2+(\lambda\varphi)(t,v)\Big).$$

Via la Proposition 2.1.2, la fonction numérique

$$v \mapsto \frac{1}{2}\|u-v\|^2+(\lambda\varphi)(t,v).$$

possède un minimum strict que l'on note

$$x_p = prox_{(\lambda\varphi)(t,.)}u.$$

On déduit que,

$$\varphi_\lambda(t,u) = \frac{1}{\lambda}\Big(\frac{1}{2}\|u-x_p\|^2+(\lambda\varphi)(t,x_p)\Big). \tag{3.4}$$

Posons $y_p = u - x_p$ i.e. $x_p = u - y_p$. Donc par la Proposition 2.3.1,

$$u \in prox^{-1}_{(\lambda\varphi)(t,.)}(u-y_p) = (u-y_p) + \partial(\lambda\varphi)(t, u-y_p).$$

Par conséquent,

$$y_p \in \partial(\lambda\varphi)(t, x_p),$$

et en vertu de la Proposition 2.2.1, on déduit que

$$y_p = prox_{(\lambda\varphi)^*(t,.)}u.$$

Comparant (3.4) par (2.13), on conclut via la Proposition 2.4.3 que φ_λ est Fréchet différentiable et son gradient est

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{\lambda} prox_{(\lambda\varphi)^*(t,.)}u \\ &= \frac{1}{\lambda} prox_{\lambda\gamma(t,\frac{\cdot}{\lambda})}u. \end{aligned}$$

par le Théorème 1.2.39, on a

$$\partial\varphi_\lambda(t,u) = \frac{1}{\lambda} prox_{\lambda\gamma(t,\frac{\cdot}{\lambda})}u. \tag{3.5}$$

Les équations régularisées se présentent donc sous la forme :

$$(E_\lambda) \begin{cases} -\frac{du_\lambda}{dt}(t) = \frac{1}{\lambda} prox_{\lambda\gamma(t,\frac{\cdot}{\lambda})}u_\lambda(t) \quad p.p. \quad t \in [0,T], \\ u_\lambda(0) = x. \end{cases}$$

Proposition 3.0.3. *Pour chaque $\lambda > 0$, il existe une fonction $u_\lambda : I \to H$ continûment dérivable et vérifiant*

$$\begin{cases} -\frac{du_\lambda}{dt}(t) = \frac{1}{\lambda} prox_{\lambda\gamma(t,\frac{\cdot}{\lambda})}u_\lambda(t) \quad p.p. \quad t \in [0,T], \\ u_\lambda(0) = x. \end{cases}$$

Cette Proposition résulte du Lemme suivant.

Lemme 3.0.4. *Pour chaque $\lambda > 0$, il existe une fonction $M_\lambda : H \to \mathbb{R}_+$ du type Lipschitz de rapport 4ρ et vérifiant*

$$\|prox_{\lambda\gamma(t,\frac{\cdot}{\lambda})}z - prox_{\lambda\gamma(s,\frac{\cdot}{\lambda})}z\|^2 \leq M_\lambda(z)|a(t) - a(s)| \quad \forall t, s \in I, \quad \forall z \in H. \tag{3.6}$$

Démonstration. z étant supposé fixé, nous posons

$$p(t) = prox_{\lambda\gamma(t,\frac{\cdot}{\lambda})}z \quad et \quad \Gamma(t,u) = \frac{1}{2}\|u - z\|^2 + \lambda\gamma(t, \frac{u}{\lambda}).$$

Alors pour tout $u \in H$

$$\Gamma(t,u) \geq \Gamma(t,p(t)) + \frac{1}{2}\|u - p(t)\|^2. \tag{3.7}$$

Cette inégalité dûe à Moreau se démontre de la manière suivante. $p(t)$ étant le point où la fonction $\Gamma(t,\cdot)$ atteint son minimum on a alors,

$$\Gamma(t,p(t)) \leq \Gamma(t,u) \quad \forall u \in H,$$

Or

$$\Gamma(t,u) \geq \Gamma(t,p(t)) + \langle 0, u-p(t)\rangle \quad \forall u \in H,$$

donc

$$0 \in \partial\Gamma(t,p(t)). \tag{3.8}$$

On pose $f(u) = \frac{1}{2}\|u-z\|^2$. Il est clair que f est Gâteaux-différentiable (voir Exemple 1.2.28). En vertu de l'additivité des sous-différentiels des fonctions $u \mapsto \frac{1}{2}\|u-z\|^2$ et $u \mapsto \lambda\gamma(t, \frac{u}{\lambda})$ (Théorème 1.2.40), on a

$$\partial\Gamma(t,p(t)) = \partial f(t,p(t)) + \partial(\lambda\gamma(t, \frac{\cdot}{\lambda}))(p(t)) = (p(t)-z) + \lambda\partial(\gamma(t,\frac{\cdot}{\lambda}))p(t),$$

d'où l'expression (3.8) s'écrit aussi pour $\lambda > 0$

$$\frac{z-p(t)}{\lambda} \in \partial\Big(\gamma(t,\frac{\cdot}{\lambda})\Big)(p(t)). \tag{3.9}$$

C'est-à-dire, pour tout $u \in H$

$$\lambda\gamma\Big(t, \frac{u}{\lambda}\Big) \geq \lambda\gamma\Big(t, \frac{p(t)}{\lambda}\Big) + \langle z-p(t), u-p(t)\rangle, \quad \forall u \in H.$$

Donc

$$\frac{1}{2}\|u-z\|^2+\lambda\gamma\Big(t,\frac{u}{\lambda}\Big) \geq \frac{1}{2}\|p(t)-z\|^2+\lambda\gamma\Big(t,\frac{p(t)}{\lambda}\Big)+\Big\langle z-p(t), u-p(t)\Big\rangle+\frac{1}{2}\|u-z\|^2-\frac{1}{2}\|p(t)-z\|^2,$$

ce qui implique que

$$\Gamma(t,u) \geq \Gamma(t,p(t)) + \langle z-p(t), u-p(t)\rangle + \frac{1}{2}\|u-z\|^2-\frac{1}{2}\|p(t)-z\|^2.$$

