République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Seddik BenYahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité Mathématiques.

Option Analyse Fonctionnelle.

Thème

Existence de solutions extrêmes pour une classe d'inclusions d'évolution non linéaires du second ordre

par

Bouridane Mouna

Soutenu le **17/07/2021**

Devant le jury

Président	W. Boukrouk	M.C.B Université de Jijel
Encadreur	A. Makhlouf	M.C.B Université de Jijel
Examinateur	M. Benguessoum	M.C.B Université de Jijel

Promotion **2020/2021**

Remerciements

Avant tous, je remercie ***Allah*** le tout puissant qui m'a guidé tout au long de ma vie, qui m'a permis de m'instruire et d'arriver aussi loin dans les études, qui m'a donné courage et patience pour traverser tous les moments difficiles, et qui m'a permis d'achever ce travail.

Je remercie vivement mon encadreur Madame ***Amira Makhlouf***, Maître de Conférence à l'université de Jijel, d'avoir voulu proposer le sujet et assurer la direction de ce mémoire. Ses conseils multiformes et la richesse de ses connaissances m'ont permis de mener à bien ce travail. Cette direction s'est caractérisée par une grande patience, une disponibilité permanente, des conseils abondants, un support et un suivi continus dans le but de mettre ce projet sous sa forme finale.

Je remercie Madame ***W. Boukrouk***, Maitre de conférence à l'université de Jijel, d'avoir accepté la présidence du jury de notre travail, qu'elle trouve ici toutes mes expressions respectueuses.

Je remercie Madame ***M. Benguessoum*** Maitre de conférence à l'université de Jijel, de nous avoir fait l'honneur de faire partie des membres du jury et d'examiner ce travail. je tiens à vous remercier.

Je tiens à remercier Monsieur ***B. Bensouilah***, le chef de département de mathématique, et tous les enseignants pour ses intérêts constants dans ses empressements à fournir les conditions pour la collecte des meilleurs résultats.

Mouna

Dédicace

Je dédie ce travail de fin d'études :

A mon cher père ***Hafid*** ;
A ma chère mère ***Fatima*** ;
Qui m'ont soutenu et encouragé pendant ces années d'études.

A mes frères ***Aymen***, ***Oussama*** et mes sœurs ***Amira***, ***Nihad***, ***Madjda Anfal*** qui m'ont toujours encouragé, et à qui je vous souhaite plus de succès, de joie et de bonheur.

A mes chères amies, ***Nadjiba***, ***Roufia***, ***Messeouda***, ***Malak***, ***Souad***, ***Souhila***, ***Salima***, ***Rania***. Elles n'ont cessé de consentir pour moi, par leur encouragement et leur profonde affection. Qu'elles m'ont donné l'avantage de me consacrer entièrement et uniquement à mes études. Je vous souhaite du fond de mon cœur une belle vie plein de joie, de bonheur et de succès.

A toute ma famille,

A toute personne que j'ai une place dans son cœur que je connais, j'estime et j'aime.

A tout qui m'aiment et que j'aime.

Que dieu nous garde si tendres et aimantes les une envers les autres.

Mouna

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

L'étude de problème de mathématique ou de physique conduit souvent à la résolution d'équations et d'inclusions différentielles, d'où l'importance de cette branche en mathématiques.

Objectif du mémoire

Dans ce mémoire on s'intéresse à étudier de l'existence de solutions extrêmes pour une classe d'inclusions différentielles non linéaire du second ordre dans un espace de Hilbert séparable H de la forme

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases} \ddot{u}(t) + A(t, \dot{u}(t)) + Bu(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)), & p.p\ sur\ I \\ u(0) = u_0,\ \dot{u}(0) = v_0, \end{cases}$$

où $F : I \times H \times H \to H$ est une multi-application à valeurs non vide, fermées et non convexe vérifiant certaines conditions, $A : D(A) \subset I \times H \rightrightarrows H$ est un opérateur monotone et B est un opérateur auto-adjoint. Aussi on établi des relation entre les solutions de l'inclusion $(\mathcal{P}_F)$ et les inclusions suivante : l'inclusion différentielle convexifiée

$$(\mathcal{P}_{\overline{co}(F)})\begin{cases} \ddot{u}(t) + A(t, \dot{u}(t)) + Bu(t) \in \overline{co}(F(t, u(t), \dot{u}(t))), & p.p\ sur\ I \\ u(0) = u_0,\ \dot{u}(0) = v_0 \end{cases}$$

et l'inclusion différentielle extrémale

$$(\mathcal{P}_{ext(\overline{co}(F))})\begin{cases} \ddot{u}(t) + A(t, \dot{u}(t)) + Bu(t) \in ext(\overline{co}(F(t, u(t), \dot{u}(t)))), & p.p\ sur\ I \\ u(0) = u_0,\ \dot{u}(0) = v_0. \end{cases}$$

Historique

Nous commençons par introduire un aperçu sur les inclusions différentielles existant dans la littérature [30], [10] et [37].

L'inclusion différentielle est une généralisation de la notion d'équation différentielle ordinaire. Par conséquent, tous les problèmes envisagés pour les équations différentielles, à savoir l'existence de solutions, la continuation des solutions, la dépendance à des conditions et paramètres initiaux, sont présents dans la théorie des inclusions différentielles. Cette théorie est relativement ancienne. Elle repose sur les travaux des pionniers comme G. Bouligand (1932), P. Painlevée (1863-1933) et H. Marchaud (1938). Mais cette théorie ne redevient à la mode qu'avec les travaux d'une école polonaise autour de T. Wazewski (1961) qui a montré comment poser un problème de contrôle optimal dans le carde des inclusions différentielles. Depuis, le champs s'est considérablement élargi et les applications de cette théorie touchent de très nombreux domaines tels que la mécanique, le génie électrique, la biologie médicale, l'écologie, etc. (Abbas et Mouffak, 2013 ; Balasubramaniam, 2002). Il existe de nombreux problèmes appliqués en mathématiques qui incitent le lecteur à étudier des systèmes dynamiques dont les vitesses ne sont pas uniquement déterminées par l'état du système mais qui en dépendent vaguement.

Filippov (1988) a systématisé la théorie des inclusions différentielles et a introduit les principales propriétés des inclusions différentielles. En effet, il existe une littérature abondante concernant les inclusions différentielles (Voir Aubin et Cellina [2] ; Hu et Papageorgiou [24] ; Deimling [16]).

Les inclusions différentielles et d'évolution du coté droit fermé non convexe ont fait l'objet de l'attention de nombreux chercheurs. De nombreuses publications dans ce thème sont principalement consacrés aux questions d'existence et de densité de l'ensemble des solutions de l'inclusion du coté droit non convexe $F(t,x)$ dans l'ensemble des solutions de l'incluions du coté droit convexe $\overline{co}(F(t,x))$ où $\overline{co}(F(t,x))$ désigne l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble $F(t,x)$, un grand nombre de publications (voir, par exemple, [34],[3] et autres) sont consacrées à l'existence et la densité de l'ensemble des solutions de différentes classes d'inclusions du coté droit $ext(\overline{co}(F(t,x)))$ dans l'ensemble des solutions d'une inclusion du coté droit convexe $\overline{co}(F(t,x))$, où $ext(\overline{co}(F(t,x)))$ est l'ensemble de tous les points extrémaux de l'ensemble $\overline{co}(F(t,x))$. Cette dernière propriété est généralement appelée le principe de "Bang-bang" pour les trajectoires [34], [28]. Dans beaucoup de ces publications les preuves sont basées sur les premiers résultats de Tolstonogov dans [34] et

[35] sur les sélections extrêmes continues des multi-applications. Les auteurs de ces publication voient que lorsqu'on considère des inclusions du coté droit non convexe $F(t,x)$, il est plus naturel d'étudier des inclusions du coté droit $F(t,x) \cap ext(\overline{co}(F(t,x)))$, puisque l'ensemble $ext(\overline{co}(F(t,x)))$ est déterminé par l'ensemble $\overline{co}(F(t,x))$ et l'ensemble $F(t,x)$ est essentiellement non revendiqué. De plus, dans le cas général $ext(\overline{co}(F(t,x))) \not\subseteq F(t,x)$. L'étude des inclusions du coté droit $F(t,x) \cap ext(\overline{co}(F(t,x)))$ peut être fait en utilisant les résultats de [32] et [40] sur l'existence et les propriétés topologiques des sélections extrêmes continues des multi-applications. Ce problème pour les inclusions d'évolution du premier ordre a été considéré dans le travail [36].

Présentation du travail

On présente le travail de Tolstonogov [38], où il donne des théorèmes d'existence de solutions pour les problèmes $(\mathcal{P}_F)$,$(\mathcal{P}_{\overline{co}(F)})$ et $(\mathcal{P}_{ext(\overline{co}(F))})$. Ainsi que des approximations des solutions de l'inclusion convexifiée $(\mathcal{P}_{\overline{co}F})$ par les solutions des inclusions $(\mathcal{P}_F)$ et $(\mathcal{P}_{ext(\overline{co}(F))})$. Cette propriété est appelé relaxation. Notons qu'on a fait des petits changements concernant les espaces pour simplifier les démonstrations.

Tolstonogov, dans son papier [38], s'est intéressé par l'existence de solutions pour les inclusions d'évolution du second ordre avec un coté droit non convexe $(\mathcal{P}_F)$. Il a donnée attention à l'existence de solutions extrêmes [33] qui ne se pas seulement les solution de l'inclusion différentielle convexifiée $(\mathcal{P}_{\overline{co}(F)})$, mais aussi ce sont des solution de l'inclusion d'origine $(\mathcal{P}_F)$. Il montré que, sous des hypothèses appropriées, un tel ensemble de solutions est dense et co-dense dans l'ensemble de solutions d'inclusion différentielle convexifiée.
L'hypothèse de base sur la perturbation F est la Lipschitzité par rapport aux deuxième et troisième variables, c'est à dire

$$\mathcal{H}(F(t,x_1,y_1),F(t,x,y)) \leq k(t)(\|x_1-x\|+\|y_1-y\|)$$

$t \in I$, $(x,x_1),(y,y_1) \in H^2$ où $\mathcal{H}$ est la distance de Hausdorff sur l'espace des ensembles non vides et fermés et $k(.)$ est une fonction intégrable sur $[0,1]$. Ces études sont basé sur le théorème du point fixe de Schauder-Tikhonov et la théorie des sélections continues d'une multi-application à valeurs décomposables.
Les resultats du travail de Tolstonogov [38] complètent et généralisent les résultats de Tolstonogov dans [36], concernant les inclusions différentielles du premier ordre, aux inclusions différentielles du second ordre.

Organisation de mémoire

Ce mémoire se compose de trois chapitres.
Dans le premier chapitre, on introduit des définitions, des lemmes et quelques théorèmes qui sont utilisés le long de ce mémoire.
Dons le deuxième chapitre, on étudie l'existence de solutions pour les inclusions différentielles de second ordre.
Le troisième chapitre est composé de deux parties présentant des théorèmes de relaxation.

CHAPITRE 1

NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES

On commence par ce chapitre, dans lequel nous précisons nos notations et nous rappelons certains définitions, propositions et théorèmes dont on aura besoin tout au long de ce mémoire.

1.1 Notations générales

On note

- $I = [0, 1]$ l'intervalle unité de $\mathbb{R}$.

Soit X un ensemble. On note

- $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.
- (X, τ) un espace topologique.
- (X, d) un espace métrique.
- (X, Σ) un espace mesurable.
- (X, Σ, μ) un espace mesuré.
- $\mathcal{L}(I)$ la tribu sur I des ensembles mesurables au sens de Lebesgue et dans ce cas μ est la mesure de Lebesgue.
- $\mathcal{B}(X)$ la tribu Borélienne sur X.

- $\mathcal{P}_{cl}(X)$ l'ensemble des parties fermées de X.
- $\mathcal{P}_k(X)$ l'ensemble des parties compactes de X.
- $X\backslash A$ le complémentaire de A dans X.

Soit (X, d) un espace métrique. On note

- B_X la boule unité ouverte de X.
- $\overline{B}_X$ la boule unité fermée de X.

Soit E un espace de Banach, alors on note

- E' sont dual topologique, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ leur produit de dualité, $\| \cdot \|$ la norme de E et $\| \cdot \|_*$ la norme de E'.
- $C(I, E)$ l'espace de Banach de toutes les applications continues définies sur I à valeurs dans E muni de la norme $\|f(\cdot)\|_C = \sup\limits_{t \in I} \|f(t)\|$.
- $L^p(I, E)$ ($p \in [1, +\infty[$) l'espace de Banach de toutes les applications p-intégrables au sens de Bochner définies sur I à valeurs dans E muni de la norme

$$\|f(.)\|_p = \Big(\int_I \|f(t)\|^p dt \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

- $L^\infty(I, E)$ l'espace des applications $u : I \to E$ essentiellement bornée sur E.
- $co(D)$ l'enveloppe convexe de $D \subset E$.
- $\overline{co}(D)$ l'enveloppe convexe fermée de D.
- $W^{1,2}(I, E)$ l'espace des applications $u : I \to E$ de $L^2(I, E)$ ayant une dérivée faible dans $L^2(I, E)$ muni de la norme $\|u\|_{W^{1,2}} = \|u\|_2 + \|\dot{u}\|_2$.
- $AC^{1.2}(I, E)$ l'espace des applications absolument continues et dérivables $f : I \to E$ ayant une dérivée dans $L^2(I, E)$ presque partout.
- $\sigma(E, E')$ est la topologie faible sur E.
- $\sigma(E', E)$ est la topologie faible* sur E'.
- $w - E$ l'espace E muni de la topologie faible.
- S_F l'ensemble de toutes les sélections mesurables de la multi-application $F : I \rightrightarrows E$.
- S_F^p l'ensemble de toutes les L^p-sélections de la multi-application $F : I \rightrightarrows E$.
- $\to$ signifie la convergence forte dans E.
- $\rightharpoonup$ signifie la convergence faible dans E.

  Soit $D \in E$. On note par

- $|D|$ le nombre positive donné par $|D| = \sup\limits_{x \in D} \|x\|$.

- $1\!\!1_D : E \to \mathbb{R}$ la fonction caractéristique d'une partie $D \subset E$ d'un ensemble donné, définie par

$$1\!\!1_D(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in D; \\ 0 & si\ x \notin D, \end{cases}$$

- $\delta(., D)$ la fonction indicatrice de l'ensemble $D \subset E$, définie par

$$\delta(x, D) = \begin{cases} 1 & si\ x \in D; \\ 0 & si\ x \notin D. \end{cases}$$

- $\delta^*(., D)$ la fonction polaire de $\delta(., D)$, appelée aussi fonction d'appui de D, définie sur E' par

$$\delta^*(x', D) = \sup_{x \in D} \langle x', x \rangle, \forall x' \in E'.$$

On note par H un espace de Hilbert muni de la norme $\|.\|$ et du produit scalaire $\langle ., . \rangle$.

1.2 Mesurabilité

Les résultats de cette section sont pris de la référence [7].

Définition 1.2.1. *Soient X un ensemble non vide, Σ une famille de sous ensembles de X. Alors Σ est dite **tribu** sur X si*

1. $\emptyset \in \Sigma$;
2. $A \in \Sigma \Rightarrow X \setminus A \in \Sigma$;
3. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

- *Le couple (X, Σ) est appelé **espace mesurable**, et les éléments de Σ sont **appelés ensembles mesurables**.*
- *Si X est un espace topologique, la tribu Borélienne sur X notée par $\mathcal{B}(X)$, est la plus petite tribu contenant la topologie de X.*

Définition 1.2.2. *Soient $(X_1, \Sigma_1), (X_2, \Sigma_2)$ deux espaces mesurables et f une application définie sur X_1 a valeurs dans X_2. On dit que f est (Σ_1, Σ_2)**-mesurables** si pour tout $A \in \Sigma_2$, $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$.*
*Si X_2 est un espace topologique, une fonction $(\Sigma_1, \mathcal{B}(X_2))$-mesurable est dite **fonction Borélienne** ou Σ_1**-mesurable**.*

Définition 1.2.3. *Soit* (X, Σ) *un espace mesurable et* Y *un espace métrique. Alors, une application* $f : X \longrightarrow Y$ *est dite* ***fortement mesurable*** *ou* ***Bochner mesurable*** *si* f *est* Σ*-mesurable et* $f(X)$ *est séparable.*

Proposition 1.2.4. *Soient* X_1 *et* X_2 *deux espaces topologiques et* $f : X_1 \to X_2$ *une application. Si* f *est continue alors* f *est* $\mathcal{B}(X_1)$*-mesurable.*

Définition 1.2.5. *Soit* (X, Σ) *un espace mesurable. Alors l'application* $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ *est dite* ***mesure*** *si*

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$, *pour toute suite dénombrable* (A_n) *d'éléments de* Σ *deux à deux disjoints.*

- *Le triple* (X, Σ, μ) *est appelé* ***espace mesuré****.*
- *Si* $\mu(A) \geq 0$, *pour tout* $A \in \Sigma$, *on dit que* μ *est une* ***mesure positive*** *et on note* $\mu \geq 0$, *ou que l'espace* (X, Σ, μ) *est positif.*
- *Si* $\mu(A) < \infty$, *pour tout* $A \in \Sigma$, *on dit que* μ *est une* ***mesure finie*** *ou que l'espace* (X, Σ, μ) *est fini.*
- *Si* X *est un espace topologique, la mesure* $\mu : \mathcal{B}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ *est appelée* ***mesure Borélienne****.*

Définition 1.2.6. *Soit* X *un espace topologique séparé et* μ *une mesure Borélienne. Alors* μ *est dite* ***régulière*** *si pour tout* $A \in \mathcal{B}(X)$ *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un ouvert* O *et un fermé* V *de* X, *tels que* $V \subset A \subset O$ *et* $\mu(O \backslash V) \leq \varepsilon$.
Une mesure borélienne finie et régulière est appelée mesure de ***Radon****.*

Définition 1.2.7. *Soient* (X, Σ, μ) *un espace mesuré avec* $\mu \geq 0$ *et* A *un sous ensemble de* X *tel que* $A \in \Sigma$. *On dit que* A *est* μ***-négligeable*** *ou* ***négligeable*** *(s'il n'y a pas de confusion), s'il existe* $C \subset X$ *tel que* $A \subset C$ *et* $\mu(C) = 0$.

- *On dit qu'une propriété sur* X *est vraie* μ***-presque partout*** *(*μ*.p.p.), si l'ensemble où elle n'est pas vérifiée est* μ*-négligeable.*
- *La tribu* μ*-complète de* Σ *notée* Σ_μ *est la tribu engendrée par* Σ *et les ensembles* μ*-négligeables, c'est à dire*
$$\Sigma_\mu = \{A \cup Z : \; A \in \Sigma \text{ et } Z \text{ ensemble } \mu - \text{négligeable}\}.$$
- *La tribu* Σ *est dite* ***complète*** *si* $\Sigma = \Sigma_\mu$, *c'est à dire, si tout ensemble* μ*-négligeable appartient à* Σ.

Définition 1.2.8. *Soient* (T, Σ) *un espace mesurable,* X *et* Y *deux espaces métriques et soit* $f : T \times X \to Y$ *une application.*

*On dit que f est de **Carathéodory** si elle est mesurable par rapport à t et continue par rapport à x, c'est à dire pour tout $x \in X$ fixé l'application*

$$\begin{aligned} f_x :& T \to Y \\ & t \mapsto f_x(t) = f(t,x) \end{aligned}$$

est Σ-mesurable, et pour tout $t \in T$ fixé l'application

$$\begin{aligned} f_t :& X \to Y \\ & x \mapsto f_t(x) = f(t,x) \end{aligned}$$

est continue.
*On dit aussi que f est **séparément mesurable, séparément continue**.*

Lemme 1.2.9. *Soient (T,Σ) un espace mesurable, X un espace métrique séparable et Y un espace métrique et soit $f : T \times X \to Y$ une application de Carathéodory. Alors f est $\Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$-mesurable (ici, $T \times X$ est muni de la tribu engendrée par les ensembles $C \times D$ ou $C \in \Sigma$ et $D \in \mathcal{B}(X)$).*

Définition 1.2.10. (Tribu de Lebesgue).
La tribu de Lebesgue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ notée $\mathcal{L}(I)$ est la tribu μ-complète de la tribu borélienne $\mathcal{B}(I)$ pour la mesure de Lebesgue.