$$\begin{aligned}
\Big\langle z-p(t), u-p(t)\Big\rangle &+ \frac{1}{2}\|u-z\|^2-\frac{1}{2}\|p(t)-z\|^2 \\
&= \langle z-p(t), u-p(t)\rangle + \frac{1}{2}\langle u-z, u-z\rangle + \frac{1}{2}\langle z-p(t), p(t)-z\rangle \\
&= \langle z-p(t), u-p(t)+\frac{1}{2}p(t)-\frac{1}{2}z\rangle + \frac{1}{2}\langle u-z, u-z\rangle \\
&= \langle z-p(t), u-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}p(t)\rangle + \frac{1}{2}\langle u-z, u-z\rangle \\
&= \langle z-p(t), \frac{1}{2}u-\frac{1}{2}z\rangle + \langle z-p(t), \frac{1}{2}u-\frac{1}{2}p(t)\rangle + \frac{1}{2}\langle u-z, u-z\rangle \\
&= \langle z-p(t)+u-z, \frac{1}{2}(u-z)\rangle + \frac{1}{2}\langle z-p(t), u-p(t)\rangle \\
&= \Big\langle \frac{1}{2}u-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}p(t), u-p(t)\Big\rangle \\
&= \frac{1}{2}\Big\langle u-p(t), u-p(t)\Big\rangle \\
&= \frac{1}{2}\|u-p(t)\|^2,
\end{aligned}$$

d'où

$$\Gamma(t,u) \geq \Gamma(t,p(t)) + \frac{1}{2}\|u-p(t)\|^2.$$

Alors pour chaque $u \in H$ et chaque $s \in I$, en vu de la définition de Γ, de l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ et de l'inégalité (3.7)

$$\begin{aligned}
\Gamma(s,u) &= \frac{1}{2}\|u-z\|^2+\lambda\gamma\Big(s,\frac{u}{\lambda}\Big)\\
&\geq \frac{1}{2}\|u-z\|^2+\lambda\gamma\Big(t,\frac{u}{\lambda}\Big) - \lambda k\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)|a(t)-a(s)|\\
&= \Gamma(t,u) - \lambda k\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)|a(t)-a(s)|\\
&\geq \Gamma(t,p(t)) + \frac{1}{2}\|u-p(t)\|^2-\lambda k\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)|a(t)-a(s)|\\
&= \frac{1}{2}\|p(t)-z\|^2+\lambda\gamma\Big(t,\frac{p(t)}{\lambda}\Big) + \frac{1}{2}\|u-p(t)\|^2-\lambda k\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)|a(t)-a(s)|\\
&\geq \frac{1}{2}\|p(t)-z\|^2+\lambda\gamma\Big(s,\frac{p(t)}{\lambda}\Big) - \lambda k\Big(\frac{p(t)}{\lambda}\Big)|a(t)-a(s)| + \frac{1}{2}\|u-p(t)\|^2-\lambda k\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)|a(t)-a(s)|\\
&\geq \frac{1}{2}\|p(t)-z\|^2+\lambda\gamma\Big(s,\frac{p(t)}{\lambda}\Big) + \frac{1}{2}\|u-p(t)\|^2-\lambda\Big[k\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)+k\Big(\frac{p(t)}{\lambda}\Big)\Big]|a(t)-a(s)|\\
&= \Gamma(s,p(t)) + \frac{1}{2}\|u-p(t)\|^2-\lambda\Big[k\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)+k\Big(\frac{p(t)}{\lambda}\Big)\Big]|a(t)-a(s)|.
\end{aligned}$$

Alors $\Gamma(s,u) \geq \Gamma(s,p(t))$ quand

$$\|u-p(t)\|^2\geq 2\lambda\Big[k\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)+k\Big(\frac{p(t)}{\lambda}\Big)\Big]|a(t)-a(s)|.$$

Ce qui entraine, puisque $p(s)$ est l'unique point où $\inf\limits_{u\in H}\Gamma(s,u)$ est atteint, que

$$\|p(t)-p(s)\|^2\leq 2\lambda\Big[k\Big(\frac{p(t)}{\lambda}\Big)+k\Big(\frac{p(s)}{\lambda}\Big)\Big]|a(t)-a(s)|. \tag{3.10}$$

Comme $k(\cdot)$ est du type Lipschitz, on a

$$\Big|k\Big(\frac{p(t)}{\lambda}\Big)-k\Big(\frac{p(s)}{\lambda}\Big)\Big| \leq \rho\Big\|\frac{p(t)}{\lambda}-\frac{p(s)}{\lambda}\Big\|,$$

donc

$$k\Big(\frac{p(s)}{\lambda}\Big) \leq \rho\Big\|\frac{p(t)}{\lambda}-\frac{p(s)}{\lambda}\Big\| + k\Big(\frac{p(t)}{\lambda}\Big),$$

il vient que

$$\begin{aligned}
\|p(t)-p(s)\|^2 &\leq 2\lambda\Big[k\Big(\frac{p(t)}{\lambda}\Big)+\rho\Big\|\frac{p(t)-p(s)}{\lambda}\Big\|+k\Big(\frac{p(t)}{\lambda}\Big)\Big]|a(t)-a(s)|\\
&= 2\lambda\Big[2k\Big(\frac{p(t)}{\lambda}\Big)+\rho\Big\|\frac{p(t)-p(s)}{\lambda}\Big\|\Big]|a(t)-a(s)|\\
&= 4\lambda k\Big(\frac{p(t)}{\lambda}\Big)|a(t)-a(s)| + 2\rho\|p(t)-p(s)\||a(t)-a(s)|
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\|p(t)-p(s)\|^2-2\rho\|p(t)-p(s)\||a(t)-a(s)|+\rho^2|a(t)-a(s)|^2 \\ = \Big(\|p(t)-p(s)\|+\rho|a(t)-a(s)|\Big)^2 \\ \leq 4\lambda k\Big(\frac{p(t)}{\lambda}\Big)|a(t)-a(s)|+\rho^2|a(t)-a(s)|^2.\end{aligned}$$

D'où l'en tire

$$\|p(t)-p(s)\|\leq \rho|a(t)-a(s)|+\sqrt{4\lambda k\Big(\frac{p(t)}{\lambda}\Big)|a(t)-a(s)|+\rho^2|a(t)-a(s)|^2}.$$

Il en résulte donc, t étant fixé et $a(\cdot)$ est absolument continue, la continuité de $s\mapsto p(s)$ au point t. La fonction réel $t\mapsto k\Big(\frac{p(t)}{\lambda}\Big)$ est ainsi continue sur I. Posons alors

$$M_\lambda(z)=4\lambda\sup_{t\in I} k\Big(\frac{p(t)}{\lambda}\Big).$$

On obtient, à partir de (3.10),

$$\begin{aligned}\|p(t)-p(s)\|^2 &\leq 4\lambda\sup_{t\in I} k\Big(\frac{p(t)}{\lambda}\Big)|a(t)-a(s)| \\ &= M_\lambda(z)|a(t)-a(s)|.\end{aligned}$$

Il reste à vérifier que M_λ est Lipschitz de rapport 4ρ.

Soit $p'(t)=prox_{\lambda\gamma(t,\frac{\cdot}{\lambda})}z'$ et utilisant la lipschizité de $k(\cdot)$, on trouve

$$\begin{aligned}M_\lambda(z)-M_\lambda(z') &= 4\lambda\sup_{t\in I} k\Big(\frac{p(t)}{\lambda}\Big)-4\lambda\sup_{t\in I} k\Big(\frac{p'(t)}{\lambda}\Big) \\ &\leq 4\lambda\sup_{t\in I}\Big(k\Big(\frac{p(t)}{\lambda}\Big)-k\Big(\frac{p'(t)}{\lambda}\Big)\Big) \\ &\leq 4\lambda\sup_{t\in I}\Big|k\Big(\frac{p(t)}{\lambda}\Big)-k\Big(\frac{p'(t)}{\lambda}\Big)\Big| \\ &\leq 4\lambda\sup_{t\in I}\rho\Big\|\frac{p(t)}{\lambda}-\frac{p'(t)}{\lambda}\Big\| \\ &= 4\rho\sup_{t\in I}\|p(t)-p'(t)\|,\end{aligned}$$

par la Proposition 2.2.4, on aura

$$M_\lambda(z)-M_\lambda(z')\leq 4\rho\|z-z'\|.$$

De même en interverssant z et z', on déduit que

$$\Big|M_\lambda(z)-M_\lambda(z')\Big|\leq 4\rho\|z-z'\|.$$

■

Ce Lemme implique que la fonction

$$f_\lambda(t,u) = \frac{1}{\lambda} prox_{\lambda\gamma(t,\frac{\cdot}{\lambda})} u,$$

est continue en t. On sait par ailleurs, qu'elle est contractante en u. Par le Théorème d'existence de Cauchy (Théorème 1.3.6), il existe une solution unique pour le problème (E_λ), $u_\lambda : I \to H$ continûment dérivable donc du type Lipschitz, nous noterons k_λ une constante telle que

$$\|u_\lambda(t) - u_\lambda(s)\| \leq k_\lambda |t-s| \quad \forall t, s \in I. \tag{3.11}$$

Étape 2 : "Majoration des solutions des équations régularisées".

Proposition 3.0.5. *Il existe une constante $K > 0$, indépendante de λ, telle que*

$$\left\| \frac{du_\lambda}{dt} \right\|_{L^2_H} \leq K, \quad \forall \lambda > 0. \tag{3.12}$$

Démonstration. Posons, pour simplifier l'écriture

$$p_\lambda(t) = prox_{\lambda\gamma(t,\frac{\cdot}{\lambda})} u_\lambda(t), \quad q_\lambda(t) = prox_{\lambda\varphi(t,.)} u_\lambda(t) \tag{3.13}$$

et

$$\Phi_\lambda(t,u) = \frac{1}{2}\|u_\lambda(t) - u\|^2 + \lambda\varphi(t,u). \tag{3.14}$$

Nous avons, d'après la définition du point proximal (Proposition 2.1.2), Φ_λ atteint son minimum en $u = q_\lambda(t)$,

$$\Phi_\lambda(t, q_\lambda(t)) = \inf_{u \in H} \Phi_\lambda(t,u). \tag{3.15}$$

Ainsi comme

$$\Phi_\lambda(t, q_\lambda(t)) = \inf_{u \in H} \left[\frac{1}{2}\|u_\lambda(t) - u\|^2 + \lambda\varphi(t,u)\right]$$

alors, en utilisant la notion d'inf-convolution

$$\Phi_\lambda(t, q_\lambda(t)) = \left[\frac{1}{2}\|.\|^2 \Box \lambda\varphi(t,.)\right]\Big(u_\lambda(t)\Big),$$

égalité qui s'écrit encore,

$$\Phi^*_\lambda(t, q_\lambda(t)) = \left[\frac{1}{2}\|.\|^2 \Box \lambda\varphi(t,.)\right]^*\Big(u_\lambda(t)\Big),$$

où $\left[\frac{1}{2}\|.\|^2 \Box \lambda\varphi(t,.)\right]^*$ représente la duale de $\frac{1}{2}\|.\|^2 \Box \lambda\varphi(t,.)$ et vaut de ce fait (voir Exemple 1.2.30)

$$\left[\frac{1}{2}\|.\|^2 \Box \lambda\varphi(t,.)\right]^* = \frac{1}{2}\|.\|^2 + \lambda\gamma(t, \frac{\cdot}{\lambda})$$

Nous avons,

$$\Phi_\lambda^{**}(t, q_\lambda(t)) = \sup_{u\in H}\Big\{\langle u, u_\lambda(t)\rangle - \Phi_\lambda^*(t,u)\Big\}$$

Il vient donc (rappelons que $\Phi_\lambda^{**}(t,.) = \Phi_\lambda(t,.)$)

$$\Phi_\lambda(t, q_\lambda(t)) = \sup_{u\in H}\Big\{\Big\langle u, u_\lambda(t)\Big\rangle - \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda\gamma\Big(t, \frac{u}{\lambda}\Big)\Big\}. \tag{3.16}$$

Notons, en outre que le suprémum est atteint pour $u = p_\lambda(t)$, ceci provient du fait que $\Phi_\lambda(t, q_\lambda(t))$ vaut aussi

$$\tfrac{1}{2}\|u_\lambda(t)\|^2 - \inf_{u\in H}\Big(\tfrac{1}{2}\|u - u_\lambda(t)\|^2 + \lambda\gamma\Big(t, \tfrac{u}{\lambda}\Big)\Big).$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(t, q_\lambda(t)) &= \sup_{u\in H}\Big(\Big\langle u, u_\lambda(t)\Big\rangle - \frac{1}{2}\langle u, u\rangle - \lambda\gamma\Big(t, \frac{u}{\lambda}\Big)\Big)\\
&= \sup_{u\in H}\Big(\Big\langle u, u_\lambda(t) - \frac{1}{2}u\Big\rangle - \lambda\gamma\Big(t, \frac{u}{\lambda}\Big)\Big)\\
&= \sup_{u\in H}\Big(\frac{1}{2}\Big\langle u - u_\lambda(t), u_\lambda(t) - u\Big\rangle + \frac{1}{2}\Big\langle u_\lambda(t), u_\lambda(t) - u\Big\rangle + \frac{1}{2}\Big\langle u, u_\lambda(t)\Big\rangle - \lambda\gamma\Big(t, \frac{u}{\lambda}\Big)\Big)\\
&= \sup_{u\in H}\Big(\frac{1}{2}\|u_\lambda(t)\|^2 - \frac{1}{2}\|u - u_\lambda(t)\|^2 - \lambda\gamma\Big(t, \frac{u}{\lambda}\Big)\Big)\\
&= \frac{1}{2}\|u_\lambda(t)\|^2 - \inf_{u\in H}\Big(\frac{1}{2}\|u - u_\lambda(t)\|^2 + \lambda\gamma\Big(t, \frac{u}{\lambda}\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Lequel l'inf est atteint, d'après la définition du point proximal, pour $u = p_\lambda(t)$. Il en est donc de même du supremum dans (3.16).