Définition 1.2.11. *(Voir [38]) Soit $C \in \mathcal{L}(I)$ et $t \in I$. Si*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mu(C \cap [t,t+h])}{h} = 1,$$

*alors le point t est dit le **point de densité droite** de C.*

Proposition 1.2.12. *(Voir [38]) Presque tout $t \in C$ est un point de densité droite de C.*

Définition 1.2.13. (Fonction simple).
*Soient (X,Σ) un espace mesurable, Y un espace de Banach et $f : X \to Y$ une application. On dit que f est une **fonction simple** si elle est de la forme*

$$f = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{I}_{A_i} y_i,$$

où les $A_i = f^{-1}(y_i), i \in \{1,\cdots,n\}$, sont des éléments deux à deux disjoints de Σ et les y_i, $i \in \{1,\cdots,n\}$, sont des éléments distincts de Y .
*Cette formule est appelée **la représentation canonique** de f.*

Proposition 1.2.14. *Soient* (X, Σ) *un espace mesurable et* $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite de fonctions mesurables définies sur* X *à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *Si* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge simplement vers* f *alors* f *est mesurable.*

Théorème 1.2.15. *Soit* (X, Σ, μ) *un espace mesuré fini et* E *un espace de Banach séparable. Si* $f : X \to E$ *est mesurable, alors il existe une suite* $(f_n)_{n\geq 1}$ *de fonctions simples qui converge* μ*-presque partout tout vers f, et pour* μ*-presque tout* $x \in E$,

$$\|f_n(x)\| \leq \|f(x)\| \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

1.3 Quelques notions de continuité

Les résultats de cette section sont pris des références [6], [19] et [31].

Définition 1.3.1. *Soit* X *un espace topologique et soit* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. *Alors* f *est dite* ***semi-continue inférieurement*** *(s.c.i) au point* $x_0 \in X$ *si et seulement si*

$$\forall a \in \mathbb{R},\ a < f(x_0),\ \exists V \in V(x_0) \text{ tel que } a < f(x),\ \forall x \in V.$$

Définition 1.3.2. *Soit* X *un espace topologique et soit* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. *Alors* f *est dite* ***semi-continue supérieurement*** *(s.c.s) au point* $x_0 \in X$ *si et seulement si*

$$\forall a \in \mathbb{R},\ a > f(x_0),\ \exists V \in V(x_0) \text{ tel que } a > f(x),\ \forall x \in V.$$

Remarque 1.3.1. *Soit* X *un espace topologique et soit* $x_0 \in X$. *Si* $f : X \to \mathbb{R}$, *alors*

1. f *est s.c.i au point* x_0 *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V_{x_0} \in v(x_0),\ \forall x \in V_{x_0} \Rightarrow f(x) - f(x_0) > -\varepsilon;$$

2. f *est s.c.s au point* x_0 *si, et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V_{x_0} \in v(x_0),\ \forall x \in V_{x_0} \Rightarrow f(x) - f(x_0) < \varepsilon;$$

3. f *est continue au point* x_0 *si, et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V_{x_0} \in v(x_0),\ \forall x \in V_{x_0},\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Définition 1.3.3. *Soient* X *un espace topologique et* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. *Alors* f *est continue au point* x_0 *si et seulement si* f *est s.c.i et s.c.s au point* $x_0 \in X$.

Définition 1.3.4. *Soient X un espace topologique, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ et soit $x_0 \in X$ alors*

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) = \sup_{V \in v(x_0)} \inf_{x \in V} f(x);$$

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) = \inf_{V \in v(x_0)} \sup_{x \in V} f(x).$$

Proposition 1.3.5. *Soit (X, d) un espace métrique et soit $f : X \to \mathbb{R}$. Alors*

$$f \text{ est s.c.i au point } a \Leftrightarrow \liminf_{x \to a} f(x) \geq f(a),$$

$$f \text{ est s.c.s au point } a \Leftrightarrow \limsup_{x \to a} f(x) \leq f(a).$$

Proposition 1.3.6. *Soient X un espace topologique et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes,*

1. *f est s.c.s. sur X;*
2. *les ensembles $\{x \in X : f(x) \geq \lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ sont fermés.*

Définition 1.3.7. *Soient (X_1, τ_1), (X_2, τ_2) deux espaces topologiques et $f : X_1 \to X_2$ une application.*
L'application f est dite ***séquentiellement continue*** *en $x \in X_1$, si pour toute suite $(x_n) \subset X_1$ telle que $x_n \to x$ on a $f(x_n) \to f(x)$.*
L'application f est dite ***séquentiellement continue*** *sur X_1 si elle séquentiellement continue en tout point de X_1.*

Proposition 1.3.8. *Soient X_1, X_2 deux espaces métriques. Alors la continuité séquentiellemnt est équivalente à la continuité.*

1.4 Fonctions intégrables au sens de Bochner

Les résultats de cette section sont pris des références [20] et [28].
Soient (X, Σ, μ) un espace mesuré fini et E un espace de Banach.

Définition 1.4.1. *Si $f : X \to E$ est un application simple avec $f = \sum_{i=0}^{n} y_i 1\!\!1_{A_i}$, où $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont données comme dans la définition 1.2.13, alors* ***l'intégrale de Bochner*** *de f est définie par*

$$\int_X f(t) d\mu(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i \mu(A_i).$$

Cette définition est indépendante des représentations.

Définition 1.4.2. *Une application μ-mesurable $f : X \to E$ est dite* ***intégrable au sens de Bochner****, s'il existe une suite de fonctions simples $(f_n)_{n\geq 1}$ telle que $f_n \to f$ μ p.p, $\| f_n - f \|$ est intégrable au sens de Lebesgue et*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X \| f_n - f \| \, d\mu = 0,$$

où

$$\begin{aligned} \|f\| &: X \to \mathbb{R} \\ &\quad x \mapsto \|f\|(x) = \|f(x)\|. \end{aligned}$$

On pose alors

$$\int\limits_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu.$$

Dans ce cas $\int\limits_A f d\mu$ *est définie pour tout* $A \in \Sigma$ *par* $\int\limits_A f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu.$

Théorème 1.4.3. *Une application μ-mesurable $f : X \to E$ est dite* ***intégrable au sens de Bochner*** *si et seulement si* $\int\limits_X \|f\| d\mu < \infty.$

Corollaire 1.4.4. *Si $f : X \to E$ est une fonction intégrable au sens de Bochner et $A \in \Sigma$, alors*

$$\Big\| \int\limits_A f(x) d\mu \Big\| \leq \int\limits_A \|f(x)\| d\mu.$$

Théorème 1.4.5. *Soit $f : X \to E$ une application intégrable au sens de Bochner et soit G une application linéaire continue de E à valeurs dans F, où F est un espace de Banach. Alors Gf est une application intégrable au sens de Bochner à valeurs dans F, et on a*

$$G\Big(\int\limits_X f(x) d\mu \Big) = \int\limits_X Gf(x) d\mu.$$

En particulier, si $x' \in E'$ et $f : X \to E$ une application intégrable au sens de Bochner, alors $x \mapsto \langle f(x), x' \rangle$ est intégrable et

$$\Big\langle \int\limits_X f(x) d\mu, x' \Big\rangle = \int\limits_X \langle f(x) d\mu, x' \rangle.$$

1.5 Quelques résultats de convergence

Les résultats de cette section sont pris de la référence [17].

Théorème 1.5.1 (**Théorème de la convergence dominée de Lebesgue**).
Soit E un espace de Banach, soit $1 \leq p < +\infty$ et (f_n) une suite d'applications mesurables définies sur I à valeurs dans E. Si la suite (f_n) vérifie

(i) $f_n \to f$ *p.p. sur* I,

(ii) il existe une fonction positive $g \in L^p(I, \mathbb{R})$ *telle que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n(t)\| \leq g(t)$ *p.p.*

Alors $f_n \to f$ *dans* $L^p(I, E)$*. En particulier, dans le cas* $p = 1$,

$$\int_I f_n(t)dt \to \int_I f(t)dt.$$

Théorème 1.5.2 (**Réciproque de la convergence de Lebesgue**).
Soit E un espace de Banach. Soit $1 \leq p < +\infty$ et (f_n) une suite d'applications mesurables définies sur I à valeurs dans E. Si $f_n \to f$ dans $L^p(I, E)$ alors il existe (f_{n_k}) une sous suite extraite de (f_n) et une fonction positive $g \in L^p(I, \mathbb{R})$ telles que

(i) $f_{n_k} \to f$ *p.p,*

(ii) pour tout k, $\|f_{n_k}(t)\| \leq g(t)$ *p.p.*

Lemme 1.5.3. *(***Lemme de Fatou***)*
Pour toute suite $(f_n)_n$ d'applications mesurables sur I à valeurs dans $[0, +\infty]$, la limite inférieure (resp. supérieure) de la suite $(f_n)_n$ est mesurable et l'on a

$$\int_I \liminf_{n\to+\infty} f_n(t)dt \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)dt$$

(resp.

$$\int_I \limsup_{n\to+\infty} f_n(t)dt \geq \limsup_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)dt.$$

L'égalité n'est en général pas vérifiée.

1.6 Quelques résultats d'analyse convexe

Les résultats de cette section sont pris des références [5] et [6].

Définition 1.6.1. *On dit qu'une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est* ***convexe*** *si pour tout $x, y \in I$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$*

$$\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y),$$

et on dit qu'elle est ***strictement convexe*** *si pour tout $x, y \in I$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$*

$$\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y).$$

Définition 1.6.2. (Ensembles convexes).
Soit E un espace vectoriel, et soit $A \subset E$. On dit que A est ***un ensemble convexe*** *si et seulement si*

$$\forall u, v \in A, \forall \lambda \in [0,1] : \lambda u + (1-\lambda)v \in A.$$

Autrement dit, pour tout $u, v \in A$, le segment de droite

$$[u,v] = \{\lambda u + (1-\lambda)v : \lambda \in [0,1]\} \subset A.$$

Définition 1.6.3. (Le simplexe de $\mathbb{R}^n$).
On appelle ***Simplexe de*** $\mathbb{R}^n$ *l'ensemble Δ_n défini par*

$$\Delta_n = \Big\{(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\Big\}.$$

Définition 1.6.4. *Soit E un espace vectoriel et soient $x_1, x_2, ..., x_n \in E$. On appelle* ***combinaison convexe*** *des éléments $x_1, x_2, ..., x_n$ tout élément x qui s'écrit comme suit*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \text{ tels que } (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \Delta_n.$$

Proposition 1.6.5. *Soit E un espace vectoriel, et soit $A \subset E$. On dit que A est convexe si et seulement s'il contient toutes les combinaisons convexes de ces éléments.*

Définition 1.6.6. *Soient E un espace vectoriel et $A \subset E$. On appelle* ***enveloppe convexe de*** *A qu'on note $co(A)$, l'intersection de tous les sous ensembles convexes de E contenant A, c'est en fait le plus petit convexe qui contient A. Si E est un espace vectoriel topologique, on appelle* ***enveloppe convexe fermée de*** *A qu'on note $\overline{co}(A)$ le plus petit convexe fermé de E contenant A.*

Proposition 1.6.7. *Soient E un espace vectoriel, $A, B \subset E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1. $co(\alpha.A) = \alpha co(A)$.
2. $co(A+B) = co(A) + co(B)$.
   Si E un espace vectoriel topologique, alors
3. *Si A est un sous ensemble convexe de X alors $\overline{A}$ et $\mathring{A}$ le sont aussi.*
4. $\overline{co}(A) = \overline{co(A)}$.
5. $\overline{co}(\alpha A) = \alpha \overline{co}(A)$.

1.7 Topologies faible et faible*

Les résultats suivants sont pris des références [6] et [12].
Soient X un ensemble, I un ensemble quelconque et soit $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Pour chaque $i \in I$ on se donne une application $\varphi_i : X \to Y_i$. Le problème posé est de munir X par une topologie τ la moins fine (avec le minimum d'ouverts) qui rend continues toutes les applications $(\varphi_i)_{i\in I}$.

Proposition 1.7.1. *Soit τ l'ensemble des parties de X de la forme*

$$\bigcup_{j\in J} \bigcap_{i\in F_j} \varphi_i^{-1}(U_i),$$

où U_i est un ouvert quelconque de Y_i, F_j est un sous ensemble fini d'indices quelconque de I et J est un ensemble quelconque. Alors, τ définit une topologie sur X. De plus, τ est la topologie la moins fine sur X qui rend continues toutes les applications $\varphi_i(i \in I)$.

1.7.1 Topologie faible

Soient E un espace de Banach et E' son dual topologique, c'est à dire

$$E'= \{f : E \to \mathbb{R},\ f \text{ linéaire continue}\} = \mathscr{L}(E, \mathbb{R}),$$

muni de la norme

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x\in \overline{B}_E} | \langle f, x\rangle |= \sup_{x\in E\setminus\{0_E\}} \frac{|\langle f, x\rangle|}{\|x\|}.$$

Définition 1.7.2. *Soit $f \in E'$ et soit*

$$\begin{aligned}\varphi_f : E &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \varphi_f(x) = f(x) := \langle f, x\rangle.\end{aligned}$$

*Lorsque f d'écrit E', nous obtenons une famille d'applications $(\varphi_f)_{f\in E'}$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle **la topologie faible** sur E, la topologie la moins fine sur E rendant les applications $(\varphi_f)_{f\in E'}$ continues et on la note $\sigma(E, E')$.*
On note $w - E$, l'espace E muni de la topologie faible.

Proposition 1.7.3. *La topologie faible $\sigma(E, E')$ est séparée.*

Remarque 1.7.1.

1. *E étant un espace de Banach, donc E est muni d'une norme (c'est à dire d'une distance) et donc on définit la topologie associée à cette norme, cette topologie sera dite* ***topologie forte****.*
2. *Les ouverts (resp. fermés) faibles (pour $\sigma(E, E')$) sont aussi des ouverts (resp. fermés) pour la topologie forte.*

Proposition 1.7.4. *Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de E.*

1. *La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers x pour $\sigma(E, E')$ (ou faiblement) si et seulement si $(\langle f, x_n\rangle)_{n\geq 1}$ converge vers $\langle f, x\rangle$ pour tout $f \in E'$.*
2. *Si $(x_n)_{n\geq 1}$ converge fortement vers x, alors $(x_n)_{n\geq 1}$ converge faiblement vers x.*
3. *Si $(x_n)_{n\geq 1}$ converge faiblement vers x alors $(\|x_n\|)_{n\geq 1}$ est bornée et nous avons*
$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$
4. *Si $(x_n)_{n\geq 1}$ converge faiblement vers x et $(f_n)_{n\geq 1}$ converge fortement vers f dans E', alors $(\langle f_n, x_n\rangle)_{n\geq 1}$ converge vers $\langle f, x\rangle$.*

Proposition 1.7.5. *Lorsque E est de dimension finie, la topologie forte de E et la topologie faible $\sigma(E, E')$ coïncident. En particulier, une suite $(x_n)_{n\geq 1} \subset E$ converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.*

Théorème 1.7.6. *Soit K un sous ensemble convexe de E. Alors K est faiblement fermée si et seulement si K est fortement fermé.*

1.7.2 Topologie faible*

Soit E un espace de Banach, E' son dual topologique et E'' son bidual (c'est à dire le dual de E') ;

$$E''= \{\zeta : E' \to \mathbb{R},\ \zeta \text{ linéaire continue}\},$$

muni de la norme $\|\zeta\|_{E''} = \sup\limits_{f\in\overline{B}_{E'}} |\langle \zeta, f\rangle|$.
Il existe une injection canonique $J : E \to E''$. En effet, pour tout $x \in E$ fixé, l'application

$$\begin{aligned} J_x : E' &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto J_x(f) = \langle f, x\rangle, \end{aligned}$$

est linéaire continue sur E', c'est à dire, J_x est un élément de E'', et

$$J : E \to E''$$
$$x \mapsto J(x) = J_x,$$

est linéaire continue, de plus, elle est une isométrie, et on a

$$\langle J, f\rangle_{E'',E'} = \langle f, x\rangle_{E',E} \ \forall x \in E, \forall f \in E'.$$

Sur l'espace E' sont définies déjà deux topologies :

– La topologie forte associée à la norme de E' ($\|f\|_{E'} = \sup_{f \in \overline{B}_{E'}} |\langle f, x\rangle|$).

– La topologie faible $\sigma(E', E'')$.

On définit une troisième topologie sur E' qu'est **la topologie faible***, définie comme suit.

Définition 1.7.7. *La topologie faible* sur E' est la topologie la moins fine sur E' qui rend continues toutes les applications $(J_x)_{x\in E}$. On la note $\sigma(E', E)$.*

Proposition 1.7.8. *Soit E un espace de Banach. La topologie faible* $\sigma(E', E)$ est séparée.*

Proposition 1.7.9. *Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de E'. Alors*

1. *la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers f pour $\sigma(E', E)$ (ou faiblement*) si et seulement si $(\langle f_n, x\rangle)_{n\geq 1}$ converge vers $\langle f, x\rangle$ pour tout $x \in X$;*
2. *si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge fortement vers f, alors $(f_n)_{n\geq 1}$ converge faiblement* vers f ;*
3. *si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers f pour $\sigma(E', E)$, alors $(\|f_n\|_{E'})_n$ est bornée et nous avons*
$$\|f\|_{E'} \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|;$$
4. *si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers f pour $\sigma(E', E)$ et $(x_n)_{n\geq 1}$ converge fortement vers x dans E alors $(\langle f_n, x_n\rangle)_{n\geq 1}$ converge vers $\langle f, x\rangle$.*

Théorème 1.7.10. *Soit E un espace de Banach séparable et soit $K \subset E'$, un sous ensemble de E' faiblement* compact ($\sigma(E', E)$-compact). Alors K est métrisable, pour cette topologie.*

Proposition 1.7.11. *Si E est de dimension finie, les topologies forte, faible et faible* coïncident sur E'.*

Théorème 1.7.12. (Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki).
Soit E un espace de Banach. Alors la boule unité fermée de E' est compacte pour la topologie faible, $\sigma(E', E)$.*

1.7.3 Espaces réflexifs

Soit E un espace de Banach.

Définition 1.7.13. *On dit que E est* ***réflexif*** *si $J(E) = E''$, c'est à dire, si J est bijective (on identifie alors E à E'' à l'aide de l'isomorphisme J).*

Théorème 1.7.14. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *E est réflexif.*
2. *$\overline{B}_E = \{x \in E : \ \|x\| \leq 1\}$ est $\sigma(E, E')$-compact.*
3. *Pour tout suite $(x_n)_{n\geq 1}$ bornée dans E il existe une sous suite $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ qui converge pour $\sigma(E, E')$.*

Proposition 1.7.15.

- *Tout espace de Hilbert est réflexif.*
- *Tout espace de dimension finie est réflexif.*

Corollaire 1.7.16. *Soit E un espace réflexif et soit $C \subset E$ un convexe fermé borné. Alors C est compact pour la topologie $\sigma(E, E')$.*

Proposition 1.7.17. *Si E est réflexif, alors les topologies faible et faible* sur E' coïncident.*

Dans la suite, on donne comme cas particulier les espaces $L^p(I, H)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et où H est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle ., . \rangle$.