Avant de compléter la preuve, on aura besoin du Lemme suivant.

Lemme 3.0.6. *La fonction $t \mapsto \Phi_\lambda(t, q_\lambda(t))$ est absolument continue et donc presque partout dérivable.*

Démonstration. En utilisant les relations (2.11), (3.6) et (3.11), on trouve pour tous

$t, s \in I$

$$\begin{aligned}
\|p_\lambda(t) - p_\lambda(s)\| &= \|prox_{\lambda\gamma(t,\frac{\cdot}{\lambda})}u_\lambda(t) - prox_{\lambda\gamma(s,\frac{\cdot}{\lambda})}u_\lambda(s)\| \\
&= \|prox_{\lambda\gamma(t,\frac{\cdot}{\lambda})}u_\lambda(t) - prox_{\lambda\gamma(s,\frac{\cdot}{\lambda})}u_\lambda(t) + prox_{\lambda\gamma(s,\frac{\cdot}{\lambda})}u_\lambda(t) - prox_{\lambda\gamma(s,\frac{\cdot}{\lambda})}u_\lambda(s)\| \\
&\leq \|prox_{\lambda\gamma(t,\frac{\cdot}{\lambda})}u_\lambda(t) - prox_{\lambda\gamma(s,\frac{\cdot}{\lambda})}u_\lambda(t)\| + \|prox_{\lambda\gamma(s,\frac{\cdot}{\lambda})}u_\lambda(t) - prox_{\lambda\gamma(s,\frac{\cdot}{\lambda})}u_\lambda(s)\| \\
&\leq \sqrt{M_\lambda(u_\lambda(t))|a(t) - a(s)|} + \|u_\lambda(t) - u_\lambda(s)\| \\
&= \sqrt{M_\lambda(u_\lambda(t))}\sqrt{|a(t) - a(s)|} + k_\lambda|t - s|. \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Mais $M_\lambda(\cdot)$ étant Lipschitz de rapport 4ρ

$$M_\lambda(u_\lambda(t)) - M_\lambda(u_\lambda(0)) \leq 4\rho\|u_\lambda(t) - u_\lambda(0)\|,$$

la relation (3.11) et la condition $u_\lambda(0) = x$ entrainent pour $t \in I$ que

$$\begin{aligned}
M_\lambda(u_\lambda(t)) &\leq 4\rho\|u_\lambda(t) - u_\lambda(0)\| + M_\lambda(x) \\
&\leq 4\rho k_\lambda|t - 0| + M_\lambda(x) \\
&\leq 4\rho k_\lambda T + M_\lambda(x).
\end{aligned}$$

Posons alors $B_\lambda = \sqrt{4\rho k_\lambda T + M_\lambda(x)}$. On obtient, par la relation (3.17) que

$$\|p_\lambda(t) - p_\lambda(s)\| \leq B_\lambda\sqrt{|a(t) - a(s)|} + k_\lambda|t - s|. \qquad (3.18)$$

Fixons t dans I. Pour chaque $h > 0$ posons

$$\varepsilon(h) = B_\lambda \sup_{|t-s|\leq h} \sqrt{|a(t) - a(s)|} + k_\lambda h$$

De (3.16) et (3.18), il découle alors de manière évidente que, pour chaque $s \in [t - h, t + h] \cap I$

$$\Phi_\lambda(s, q_\lambda(s)) = \sup_{\substack{\|u - p_\lambda(t)\| \leq \varepsilon(h) \\ \frac{u}{\lambda} \in dom(\gamma)}} \left\{\langle u, u_\lambda(s)\rangle - \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda\gamma\Big(s, \frac{u}{\lambda}\Big)\right\},$$

et ainsi, pour chaque s et s' dans $[t-h, t+h] \cap I$, on a

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(s, q_\lambda(s)) - \Phi_\lambda(s', q_\lambda(s')) &= \sup_{\substack{\|u-p_\lambda(t)\|\leq\varepsilon(h) \\ \frac{u}{\lambda}\in dom(\gamma)}} \Big\{\langle u, u_\lambda(s)\rangle - \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda\gamma\Big(s, \frac{u}{\lambda}\Big)\Big\} - \\
&\quad \sup_{\substack{\|u-p_\lambda(t)\|\leq\varepsilon(h) \\ \frac{u}{\lambda}\in dom(\gamma)}} \Big\{\langle u, u_\lambda(s')\rangle - \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda\gamma\Big(s', \frac{u}{\lambda}\Big)\Big\} \\
&\leq \sup_{\substack{\|u-p_\lambda(t)\|\leq\varepsilon(h) \\ \frac{u}{\lambda}\in dom(\gamma)}} \Big\{\langle u, u_\lambda(s)\rangle - \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda\gamma\Big(s, \frac{u}{\lambda}\Big) - \\
&\quad \langle u, u_\lambda(s')\rangle + \frac{1}{2}\|u\|^2 + \lambda\gamma\Big(s', \frac{u}{\lambda}\Big)\Big\} \\
&= \sup_{\substack{\|u-p_\lambda(t)\|\leq\varepsilon(h) \\ \frac{u}{\lambda}\in dom(\gamma)}} \Big\{\langle u, u_\lambda(s) - u_\lambda(s')\rangle - \lambda\gamma\Big(s, \frac{u}{\lambda}\Big) + \lambda\gamma\Big(s', \frac{u}{\lambda}\Big)\Big\}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Or nous avons les majorations suivantes. D'après l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ et la propriété de Lipschitz de $k(\cdot)$ on trouve

$$\begin{aligned}
-\lambda\gamma\Big(s, \frac{u}{\lambda}\Big) + \lambda\gamma\Big(s', \frac{u}{\lambda}\Big) &\leq \lambda k\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)|a(s) - a(s')| \\
&\leq \lambda\Big(\rho\Big\|\frac{u}{\lambda}\Big\| + k(0)\Big)|a(s) - a(s')| \\
&\leq \Big(\rho\|u\| + \lambda k(0)\Big)|a(s) - a(s')|
\end{aligned}$$

et par la relation (3.11),

$$\begin{aligned}
\langle u, u_\lambda(s) - u_\lambda(s')\rangle - \langle p_\lambda(t), u_\lambda(s) - u_\lambda(s')\rangle &= \langle u - p_\lambda(t), u_\lambda(s) - u_\lambda(s')\rangle \\
&\leq \|u - p_\lambda(t)\|\|u_\lambda(s) - u_\lambda(s')\| \\
&\leq \varepsilon(h)k_\lambda|s - s'|.
\end{aligned}$$

Alors

$$\langle u, u_\lambda(s) - u_\lambda(s')\rangle \leq \varepsilon(h)k_\lambda|s - s'| + \langle p_\lambda(t), u_\lambda(s) - u_\lambda(s')\rangle$$

D'où l'inégalité (3.19) devient (notons que $\|u - p_\lambda(t)\| \leq \varepsilon(h)$)

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(s, q_\lambda(s)) - \Phi_\lambda(s', q_\lambda(s')) &\leq \sup_{\substack{\|u-p_\lambda(t)\|\leq\varepsilon(h) \\ \frac{u}{\lambda}\in dom(\gamma)}} \Big\{\varepsilon(h)k_\lambda|s - s'| + \langle p_\lambda(t), u_\lambda(s) - u_\lambda(s')\rangle + \\
&\quad \Big[\rho\|u\| + \lambda k(0)\Big]|a(s) - a(s')|\Big\} \\
&\leq \varepsilon(h)k_\lambda|s - s'| + \langle p_\lambda(t), u_\lambda(s) - u_\lambda(s')\rangle + \\
&\quad \Big[\rho\varepsilon(h) + \rho\|p_\lambda(t)\| + \lambda k(0)\Big]|a(s) - a(s')|,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

qui est vraie pour tous $s, s' \in [t-h, t+h] \cap I$. Si on applique (3.20) à $t = h = \frac{T}{2}$, on obtient, en évoquant (3.11)

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(s, q_\lambda(s)) - \Phi_\lambda(s', q_\lambda(s')) &\le \varepsilon\Big(\frac{T}{2}\Big)k_\lambda|s-s'| + \Big\langle p_\lambda\Big(\frac{T}{2}\Big), u_\lambda(s) - u_\lambda(s')\Big\rangle + \\
&\Big[\rho\varepsilon\Big(\frac{T}{2}\Big) + \rho\Big\|p_\lambda\Big(\frac{T}{2}\Big)\Big\| + \lambda k(0)\Big]|a(s) - a(s')| \\
&\le \varepsilon\Big(\frac{T}{2}\Big)k_\lambda|s-s'| + \Big\|p_\lambda\Big(\frac{T}{2}\Big)\Big\|\Big\|u_\lambda(s) - u_\lambda(s')\Big\| + \\
&\Big[\rho\varepsilon\Big(\frac{T}{2}\Big) + \rho\Big\|p_\lambda\Big(\frac{T}{2}\Big)\Big\| + \lambda k(0)\Big]|a(s) - a(s')| \\
&\le \Big[\varepsilon\Big(\frac{T}{2}\Big) + \Big\|p_\lambda\Big(\frac{T}{2}\Big)\Big\|\Big]k_\lambda|s-s'| + \\
&\Big[\rho\varepsilon\Big(\frac{T}{2}\Big) + \rho\Big\|p_\lambda\Big(\frac{T}{2}\Big)\Big\| + \lambda k(0)\Big]|a(s) - a(s')|
\end{aligned}$$

donc

$$\Phi_\lambda(s, q_\lambda(s)) - \Phi_\lambda(s', q_\lambda(s')) \le K_\lambda|a(s) - a(s')| + H_\lambda|s-s'|$$

où

$$K_\lambda = \lambda k(0) + \rho\varepsilon\Big(\frac{T}{2}\Big) + \rho\Big\|p_\lambda\Big(\frac{T}{2}\Big)\Big\|$$

et

$$H_\lambda = \Big[\varepsilon\Big(\frac{T}{2}\Big) + \Big\|p_\lambda\Big(\frac{T}{2}\Big)\Big\|\Big]k_\lambda.$$

Puisque $a(\cdot)$ est absolument continue, on aura donc $s \mapsto \Phi_\lambda(s, q_\lambda(s))$ l'est aussi. ∎

Suite de la démonstration de la Proposition 3.0.5

Soit $t \in I$, appliquant (3.20) à $s = t+h$ et $s' = t$, h choisissant assez petit, on obtient

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(t+h, q_\lambda(t+h)) - \Phi_\lambda(t, q_\lambda(t)) &\le \varepsilon(h)k_\lambda h + \langle p_\lambda(t), u_\lambda(t+h) - u_\lambda(t)\rangle + \\
&\Big[\lambda k(0) + \rho\varepsilon(h) + \rho\|p_\lambda(t)\|\Big]|a(t+h) - a(t)|
\end{aligned}$$

On divise par h que l'on fait tendre vers zéro, on arrive à (rappelons que $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$)

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\Phi_\lambda(t+h, q_\lambda(t+h)) - \Phi_\lambda(t, q_\lambda(t))}{h} &\le \lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon(h)k_\lambda h + \langle p_\lambda(t), u_\lambda(t+h) - u_\lambda(t)\rangle}{h} + \\
&\lim_{h\to 0}\frac{\Big[\lambda k(0) + \rho\varepsilon(h) + \rho\|p_\lambda(t)\|\Big]|a(t+h) - a(t)|}{h},
\end{aligned}$$

on déduit que

$$\frac{d}{dt}\Phi_\lambda(t, q_\lambda(t)) \le \Big\langle p_\lambda(t), \frac{du_\lambda}{dt}(t)\Big\rangle + \Big[\lambda k(0) + \rho\|p_\lambda(t)\|\Big]\Big|\frac{da}{dt}(t)\Big|. \tag{3.21}$$

Par le Lemme 3.0.6, $t \mapsto \Phi_\lambda(t, q_\lambda(t))$ est absolument continue, de plus $t \mapsto a(t)$ l'est aussi, donc presque-partout dérivables, l'inégalité obtenue est vraie pour presque tout t dans I, or

$$p_\lambda(t) = prox_{\lambda\gamma(t,\frac{\cdot}{\lambda})} u_\lambda(t) = -\lambda \frac{du_\lambda}{dt}(t) \quad p.p. \quad t \in I.$$

Alors l'inégalité (3.21) s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi_\lambda(t, q_\lambda(t)) &\leq \Big\langle -\lambda \frac{du_\lambda}{dt}(t), \frac{du_\lambda}{dt}(t)\Big\rangle + \Big[\lambda k(0) + \rho\Big\| -\lambda \frac{du_\lambda}{dt}(t)\Big\|\Big]\Big|\frac{da}{dt}(t)\Big| \\ &= -\lambda\Big\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\Big\|^2 + \lambda\Big[k(0) + \rho\Big\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\Big\|\Big]\Big|\frac{da}{dt}(t)\Big|,\end{aligned}$$

on divise par $(-\lambda)$, il reste

$$\Big\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\Big\|^2 \leq -\frac{1}{\lambda}\frac{d}{dt}\Phi_\lambda(t, q_\lambda(t)) + \Big[k(0) + \rho\Big\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\Big\|\Big]\Big|\frac{da}{dt}(t)\Big| \quad p.p. \quad t \in I.$$