Proposition 1.7.18. *Soit $p \in]1, +\infty]$ et soit q son conjugué, i.e, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Alors l'application*

$$
\begin{aligned}
J : L^p(I, H) &\to (L^q(I, H))' \\
f &\mapsto J(f) = \varphi_f,
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
\varphi_f : L^q(I, H) &\to \mathbb{R} \\
g &\mapsto \varphi_f(g) = \int_I \langle f(t), g(t) \rangle dt,
\end{aligned}
$$

est une bijection. On identifie alors f avec $J(f) \in (L^q(I, H))'$.
On a alors une notion de convergence faible dans $L^p(I, H)$. Si $1 < p < +\infty$ (on a alors aussi $1 < q < +\infty$), les notions de convergence faible et faible* dans $L^p(I, H)$ coïncident.*

Proposition 1.7.19. ***(Convergence faible dans*** $L^p(I,H)$***)***
Soient $p \in [1,+\infty[$ *et* q *le conjugué de* p*,* $(f_n)_{n\geq 1} \subset L^p(I,H)$ *et* $f \in L^p(I,H)$*. Alors, la suite* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge faiblement vers* f *si et seulement si on a, pour tout* $g \in L^q(I,H)$

$$\langle f_n, g\rangle = \int_I \langle f_n(t), g(t)\rangle dt \to \int_I \langle f(t), g(t)\rangle dt \text{ quand } n \to +\infty.$$

Proposition 1.7.20. *Soit* $p \in]1,+\infty[$*. Alors* $L^p(I,H)$ *est un espace réflexif.*

Dans l'espace $L^p(I,E)$ ($p \in [1,+\infty[$) on considère la norme "faible"

$$\|x\|_\omega = \max_{0\leq a\leq b\leq 1}\Big\| \int_a^b x(s)ds\Big\|, \tag{1.1}$$

cette norme est équivalente à la norme

$$|\|x\|| = \max_{0\leq t\leq 1}\Big\| \int_0^t x(s)ds\Big\|. \tag{1.2}$$

En effet, pour tout $t \in T$, et en prenant $a = 0$ et $b = t$,

$$\Big\| \int_0^t x(s)ds\Big\| \leq \max_{0\leq a\leq b\leq t}\Big\| \int_a^b x(s)ds\Big\| = \|x\|_\omega.$$

D'où,

$$|\|x\|| \leq \|x\|_\omega. \tag{1.3}$$

D'autre part, pour tout $a, b \in T$, $a \leq b$,

$$\begin{aligned}\Big\| \int_a^b x(s)ds\Big\| &= \Big\| \int_0^b x(s)ds - \int_0^a x(s)ds\Big\| \\ &\leq \Big\| \int_0^b x(s)ds\Big\| + \Big\| \int_0^a x(s)ds\Big\| \\ &\leq 2|\|x\||.\end{aligned}$$

D'où,

$$\|x\|_\omega \leq 2|\|x\||. \tag{1.4}$$

De (1.3) et (1.4), on déduit que $\|.\|_\omega$ et $|\|.\||$ sont équivalentes.
On note par $L^p_\omega(I,E)$ l'espace $L^p(I,E)$ muni de la norme faible.

Lemme 1.7.21. *(Voir [29])*
Soit H *un espace de Hilbert. Soit* $(f_n)_{n\geq 1}$ *est une suite dans* $L^2(I,H)$ *et* $f \in L^2(I,H)$ *tels que* $\sup_n \|f_n\|_2 < \infty$ *et* $\|f_n - f\|_w \to 0$.
Alors, f_n *converge faiblement vers* f *dans* $L^2(I,H)$*.*

1.8 Quelques résultats de la compacité

Les résultats suivants sont pris des références [12] et [25].

Théorème 1.8.1 (Théorème d'Ebalein-Smûlian).
Soit S un sous ensemble d'un espace de Banach E. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes

(i) S est faiblement (relativement) séquentiellement compact.

(ii) S est faiblement (relativement) compact.

Théorème 1.8.2. *(***Théorème d'Alaoglu***)*
Soit E un espace de Banach séparable et soit $M \subset E'$. Si M est borné pour la norme de E' et fermé pour la topologie $\sigma(E', E)$. Alors M est compact pour cette topologie.

Théorème 1.8.3. (Théorème d'Ascoli-Arzelà).
Soit X un espace métrique compact, Y un espace métrique complet et K un sous ensemble de $C(X, Y)$. Alors K est relativement compact dans $C(X, Y)$ si et seulement si les deux conditions ci-dessous sont satisfaites.

1. *K est équicontinue ;*
2. *$K(x) := \{f(x) : f \in K\}$ est relativement compact dans Y.*

Théorème 1.8.4. (Théorème de Banch-Mazur).
Soit E un espace de Banach, et soit (x_n) une suite d'éléments de E convergeant faiblement vers x. Alors il existe une suite $(z_i)_i$ dans E telle que chaque z_i est une combinaison convexe des éléments de la suite $(x_n)_{n \geq i}$ et $(z_i)_i$ converge fortement vers x.

Théorème 1.8.5. *Soit E un espace de Banach réflexif. Alors, $W^{1,2}(I, E)$ s'injecte de manière compact dans $L^2(I, E)$, c'est à dire, l'application identique $Id : W^{1,2}(I, E) \to L^2(I, E)$ est compacte (i.e. toute partie bornée S de $W^{1,2}(I, E)$ est compacte dans $L^2(I, E)$).*

1.9 Distance de Hausdroff

Les résultats de cette section sont pris de la référence [6].

Définition 1.9.1. *Soient A, B deux sous ensembles d'un espace métrique (X, d). Posons*

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

• *On appelle* ***écart*** *entre A et B que l'on note e(A, B) la quantité définie par*

$$e(A,B) = \sup_{x\in A} d(x,B).$$

• *On appelle* ***distance de Hausdorff*** *entre A et B et on la note $\mathcal{H}(A,B)$ la quantité définie par*

$$\mathcal{H}(A,B) = \max\{e(A,B), e(B,A)\}.$$

Remarquons que $\mathcal{H}(A,B) = \mathcal{H}(B,A)$.

Proposition 1.9.2. *Soient A, B, C trois sous ensembles d'un espace métrique (X,d).*

1. $e(A,\emptyset) = \infty$ *si* $A \neq \emptyset$.
2. $e(\emptyset,B) = 0$.
3. $e(A,B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$.
4. $e(A,C) \leq e(A,B) + e(B,C)$.
5. $\mathcal{H}(A,B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$.
6. $\mathcal{H}(A,C) \leq \mathcal{H}(A,B) + \mathcal{H}(C,B)$.
7. $\mid d(x,A) - d(x,B) \mid \leq \mathcal{H}(A,B)$, $\forall x \in X$.

Remarque 1.9.1.

- $(\mathcal{P}_{cl}(X),\mathcal{H})$ *est un espace métrique.*
- *Si (X,d) est un espace métrique complet, alors $(\mathcal{P}_{cl}(X),\mathcal{H})$ est complet.*
- *Si X est séparable, $(\mathcal{P}_k(X),\mathcal{H})$ est aussi séparable.*
- *Si X=E un espace vectoriel normé muni de la norme $\|.\|$, alors* $\mathcal{H}(A,B) \leq \sup_{x\in A}\|x\| + \sup_{x\in B}\|x\|$.

1.10 Points extrémaux

Les résultats de cette section sont pris de la référence [27].

Définition 1.10.1. *Soit E un espase vectoriel et $K \subset E$. On dit que $x \in K$ est un* ***point extrémal*** *si, $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ avec $x_1, x_2 \in K$ et $\alpha \in]0,1[$ implique que $x_1 = x_2$.*
Si K est convexe, un point $x \in K$ est extrémal à K si x ne puisse être intérieur à un segment de droite joignant deux points de K.
On note par ext(K) l'ensemble des points extrémaux à K.

Théorème 1.10.2. ***(Théorème de Krein-Milman)*** *Soit E un espace topologique tel que E' sépare les points de E. Alors tout ensemble convexe compact K de E admet au moins un point extrémal, i.e., $ext(K) \neq \emptyset$.*

1.11 Multi-applictions

1.11.1 Multi-applications et sélections

Les résultats de cette section sont pris des références [6] et [41].

Définition 1.11.1. *Soient X et Y deux ensembles non vides. On appelle **multi-application** (ou **fonction multivoque**) F définie sur X à valeurs dans Y toute application qui à chaque élément $x \in X$ associe un sous ensemble $F(x)$ de Y, et on note $F : X \rightrightarrows Y$.*

- *On appelle **domaine** (effectif) de la multi-application F qu'on note $dom(F)$, le sous ensemble de Y défini par*

$$D(F) := dom(F) = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}.$$

- *On appelle **graphe** de F, qu'on note $Gr(F)$, le sous ensemble de $X \times Y$ défini par*

$$Gr(F) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}.$$

- *On appelle **image** de F, qu'on note Im(F), le sous ensemble de Y défini par*

$$Im(F) = \{y \in Y : \exists x \in X,\ y \in F(x)\} = \underset{x \in X}{\cup} F(x).$$

- *Si $A \subset X$, on appelle **image** de A par F qu'on note $F(A)$ le sous ensemble de Y défini par $F(A) = \underset{x \in A}{\cup} F(x)$, et on peut écrire*

$$F(A) = \{y \in Y : \exists x \in A,\ y \in F(x)\}.$$

- *Pour tout $V \subset X$, on appelle **image réciproque large** de F, le sous ensemble défini par*

$$F^{-1}(V) = \{x \in X : F(x) \cap V \neq \emptyset\}.$$

- *Pour tout $V \subset X$, on appelle **image réciproque étroite** de F, le sous ensemble défini par*

$$F_{+}^{-1}(V) = \{x \in X : F(x) \subseteq V\}.$$

Définition 1.11.2. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle **sélection** de F toute application $f : dom(F) \to Y$ vérifiant*

$$f(x) \in F(x),\ \forall x \in dom(F).$$

1.11.2 Continuité des multi-applications

Les résultats de cette section sont pris des références [2], [4], [6] et [26].

Définition 1.11.3. *Soient X et Y deux espaces topologiques, et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.*

1. *On dit que F est* ***semi-continue supérieurement*** *(s.c.s) au point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert U de X contenant $F(x_0)$ c'est à dire $F(x_0) \subset U$, il existe un voisinage Ω de x_0 tel que $F(\Omega) \subset U$, c'est à dire, $\exists \Omega \in V(x_0)$; $F(z) \subset U$, $\forall z \in \Omega$. Autrement dit $F_+^{-1}(U)$ est un voisinage de x_0.*

- *F est s.c.s sur X si elle est s.c.s en tout point $x_0 \in X$.*

2. *On dit que F est* ***semi-continue inférieurement*** *(s.c.i) au point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert U de X vérifiant $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, il existe un voisinage de x_0 tel que $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, $\forall z \in \Omega$. Autrement dit $F^{-1}(U)$ est un voisinage de x_0.*

- *F est s.c.i sur X si elle est s.c.i en tout point $x_0 \in X$.*

3. *On dit que F est* ***continue*** *au point x_0 si elle est s.c.s et s.c.i au point x_0*

Proposition 1.11.4. *Soient X et Y deux espaces topologiques, et considérons la multi-application $F : X \rightrightarrows Y$, alors*

(i) F est s.c.s si et seulement si $F^{-1}(U)$ est fermé de X pour tout U fermé de Y.

(ii) F est s.c.i si et seulement si $F^{-1}(U)$ est ouvert de X pour tout U ouvert de Y.

Lemme 1.11.5. *La multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ est semi-continue inférieurement si et seulement si la fonction $d_y : X \to \mathbb{R}$, définie par $d_y(x) = d(y, F(x))$, $\forall x \in X$ est semi-continue supérieurement pour tout $y \in Y$.*

Théorème 1.11.6. *Soit X et Y deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors, F est semi-continue inférieurement au point $x_0 \in X$ si et seulement si pour tout suite (x_n) de point de X, telle que $x_n \to x_0$ et pour tout $y_0 \in F(x)$, il existe une suite (y_n) telle que $y_n \in F(x_n)$ et $y_n \to y_0$.*

Définition 1.11.7. (Continuité par rapport à la distance de Hausdorff).
Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques, et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application, alors

- *F est dite* ***$\mathcal{H}$-semi-continue supérieurement*** *au point $x_0 \in X$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$F(B(x_0, \delta)) \subset V(F(x_0), \varepsilon) = \{y \in Y : \; d(y, F(x_0)) \leq \varepsilon\}.$$

- *On dit que F est $\mathcal{H}$**-semi-continue supérieurement** sur X si elle l'est en tout point de X.*
- *F est dite $\mathcal{H}$**-semi-continue inférieurement** au point $x_0 \in X$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$F(x_0) \subset [V(F(x), \varepsilon)]^{\circ};\ \forall x \in B(x_0, \delta).$$

- *On dit que F est $\mathcal{H}$**-semi-continue inférieurement** sur X si elle l'est en tout point de X.*
- *On dit que F est $\mathcal{H}$**-continue** si elle est $\mathcal{H}$-semi-continue supérieurement et $\mathcal{H}$-semi-continue inférieurement.*

Proposition 1.11.8. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs fermées. Alors,*

- *F est $\mathcal{H}$**-semi-continue supérieurement** au point $x_0 \in X$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n) \subset X$ convergente vers x_0, on a,*

$$\lim_{n\to\infty} e(F(x_n), F(x_0)) = 0.$$

- *F est $\mathcal{H}$**-semi-continue inférieurement** au point $x_0 \in X$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n) \subset X$ convergente vers x_0, on a,*

$$\lim_{n\to\infty} e(F(x_0), F(x_n)) = 0.$$

- *F est $\mathcal{H}$**-continue** au point $x_0 \in X$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n) \subset X$ convergente vers x_0, on a,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(F(x_n), F(x_0)) = 0.$$

Proposition 1.11.9. *Si F est $\mathcal{H}$-semi-continue inférieurement au point x_0 alors F est semi-continue inférieurement au point x_0.*

Proposition 1.11.10. *Si $F(x_0)$ est compact alors*

- *F est $\mathcal{H}$-semi-continue supérieurement au point x_0 si et seulement si F est semi-continue supérieurement au point x_0.*
- *F est $\mathcal{H}$-semi-continue inférieurement au point x_0 si et seulement si F est semi-continue inférieurement au point x_0.*

Théorème 1.11.11. (Théorème d'existence de sélections continues de Michael). *Soit X un espace métrique, E un espace de Banach et $F : X \rightrightarrows E$ une multi-application semi-continue inférieurement à valeurs non vides, fermées et convexes. Alors F admet une sélection continue.*

1.11.3 Mesurabilité des multi-applications

Nous allons donner maintenant des résultats fondamentaux de la théorie des multi-applications mesurables [6], [14], [22] et [40].

Définition 1.11.12. *Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application .*

1. *On dit que F est **Σ-mesurable** où **mesurable**, si pour tout ouvert V de Y*

$$F^{-1}(V) = \{x \in X : F(x) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

2. *On dit que F est **fortement mesurable**, si pour tout fermé W de Y*

$$F^{-1}(W) = \{x \in X : F(x) \cap W \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Proposition 1.11.13. *Si $F : X \rightrightarrows Y$ est fortement mesurable, alors F est mesurable.*

Proposition 1.11.14. *Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique séparable et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) F est Σ-mesurable.

(ii) Pour chaque $y \in Y$, la fonction $d_y : X \to \mathbb{R}$ est Σ-mesurable.

Proposition 1.11.15. *Si $F : X \rightrightarrows Y$ est mesurable ou fortement mesurable, alors dom(F) est mesurable.*

Proposition 1.11.16. *Soient X un espace topologique et Y un espace métrique séparable, alors la multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ est mesurable si et seulement si $\overline{F} : X \rightrightarrows Y$ est mesurable.*

Théorème 1.11.17. *Soient (X, Σ) un espace mesurable et E un espace de Banach. Soit $F : X \times E \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable et $u : X \to E$ une application Σ-mesurable. Alors, la multi-application $x \mapsto F(x, u(x))$ est mesurable.*

Théorème 1.11.18. (Théorème de Lusin).
Soit X un espace métrique compact tel que (X, Σ, μ) est un espace mesuré de Radon et soit Y un espace métrique. Soit $\varphi : X \to Y$ une application Σ-mesurable, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un fermé $X_\varepsilon \subset X$ tel que $\mu(X \backslash X_\varepsilon) < \varepsilon$ et $\varphi_{|X_\varepsilon}$ est continue.

Lemme 1.11.19. *Soit (X, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique séparable et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application mesurable à valeurs fermées. Alors le graphe de F appartient à $\Sigma \otimes \mathcal{B}(Y)$.*

Lemme 1.11.20. *Soit* (X, Σ, μ) *un espace mesuré avec* $\mu \geq 0$, σ*-finie et* Σ *est* μ*-complète. Soient* Y *un espace métrique séparable et* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application à valeurs fermées, alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a) F *est* Σ*-mesurable.*

(b) $Gr(F) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(Y)$.

(c) F *est fortement mesurable.*

Théorème 1.11.21 (Théorème d'existence de sélections mesurables).
Soient (X, Σ) *un espace mesurable,* Y *un espace métrique complet séparable et* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application mesurable à valeurs non vides et fermées. Alors,* F *admet au moins une sélection mesurable.*

1.11.4 Ensembles décomposables et L^p-sélections

Les résultats de cette section sont pris des références [23] et [28].
Soit E un espace de Banach séparable.

Définition 1.11.22. *Soit* K *un ensemble de* $L^p(I, E)$*. On dit que* K *est* ***décomposable*** *si pour tous* $u, v \in K$ *et pour tout sous ensemble* $A \in \mathcal{L}(I)$*, nous avons*

$$\mathbb{1}_A u + (1 - \mathbb{1}_A) v \in K.$$

Théorème 1.11.23. (Théorème de sélection continue). *(Voir[23])*
Soient X *un espace métrique séparable,* E *un espace de Banach et* $F : X \rightrightarrows L^1(T, E)$ *une multi-application semi-continue inférieurement à valeurs fermées et décomposables. Alors* F *admet une sélection continue.*

Définition 1.11.24. *Soit* $F : I \rightrightarrows E$ *une multi-application.*

- *On définit l'ensemble des sélections mesurables par*

$$S_F = \Big\{ f : I \to E \text{ mesurable} : f(t) \in F(t),\ p.p \text{ sur } I \Big\}.$$

- *Pour* $1 \leq p \leq +\infty$*, on définit l'ensemble de toutes les* L^p*-sélections de* F *par*

$$S_F^p = \Big\{ f \in L^p(I, E) : f(t) \in F(t),\ p.p \text{ sur } I \Big\}.$$

Théorème 1.11.25. *(Voir [21]) Soit* X *un espace métrique séparable. Soit* $F : I \rightrightarrows X$ *une multi-application mesurable à valeurs non vides et fermées et* $\phi : I \times X \to X$ *une fonction mesurable vérifiant.*

1. *$\phi(t,.)$ est semi continue supérieurement pour tout $t \in I$,*

2. *il existe $f_0 \in S^p_F$ telle que $\int_0^1 \phi(t, f_0(t)) < +\infty$.*

Alors,

$$\inf_{f \in S^p_F} \int_0^1 \phi(t, f(t))dt = \int_0^1 \inf_{x \in F(t)} \phi(t, x)dt.$$

Lemme 1.11.26. *Soit $F : I \rightrightarrows E$ une multi-application de graphe mesurable et $1 \leq p < +\infty$, alors S^p_F est non vide si et seulement si*

$$inf\Big\{\|x\| : x \in F(t)\Big\} \leq h(t) \ p.p \ sur \ I, \tag{1.5}$$

pour une certaine application $h(.) \in L^p(I, E)$.

Proposition 1.11.27.
Soit $F : I \rightrightarrows E$ une multi-application. Alors les ensembles S_F et S^p_F sont décomposables. Si F est à valeurs non vides et fermées, alors l'ensemble S^p_F est fermé dans $L^p(I, E)$.