Une intégration sur I donne

$$\int_0^T \Big\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\Big\|^2 dt \leq -\int_0^T \frac{1}{\lambda}\frac{d}{dt}\Phi_\lambda(t, q_\lambda(t))dt + \int_0^T \Big[k(0) + \rho\Big\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\Big\|\Big]\Big|\frac{da}{dt}(t)\Big|dt,$$

par l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{du_\lambda}{dt}\Big\|^2_{L^2_H} &\leq -\frac{1}{\lambda}\int_0^T \frac{d}{dt}\Phi_\lambda(t, q_\lambda(t))dt + \int_0^T k(0)\Big|\frac{da}{dt}(t)\Big|dt + \rho\int_0^T \Big\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\Big\|\Big|\frac{da}{dt}(t)\Big|dt \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\Big[\Phi_\lambda(0, q_\lambda(0)) - \Phi_\lambda(T, q_\lambda(T))\Big] + k(0)\sqrt{T}\Big\|\frac{da}{dt}\Big\|_{L^2_H} + \rho\Big\|\frac{da}{dt}\Big\|_{L^2_H}\Big\|\frac{du_\lambda}{dt}\Big\|_{L^2_H}.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Or, par les relations (3.14) et (3.15), on a pour tout $u \in H$

$$\begin{aligned}\Phi_\lambda(0, q_\lambda(0)) &\leq \Phi_\lambda(0, u) \\ &= \frac{1}{2}\|u_\lambda(0) - u\|^2 + \lambda\varphi(0, u) \\ &= \frac{1}{2}\|x - u\|^2 + \lambda\varphi(0, u),\end{aligned}$$

en particulier pour $u = x$,

$$\Phi_\lambda(0, q_\lambda(0)) \leq \Phi_\lambda(0, x) = \lambda\varphi(0, x). \tag{3.23}$$

D'autre part,

$$\Phi_\lambda(T, q_\lambda(T)) = \frac{1}{2}\|u_\lambda(T) - q_\lambda(T)\|^2 + \lambda\varphi(T, q_\lambda(T))$$

et comme (voir Proposition 2.2.1 *(a)*)

$$u_\lambda(T) = p_\lambda(T) + q_\lambda(T) \Rightarrow p_\lambda(T) = u_\lambda(T) - q_\lambda(T).$$

Alors, par (3.2)

$$\begin{aligned}\Phi_\lambda(T, q_\lambda(T)) &= \frac{1}{2}\|p_\lambda(T)\|^2 + \lambda\varphi(T, q_\lambda(T))\\ &\geq \frac{1}{2}\|p_\lambda(T)\|^2\\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Donc la relation (3.22) *devient,*

$$\left\|\frac{du_\lambda}{dt}\right\|^2_{L^2_H} \leq \varphi(0,x) + k(0)\sqrt{T}\left\|\frac{da}{dt}\right\|_{L^2_H} + \rho\left\|\frac{da}{dt}\right\|_{L^2_H}\left\|\frac{du_\lambda}{dt}\right\|_{L^2_H},$$

d'où

$$\left\|\frac{du_\lambda}{dt}\right\|^2_{L^2_H} - 2\Big(\frac{\rho}{2}\left\|\frac{da}{dt}\right\|_{L^2_H}\left\|\frac{du_\lambda}{dt}\right\|_{L^2_H}\Big) \leq \varphi(0,x) + k(0)\sqrt{T}\left\|\frac{da}{dt}\right\|_{L^2_H},$$

donc

$$\left\|\frac{du_\lambda}{dt}\right\|_{L^2_H} \leq \frac{\rho}{2}\left\|\frac{da}{dt}\right\|^2_{L^2_H} + \sqrt{k(0)\sqrt{T}\left\|\frac{da}{dt}\right\|_{L^2_H} + \frac{\rho^2}{4}\left\|\frac{da}{dt}\right\|^2_{L^2_H} + \varphi(0,x)}$$

on conclut que

$$\left\|\frac{du_\lambda}{dt}\right\|_{L^2_H} \leq K, \quad \forall\lambda > 0$$

avec $K = \frac{\rho}{2}\left\|\frac{da}{dt}\right\|^2_{L^2_H} + \sqrt{k(0)\sqrt{T}\left\|\frac{da}{dt}\right\|_{L^2_H} + \frac{\rho^2}{4}\left\|\frac{da}{dt}\right\|^2_{L^2_H}}$ *qui est une constante finie car* $\frac{da}{dt} \in L^2_H(I)$ *et du fait que* $x \in dom(\varphi(0,\cdot))$. ■

Étape 3 : "Passage à la limite".

Si nous considérons une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement décroissante de réel positifs tendant vers zéro, les résultats des paragraphes précédents se résument de la manière suivante : Pour chaque entier n, il existe une suite de fonction $(u_{\lambda_n})_n$ vérifiant

$$(E_{\lambda_n})\begin{cases}-\frac{du_{\lambda_n}}{dt}(t) = \frac{1}{\lambda_n}prox_{\lambda_n\gamma(t,\frac{\cdot}{\lambda_n})}u_{\lambda_n}(t) \quad p.p. \quad t \in [0,T],\\ u_{\lambda_n}(0) = x,\end{cases}$$

avec $\|\frac{du_{\lambda_n}}{dt}\|_{L^2_H} \leq K, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Proposition 3.0.7. *Il existe une fonction* $u : I \to \mathbb{R}_+$ *absolument continue et à dérivée dans* $L^2_H(I)$ *telle que*

$$\lim_{n\to\infty} u_{\lambda_n} = u \quad dans \quad \mathcal{C}_H(I), \tag{3.24}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{du_{\lambda_n}}{dt} = \frac{du}{dt} \quad dans \quad L^2_H(I). \tag{3.25}$$

Démonstration. Soient m et n deux entiers quelconques tels que $n > m$. Soit $A_{\lambda_n}(t) = \partial\varphi_{\lambda_n}(t,\cdot)$ avec

$$A_{\lambda_n}(t) = \lambda_n^{-1}[I - J_{\lambda_n}(t)] \quad et \quad J_{\lambda_n}(t) = [I + \lambda_n A(t)]^{-1}.$$

Sachant que,

$$\lambda_n A_{\lambda_n}(t)u_{\lambda_n}(t) + J_{\lambda_n}(t)u_{\lambda_n}(t) = [\lambda_n A_{\lambda_n}(t) + J_{\lambda_n}(t)]u_{\lambda_n}(t) = u_{\lambda_n}(t),$$

et en vertu de la Proposition 1.3.2, on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u_{\lambda_n}(t) - u_{\lambda_m}(t)\|^2 &= 2\Big\langle u_{\lambda_n}(t) - u_{\lambda_m}(t), \frac{du_{\lambda_n}}{dt}(t) - \frac{du_{\lambda_m}}{dt}(t)\Big\rangle \\ &= 2\Big\langle \lambda_n A_{\lambda_n}(t)u_{\lambda_n}(t) - \lambda_m A_{\lambda_m}(t)u_{\lambda_m}(t), \frac{du_{\lambda_n}}{dt}(t) - \frac{du_{\lambda_m}}{dt}(t)\Big\rangle + \\ &\quad 2\Big\langle J_{\lambda_n}(t)u_{\lambda_n}(t) - J_{\lambda_m}(t)u_{\lambda_m}(t), \frac{du_{\lambda_n}}{dt}(t) - \frac{du_{\lambda_m}}{dt}(t)\Big\rangle.\end{aligned}$$

De la monotonie de $A(\cdot)$, la relation (3.5), la Proposition 1.2.50 et du fait que

$$-\frac{du_{\lambda_n}}{dt}(t) = A_{\lambda_n}(t)u_{\lambda_n}(t) \in A(t)J_{\lambda_n}(t)u_{\lambda_n}(t), \tag{3.26}$$

il résulte que

$$\Big\langle J_{\lambda_n}(t)u_{\lambda_n}(t) - J_{\lambda_m}(t)u_{\lambda_m}(t), \frac{du_{\lambda_n}}{dt}(t) - \frac{du_{\lambda_m}}{dt}(t)\Big\rangle \leq 0.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u_{\lambda_n}(t) - u_{\lambda_m}(t)\|^2 &\leq 2\Big\langle \lambda_n A_{\lambda_n}(t)u_{\lambda_n}(t) - \lambda_m A_{\lambda_m}(t)u_{\lambda_m}(t), \frac{du_{\lambda_n}}{dt}(t) - \frac{du_{\lambda_m}}{dt}(t)\Big\rangle \\ &= -2\Big\langle \lambda_n\frac{du_{\lambda_n}}{dt}(t) - \lambda_m\frac{du_{\lambda_m}}{dt}(t), \frac{du_{\lambda_n}}{dt}(t) - \frac{du_{\lambda_m}}{dt}(t)\Big\rangle.\end{aligned}$$

Si nous intégrons cette dernière inégalité sur I, il vient

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\|u_{\lambda_n}(t) - u_{\lambda_m}(t)\|^2 dt \leq -2\int_0^T \Big\langle \lambda_n\frac{du_{\lambda_n}}{dt}(t) - \lambda_m\frac{du_{\lambda_m}}{dt}(t), \frac{du_{\lambda_n}}{dt}(t) - \frac{du_{\lambda_m}}{dt}(t)\Big\rangle dt$$

d'où

$$\|u_{\lambda_n}(T) - u_{\lambda_m}(T)\|^2 \leq -2\Big\langle \lambda_n\frac{du_{\lambda_n}}{dt} - \lambda_m\frac{du_{\lambda_m}}{dt}, \frac{du_{\lambda_n}}{dt} - \frac{du_{\lambda_m}}{dt}\Big\rangle_{L^2_H}.$$

Par la suite, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\Big\langle \frac{du_{\lambda_n}}{dt} - \frac{du_{\lambda_m}}{dt}, \lambda_n\frac{du_{\lambda_n}}{dt} - \lambda_m\frac{du_{\lambda_m}}{dt}\Big\rangle_{L^2_H} \leq 0. \tag{3.27}$$

Pour finir, appliquons le Lemme 1.3.11 appliquons à la suite $(z_n = \frac{du_{\lambda_n}}{dt})_n$, on obtient grâce à (3.27) et (3.12), la convergence dans $L^2_H(I)$ de la suite $(\frac{du_{\lambda_n}}{dt})_n$. Soit $v(\cdot)$ sa limite. Posons

$$u(t) = x + \int_0^t v(s)ds.$$

Il reste à prouver que $u = \lim_{n\to\infty} u_{\lambda_n}$ dans $\mathcal{C}_H(I)$. Nous avons, par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
\|u_{\lambda_n}(t) - u(t)\| &= \left\| \int_0^t \frac{du_{\lambda_n}(s)}{ds} ds - \int_0^t v(s)ds \right\| \\
&\leq \int_0^t \left\| \frac{du_{\lambda_n}}{ds}(s) - v(s) \right\| ds \\
&= \int_0^T \left\| \frac{du_{\lambda_n}}{ds}(s) - v(s) \right\| \chi_{[0,t]}(s)ds \\
&\leq \left\| \frac{du_{\lambda_n}}{dt} - v \right\|_{L^2_H} \Big(\int_0^T \chi^2_{[0,t]}(s)ds \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{T} \left\| \frac{du_{\lambda_n}}{dt} - v \right\|_{L^2_H},
\end{aligned}$$

un passage à la limite quand $n \to +\infty$, affirme que

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_{\lambda_n}(t) - u(t)\| = 0 \quad \forall t \in I.$$

Donc $(u_{\lambda_n}(t))_n$ est relativement compacte dans H. Clairement $(u_{\lambda_n})_n$ est équicontinue. En effet, soient $t, s \in I$, $s < t$

$$\begin{aligned}
\|u_n(t) - u_n(s)\| &= \left\| x + \int_0^t \frac{du_n}{d\tau}(\tau)d\tau - x - \int_0^s \frac{du_n}{d\tau}(\tau)d\tau \right\| \\
&= \left\| \int_s^t \frac{du_n}{d\tau}(\tau)d\tau \right\| \\
&\leq \int_s^t \left\| \frac{du_n}{d\tau}(\tau) \right\| d\tau \\
&= \left\| \int_0^t \frac{du_n}{d\tau}(\tau) \right\| \chi_{[s,t]}(\tau)d\tau \\
&\leq \left\| \frac{du_n}{dt} \right\|_{L^2_H} \Big(\int_s^t d\tau \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq K(t-s)^{\frac{1}{2}} \underset{t\to s}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Par le Théorème d'Ascoli-Arzéla, $(u_{\lambda_n})_n$ converge uniformément vers u dans $\mathcal{C}_H(I)$.

Montrons maintenant que $\frac{du}{dt} = v \quad p.p. \quad t \in I$.