Proposition 1.11.28. *Soit $F : I \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable à valeurs non vides, convexes et faiblement compactes. On définit la multi-application $ext(F) : I \rightrightarrows E$ par*

$$ext(F)(t) = ext(F(t)), \ \forall t \in I.$$

Alors,

$$ext(S^p_F) = S^p_{ext(F)}, \ (1 \leq p < +\infty).$$

Proposition 1.11.29. *Soit $F : X \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable à valeurs non vides et fermées. On définit la multi-application $co(F) : I \rightrightarrows E$ par $co(F)(t) = co(F(t))$ pour tout $t \in I$ et on définit la multi-application $\overline{co}(F) : I \rightrightarrows E$ par $\overline{co}(F)(t) = \overline{co}(F(t))$ pour tout $t \in I$. Alors, $co(F)$ est une multi-application mesurable à valeurs non vides et $\overline{co}(F)$ est une multi-application mesurable à valeurs non vides fermées. De plus, si $S^p_F \neq \emptyset$ $(1 \leq p < +\infty)$, alors*

$$\overline{co}(S^p_F) = S^p_{\overline{co}(F)}, \ (1 \leq p < +\infty).$$

Proposition 1.11.30. *Si $F : X \rightrightarrows E$ est une multi-application mesurable à valeurs non vides et fermées alors F est à graphe mesurable.*

Théorème 1.11.31. *(Voir [40])*
Soit M un espace métrique compact. Soit $\Gamma : M \mapsto L^p(I, E)$ $(1 \leq p < \infty)$ une multi-application à valeurs non vides, décomposables, convexes et faiblement compactes dans $L^p(I, E)$.
Si Γ est $\mathcal{H}_p$-continue, où $\mathcal{H}_p$ est la distance de Hausdorff générée par la norme de $L^p(I, E)$,

et bornée sur M, alors, pour toute selection continue $f : M \to L^p(I,E)$ de la multi-application Γ et toute fonction semi-continue inférieurement $\varphi : M \to \mathbb{R}_+^*$, il existe une selection continue $g : M \to L^p(I,E)$ de Γ telle que

$$g(\xi) \in ext\Gamma(\xi),$$

$$\|g(\xi) - f(\xi)\|_w < \varphi(\xi),\ \xi \in M. \tag{1.6}$$

Théorème 1.11.32. *(Voir [40]) Soit M un espace métrique compact. Soit $\Gamma : M \mapsto L^p(I,E)$ $(1 \leq p < \infty)$ une multi-application à valeurs non vides décomposables, fermées et bornées dans $L^p(I,E)$.*
Si la multi-application $\Gamma = \overline{co}(F)$ vérifie toutes les conditions du Théorème 1.11.31, alors pour toute selection continue $f : M \to L^p(I,E)$ de la multi-application Γ et toute fonction semi-continue inférieurement $\varphi : M \to \mathbb{R}_+^*$, il existe une sélection continue $g : M \to L^p(I,E)$ de F telle que

$$g(\xi) \in ext(\overline{co}(F(\xi))),\ \xi \in M,$$

et (1.6) est vérifiée.

Théorème 1.11.33. *Soit E un espace de Banach séparable, $K \subset (C(I,H))^2$ un ensemble compact et $F : I \times E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vides et fermées. Supposons que*

1. *la multi-application $t \mapsto F(t, u(t), v(t))$ est mesurable pour tous $u, v \in C(I,H)$;*
2. *la multi-application $(x,y) \mapsto \overline{co}(F(t,x,y))$ est $\mathcal{H}$-continue pour presque tout $t \in I$;*
3. *il existe une fonction strictement positive $m \in L^2(I,\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x, y \in H$, on a*
$$|F(t,x,y)| \leq m(t) \quad p.p \text{ sur } I.$$

Alors, pour toute application continue $g : K \to L^2(I,H)$ telle que

$$g(u,v)(t) \in \overline{co}(F(t,u(t),v(t))),\ p.p \text{ sur } I,\ \forall (u,v) \in K$$

et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une application continue $g_\varepsilon : K \to L^2(I,H)$ telle que

$$g_\varepsilon(u,v)(t) \in F(t,u(t),v(t)) \cap ext(\overline{co}(F(t,u(t),v(t)))), \quad p.p \text{ sur } I,$$

et

$$\|g(u,v) - g_\varepsilon(u,v)\|_w < \varepsilon,\ \forall\ (u,v) \in K.$$

Démonstration.
Considérons la multi-application $N : K \rightrightarrows L^2(I,E)$ définie par

$$N(u,v) = S^2_{F(.,u(.),v(.))}, \ (u,v) \in K.$$

Alors, N est à valeurs non vides, décomposables, fermées (Prposition 1.11.27) et bornées (hypothèse 3.).
On définit la multi-application $\Gamma : K \rightrightarrows L^2(I,E)$ par $\Gamma(u,v) = \overline{co}(N(u,v))$, $\forall (u,v) \in K$
Montons que Γ vérifie les hypothèses du Théorème 1.11.31.
Il est clair que Γ est à valeurs non vides, fermées et convexes et par l'hypothèse (3.), elle est à valeurs bornées. En effet, soit $(u,v) \in K$ et $h \in co(N(u,v))$, alors $h = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$ où $(f_i)_{i=1}^n \subset N(u,v)$ et $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Or, en utilisant l'hypothèse (3.) et la définition de N, on a

$$\|f_i(t)\| \leq m(t) \ \ p.p \ sur \ I, \ \forall \ i \in \{1,...,n\}.$$

D'où

$$\|h(t)\| \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \|m(t)\| = \|m(t)\|, \ p.p \ sur \ I.$$

De plus, si $h \in \overline{co}(N(u,v))$, il existe une suite $(h_n) \subset co(N(u,v))$ telle que $h_n \to h$ dans $L^2(I,E)$. Donc

$$\|h_n(t)\| \leq m(t) \ p.p \ sur \ I, \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

D'où $\|h_n\|_2 \leq \|m\|_2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite, on trouve que $\|h\|_2 \leq \|m\|_2$. Par conséquent, Γ est à valeurs bornées dans $L^2(I,E)$.
Donc Γ est à valeurs faiblement compactes dans $L^2(I,E)$ (Voir Théorème 1.8.2).
Montrons que Γ est $\mathcal{H}_2$-continue
Soit $((u_n,v_n))_n \subset K$ une suite qui converge vers (u,v) dans $C(I,H) \times C(I,H)$.
Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $f \in \Gamma(u_n,v_n)$, on a

$$\begin{aligned} d_2(f,\Gamma(u,v)) &= \inf_{g\in\Gamma(u,v)} d_2(f,g) \ (\text{où } d_2 \text{ est la distance associée à la norme } \|\cdot\|_2) \\ &= \inf_{g\in\Gamma(u,v)} \left(\int_0^1 \|f(t)-g(t)\|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\inf_{g\in\Gamma(u,v)} \int_0^1 \|f(t)-g(t)\|^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \tag{1.7}$$

En posant, pour tout $(t,x) \in I \times E$, $\phi(I,x) = \|f(t)-x\|^2$, ϕ est $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable et continue par rapport à x (puisque la norme est continue et $f \in L^2(I,E)$), donc ϕ est s.c.i par rapport à x, et puisque $f \in L^2(I,E)$, pour tout $g \in S^2_{\overline{co}(F(.,u(.),v(.)))}$, on a

$$\int_0^1 \phi(t,g(t))dt < +\infty.$$

De plus, en utilisant la Proposition 1.11.29, et l'hypothèse 1, on a que la multi-application $\overline{co}(F(.,u(.),v(.)))$ est $\mathcal{L}(I)$-mesurable et que $\Gamma(u,v) = S^2_{\overline{co}(F(.,u(.),v(.)))}$. Donc, par le Théorème 1.11.25 et la relation (1.7) on a

$$\begin{aligned} d_2(f,\Gamma(u,v)) &= \Big(\inf_{x\in\overline{co}(F(.,u(.),v(.)))}\int_0^1 \|f(t)-x\|^2\Big)^{1/2} \\ &= \Big(\int_0^1 d^2(f(t),\overline{co}(F(t,u(t),v(t))))dt\Big)^{1/2} \\ &\leq \Big(\int_0^1 \mathcal{H}^2(\overline{co}(F(t,u_n(t),v_n(t))),\overline{co}(F(t,u(t),v(t))))\Big)^{1/2} \qquad (1.8) \end{aligned}$$

Similairement, pour tout $f \in \Gamma(u,v)$, on a

$$d_2(f,\Gamma(u,v)) \leq \Big(\int_0^1 \mathcal{H}^2(\overline{co}(F(t,u_n(t),v_n(t))),\overline{co}(F(t,u(t),v(t))))dt\Big)^{1/2} \qquad (1.9)$$

De (1.8) et (1.9), on trouve que

$$\mathcal{H}(\Gamma(u_n,v_n),\Gamma(u,v)) \leq \Big(\int_0^1 \mathcal{H}^2(\overline{co}(F(t,u_n(t),v_n(t))),\overline{co}(F(t,u(t),v(t))))dt\Big)^{1/2} \qquad (1.10)$$

Or, par la Remarque 1.9.1, on a que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\overline{co}(F(t,u_n(t),v_n(t))),\overline{co}(F(t,u(t),v(t)))) &\leq |\overline{co}(F(t,u_n(t),v_n(t)))| + |\overline{co}(F(t,u(t),v(t)))| \\ &\leq 2m(t) \ p.p \ sur \ I. \end{aligned}$$

De plus, par l'hypothèse 2., on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(\overline{co}(F(t,u_n(t),v_n(t))),\overline{co}(F(t,u(t),v(t)))) = 0 \ p.p \ sur \ I.$$

Donc, par le Théorème 1.5.1 et la relation (1.10), on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}_2(\Gamma(u_n,v_n),\Gamma(u,v)) = 0$$

D'où Γ est $\mathcal{H}_2$-continue

Donc, les conditions du Théorème 1.11.32 sont vérifiées.

Pour toute application $g : K \to L^2(I,E)$ telle que

$$g(u,v) \in \overline{co}(F(.,u(.),v(.))),\ \forall (u,v) \in K,$$

on a,

$$g(u,v) \in S^2_{\overline{co}(F(.,u(.),v(.)))} = \overline{co}(S^2_{F(.,u(.),v(.))}) = \overline{co}(N(u,v)) = \Gamma(u,v),\ \forall (u,v) \in K. \qquad (1.11)$$

Ceci suit de la Proposition 1.11.29 et en utilisant l'hypothèse **H(F)**(1) et la Proposition 1.11.30.

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $\varphi_\varepsilon : K \to \mathbb{R}_+^*$ telle que $\varphi_\varepsilon(u,v) = \varepsilon$, $\forall (u,v) \in K$.
Par le Théorème 1.11.32, il existe une selection $g_\varepsilon : K \to L^2(I,E)$ telle que

$$g_\varepsilon(u,v) \in ext(\overline{co}(N(u,v))) \cap N(u,v),\ \forall\ (u,v) \in K,$$

c'est à dire,

$$g_\varepsilon(u,v) \in ext(S^2_{\overline{co}(F(.,u(.),v(.)))}) \cap S^2_{F(.,u(.),v(.))},\ \forall\ (u,v) \in K$$

et

$$\|g(u,v) - g_\varepsilon(u,v)\|_w < \varepsilon,\ \forall\ (u,v) \in K.$$

Par (1.11) et en utilisant le Proposition 1.11.28, on trouve

$$g_\varepsilon(u,v) \in S^2_{ext(\overline{co}(F(.,u(.),v(.))))} \cap S^2_{F(.,u(.),v(.))},\ \forall\ (u,v) \in K.$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Le théorème suivant est une conséquence directe de la Proposition 8.2 dans [39] (On le déduit de la preuve).

Théorème 1.11.34. *Soit E un espace de Banach séparable, $K \subset (C(I,H))^2$ un ensemble compact et $F : I \times E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vides, fermées et faiblement compactes.*
Supposons que

1. *la multi-application $t \mapsto F(t,u(t),v(t))$ est fortement mesurable pour tous $u,v \in C(I,H)$*
2. *la multi-application $(u,v) \mapsto \overline{co}F(t,u,v)$ est $\mathcal{H}$-continue pour presque tout $t \in I$.*
3. *Il existe une fonction strictement positive $m \in L^2(I,\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x,y \in H$, on a*
$$|F(t,u,v)| \leq m(t).$$

Alors, il existe une fonction continue $g : K \to L^2(I,H)$ telle que, pour tout $(u,v) \in K$, on a

$$g(u,v)(t) \in F(t,u(t),v(t)),\ p.p\ sur\ I.$$

De plus,

$$g(u,v)(t) \in ext(\overline{co}(F(t,u(t),v(t)))),\ p.p\ sur\ I.$$

Proposition 1.11.35. (Bressan-Colombo)*[11]*
Soient X un espace métrique, E un espace de Banach et $G : X \rightrightarrows L^1(I,E)$ une multi-application semi-continue inférieurement, à valeurs fermées et décomposables. Supposons

que $g : X \to L^1(I, E)$ et $\varphi : X \to L^1(I, \mathbb{R}_+)$ sont deux applications continues telles que, pour chaque $x \in X$, l'ensemble

$$H(x) = \{u \in G(x) : \ \|u(t) - g(x)(t)\| < \varphi(x)(t) \text{ p.p. sur } I\}$$

est non vide. Alors la multi-application $H : X \rightrightarrows L^1(I, E)$ est semi-continue inférieurement à valeurs décomposables.

1.12 Points exposés forts

Les résultats de cette section sont pris de la référence [39].
Soit E un espace de Banach séparable. Soit D un sous ensemble non vide, convexe, fermé et borné de E et $x' \in E$.
Si $\alpha > 0$, on pose

$$C(D, x', \alpha) = \{x \in D : \ \langle x', x\rangle > \delta^*(x', D) - \alpha\}.$$

Définition 1.12.1. *Soit D un sous ensemble non vide, convexe, fermé et borné de E et $x \in D$. Le point x est dit* ***point exposé fort*** *de D s'il existe $x' \in E$ tel que*

$$\langle x', x\rangle > \langle y, x'\rangle, \text{ quand } y \neq x, y \in D,$$

et la famille $\{C(D, x', \alpha), \alpha > 0\}$ est une base de voisinage de x dans D muni de la topologie trace déduite de la topologie associé à la norme.
On note par $st(D)$ ***l'ensemble des points exposé forte*** *de D.*

Proposition 1.12.2. *Si D est un sous ensemble non vide, convexe et faiblement compact de E, alors $st(D) \neq \emptyset$, $st(D) \subset ext(D)$ et $\overline{co}(ext(D)) = D$.*

Proposition 1.12.3. *Soit D un sous ensemble non vide, fermé et borné de E tel que $st(\overline{co}(D)) \neq \emptyset$ et $\overline{co}(st(\overline{co}(D))) = \overline{co}(D)$. Alors $st\ \overline{co}(D) \subset D$.*

1.13 Opérateurs monotones

Les résultats de cette section sont pris des références [13], [8] et [23].
Soit E un espace de Banach, E' son dual topologique. Soit $A : E \to E'$ un opérateur univoque. Alors le **domaine** de A est donné par

$$D(A) = \{x \in E : A(x) \text{ existe}\},$$

l'image de A par

$$Im(A) = \Big\{y \in E' : \exists x \in D(A),\ y = A(x)\Big\},$$

et **son graphe** par

$$Gr(A) = \Big\{(x, y) \in E \times E',\ y = A(x)\Big\}.$$

Définition 1.13.1. *Un opérateur $A : D(A) \subseteq E \to E'$ est dit **monotone** si pour tout $x_1, x_2 \in D(A)$*

$$\langle A(x_1) - A(x_2),\ x_1 - x_2\rangle \geq 0.$$

*et A est dit **hemi-continue** si pour tous $x_1,\ x_2,\ x_3 \in D(A)$ l'application $t \mapsto \langle A(x_1 + tx_2), x_3\rangle$ est continue sur I.*

Définition 1.13.2. *(Voir [9]) Soit E un espace de Hilbert.*
*- Un opérateur $A : H \to H$ est dit **auto-adjoint** s'il vérifie*

$$\forall x, y \in H,\ \langle x, Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle.$$

*Un tel opérateur est **linéaire continue**.*
*-Un opérateur auto-adjoint $A : H \to H$ est dit **coercif** s'il existe $C > 0$ tel que $\langle Ax, x\rangle \geq C\|x\|^2,\ \forall x \in H$.*

1.14 Théorème du point fixe de Schauder-Tikhonov

Ce théorème est pris de la référence [18].

Théorème 1.14.1. *Soient E un espace vectoriel topologique localement convexe, K un sous ensemble non vide convexe compact de E et $f : K \to K$ une application continue. Alors f admet un point fixe dans K, i.e., il existe un point $x_* \in K$ tel que $x_* = f(x_*)$.*

1.15 Fonctions absolument continues

Les résultats de cette section sont pris des références [20], [6] et [28].

Définition 1.15.1. *Une application f définie sur I à valeur dans un espace vectoriel normé E est dite **absolument continue** si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour toute famille finie d'intervalle ouverts disjoints deux à deux de I; $(]a_i, b_i[), i \in \{1, ..., n\}$, nous avons*

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \leq \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\|f(b_i) - f(a_i)\| \leq \varepsilon.$$

Définition 1.15.2. *Soit E un espace de Banach. On définit*
$AC^{1,2}(I,E) = \{f : I \to E : f$ *est absolument continue, dérivable presque partout avec* $\dot{f} \in L^2(I,E)\}$.

Proposition 1.15.3. *Soient E un espace réflexif et $f \in C(I,E)$. Alors f est absolument continue si et seulement si il existe une fonction $g \in L^2(I,E)$ telle que*

$$f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)ds, \ \forall t \in I.$$

Alors $f \in AC^{1,2}(I,E)$ et $\dot{f}(t) = g(t)$ p.p sur I.

Proposition 1.15.4. *Si E est réflexif et f est absolument continue, alors f est dérivable pour presque tout $t \in I$, et on a*

$$f(t) - f(0) = \int_0^t \dot{f}(s)ds, \ \forall t \in I.$$

Théorème 1.15.5. *Soit E un espace de Banach réflexif et $f \in L^2(I,E)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $f \in W^{1,2}(I,E)$

(ii) Il existe $\hat{f} \in AC^{1,2}(I,E)$ tel que $\hat{f}(t) = f(t)$ p.p sur I.

Théorème 1.15.6. *Soit E un espace de Banach et $f, g \in W^{1,2}(I,E)$. Alors la fonction $t \mapsto \langle u(t), v(t)\rangle$ est absolument continue et*

$$\frac{d}{dt}\langle f(t), g(t)\rangle = \langle \dot{f}(t), g(t)\rangle + \langle \dot{g}(t), f(t)\rangle \ p.p \ sur \ I.$$

1.16 Projection

Les résultats de cette section sont pris des références [12] et [23].

Théorème 1.16.1. (Projection sur un convexe fermé).
Soient H un espace de Hilbert et C une partie convexe fermée non vide de H. Pour tout $x \in H$, il existe un et un seul point $y \in C$ tel que

$$\|x - y\| = d(x,C) = \inf_{z \in C} \|x - z\|.$$

*On l'appelle la **projection** de x sur C et on le note $Pr_C(x)$. Il est caractérisé par :*

$$y = Pr_C(x) \Leftrightarrow y \in C \text{ et } \forall z \in C, \ \langle y - x, y - z\rangle \leq 0.$$

Proposition 1.16.2. *Sous les hypothèse de Théorème 1.16.1, la projection $Pr_C : H \to H$ est 1-lipschitzienne, i.e,*

$$\|Pr_C(x_1) - Pr_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|, \ \forall x_1, x_2 \in H$$

Proposition 1.16.3. *Soit H un espace de Hilbert et soit C un sous espace vectoriel. Soit $y \in C$. Si $y = Pr_C(x)$ alors, $x - y \in C^{\perp}$ i.e., $\langle x - y, z\rangle = 0 \ \ \forall z \in C$.*

1.17 Lemme de Gronwal

Le lemme suivant est pris de la référence [13].

Lemme 1.17.1. *Soit $m \in L^1(I, \mathbb{R})$ telle que $m(t) \geq 0$ p.p. $t \in I$ et soit α une constante positive. Soit $h : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiée*

$$h(t) \leq \alpha + \int_0^t m(s)h(s)ds, \ \forall \ t \in I,$$

Alors,

$$|h(t)| \leq \alpha \exp\Big(\int_0^t m(s)ds\Big), \ \forall \ t \in I.$$

CHAPITRE 2

THÉORÈME D'EXISTENCE

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence de solutions pour une classe d'inclusions différentielles du second ordre. Soit H un espace de Hilbert. Considérons les inclusions différentielles du seconde ordre suivantes

$$\ddot{u}(t) + A(t, \dot{u}(t)) + Bu(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)) \text{ } p.p. \text{ } t \in I, \tag{2.1}$$

$$\ddot{u}(t) + A(t, \dot{u}(t)) + Bu(t) \in \overline{co}(F(t, u(t), \dot{u}(t))) \text{ } p.p. \text{ } t \in I, \tag{2.2}$$

$$\ddot{u}(t) + A(t, \dot{u}(t)) + Bu(t) \in ext(\overline{co}(F(t, u(t), \dot{u}(t)))) \text{ } p.p. \text{ } t \in I, \tag{2.3}$$

$$u(0) = u_0, \ \dot{u}(0) = v_0; \tag{2.4}$$

où $A : D(A) \subseteq I \times H \to H$ est un opérateur mesurable par rapport à la première variable et monotone et hemicontinue par rapport à la deuxième variable, B est un opérateur auto-adjoint et coercif et $F : I \times H \times H \rightrightarrows H$ est une multi-application à valeurs non vides et fermées qui vérifie certaines conditions.