Soit pour $t \in I$ $((u_{\lambda_n})_n$ est absolument continue)

$$u_{\lambda_n}(t) = x + \int_0^t \frac{du_{\lambda_n}}{ds}(s)ds.$$

On déduit par le Théorème de convergence dominée de Lebesgue et la relation (3.12)

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} u_{\lambda_n}(t) = x + \int_0^t \lim_{n\to+\infty} \frac{du_{\lambda_n}}{ds}(s)ds = x + \int_0^t v(s)ds.$$

Puisque $u(\cdot)$ est absolument continue, alors $v = \frac{du}{dt}$ p.p. ∎

Proposition 3.0.8. *La fonction u, limite de $(u_{\lambda_n})_n$ dans $\mathcal{C}_H(I)$, vérifie*

$$\begin{cases} u(t) \in D(\partial\varphi(t,\cdot)) \quad et - \frac{du}{dt}(t) \in \partial\varphi(t,u(t)) \quad p.p. \quad t \in I \\ u(0) = x. \end{cases}$$

Démonstration. La condition initiale $u(0) = x$ résulte immédiatement du fait que $u_{\lambda_n}(0) = x$ et de la convergence de $(u_{\lambda_n})_n$ vers u. Démontrons que

$$-\frac{du}{dt}(t) \in \partial\varphi(t,u(t)) \quad p.p. \quad t \in I.$$

Puisque la suite $\left(\frac{du_{\lambda_n}}{dt}\right)_n$ converge vers $\frac{du}{dt}$ dans $L^2_H(I)$, on peut lui en extraire une sous-suite, notée aussi $\left(\frac{du_{\lambda_n}}{dt}(t)\right)_n$ qui converge presque partout vers $\frac{du}{dt}(t)$ dans H.
Pour un tel t nous avons,

$$\begin{cases} u_{\lambda_n}(t) & \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u(t) \\ -\frac{du_{\lambda_n}}{dt}(t) & \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{du}{dt}(t) \quad p.p. \\ -\frac{du_{\lambda_n}}{dt}(t) & = A_{\lambda_n}(t)u_{\lambda_n}(t) \in A(t)J_{\lambda_n}(t)u_{\lambda_n}(t). \end{cases}$$

Si nous montrons que si $n \to \infty$, $J_{\lambda_n}(t)u_{\lambda_n}(t) \to u(t)$, nous pourrons alors, utilisant le fait que $A(t) = \partial\varphi(t,\cdot)$, déduire que

$$u(t) \in D(\partial\varphi(t,\cdot)) \quad et \quad -\frac{du}{dt}(t) \in \partial\varphi(t,u(t)) \quad p.p. \quad t \in I$$

On a par (3.26)

$$\begin{aligned} \|J_{\lambda_n}(t)u_{\lambda_n}(t) - u(t)\| &\leq \|J_{\lambda_n}(t)u_{\lambda_n}(t) - u_{\lambda_n}(t)\| + \|u_{\lambda_n}(t) - u(t)\| \\ &= \lambda_n\|A_{\lambda_n}(t)u_{\lambda_n}(t)\| + \|u_{\lambda_n}(t) - u(t)\| \\ &= \lambda_n\left\|\frac{du_{\lambda_n}}{dt}(t)\right\| + \|u_{\lambda_n}(t) - u(t)\| \\ &\leq \lambda_n\left[\left\|\frac{du_{\lambda_n}}{dt}(t) - \frac{du}{dt}(t)\right\| + \left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|\right] + \|u_{\lambda_n}(t) - u(t)\|. \end{aligned}$$

Passant à la limite quand $n \to +\infty$, on trouve

$$\|J_{\lambda_n}(t)u_{\lambda_n}(t) - u(t)\| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Puisque $\varphi(t, \cdot)$ est propre convexe s.c.i., alors $\partial\varphi(t, \cdot)$ est maximal monotone et donc par la Proposition 1.2.46, $\partial\varphi(t, \cdot)$ est demi fermé.

■

En conclusion la fonction u limite dans $\mathcal{C}_H(I)$ de la suite $(u_{\lambda_n})_n$ vérifie (a),(b),(c) du Théorème 3.0.2. Ceci termine la démonstration du Théorème 3.0.2. ■

CONCLUSION

Notre but dans ce mémoire était d'étudier la fonction proximale qui généralise la notion de projection sur un sous ensemble convexe fermé d'un espace de Hilbert réel.
Pour illustrer ces notions, nous avons présenté un résultat d'existence et d'unicité pour une inclusion différentielle du premier ordre relative à un opérateur sous-différentiel d'une fonction propre convexe s.c.i. dans un espace de Hilbert.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. P. Aubin et A. Cellina. Differential inclusion, set-valued Maps and viability theory, springer-verlag. Berlin Heildelberg, New York Tokyo (1984).

[2] H. Brézis, Analyse fonctionnelle théorie et application, Masson (1993).

[3] H. Brézis, Opérateurs maximaux monotones et semi groupes de contraction dans un espace de Hilbert, North-Holland publishing company Amesterdam London (1973).

[4] V. Barbu. Nonlinear differential equations of monotone types in Banach spaces, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, (2010).

[5] C. Castaing et M.Valadier, Convex Analysis and Measurable Multifunctions, LNM 580, Springer Verlag, Berlin (1977).

[6] M. G. Crandall et A. Pazy. Semi-groups of nonlinear contractions and dissipative sets. J. Funct. Anal. , 3, 376-418, (1969).

[7] M. G. Crandall et T. M. Liggett. Generation of semi-group of nonlinear transformations on general Banach spaces. Amer. J. Math., 93, 265-298, (1971).

[8] M. G. Crandall et A. Pazy. Nonlinear evolution equations in Banach spaces. MRC Technical Summary Report 1191, (1972).

[9] R. V. Jean, Mesure et Intégration. Presses de l'Université du Québec, (1975).

[10] G. J. Minty. Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space, J. Duke math. 29, p. 341-346, (1962).

[11] M.D.P. Monteiro Marques, Differential inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems, Shocks and Dry Friction. Birkhauser, Basel (1993).

[12] J. J. Moreau. Proximité et dualité dans un espace hilbertien. Bull. Soc. Math. France 93, 273-299, (1965).

[13] J. J. Moreau. Rafle par un convexe variable, Séminaire d'analyse convexe, Montpellier Exposé n°15 (1 ère partie) (43 p.), (1971).

[14] J. J. Moreau. Inf-convolution des fonctions numériques sur un espace vectoriel, C. R. Acad. Sc., t.256, p. 5047-5049, (1963).

[15] J. J. Moreau. les liaisons unilatérales et le principe de Gauss, C. R. Acad. Se., t. 256, p. 871-874, (1963).

[16] J. C. Peralba. Un problème d'évolution relatif à un opérateur sous-différentiel dépendant du temps. Séminaire d'analyse convexe, Montpellier, Exposé N°6, (1972).

[17] W. Prager. On elastic, perfectiy locking materials, IBM Research Papers, R.Z. 122, (1964).

[18] J. V. Tiel, convexe Analysis An Introductory Text, wiley New york (1984).

[19] K. Yosida, Functional Analysis. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, (1980).