2.1 Résultats auxiliaires

Définition 2.1.1. *Un couple $(u, \dot{u})$ tel que $u \in C(I, H)$ et $\dot{u} \in W^{1,2}(I, H)$ est appelée **solution** du (2.1) (respectivement (2.2),(2.3)) s'il existe $f \in S^2_{F(.,u(.),\dot{u}(.))}$ (respectivement*

$f \in S^2_{\overline{co}(F(.,u(.),\dot{u}(.)))}$ *et* $f \in S^2_{ext(\overline{co}(F(.,u(.),\dot{u}(.))))}$ *tel que*

$$(\mathcal{P}_f) \begin{cases} \ddot{u}(t) + A(t, \dot{u}(t)) + Bu(t) = f(t) \ p.p \ sur \ I, \\ u(0) = u_0, \ \dot{u}(t) = v_0. \end{cases}$$

Notation : On note par $\mathcal{R}_F(u_0, v_0)$ (respectivement $\mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0, v_0)$ et $\mathcal{R}_{ext(\overline{co}(F))}(u_0, v_0)$ les ensembles des solutions de (2.1) (respectivement (2.2) et (2.3)).

Faisons les hypothèses suivantes.

Hypothèse (H(A)). *Soit* $A : I \times H \to H$ *un opérateur vérifiant les conditions suivantes.*

1. *Pour tout* $x \in H$ *l'application* $t \mapsto A(t, x)$ *est mesurable.*
2. *Pour tout* $t \in I$, $x \mapsto A(t, x)$ *est monotone et hémi-continue.*
3. *Il existe une fonction positive* $a \in L^2(I, \mathbb{R}_+)$ *et un nombre* $b > 0$ *tel que*

$$\|A(t, v)\| \leq a(t) + b\|v\| \ p.p \ sur \ I.$$

4. *Il existe un nombre positif* $c > 0$ *tel que* $\langle x, A(t, x)\rangle \geq c\|x\|^2$ *pour presque tout* $t \in I$ *et pour tout* $x \in H$.

Hypothèse (H(B)). $B : H \to H$ *est un opérateur auto-adjoint et coercif (i.e* $\langle u, Bu\rangle \geq d\|u\|^2$ *avec* $d > 0$*).*

Hypothèse (H(F)). *La multi-application* $F : I \times H \times H \rightrightarrows H$ *est à valeurs fermées non vides, et vérifie les propriétés suivantes.*

1. *La multi-application* $t \mapsto F(t, u(t), v(t))$ *est* $\mathcal{L}(I)$*-mesurable pour tout* $u, v \in C(I, H)$.
2. *La multi-application* $(u, v) \mapsto \overline{co}(F(t, u, v))$ *est* $\mathcal{H}$*-continue p.p.*
3. *Il existe une fonction positive* $a_1 \in L^2(I, \mathbb{R}_+)$ *et un nombre positive* $b_1 > 0$ *tel que* $|F(t, u, v)| \leq a_1(t) + b_1(\|u\|^2 + \|v\|^2)^{1/2}$ *pour tout* $(u, v) \in H^2$ *et pour presque tout* $t \in I$.

Remarque 2.1.1.
L'hypothèse **H(F)**(1) *est satisfaite si la multi-application* $(t, u, v) \mapsto F(t, u, v)$ *est* $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(I) \otimes \mathcal{B}(I)$*-mesurable (Ici,* $I \otimes H \otimes H$ *est muni de la tribu engendrée par les ensembles* $C \times D_1 \times D_2$ *où* $C \subset I$ *et* $D_1, D_2 \subset H$ *sont mesurables au sens de Lebesgue et Borel respectivement).*

Remarque 2.1.2. *De l'hypothèse* $\mathbf{H}(\mathbf{F})(3)$*, il suit que pour tout* $x, y \in H$*, l'ensemble* $\overline{co}(F(t,x,y))$ *est convexe et faiblement compact dans H (voir la démonstration du Théorème 1.11.33). Donc, par le Théorème de Krein-Milman Théorème 1.10.2, on a que* $ext(\overline{co}(F(t,x,y))) \neq \emptyset$ *p.p sur* I*. Cela signifie que l'inclusion* (2.3) *est bien définie. Aussi, on doit mentionner que pour tout* $t \in I$*,* $ext(\overline{co}(F(t,x,y))) \nsubseteq F(t,x,y)$ *(puisque* $F(t,x,y)$ *est fermé dans* H *et non fermé dans* $w-H$*). De plus, en utilisant la Proposition 1.12.2 et la Proposition 1.12.3, on a* $ext(\overline{co}(F(t,x,y))) \cap F(t,x,y) \neq \emptyset$*. Donc, on peut considérer l'ensemble* $\mathcal{R}_F(u_0,v_0) \cap \mathcal{R}_{ext(\overline{co}(F))}(u_0,v_0)$*.*

Proposition 2.1.2. *Soit* $\lambda \in L^2(I, \mathbb{R}_+)$ *et*

$$S_\lambda = \{f \in L^2(I,H) : \ \|f(t)\| \leq \lambda(t) \ p.p \ sur \ I\}.$$

Alors, l'ensemble S_λ *est convexe, compact et métrisable dans* $w - L^2(I,H)$*.*

Démonstration.
Montrons que S_λ est convexe.
Soit $f, g \in S_\lambda$ et $\alpha \in [0,1]$. Alors, $\alpha f + (1-\alpha)g \in L^2(I,H)$, car $L^2(I,H)$ est un espace vectoriel. De plus, pour presque tout $t \in [0,1]$, on a

$$\|\alpha f(t) + (1-\alpha)g(t)\| \leq \alpha\|f(t)\| + (1-\alpha)\|g(t)\| \leq \lambda(t).$$

D'où $\alpha f + (1-\alpha)g \in S_\lambda$. Donc S_λ est convexe.
Il reste à montrer que S_λ est faiblement fermé dans $L^2(I,H)$. Puisque S_λ est convexe, il suffit de montrer que S_λ est fermé dans $L^2(I,H)$. Pour cela, soit $(f_n)_{n\geq 1} \subset S_\lambda$ tel que $f_n \to f$ dans $L^2(I,H)$ alors, par le Théorème 1.5.2, il existe une sous suite $(f_{n_k})_{n\geq 1}$ qui converge p.p vers $f \in L^2(I,H)$.
Pour tout $k \geq 1$, on a

$$\|f_{n_k}(t)\| \leq \lambda(t), \ \forall t \in I \backslash I_k,$$

où I_k est négligeable. En posant $I' = \underset{k\geq 1}{\cup} I_k$, on a

$$\|f_{n_k}(t)\| \leq \lambda(t), \ \forall t \in I \backslash I', k \geq 1,$$

où I' est négligeable. D'autre part,

$$f_{n_k}(t) \to f(t), \ \forall t \in I \backslash I'',$$

où I'' est négligeable, donc, en passant à la limite,

$$\|f(t)\| = \lim_{k\to\infty} \|f_{n_k}(t)\| \leq \lambda(t), \ \forall t \in I \backslash (I' \cup I''),$$

c'est à dire, $\|f(t)\| \leq \lambda(t)$ p.p sur I.
D'où $f \in S_\lambda$, donc S_λ est faiblement fermé dans $L^2(I,H)$. Par le Théorème d'Alaoglu (Théorème 1.8.2) S_λ est faiblement compact dans $L^2(I,H)$ et comme $L^2(I,H)$ est séparable, par le Théorème 1.7.10, S_λ est métrisable pour la topologie faible. ■

La proposition suivante est une conséquence directe du Lemme 1 dans [1].

Proposition 2.1.3. *Supposons que les hypothèses* $\mathbf{H}(\mathbf{A})$ *et* $\mathbf{H}(\mathbf{B})$ *sont vérifiées. Soit* $f \in S_\lambda$. *Alors, l'équation* $(\mathcal{P}_f)$ *admet une solution unique* $(u, \dot{u})$ *vérifiant*

1. $u \in L^\infty(I,H)$,
2. $\dot{u} \in L^\infty(I,H)$,
3. $\ddot{u} \in L^2(I,H)$.

On note cette solution par $(u_f, \dot{u}_f)$.

Proposition 2.1.4. *Supposons que les hypothèses* $\mathbf{H}(\mathbf{A})$ *et* $\mathbf{H}(\mathbf{B})$ *sont vérifiées. Alors, il existe trois constantes strictement positive* c_1, c_2, c_3 *telles que, pour tout* $f \in S_\lambda$,

- $\|u_f\|_{L^\infty(I,H)} \leq c_1$,
- $\|\dot{u}_f\|_{L^\infty(I,H)} \leq c_2$,
- $\|\dot{u}_f\|_{W^{1,2}(I,H)} \leq c_3$.

Démonstration.
Pour chaque $f \in S_\lambda$ fixé, soit $(u_f, \dot{u}_f)$ la solution unique de l'équation $(\mathcal{P}_f)$. Donc, $(u_f, \dot{u}_f)$ vérifie

$$\begin{cases} u_f \in L^\infty(I,H), \\ \dot{u}_f \in L^\infty(I,H), \\ \ddot{u}_f \in L^2(I,H). \end{cases}$$

Par le Théorème 1.15.5, on déduit que $\dot{u}_f \in W^{1,2}(I,H)$.
Dans ce qui suit, on va montrer qu'il existe trois constantes positives c_1, c_2, c_3 tels que

- $\|u_f\|_{L^\infty(I,H)} \leq c_1$,
- $\|\dot{u}_f\|_{L^\infty(I,H)} \leq c_2$,
- $\|\dot{u}_f\|_{W^{1,2}(I,H)} \leq c_3$.

Pour cela, on utilise les mêmes étapes de démonstration utilisées dans la preuve du Lemme 2 dans [1].

Soit $(u_f, \dot{u}_f)$ solution de l'équation $(\mathcal{P}_f)$. Alors,

$$\ddot{u}_f(t) + A(t, \dot{u}_f(t)) + Bu_f(t) = f(t) \; p.p \; sur \; I,$$

$$u_f(0) = u_0, \;\; \dot{u}_f(0) = v_0.$$

En multipliant l'équation par $\dot{u}_f(t)$, on obtient pour presque tout $t \in I$,

$$\Big\langle \ddot{u}_f(t), \dot{u}_f(t) \Big\rangle + \Big\langle A(t, \dot{u}_f(t)), \dot{u}_f(t) \Big\rangle + \Big\langle Bu_f(t), \dot{u}_f(t) \Big\rangle = \Big\langle f(t), \dot{u}_f(t) \Big\rangle. \tag{2.5}$$

Puisque $\dot{u} \in W^{1,2}(I, H)$, par la Proposition 1.15.6, on a

$$\Big\langle \ddot{u}_f(t), \dot{u}_f(t) \Big\rangle + \Big\langle \dot{u}_f(t), \ddot{u}_f(t) \Big\rangle = \frac{d}{dt} \langle \dot{u}_f(t), \dot{u}_f(t) \rangle,$$

alors

$$\Big\langle \ddot{u}_f(t), \dot{u}_f(t) \Big\rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{u}_f(t)\|^2, \tag{2.6}$$

et d'après l'hypothèse $\mathbf{H}(\mathbf{A})(4)$, on a

$$\Big\langle A(t, \dot{u}_f(t)), \dot{u}_f(t) \Big\rangle \geq c\|\dot{u}_f(t)\|^2. \tag{2.7}$$

De plus, puisque B est linéaire continu, on a que $\frac{d}{dt}B(u(t)) = B(\dot{u}(t))$. En effet,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}B(u(t)) &= \lim_{h \to 0} \frac{B(u(t+h)) - B(u(t))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} B\left(\frac{u(t+h) - u(t)}{h} \right) \\
&= B\left(\lim_{h \to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \right) \\
&= B(\dot{u}(t)),
\end{aligned}$$

donc,

$$\Big\langle Bu_f(t), \dot{u}_f(t) \Big\rangle + \Big\langle B\dot{u}_f(t), u_f(t) \Big\rangle = \frac{d}{dt} \Big\langle Bu_f(t), u_f(t) \Big\rangle,$$

et comme B est auto-adjoint, on trouve

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big\langle Bu_f(t), u_f(t) \Big\rangle = \Big\langle Bu_f(t), \dot{u}_f(t) \Big\rangle. \tag{2.8}$$

En remplaçant (2.6), (2.7) et (2.8) dans (2.5), on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{u}_f(t)\|^2 + c\|\dot{u}_f(t)\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big\langle Bu_f(t), u_f(t) \Big\rangle \leq \Big\langle f(t), \dot{u}_f(t) \Big\rangle.$$

En intégrant entre 0 et t, on trouve

$$\frac{1}{2}\|\dot{u}_f(t)\|^2 - \frac{1}{2}\|y_0\|^2 + c\int_0^t \|\dot{u}_f(s)\|^2 ds \\ + \frac{1}{2}\Big\langle Bu_f(t), u_f(t)\Big\rangle - \frac{1}{2}\langle Bu_0, u_0\rangle \leq \int_0^t \Big\langle f(s), \dot{u}_f(s)\Big\rangle ds.$$

Puisque B est coercif, en multipliant par 2 on obtient

$$\|\dot{u}_f(t)\|^2 + 2c\int_0^t \|\dot{u}_f(s)\|^2 ds + d\|u_f(t)\|^2 \leq 2\int_0^t \Big\langle f(s), \dot{u}_f(s)\Big\rangle ds + \|v_0\|^2 + \|B\|\|u_0\|^2. \quad (2.9)$$

Notons que, par l'application de l'inégalité de Young suivante

$$a.b \leq \frac{\varepsilon^2}{2}|a|^2 + \frac{\varepsilon^{-2}}{2}|b|^2,\ \varepsilon > 0,\ a, b \in \mathbb{R},$$

sur le coté droit du dernier intégrale, et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on trouve

$$\begin{aligned} 2\int_0^t \Big\langle f(s), \dot{u}_f(s)\Big\rangle ds &\leq 2\int_0^t \|f(s)\|\|\dot{u}_f(s)\| ds \\ &\leq 2\bigg(\int_0^t \|f(s)\|^2 ds\bigg)^{\frac{1}{2}} \bigg(\int_0^t \|\dot{u}_f(s)\|^2 ds\bigg)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \varepsilon^{-2}\int_0^t \|f(s)\|^2 ds + \varepsilon^2 \int_0^t \|\dot{u}_f(s)\|^2 ds \\ &= \varepsilon^{-2}\|f\|_2 + \varepsilon^2 \int_0^t \|\dot{u}_f(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation (2.9), on aura

$$\|\dot{u}_f(t)\|^2 + 2c\int_0^t \|\dot{u}_f(s)\|^2 ds + d\|u_f(t)\|^2 \leq \varepsilon^{-2}\|f\|_2 \\ + \varepsilon^2 \int_0^t \|\dot{u}_f(s)\|^2 ds + \|v_0\|^2 + \|B\|\|u_0\|^2.$$

On pose $M_1 = \varepsilon^{-2}\|f\|_2 + \|v_0\|^2 + \|B\|\|u_0\|^2$ alors

$$\|\dot{u}_f(t)\|^2 + 2c\int_0^t \|\dot{u}_f(t)\|^2 dt + d\|u_f(t)\|^2 \leq M_1 + \varepsilon^2 \int_0^t \|\dot{u}_f(s)\|^2 ds.$$

D'où

$$\|\dot{u}_f(t)\|^2 + (2c - \varepsilon^2)\int_0^t \|\dot{u}_f(t)\|^2 dt + d\|u_f(t)\|^2 \leq M_1.$$

On choisit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon^2 < 2c$ et on pose $M_2 = 2c - \varepsilon^2 > 0$, alors

$$\|\dot{u}_f(t)\|^2 + M_2\int_0^t \|\dot{u}_f(t)\|^2 dt + d\|u_f(t)\|^2 \leq M_1.$$

D'où

$$\|u_f(t)\| \leq c_1 \ et\ \|\dot{u}_f(t)\| \leq c_2\ p.p\ sur\ I,$$

où $c_1 = \sqrt{\frac{M_1}{d}} > 0$ et $c_2 = \sqrt{M_1} > 0$.
Considérons $\hat{A} : L^2(I,H) \to L^2(I,H)$ l'opérateur de Nemitsky correspondant à A, i.e, $\hat{A}(y)(t) = A(t,y(t)) \ \ \forall y \in L^2(I,H), \ \forall t \in I$ et $\hat{B} : L^2(I,H) \to L^2(I,H)$ l'opérateur de Nemitsky correspondant à B, i.e, $\hat{B}(y)(t) = By(t) \ \forall y \in L^2(I,H), \ \forall t \in I$. Avec cette notations, on peut écrire

$$\ddot{u}_f + \hat{A}(\dot{u}_f) + \hat{B}u_f = f.$$

En multipliant par $\xi \in L^2(I,H)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle \ddot{u}_f, \xi\rangle &= -\langle \hat{A}(\dot{u}_f), \xi\rangle - \langle \hat{B}u_f, \xi\rangle + \langle f, \xi\rangle \\
&\leq |\langle \hat{A}(\dot{u}_f), \xi\rangle| + |\langle \hat{B}u_f, \xi\rangle| + |\langle f, \xi\rangle| \\
&\leq \int_0^1 \Big|\Big\langle A(t,\dot{u}_f(t)), \xi(t)\Big\rangle\Big| dt + \int_0^1 \Big|\Big\langle Bu_f(t), \xi(t)\Big\rangle\Big| dt + \int_0^1 \Big|\langle f(t), \xi(t)\rangle\Big| dt \\
&\leq \int_0^1 \Big(a(t) + b\|\dot{u}_f(t)\|\Big)\|\xi(t)\| dt + \int_0^1 \|Bu_f(t)\|\|\xi(t)\| dt + \int_0^1 \|f(t)\|\|\xi(t)\| dt \\
&\leq \int_0^1 (a(t) + bc_2)\|\xi(t)\| dt + \int_0^1 c_1\|B\|\|\xi(t)\| dt + \int_0^1 \|\lambda(t)\|\|\xi(t)\| dt \\
&\leq \Big(\|a\|_2 + bc_2 + c_1\|B\| + \|\lambda\|_2\Big)\|\xi\|_2,
\end{aligned}$$

ceci implique que

$$\|\ddot{u}_f\|_2 = \sup_{\xi \in L^2(I,H)\setminus\{0\}} \frac{|\langle \ddot{u}_f, \xi\rangle|}{\|\xi\|_2} \leq \Big(\|a\|_2 + bc_2 + c_1\|B\| + \|\lambda\|_2\Big),$$

donc $\|\ddot{u}_f\|_2 \leq C$ avec $C = \|a\|_2 + bc_2 + c_1\|B\| + \|\lambda\|_2$. On pose $c_3 = c_2 + C$, alors $\|\dot{u}_f\|_{W^{1,2}} \leq c_3$.
Ceci achève la démonstration. ■

Le résultat suivant va jouer un rôle crucial dans les démonstration des théorèmes principaux de ce mémoire.

Proposition 2.1.5. *Supposons que les hypothèses* $\mathbf{H(A)}$ *et* $\mathbf{H(B)}$ *sont vérifiées et considérons l'application*

$$\begin{aligned}
\phi : S_\lambda &\to C(I,H) \times W^{1,2}(I,H) \\
f &\mapsto (u_f, \dot{u}_f).
\end{aligned}$$

Alors ϕ *est continue de* $w - S_\lambda$ *dans* $C(I,H) \times w - W^{1,2}(I,H)$ *et de* $w - S_\lambda$ *dans* $C(I,H) \times C(I,H)$.

Démonstration.
Puisque S_λ est un ensemble convexe, compact et métrisable dans $w - L^2(I,H)$, il suffit

de montrer la continuité séquentielle de l'application ϕ. Soit $(f_n)_n \subset S_\lambda$ tel que

$$f_n \to f \ dans\ w - L^2(I,H), \tag{2.10}$$

et $f \in S_\lambda$. La relation (2.10) est équivalente à , pour tout $\xi \in L^2(I,H)$

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n - f, \xi\rangle = 0. \tag{2.11}$$

On veut montrer que

$$u_{f_n} \to u_f \ dans\ C(I,H),$$

et que

$$\dot{u}_{f_n} \to \dot{u}_f \ faiblement\ dans\ W^{1,2}(I,H)\ et\ fortement\ dans\ C(I,H).$$

On pose $u_n = u_{f_n},\ u = u_f$ (respectivement, $\dot{u}_n = \dot{u}_{f_n},\ \dot{u} = \dot{u}_f$). Par la Proposition 2.1.4, la suite $(\dot{u}_n)_n$ est bornée dans $W^{1,2}(I,H)$. Or $W^{1,2}(I,H)$ est un espace de Hilbert, donc réflexif. Alors, d'après le Théorème d'Alaoglu (Théorème 1.8.2), l'ensemble $D = \{\dot{u}_n, n \in \mathbb{N}\}$ est faiblement relativement compact et d'après le Théorème Eberlein-Smulian (Théorème 1.8.1), D est faiblement relativement séquentiellement compact. Donc, par extraction d'une sous suite qu'on lui y garde la même notation, on peut supposer que

$$\dot{u}_n \to y \ dans\ w - W^{1,2}(I,H), \tag{2.12}$$

pour un certain $y \in W^{1,2}(I,H)$. D'autre part, puisque $W^{1,2}(I,H)$ s'injecte d'une manière compacte dans $L^2(I,H)$ (voire Théorème 1.8.5) alors on peut extraire à cette suite une sous suite, aussi notée $(\dot{u}_n)$, qui converge fortement dans $L^2(I,H)$ vers y (par l'unicité de la limite).

Montrons que $y = \dot{u}$. On a

$$\ddot{u}(t) + A(t,\dot{u}(t)) + Bu(t) = f(t)\ p.p\ sur\ I, \tag{2.13}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ddot{u}_n(t) + A(t,\dot{u}_n(t)) + Bu_n(t) = f_n(t)\ p.p\ sur\ I. \tag{2.14}$$

On soustrait l'équations (2.13) de l'équation (2.14) et on multiplie par $\dot{u}_n(t) - \dot{u}(t)$, pour obtenir

$$\begin{aligned}\Big\langle \ddot{u}_n(t) - \ddot{u}(t), \dot{u}_n(t) - \dot{u}(t)\Big\rangle + \Big\langle A(t,\dot{u}_n(t)) - A(t,\dot{u}(t)), \dot{u}_n(t) - \dot{u}(t)\Big\rangle \\ + \Big\langle Bu_n(t) - Bu(t), \dot{u}_n(t) - \dot{u}(t)\Big\rangle = \Big\langle f_n(t) - f(t), \dot{u}_n(t) - \dot{u}(t)\Big\rangle\ p.p\ sur\ I,\end{aligned} \tag{2.15}$$

En ulilisant le fait que $A(t,.)$ est monotone, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\dot{u}_n(t)-\dot{u}(t)\|^2+\Big\langle Bu_n(t)-Bu(t),\dot{u}_n(t)-\dot{u}(t)\Big\rangle \leq \Big\langle f_n(t)-f(t),\dot{u}_n(t)-\dot{u}(t)\Big\rangle \ p.p \ sur \ I,$$

et puisque B est linéaire continue, on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big\langle B(u_n(t)-x(t)),u_n(t)-u(t)\Big\rangle &= 2\Big\langle B(u_n(t)-u(t)),\dot{u}_n(t)-\dot{u}(t)\Big\rangle\\ &= 2\Big\langle Bu_n(t)-Bu(t),\dot{u}_n(t)-\dot{u}(t)\Big\rangle,\end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\dot{u}_n(t)-\dot{u}(t)\|^2+\frac{d}{dt}\Big\langle B(u_n(t)-u(t)),u_n(t)-u(t)\Big\rangle \leq \Big\langle f_n(t)-f(t),\dot{u}_n(t)-\dot{u}(t)\Big\rangle.$$

En intégrant entre 0 et t, et en utilisant le fait que B est coercif et que $u_n(0)=u(0)=u_0$, $\dot{u}_n(0)=\dot{u}(0)=v_0$, on aura

$$\frac{1}{2}\|\dot{u}_n(t)-\dot{u}(t)\|^2+\frac{c}{2}\|u_n(t)-u(t)\|^2 \leq \int_0^t \Big\langle f_n(s)-f(s),\dot{u}_n(s)-\dot{u}(s)\Big\rangle ds. \tag{2.16}$$

Par la relation (2.11) avec $\xi=\mathbb{I}_{[0,t]}(y-\dot{u})$, on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t \langle f_n(s)-f(s),y(s)-\dot{u}(s)\Big\rangle ds=0. \tag{2.17}$$

D'autre part, en posant pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\xi_n=\mathbb{I}_{[0,t]}(\dot{u}_n-y)$ on a

$$\|\xi_n\|_2=\Big(\int_0^t \|\dot{u}_n(s)-y(s)\|^2 ds\Big)^{1/2}\leq \|u_n-y\|_2\to 0 \ quand \ n\to\infty.$$

Par les propriétés de la limite faible, on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\langle f_n-f,\xi_n\Big\rangle=\int_0^t \Big\langle f_n(s)-f(s),\dot{u}_n(s)-y(s)\Big\rangle ds=0 \ quand \ n\to\infty.$$

De ce qui procède, par passage à la limite quand $n\to\infty$ dans le coté droit de la relation (2.16), on aura

$$\begin{aligned}\int_0^t \Big\langle f_n(s)-f(s),\dot{u}_n(s)-\dot{u}(s)\Big\rangle ds &= \int_0^t \Big\langle f_n(s)-f(s),\dot{u}_n(s)-y(s)\Big\rangle ds\\ &\quad+\int_0^t \Big\langle f_n(s)-f(s),y(s)-\dot{u}(s)\Big\rangle ds\to 0.\end{aligned}$$

Puis par (2.16), on obtient

$$u_n(t)\to u(t) \ dans \ H, \ t\in I. \tag{2.18}$$

Par le Théorème 1.15.5, on peut supposer que les applications u_n, $n\geq 1$ *et* u sont absolument continues, de plus, par la Proposition 1.15.4,

$$u_n(t)=u_0+\int_0^t \dot{u}_n(s)ds, \ t\in I,$$

et

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}(s)ds, \ t \in I. \tag{2.19}$$

Par (2.12), la suite $(\dot{u}_n)$ converge faiblement dans $L^2(I, H)$ vers y, et pour tout $t \in I$ et $x \in H$, on a $\mathbb{1}_{[0,t]}x \in L^2(I, H)$. Donc, pour chaque $t \in I$ fixé, en utilisant le Théorème 1.4.5,

$$\begin{aligned}
\Big\langle \lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{u}_n(s)ds, x\Big\rangle &= \lim_{n\to\infty} \Big\langle \int_0^t \dot{u}_n(s)ds, x\Big\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big\langle \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,t]}(s)\dot{u}_n(s)ds, x\Big\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \Big\langle \mathbb{1}_{[0,t]}(s)\dot{u}_n(s), x\Big\rangle ds \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \Big\langle \dot{u}_n(s), \mathbb{1}_{[0,t]}(s)x\Big\rangle ds \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big\langle \dot{u}_n, \mathbb{1}_{[0,t]}(s)x\Big\rangle \\
&= \langle y, \mathbb{1}_{[0,t]}x\rangle \\
&= \int_0^1 \Big\langle \dot{y}(s), \mathbb{1}_{[0,t]}(s)x\Big\rangle ds \\
&= \Big\langle \int_0^t y(s)ds, x\Big\rangle.
\end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{u}_n(s)ds = \int_0^t y(s)ds.$$

Donc,

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u_0 + \lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{u}_n(s)ds = u_0 + \int_0^t y(s)ds.$$

Par l'unicité de la limite, on déduit de (2.18) et (2.19) que $\dot{u}(t) = y(t)$ p.p sur I.

Maintenant de (2.16), il s'ensuit que, pour tout $t \in I$

$$\frac{1}{2}\|\dot{u}_n(t) - \dot{u}(t)\|^2 + \frac{c}{2}\|u_n(t) - u(t)\|^2 \leq \|\dot{u}_n - \dot{u}\|_2 \|f_n - f\|_2,$$

D'où

$$\frac{1}{2}\|\dot{u}_n - \dot{u}\|_C^2 + \frac{c}{2}\|u_n - u\|_C^2 \leq \|\dot{u}_n - \dot{u}\|_2 \|f_n - f\|_2.$$

Puisque $f_n \to f$ dans $w - S_\lambda$, il suit que $(\|f_n - f\|_2)$ est bornée, i.e, $\exists N > 0$ tq $\|f_n - f\|_2 \leq N$, $\forall n \geq 1$.

Donc

$$\frac{1}{2}\|\dot{u}_n - \dot{u}\|_C^2 + \frac{c}{2}\|u_n - u\|_C^2 \leq N\|\dot{u}_n - \dot{u}\|_2 \to 0 \ quand \ n \to \infty.$$

D'où, $u_n \to u$ dans $C(I, H)$ et $\dot{u}_n \to \dot{u}$ dans $C(I, H)$. ∎

2.2 Théorème d'existence de solutions

Lemme 2.2.1. *Supposons que les hypothèses* $\mathbf{H(A)}$ *et* $\mathbf{H(B)}$ *sont vérifiés. Si u est un solution du problème*

$$(\mathcal{P}_{\overline{co}(F)})\begin{cases} \ddot{u}(t) + A(t,\dot{u}(t)) + Bu(t) \in \overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t)))\ p.p, \\ u(0) = u_0,\ \ \dot{u}(0) = v_0, \end{cases}$$

Alors :

(i) $\|u(t)\| \leq M_1\ \forall t \in I$ *;*

(ii) $\|\dot{u}(t)\| \leq M_2\ \forall t \in I$ *;*

(iii) $\|\dot{u}\|_2 \leq M_3$ *;*

(iv) $\|\ddot{u}\|_2 \leq M_4$*, avec* $M_i > 0$*,* $i = 1,2,3,4$*.*

Démonstration.
On suit les mêmes étapes de démonstration de la Proposition 2.1.4. ■

On note $Q = \{y \in H :\ \|y\| \leq M_1\} = M_1\overline{B}_H$ et $Q' = \{y \in H :\ \|y\| \leq M_2\} = M_2\overline{B}_H$ avec $M_i > 0$, $i = 1,2$.
Soit $P : H \to Q$ l'opérateur de projection sur Q, définit par $P = Pr_Q(x)$, $\forall x \in H$ et soit $P_1 : H \to Q'$ l'opérateur de projection sur Q', définit par $P_1(x) = Pr_{Q'}(x)$, $\forall x \in H$. Ces deux opérateurs sont bien définis puisque Q et Q' sont convexes et fermés.
On définit la multi-application $F^* : I \times H \times H \rightrightarrows H$ à valeurs non vides et fermées par

$$F^*(t,x,y) = F(t,Px,P_1y),\ \forall (t,x,y) \in I \times H \times H.$$

Proposition 2.2.2. *Supposons que les hypothèses* $\mathbf{H(F)}$ *sont vérifiées, alors* $F^* : I \times H \times H \rightrightarrows H$ *est une multi-application à valeurs non vides et fermées vérifiant toutes les hypothèses de F. En particulier, pour tout* $(x,y) \in H^2$

$$|F^*(t,x,y)| \leq a_1(t) + b_1(\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}\ p.p\ sur\ I,$$

et

$$|F^*(t,x,y)| \leq a_1(t) + b_1(M_1^2 + M_2^2)^{1/2}\ p.p\ sur\ I. \tag{2.20}$$

Démonstration.
Soit $u, v \in C(I,H)$. On commence par montrer que $F^*(.,u(.),v(.))$ est mesurable. Puisque

P et P_1 sont continues (voir le Théorème 1.16.2), on obtient que $Pu, P_1 v \in C(I, H)$. Donc, en utilisant l'hypothèse $\mathbf{H}(\mathbf{F})(1)$, la multi-application $t \mapsto F(t, Pu(t), P_1 v(t))$ est mesurable. D'où la mesurabilité de la multi-application $F^*(., u(.), v(.))$.

• Montrons que la multi-application $(x, y) \mapsto \overline{co}(F^*(t, x, y))$ est $\mathcal{H}$-continue p.p sur I. Soit $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites de H qui convergent vers x_0 et y_0 respectivement. Puisque P et P_1 sont continues, alors les deux suites $(Px_n)_n$ et $(P_1 y_n)_n$ convergent vers Px_0 et $P_1 y_0$ respectivement.

Donc, en utilisant l'hypothèse $\mathbf{H}(\mathbf{F})(2)$, on a pour presque tout $t \in I$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}\Big(\overline{co}(F^*(t, x_0, y_0)), \overline{co}(F^*(t, x_n, y_n))\Big) \\
&\qquad\qquad = \lim_{n\to\infty} \mathcal{H}\Big(\overline{co}(F(t, Px_0, P_1 y_0)), \overline{co}(F(t, Px_n, P_1 y_n))\Big) = 0
\end{aligned}$$

D'où, la multi-application $(x, y) \mapsto \overline{co}(F^*(t, x, y))$ est $\mathcal{H}$-continue.

De plus, pour tout $x, y \in H$ et pour presque tout $t \in I$, l'hypothèse $\mathbf{H}(\mathbf{F})(3)$ donne

$$\begin{aligned}
|F^*(t, x, y)| = |F(t, Px, P_1 y)| &\leq a_1(t) + b_1(\|Px\|^2 + \|P_1 y\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq a_1(t) + b_1(\|M_1\|^2 + \|M_2\|^2)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
|F^*(t, x, y)| = |F(t, Px, P_1 y)| &\leq a_1(t) + b_1(\|Px\|^2 + \|P_1 y\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq a_1(t) + b_1(\|x\|^2 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Dans la dernière inégalité, on a utilisé le fait que P et P_1 sont 1-Lipschitziennes (voir Théorème 1.16.2) et que $0 \in Q$ et $0 \in Q'$. ■

Remarque 2.2.1.

Si on considère les inclusions (2.1)-(2.3), en remplaçant F par F^* et puisque F^* vérifie les mêmes hypothèses de F, il suit que les estimations du Lemme 2.2.1 sont vérifiées pour les solutions de l'inclusion (2.2) *avec F^* au lieu de F. D'où, si u est solution de (2.1)(resp (2.2), (2.3)) alors $\|u(t)\| \leq M_1$ et $\|\dot{u}(t)\| \leq M_2$, $\forall t \in I$. Donc $u(t) \in Q$ et $\dot{u}(t) \in Q'$, $\forall t \in I$ et on obtient que, pour tout $t \in I$*

$$F^*(t, u(t), v(t)) = F(t, Pu(t), P_1 \dot{u}(t)) = F(t, u(t), \dot{u}(t)).$$

Par conséquent, u est aussi solution de (2.1)(resp(2.2) et (2.3)) avec F^* au lieu de F. Même chose pour l'inverse.

Donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_F(u_0, v_0) = \mathcal{R}_{F^*}(u_0, v_0) \ et\ \mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0, v_0) &= \mathcal{R}_{\overline{co}(F^*)}(u_0, v_0), \\
\mathcal{R}_{ext(\overline{co}(F))}(u_0, v_0) &= \mathcal{R}_{ext(\overline{co}(F^*))}(u_0, v_0). \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

En prenant (2.21) en considération, on peut supposer, sans perte généralité que l'estimation (2.20) est vérifiée pour F.
Dans ce qui suit, nous supposons que les hypothèses $\mathbf{H}(\mathbf{A})$ et $\mathbf{H}(\mathbf{B})$ sont vérifiées.

Théorème 2.2.3. *Supposons que l'hypothèse* $\mathbf{H}(\mathbf{F})$ *est vérifiée, alors il existe une fonction* $u \in C(I,H)$ *avec* $\dot{u} \in W^{1,2}(I,H)$ *tel que*

$$(u,\dot{u}) \in \mathcal{R}_{ext(\overline{co}(F))}(u_0,v_0) \cap \mathcal{R}_F(u_0,v_0) \subset \mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0,v_0).$$

De plus, $\mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0,v_0)$ *est un sous ensemble compact de* $C(I,H) \times w - W^{1,2}(I,H)$ *et de* $C(I,H) \times C(I,H)$.

Démonstration.
On définit l'ensemble

$$S_\lambda = \Big\{ f \in L^2(I,H) : \|f(t)\| \leq \lambda(t) \ p.p \ sur \ I \Big\}, \tag{2.22}$$

avec $\lambda(t) = a_1(t) + b_1(M_1^2 + M_2^2)^{\frac{1}{2}}$, $\forall t \in I$, donc $\lambda \in L^2(I,\mathbb{R}_+)$.
On pose $\mathcal{R}(u_0,v_0) = \{\phi(f) : \ f \in S_\lambda\}$.
Puisque S_λ est un sous ensemble convexe, compact dans $w - L^2(I,H)$(par la Proposition 2.1.3), en utilisant la Proposition 2.1.5, on obtient que $\mathcal{R}(u_0,v_0) = \phi(S_\lambda)$ est compact dans $C(I,H) \times w - W^{1,2}(I,H)$ et dans $C(I,H) \times C(I,H)$.
Par le Théorème 1.11.34, il existe une fonction continue $g : \mathcal{R}(u_0,v_0) \to L^2(I,H)$ telle que, pour chaque $(u,\dot{u}) \in \mathcal{R}(u_0,v_0)$ on a

$$g(u,\dot{u})(t) \in F(t,u(t),\dot{u}(t)) \cap ext(\overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t)))) \ p.p \ sur \ I,$$

c'est à dire,

$$g(u,\dot{u}) \in S^2_{F(.,u(.),\dot{u}(.))} \cap S^2_{ext(\overline{co}(F(.,u(.),\dot{u}(.))))}. \tag{2.23}$$

Soit $\mathcal{A} : S_\lambda \to L^2(I,H)$ un opérateur défini par $\mathcal{A}(f) = g \circ \phi(f)$, $f \in S_\lambda$. Comme g est continue de $\mathcal{R}(u_0,v_0)$ dans $L^2(I,H)$ et puisque ϕ est continue de $w - S_\lambda$ dans $C(I,H) \times C(I,H)$, et $\phi(S_\lambda) = \mathcal{R}(u_0,v_0)$, alors $\mathcal{A}$ est bien défini et continu de $w - S_\lambda$ dans $L^2(I,H)$. Donc $\mathcal{A}$ est continue de $w - S_\lambda$ dans $w - L^2(I,H)$. En effet, si $(f_n) \subset S_\lambda$ tel que $f_n \to f$ faiblement dans $L^2(I,H)$, alors $\mathcal{A}(f_n) \to \mathcal{A}(f)$ fortement, et donc faiblement dans $L^2(I,H)$.
D'autre part, de (2.23), (2.21) et (2.22), $g(\mathcal{R}(u_0,v_0)) \subset S_\lambda$. Donc, $\mathcal{A}$ est continu de $w - S_\lambda$ dans $w - S_\lambda$.
On applique le Théorème du point fixe de Schauder-Tikhonov (Théorème 1.14.1) pour

déduire qu'il existe $f_* \in S_\lambda$ tel que $f_* = \mathcal{A}(f_*) = g \circ \phi(f_*)$.
On pose $(u_*, \dot{u}_*) = \phi(f_*)$, donc, $(u_*, \dot{u}_*)$ est l'unique solution du problème

$$\ddot{u}_*(t) + A(t, \dot{u}_*(t)) + Bu_*(t) = g(u_*, \dot{u}_*) \ p.p \ sur \ I,$$

et

$$u_*(0) = u_0, \dot{u}_*(0) = v_0.$$

Or,

$$g(u_*, \dot{u}_*) \in S^2_{F(.,u(.),\dot{u}(.))} \cap S^2_{ext(\overline{co}(F(.,u(.),\dot{u}(.))))} \subset S^2_{\overline{co}(F(.,u(.),\dot{u}(.)))}.$$

Donc,

$$(u_*, \dot{u}_*) \in \mathcal{R}_F(u_0, v_0) \cap \mathcal{R}_{ext(\overline{co}(F))}(u_0, v_0) \subset \mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(v_0, v_0). \tag{2.24}$$

Nous montrons maintenant que $\mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0, v_0)$ est compact dans $C(I, H) \times w - W^{1,2}(I, H)$ et dans $C(I, H) \times C(I, H)$.
De (2.20) et (2.22), il s'ensuit que $\mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0, v_0) \subset \mathcal{R}(u_0, v_0)$. Par conséquent, $\mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0, v_0)$ est relativement compact dans $C(I, H) \times w - W^{1,2}(I, H)$ et dans $C(I, H) \times C(I, H)$.
Il suffit donc de montrer qu'il est fermé dans $C(I, H) \times w - W^{1,2}(I, H)$ et dans $C(I, H) \times C(I, H)$. Soit $((u_n, \dot{u}_n))_n \subset \mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0, v_0)$ une suite que converge vers (u, v) dans $C(I, H) \times w - W^{1,2}(I, H)$ et montrons que $\dot{u} = v$ et que $(u, v) \in \mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0, v_0)$.
Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver une fonction $f_n \in S^2_{\overline{co}(F(.,u(.),\dot{u}(.)))}$, tel que $(u_n, \dot{u}_n) = \phi(f_n)$.
Puisque $(f_n) \subset S_\lambda$ et S_λ est faiblement compact dans $L^2(I, H)$, on peut lui extraire une sous suite, aussi notée (f_n), qui converge faiblement dans $L^2(I, H)$ vers une certaine application $f \in S_\lambda$.
Or, par la Proposition 2.1.5, la suite $(u_n, \dot{u}_n) = \phi(f_n)$ converge dans $C(I, H) \times w - W^{1,2}(I, H)$ vers $\phi(f) = (u_f, \dot{u}_f)$, l'unique solution de $(\mathcal{P}_f)$ et par l'unicité de la limite $u = u_f$ et $v = \dot{u}_f$, i.e, $\dot{u} = v$ et $(u, \dot{u}) \in \mathcal{R}(u_0, v_0)$, de plus, $\dot{u}_n \to \dot{u}$ dans $C(I, H)$. Comme $f_n \to f$ faiblement dans $L^2(I, H)$, par le théorème de Banach-Mazur (Théorème 1.8.4), il existe une suite (φ_k) telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_k \in co\{f_n, n \geq k\}$ et φ_k converge fortement dans $L^2(I, H)$ vers f. Donc, il existe un sous ensemble I_0 de I de mesure nulle et une sous suite (k_p) de $\mathbb{N}$ strictement croissante tel que pour tout $t \in I \backslash I_0$, $(\varphi_{k_p}(t))$ converge vers $f(t)$. Donc, pour $t \in I \backslash I_0$ on a

$$\begin{aligned} f(t) &\in \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{\{\varphi_{k_{p'}}(t), p' \geq p\}} \\ &\in \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{co}\Big\{f_n(t), \ n \geq k_p\Big\} \\ &\subset \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{co}\Big\{\overline{co}(F(t, u_n(t), \dot{u}_n(t))), \ n \geq k_p\Big\}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

D'autre part, en utilisant l'hypothèse $\mathbf{H}(\mathbf{F})(2)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}\Big(\overline{co}(F(t,u_n(t),\dot{u}_n(t))), \overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t)))\Big) = 0.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $m_n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $m \geq m_n$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}\Big(\overline{co}(F(t,u_m(t),\dot{u}_m(t))), \overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t)))\Big) \leq \frac{1}{n}\\
&\Rightarrow e\Big(\overline{co}(F(t,u_m(t),\dot{u}_m(t))), \overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t)))\Big) \leq \frac{1}{n}\\
&\Rightarrow \sup_{x\in\overline{co}(F(t,u_m(t),\dot{u}_m(t)))} d(x, \overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t)))) \leq \frac{1}{n}\\
&\Rightarrow d\Big(x, \overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t)))\Big) \leq \frac{1}{n},\ \forall x \in \overline{co}(F(t,u_m(t),\dot{u}_m(t))).
\end{aligned}$$

D'où,

$$\overline{co}(F(t,u_m(t),\dot{u}_m(t))) \subset V\Big(\overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t))), \frac{1}{n}\Big). \tag{2.26}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $p_n \in \mathbb{N}$ tel que $k_{p_n} \geq m_n$, donc (2.26) est vérifiée pour tout $m \geq k_{p_n}$, d'où

$$\bigcup_{m\geq k_{p_n}} \overline{co}(F(t,u_m(t),\dot{u}_m(t))) \subset V\Big(\overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t))), \frac{1}{n}\Big),$$

ceci implique que

$$\overline{co} \bigcup_{m\geq k_{p_n}} \overline{co}(F(t,u_m(t),\dot{u}_m(t))) \subset V\Big(\overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t))), \frac{1}{n}\Big),\ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

car $V\Big(\overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t))), \frac{1}{n}\Big)$ est convexe et fermé. D'où

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{co} \bigcup_{m\geq k_{p_n}} \overline{co}(F(t,u_m(t),\dot{u}_m(t)) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} V\Big(\overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t))), \frac{1}{n}\Big).$$

De plus,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} V\Big(\overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t))), \frac{1}{n}\Big) = \overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t))) \tag{2.27}$$

En effet, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t))) \subset V\Big(\overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t))), \frac{1}{n}\Big).$$

D'où

$$\overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t))) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} V\Big(\overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t))), \frac{1}{n}\Big). \tag{2.28}$$

D'autre part, pour tout $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} V\Big(\overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t))), \frac{1}{n}\Big)$, on a

$$\begin{aligned}
&x \in V\Big(\overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t))), \frac{1}{n}\Big),\ \forall n \in \mathbb{N}^*\\
&\Rightarrow d\Big(x, \overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t)))\Big) \leq \frac{1}{n},\ \forall n \in \mathbb{N}^*
\end{aligned} \tag{2.29}$$

En passant à la limite dans (2.29) et puisque la distance est positive, on trouve que $d\Big(x, \overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t)))\Big) = 0$. D'où $x \in \overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t)))$. Donc, la deuxième inclusion est vérifier Par conséquent, on obtient (2.27), c'est à dire,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{co} \bigcup_{m\geq k_n} \Big\{\overline{co}(F(t,u_m(t),\dot{u}_m(t))),\ n \geq k_p\Big\} \subset \overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t))).$$

Or,

$$\bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{co}\Big\{\overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t))), n \geq k_p\Big\} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{co}\Big\{\overline{co}(F(t,u_m(t),\dot{u}_m(t))), m \geq k_{p_n}\Big\}$$

Ainsi, de (2.25), on déduit que $f(t) \in \overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t))$. Par conséquent, $\mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0,v_0)$ est fermé dans $C(I,H) \times w - W^{1,2}(I,H)$. La fermeture de l'ensemble $\mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0,v_0)$ dans $C(I,H) \times C(I,H)$ se démontre par les mêmes arguments.
Ceci achève la démonstration.

■

CHAPITRE 3

THÉORÈMES DE RELAXATION

Dans ce chapitre, nous nous intéressons dans une première partie, à l'approximation des éléments de l'ensemble $\mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0, v_0)$ par ceux de l'ensemble $\mathcal{R}_F(u_0, v_0) \cap \mathcal{R}_{ext(\overline{co}(F))}(u_0, v_0)$, le résultat obtenue est dit théorème de densité. Aussi, dans une deuxième partie, on présente un théorème de co-densité, c'est à dire, on s'intéresse à l'approximation des éléments de $\mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0, v_0)$ par ceux éléments de l'ensemble $\mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0, v_0) \backslash \mathcal{R}_F(u_0, v_0)$.

3.1 Théorème de densité

Dans cette section, nous supposons l'hypothèse suivante sur la multi-application F.

Hypothèse ($\mathbf{H_1(F)}$). *Il existe une fonction positive $k \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$ telle que*

$$\mathcal{H}\Big(\overline{co}(F(t, x, y)), \overline{co}(F(t, x_1, y_1))\Big) \leq k(t)(\|x - x_1\| + \|y - y_1\|),$$

pour tous (t, x, y), $(t, x_1, y_1) \in I \times H \times H$.

Théorème 3.1.1. *Supposons que les hypothèses $\mathbf{H(F)}(1)$, $\mathbf{H(F)}(3)$ et $\mathbf{H_1(F)}$ sont vérifiées. Alors, pour chaque $(u, \dot{u}) \in \mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0, v_0)$, il existe une suite $((u_n, \dot{u}_n))_{n \geq 1} \subset \mathcal{R}_{ext(\overline{co}(F))}(u_0, v_0) \cap \mathcal{R}_F(u_0, v_0)$ qui convergeant vers $(u, \dot{u})$ dans $C(I, H) \times w - W^{1,2}(I, H)$ et dans $C(I, H) \times C(I, H)$.*

Démonstration.

Soit $(u_*, \dot{u}_*) \in \mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0, v_0)$ fixé. Alors, il existe $f_* \in S^2_{\overline{co}(F(.,u_*(.),\dot{u}_*(.)))}$ telle que $(u_*, \dot{u}_*) = \phi(f_*)$, c'est à dire,

$$\ddot{u}_*(t) + A(t, \dot{u}_*(t)) + Bu_*(t) = f_*(t) \quad p.p\ sur\ I. \tag{3.1}$$

et

$$u_*(0) = u_0,\ \dot{u}_*(0) = v_0.$$

Soit $(u, \dot{u}) \in \mathcal{R}(u_0, v_0)$ et $\varepsilon > 0$. On considère la multi-application $\Delta_\varepsilon(t) : I \rightrightarrows H$ définie par

$$\Delta_\varepsilon(t) = \Big\{ y \in \overline{co}(F(t, u(t), \dot{u}(t))) : \|f_*(t) - y\| < \varepsilon + d(f_*(t), \overline{co}(F(t, u(t), \dot{u}(t)))) \Big\}.$$

- Montrons que $\Delta_\varepsilon(t)$ est à valeurs non vides.

Soit $t \in I$. On a

$$d(f_*(t), \overline{co}(F(t, u(t), \dot{u}(t)))) = \inf_{y \in \overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t)))} \|f_*(t) - y\|,$$

et par la définition de la borne inférieur, il existe $y_\varepsilon \in \overline{co}(F(t, u(t), \dot{u}(t)))$ tel que

$$\|f_*(t) - y_\varepsilon\| < \varepsilon + d(f_*(t), \overline{co}(F(t, u(t), \dot{u}(t)))).$$

Alors $\Delta_\varepsilon(.)$ est à valeurs non vides. De plus, $Gr(\Delta_\varepsilon(.)) \in \mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(H)$, en effet

$$\begin{aligned} Gr(\Delta_\varepsilon) &= \Big\{ (t, y) \in I \times H : y \in \Delta_\varepsilon(t) \Big\} \\ &= \Big\{ (t, y) \in I \times H : y \in \overline{co}(F(t, u(t), \dot{u}(t)))\ et\ \|f_*(t) - y\| < \varepsilon \\ &+ d\Big(f_*(t), \overline{co}(F(t, u(t), \dot{u}(t)))\Big) \Big\} \\ &= \Big\{ (t, y) \in I \times H : y \in \overline{co}(F(t, u(t), \dot{u}(t))) \Big\} \\ &\bigcap \Big\{ (t, y) \in I \times H : \|f_*(t) - y\| < \varepsilon + d\Big(f_*(t), \overline{co}(F(t, u(t), \dot{u}(t)))\Big) \Big\}. \end{aligned}$$

On pose, $\gamma : I \times H \to \mathbb{R}$ définie par

$$\gamma(t, y) = \|f_*(t) - y\| - d\Big(f_*(t), \overline{co}(F(t, u(t), \dot{u}(t)))\Big).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} d\Big(f_*(t), \overline{co}(F(t, u(t), \dot{u}(t)))\Big) &= \inf_{w \in \overline{co} F(t,u(t),\dot{u}(t))} \|f_*(t) - w\| \\ &\leq \|f_*(t) - y\|,\ \forall\ y \in \overline{co}(F(t, u(t), \dot{u}(t))), \end{aligned}$$

c'est à dire, γ est à valeurs positives et donc

$$\begin{aligned} Gr(\Delta_\varepsilon) &= \Big\{(t,y) \in I \times H : y \in \overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t)))\Big\} \bigcap \Big\{(t,y) \in I \times H : \gamma(t,y) < \varepsilon\Big\} \\ &= Gr\Big(\overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t)))\Big) \bigcap \gamma^{-1}(]0,\varepsilon[)). \end{aligned}$$

Comme $F(.,u(.),\dot{(.)})$ est mesurable, par le Théorème 1.11.17 , $t \mapsto \overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t)))$ est mesurable.

En suite, vu que $\mathcal{L}(I)$ est μ-complet, par le Lemme 1.11.20, on conclut que $Gr(\overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t)))) \in \mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(H)$. Donc, par la Proposition 1.11.14 et la mesurabilité de f_* on obtient la mesurabilité de la fonction distance $t \mapsto d\Big(f_*(t), \overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t)))\Big)$. Par conséquent $\gamma(.,.)$ est une application de Carathéodory. Donc par le Lemme 1.2.9, $\gamma(.,.)$ est $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(H)$-mesurable, alors $\gamma^{-1}(]0,\varepsilon[) \in \mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(H)$. On conclut que $Gr(\Delta_\varepsilon) \in \mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(H)$. Par le Lemme 1.11.20, Δ_ε est $\mathcal{L}(I)$-mesurable.

En appliquant le théorème d'existence de sélection mesurable (Théorème 1.11.21), il existe une application $\varphi : I \to H$ mesurable telle que $\varphi(t) \in \Delta_\varepsilon(t)$, $\forall t \in I$, c'est à dire, $\varphi(t) \in \overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t)))$ et $\|f_*(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon + d\Big(f_*(t), \overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t)))\Big)$.

On définit alors la multi-application $G_\varepsilon : \mathcal{R}(u_0,v_0) \rightrightarrows L^1(I,H)$ par

$$G_\varepsilon(u,\dot{u}) = \Big\{\varphi \in S^2_{\overline{co}(F(.,u(.),\dot{u}(.)))} : \|f_*(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon + d(f_*(t), \overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t)))\ p.p\ t \in I\Big\}.$$

De ce qui procède, $G_\varepsilon(u,\dot{u}) \neq \emptyset$, $\forall (u,\dot{u}) \in \mathcal{R}(u_0,v_0)$. Considérons la multi-application $N : \mathcal{R}(u_0,v_0) \rightrightarrows L^1(I,H)$ définie par $N(u,\dot{u}) = S^1_{\overline{co}(F(.,u(.),\dot{u}(.)))} = S^2_{\overline{co}(F(.,u(.),\dot{u}(.)))}$. Par l'hypothèse $\mathbf{H}(\mathbf{F})(1)$ et la Proposition 1.11.29, la multi-application $\overline{co}(F(.,u(.),\dot{u}(.)))$ est $\mathcal{L}(I)$-mesurable pour tout $(u,\dot{u}) \in \mathcal{R}(u_0,v_0)$ et par l'hypothèse $\mathbf{H}(\mathbf{F})(3)$, le Lemme 1.11.26 et la Proposition 1.11.27, N est à valeurs non vides, fermées et décomposables.

- Montrons qu'elle est semi-continue inférieurement. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout $\xi \in L^1(I,H)$ la fonction positive $(u,\dot{u}) \mapsto d(\xi, N(u,\dot{u})) \in \mathbb{R}_+$ est semi-continue supérieurement sur $\mathcal{R}(u_0,v_0)$. Fixons $\alpha \geq 0$ et considérons l'ensemble

$$\Theta_\alpha = \Big\{(u,\dot{u}) \in \mathcal{R}(u_0,v_0) : d(\xi, N(u,\dot{u})) \geq \alpha\Big\}.$$

Supposons que $(u_n,\dot{u}_n) \subset \Theta_\alpha$ et $u_n \to u$, $\dot{u}_n \to \dot{u}$ dans $\mathcal{R}(u_0,v_0)$.

Notons que, sous l'hypothèse $\mathbf{H_1}(\mathbf{F})$, $\overline{co}(F)$ est $\mathcal{H}$-continue, donc $\mathcal{H}$-semi-continue inférieurement. D'où, par la Proposition 1.11.9, $\overline{co}(F)$ est semi-continue inférieurement et par le Lemme 1.11.5, la fonction positive $(x,y) \mapsto d(\xi(t), \overline{co}(F(t,x,y))$ est semi-continue supérieurement

$\forall t \in I$. Donc, en utilisant le Théorème 1.11.25, on peut déduire ce qui suit

$$\begin{aligned}
\alpha \leq \limsup_{n\to\infty} d(\xi, N(u_n, \dot{u}_n)) &= \limsup_{n\to\infty} \inf \Big\{ \|\xi - v\| : v \in N(u_n, \dot{u}_n) \Big\} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \inf \Big\{ \int_0^1 \|\xi(t) - v(t)\| dt : v \in N(u_n, \dot{u}_n) \Big\} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \Big\{ \int_0^1 \inf \|\xi(t) - y\| : y \in \overline{co}(F(t, u_n(t), \dot{u}_n(t))) \Big\} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \Big(\int_0^1 d(\xi(t), \overline{co}(F(t, u_n(t), \dot{u}_n(t))))dt \Big),
\end{aligned}$$

et par le lemme de Fatou, on trouve

$$\begin{aligned}
\alpha \leq \int_0^1 \limsup_{n\to\infty} d\Big(\xi(t), \overline{co}(F(t, u_n(t), \dot{u}_n(t)))\Big)dt &\leq \int_0^1 d\Big(\xi(t), \overline{co}(F(t, u_n(t), \dot{u}_n(t)))\Big)dt \\
&= \int_0^1 \inf \Big\{ \|\xi(t) - y\| : y \in \overline{co}(F(t, u_n(t), \dot{u}_n(t))) \Big\} dt \\
&= \inf \left\{ \int_0^1 \|\xi(t) - v(t)\| dt : v \in N(u, \dot{u}) \right\} \\
&= \inf \left\{ \int_0^1 \|\xi - v\|_1 dt : v \in N(u, \dot{u}) \right\} \\
&= d(\xi, N(u, \dot{u})),
\end{aligned}$$

de sorte que $(u, \dot{u}) \in \Theta_\alpha$, et ceci prouve que l'ensemble Θ_α est fermée. Donc, par la Proposition 1.3.6, on obtient la semi-continuité inférieure de N.

D'après la Proposition 1.11.35, la multi-application $(u, \dot{u}) \mapsto G_\varepsilon(u, \dot{u})$ est semi continue inférieurement à valeurs non vides et décomposables, donc $(u, \dot{u}) \mapsto \overline{G_\varepsilon(u, \dot{u})}$ l'est aussi. En appliquant le Théorème d'existence de sélection continue (Théorème 1.11.23), nous obtenons une application continue $h_\varepsilon : \mathcal{R}(u_0, v_0) \to L^1(I, H)$ telle que $h_\varepsilon(u, \dot{u}) \in \overline{G_\varepsilon(u, \dot{u})}$, pour tout $(u, \dot{u}) \in \mathcal{R}(u_0, v_0)$. Donc, pour tout $(u, \dot{u}) \in \mathcal{R}(u_0, v_0)$,

$$h_\varepsilon(u, \dot{u})(t) \in \overline{co}(F(t, u(t), \dot{u}(t))) \ p.p\ t \in \ I. \tag{3.2}$$

et

$$\|f_*(t) - h_\varepsilon(u, \dot{u})(t)\| \leq \varepsilon + d(f_*(t), \overline{co}(F(t, u(t), \dot{u}(t)))) \ p.p\ sur\ I. \tag{3.3}$$

Puisque $f_* \in \overline{co}(F(t, u_*(t), \dot{u}_*(t)))$, par (3.3) et l'hypothèse ($\mathbf{H_1(F)}$), on a pour presque tout $t \in I$

$$\begin{aligned}
\|f_*(t) - h_\varepsilon(u, \dot{u})(t)\| &\leq \varepsilon + \mathcal{H}\Big(\overline{co}(F(t, u_*(t), \dot{u}_*(t))), \overline{co}(F(t, u(t), \dot{u}(t)))\Big) \\
&\leq \varepsilon + k(t)\Big(\|u_*(t) - u(t)\| + \|\dot{u}_*(t) - \dot{u}(t)\|\Big).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Montrons que h_ε est continue de $\mathcal{R}(u_0, v_0)$ dans $L^2(I, H)$.

Par (3.2) et (2.20), pour tout $(u, \dot{u}) \in \mathcal{R}(u_0, v_0)$,

$$\|h_\varepsilon(u, \dot{u})\| \leq \lambda(t).$$

Donc $h_\varepsilon(u,\dot u) \in S_\lambda$ pour tout $(u,\dot u) \in \mathcal{R}(u_0,v_0)$.
Soit $((u_n,\dot u_n)) \subset \mathcal{R}(u_0,v_0)$ telle que $(u_n,\dot u_n) \to (u,\dot u)$ dans $C(I,H)\times C(I,H)$. Puisque h_ε est continue de $\mathcal{R}(u_0,v_0)$ dans $L^1(I,H)$, on

$$h_\varepsilon(u_n,\dot u_n) \to h_\varepsilon(u,\dot u) \; dans \; L^1(I,H).$$

Donc, on peut extraire une sous suite, aussi noté $(h_\varepsilon(u_n,\dot u_n))$, qui converge vers $h_\varepsilon(u,\dot u)$ presque partout sur I.
Or, $(h_\varepsilon(u_n,\dot u_n))_n \subset S_\lambda$, donc, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.5.1), on a que $(h_\varepsilon(u_n,\dot u_n))_n$ converge vers $h_\varepsilon(u,\dot u)$ dans $L^2(I,H)$, c'est à dire, h_ε est continue de $\mathcal{R}(u_0,v_0)$ dans $L^2(I,H)$.
D'après le Théorème 1.11.33, il existe une application continue $g_\varepsilon : \mathcal{R}(u_0,v_0) \to L^2(I,H)$ telle que

$$g_\varepsilon(u,\dot u)(t) \in F(t,u(t),\dot u(t)) \cap ext(\overline{co}(F(t,u(t),\dot u(t)))) \; p.p \; sur \; I$$

et

$$\|h_\varepsilon(u,\dot u) - g_\varepsilon(u,\dot u)\|_w < \varepsilon, \; \forall \, (u,\dot u) \in \mathcal{R}(u_0,v_0).$$

Maintenant, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon = 1/n$. On pose pour tout $n \geq 1$, $g_\varepsilon = g_n$ et $h_\varepsilon = h_n$, alors

$$g_n(u,\dot u)(t) \in F(t,u(t),\dot u(t)) \cap ext(\overline{co}(F(t,u(t),\dot u(t)))) \;\; p.p \; sur \; I, \tag{3.5}$$

et

$$\|h_n(u,\dot u) - g_n(u,\dot u)\|_w < 1/n, \; \forall \, (u,\dot u) \in \mathcal{R}(u_0,v_0).$$

Notons que la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 quand $n \to \infty$.
On définit un opérateur $\mathcal{A}_{g_n} : S_\lambda \to S_\lambda$ tel que, pour tout $f \in S_\lambda$, $\mathcal{A}_{g_n}(f) = g_n \circ \phi(f)$.
Par les même arguments utilisés dans la démonstration du Théorème 2.2.3 et en appliquant le Théorème du point fixe de Schauder-Tikhonov (Théorème 1.14.1), on obtient un point fixe $f_n \in S_\lambda$ telle que $\mathcal{A}_{g_n}(f_n) = (g_n \circ \phi)(f_n) = f_n$. On pose $(u_n,\dot u_n) = \phi(f_n)$, c'est à dire

$$\ddot u_n(t) + A(t,\dot u_n(t)) + Bu_n(t) = g_n(u_n,\dot u_n)(t) \; p.p \; sur \; I. \tag{3.6}$$

Donc, par (3.5) on a

$$(u_n,\dot u_n) \in \mathcal{R}_F(u_0,v_0) \cap \mathcal{R}_{ext(\overline{co}(F))}(u_0,v_0) \subset \mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0,v_0).$$

Or, $\mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0,v_0)$ est compact dans $C(I,H)\times w - W^{1,2}(I,H)$ et dans $C(I,H)\times C(I,H)$.
Donc,on peut extraire à $((u_n,\dot u_n))_n$ une sous suite, quand lui garde la même notation, qui converge vers un certain $\mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0,v_0)$ dans $C(I,H)\times w - W^{1,2}(I,H)$ et dans $C(I,H)\times C(I,H)$.

- Montrons que $u_* = u$ et $\dot{u}_* = \dot{u}$.

Fixons $t \in I$. On soustrait l'équation (3.1) de l'équation (3.6), on obtient

$$\ddot{u}_n(t) - \ddot{u}_*(t) + A(t, \dot{u}_n(t)) - A(t, \dot{u}_*(t)) + Bu_n(t) - Bu_n(t) = g_n(u_n, \dot{u}_n)(t) - f_*(t) \quad p.p \ sur \ I.$$

En multipliant par $\dot{u}_n(t) - \dot{u}_*(t)$, on trouve

$$\begin{aligned} &\langle \ddot{u}_n(t) - \ddot{u}_*(t) + A(t, \dot{u}_n(t)) - A(t, \dot{u}_*(t)) + Bu_n(t) - Bu_n(t), \dot{u}_n(t) - \dot{u}_*(t)\rangle \\ &\qquad = \langle g_n(u_n, \dot{u}_n)(t) - f_*(t), \dot{u}_n(t) - \dot{u}_*(t)\rangle \quad p.p \ sur \ I. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $A(t, .)$ est monotone et que B coercif, on aura

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\dot{u}_n(t) - \dot{u}_*(t)\|^2 + \frac{c}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t) - u_*(t)\|^2 \leq \Big\langle g_n(u_n, \dot{u}_n)(t) - f_*(t), \dot{u}_n(t) - \dot{u}_*(t)\Big\rangle \ p.p \ sur \ I.$$

En intégrant entre 0 et t, et sachant que $\dot{u}_n(0) = \dot{u}_*(0) = v_0$ et $u_n(0) = u_*(0) = u_0$, on obtient

$$\frac{1}{2}\|\dot{u}_n(t) - \dot{u}_*(t)\|^2 + \frac{c}{2}\|u_n(t) - u_*(t)\|^2 \leq \int_0^t \Big\langle g_n(u_n, \dot{u}_n)(s) - f_*(s), \dot{u}_n(s) - \dot{u}_*(s)\Big\rangle ds \ p.p \ sur \ I.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|\dot{u}_n(t) - \dot{u}_*(t)\|^2 + \frac{c}{2}\|u_n(t) - u_*(t)\|^2 &\leq \int_0^t \Big\langle g_n(u_n, \dot{u}_n)(s) - h_n(u_n, \dot{u}_n)(s) \\ &\quad + h_n(u_n, \dot{u}_n)(s) - f_*(s), \dot{u}_n(s) - \dot{u}_*(s)\Big\rangle ds \\ &= \int_0^t \Big\langle g_n(u_n, \dot{u}_n)(s) - h_n(u_n, \dot{u}_n)(s), \dot{u}_n(s) - \dot{u}_*(s)\Big\rangle ds \\ &\quad + \int_0^t \Big\langle h_n(u_n, \dot{u}_n)(s) - f_*(s), \dot{u}_n(s) - \dot{u}_*(s)\Big\rangle ds \\ &= \int_0^t \Big\langle g_n(u_n, \dot{u}_n)(s) - h_n(u_n, \dot{u}_n)(s), \dot{u}_n(s) - \dot{u}_*(s)\Big\rangle ds \\ &\quad + \int_0^t \|\dot{u}_n(s) - \dot{u}_*(s)\|\|h_n(u_n, \dot{u}_n)(s) - f_*(s)\| ds. \end{aligned}$$

D'après (3.4), on a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\|\dot{u}_n(t) - \dot{u}_*(t)\|^2 + \frac{c}{2}\|u_n(t) - u_*(t)\|^2 \\ &\leq \int_0^t \Big\langle g_n(u_n, \dot{u}_n)(s) - h_n(u_n, \dot{u}_n)(s), \dot{u}_n(s) - \dot{u}_*(s)\Big\rangle ds \\ &+ \int_0^t \Big(\frac{1}{n} + k(s)(\|\dot{u}_n(s) - \dot{u}_*(s)\| + \|u_n(s) - u_*(s)\|)\Big)\|\dot{u}_n(s) - \dot{u}_*(s)\| ds \\ &= \int_0^t \Big\langle g_n(u_n, \dot{u}_n)(s) - h_n(u_n, \dot{u}_n)(s), \dot{u}_n(s) - \dot{u}_*(s)\Big\rangle ds \\ &+ \frac{1}{n}\int_0^t \|\dot{u}_n(s) - \dot{u}_*(s)\| ds + \int_0^t k(s)\|\dot{u}_n(s) - \dot{u}_*(s)\|^2 ds \\ &+ \int_0^t k(s)\|\dot{u}_n(s) - \dot{u}_*(s)\|\|u_n(s) - u_*(s)\| ds \end{aligned} \tag{3.7}$$

On sait que $\|g_n(u_n,\dot{u}_n) - h_n(u_n,\dot{u}_n)\|_w < \frac{1}{n} \to 0$, quand $n \to \infty$. Puisque, pour tout n, $g_n(u_n,\dot{u}_n), h_n(u_n,\dot{u}_n) \in S^2_{\overline{co}(F(.,u_n(.),\dot{u}_n(.)))}$, et par (2.20), on a

$$\sup_n \|g_n(u_n,\dot{u}_n) - h_n(u_n,\dot{u}_n)\|_2 \leq 2\|\lambda\|_2 < \infty.$$

Donc, d'après le Lemme 1.7.21, $(g_n(u_n,\dot{u}_n) - h_n(u_n,\dot{u}_n))$ converge faiblement vers 0 dans $L^2(I,H)$, i.e, par la Proposition 1.7.4(1), on a, pour tout $\xi \in L^2(I,H)$

$$\lim_{n\to\infty} \langle g_n(u_n,\dot{u}_n) - h_n(u_n,\dot{u}_n), \xi\rangle = 0. \tag{3.8}$$

D'autre part, on peut écrire,

$$\begin{aligned}\int_0^t \Big\langle g_n(u_n,\dot{u}_n)(s) - h_n(u_n,\dot{u}_n)(s), \dot{u}_n(s) - \dot{u}_*(s)\Big\rangle &= \int_0^t \Big\langle g_n(u_n,\dot{u}_n)(s) - h_n(u_n,\dot{u}_n)(s), \dot{u}_n(s) - \dot{u}(s)\Big\rangle \\ &\quad + \int_0^t \Big\langle g_n(u_n,\dot{u}_n)(s) - h_n(u_n,\dot{u}_n)(s), \dot{u}(s) - \dot{u}_*(s)\Big\rangle\end{aligned}$$

Par la relation (3.8), en posant $\xi_t = 1\!\!1_{[0,t]}(\dot{u} - \dot{u}_*)$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \langle g_n(u_n,\dot{u}_n)(s) - h_n(u_n,\dot{u}_n)(s), \dot{u}(s) - \dot{u}_*(s)\rangle ds = 0. \tag{3.9}$$

D'autre part, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}&\int_0^t \Big\langle g_n(u_n,\dot{u}_n)(s) - h_n(u_n,\dot{u}_n)(s), \dot{u}_n(s) - \dot{u}(s)\Big\rangle ds \\ &\leq \int_0^t \|g_n(u_n,\dot{u}_n)(s) - h_n(u_n,\dot{u}_n)(s)\| \|\dot{u}_n(s) - \dot{u}(s)\| ds \\ &\leq \|\dot{u}_n(s) - \dot{u}(s)\|_C \int_0^1 \|g_n(u_n,\dot{u}_n)(s) - h_n(u_n,\dot{u}_n)(s)\| ds \\ &\leq \|\dot{u}_n(s) - \dot{u}(s)\|_C \Big(\int_0^1 \|g_n(u_n,\dot{u}_n)(s)\| ds + \int_0^1 \|h_n(u_n,\dot{u}_n)(s)\| ds\Big) \\ &\leq \|\dot{u}_n(s) - \dot{u}(s)\|_C \bigg(\Big(\int_0^1 \|g_n(u_n,\dot{u}_n)(s)\|^2 ds\Big)^{1/2} + \Big(\int_0^1 \|h_n(u_n,\dot{u}_n)(s)\|^2 ds\Big)^{1/2}\bigg) \\ &= 2\|\dot{u}_n(s) - \dot{u}(s)\|_C \|\lambda\|_2 \to 0.\end{aligned} \tag{3.10}$$

De (3.9) et (3.10), on conclut alors que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \Big\langle g_n(u_n,\dot{u}_n)(s) - h_n(u_n,\dot{u}_n)(s), \dot{u}_n(s) - \dot{u}_*(s)\Big\rangle ds = 0.$$

En sachant que $(u_n)_n$ converge vers u dans $C(I,H)$ et que $(\dot{u}_n)_n$ converge vers $\dot{u}$ dans $w - W^{1,2}(I,H)$ et dans $C(I,H)$, en faisant tendre $n \to \infty$ dans (3.7) et en utilisant le Lemme 2.2.1, nous obtenons par le Théorème de convergence dominé de Lebesgue (Théorème 1.5.1)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\dot{u}(t) - \dot{u}_*(t)\|^2 + \frac{c}{2}\|u(t) - u_*(t)\|^2 &\leq \int_0^t k(s)\|\dot{u}(s) - \dot{u}_*(s)\|^2 ds \\ &\quad + \int_0^t k(s)\|\dot{u}(s) - \dot{u}_*(s)\|\|u(s) - u_*(s)\| ds.\end{aligned}$$

Soit $m = min(1, c)$ et $l(t) = \frac{3}{m}k(t)$, $\forall t \in I$. On a, par la relation $a.b \leq \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)$

$$\begin{aligned}
&\frac{m}{2}\Big(\|\dot{u}(t) - \dot{u}_*(t)\|^2 + \|u(t) - u_*(t)\|^2\Big) \\
&\leq \int_0^t k(s)\|\dot{u}(s) - \dot{u}_*(s)\|^2 ds + \int_0^t k(s)\|\dot{u}(s) - \dot{u}_*(s)\|\|u(s) - u_*(s)\|ds \\
&\leq \int_0^t k(s)\|\dot{u}(s) - \dot{u}_*(s)\|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t k(s)\|\dot{u}(s) - \dot{u}_*(s)\|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t k(s)\|u(s) - u_*(s)\|^2 ds \\
&\leq \frac{3}{2}\int_0^t k(s)\|\dot{u}(s) - \dot{u}_*(s)\|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t k(s)\|u(s) - u_*(s)\|^2 ds \\
&\leq \int_0^t \frac{3}{2}k(s)\Big(\|\dot{u}(s) - \dot{u}_*(s)\|^2 + \|u(s) - u_*(s)\|^2\Big)ds.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|\dot{u}(t) - \dot{u}_*(t)\|^2 + \|u(t) - u_*(t)\|^2 \leq \int_0^t l(s)\Big(\|\dot{u}(s) - \dot{u}_*(s)\|^2 + \|u(s) - u_*(s)\|^2\Big)ds.$$

Alors, par le lemme de Gronwall (Lemme 1.17.1), on obtient

$$\|\dot{u}(t) - \dot{u}_*(t)\| + \|u(t) - u_*(t)\| \leq 0, \ \forall\, t \in\ I.$$

On conclut que $\|\dot{u}(t) - \dot{u}_*(t)\| + \|u(t) - u_*(t)\| = 0$, c'est à dire $\dot{u} = \dot{u}_*$ et $u = u_*$. Par conséquent $(u_n, \dot{u}_n)$ converge vers $(u_*, \dot{u}_*)$ dans $C(I, H) \times C(I, H)$ et dans $C(I, H) \times w - W^{1,2}(I, H)$.

Ceci achève la démonstration. ■

Corollaire 3.1.2. *Supposons que les hypothèses* $\mathbf{H(F)}(1)$, $\mathbf{H(F)}(3)$ *et* $\mathbf{H_1(F)}$ *sont vérifiées. Alors*

$$\mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0, v_0) = \overline{\mathcal{R}_{ext(\overline{co}(F))}(u_0, v_0) \cap \mathcal{R}_F(u_0, v_0)},$$

où la barre supérieure signifie la fermeture dans $C(I, H) \times C(I, H)$ *ou bien dans* $C(I, H) \times w - W^{1,2}(I, H)$.

Démonstration.

Du Théorème 3.1.1, on a que, pour tout $(u_*, \dot{u}_*) \in \mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0, v_0)$, il existe une suite $((u_n, \dot{u}_n))_n \subset \mathcal{R}_{ext(\overline{co}(F))}(u_0, v_0) \cap \mathcal{R}_F(u_0, v_0)$ telle que $((u_n, \dot{u}_n))_n$ converge vers $(u, \dot{u})$ dans $C(I, H) \times C(I, H)$ (resp. $C(I, H) \times w - W^{1,2}(I, H)$).

Alors, $(u, \dot{u}) \in \overline{\mathcal{R}_{ext(\overline{co}(F))}(u_0, v_0) \cap \mathcal{R}_F(u_0, v_0)}$, où la barre signifie la fermeture dans $C(I, H) \times C(I, H)$ (resp. $C(I, H) \times w - W^{1,2}(I, H)$).

Donc, $\mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0, v_0) \subset \overline{\mathcal{R}_{ext(\overline{co}(F))} \cap \mathcal{R}(u_0, v_0)}$. Inversement, on sait que $\mathcal{R}_{ext(\overline{co}(F))}(u_0, v_0) \cap \mathcal{R}_F(u_0, v_0) \subset \mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0, v_0)$. Alors, $\overline{\mathcal{R}_{ext(\overline{co}(F))}(u_0, v_0) \cap \mathcal{R}_F(u_0, v_0)} \subset \overline{\mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0, v_0)}$. Or $\mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0, v_0)$ est compact dans $C(I, H) \times C(I, H)$ (resp. $C(I, H) \times w - W^{1,2}(I, H)$), donc fermé, d'où $\overline{\mathcal{R}_{ext(\overline{co}(F))}(u_0, v_0) \cap \mathcal{R}_F(u_0, v_0)} \subset \mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0, v_0)$. Par conséquent, $\mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0, v_0) = \overline{\mathcal{R}_{ext(\overline{co}(F))}(u_0, v_0) \cap \mathcal{R}_F(u_0, v_0)}$. ■

3.2 Théorème de co-densité

Dans cette section, nous faisons l'hypothèse suivante sur la multi-application F.

Hypothèse ($\mathbf{H_2(F)}$)**.** *Il existe une fonction positive $k \in L^1(I,\mathbb{R})$ telle que*

$$\mathcal{H}(F(t,x,y),F(t,x_1,y_1)) \leq k(t)(|x-x_1|+|y-y_1|),\ \forall (t,x,y),(t,x_1,y_1) \in I\times H\times H.$$

Théorème 3.2.1. *Supposons que les hypothèses* $\mathbf{H(F)}(1)$*,* $\mathbf{H(F)}(3)$*,* $\mathbf{H_2(F)}$ *sont vérifiées et soit $(u_*,\dot{u}_*) \in \mathcal{R}_F(u_0,v_0)$. Si l'inégalité*

$$\mu\Big\{t\in I : e\Big(F(t,u_*(t),\dot{u}_*(t)),\overline{co}(F(t,u_*(t),\dot{u}_*(t)))\Big)>0\Big\}>0 \tag{3.11}$$

est vérifiée, alors, il existe une suite $((u_n,\dot{u}_n))_n \subset \mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0,v_0)\backslash\mathcal{R}_F(u_0,v_0)$ qui converge vers $(u_*,\dot{u}_*)$ dans $C(I,H)\times w-W^{1,2}(I,H)$ et dans $C(I,H)\times C(I,H)$.

Démonstration.
Soit $(u_*,\dot{u}_*) \in \mathcal{R}_F(u_0,v_0)$, alors il existe $f_* \in S^2_{F(.,u_*(.),\dot{u}_*(.))}$ telle que $(u_*,\dot{u}_*) = \phi(f_*) = (u_f,\dot{u}_f)$, c'est à dire,

$$\ddot{u}_*(t) + A(t,\dot{u}_*(t)) + Bu_*(t) = f_*(t). \tag{3.12}$$

Puisque la fonction $(t,x) \mapsto d(x,F(t,u_*(t),\dot{u}_*(t)))$ est mesurable en t pour tout x et continue en x pour presque tout t, sans perte de généralité, on peut supposer qu'elle est continue en x pour tout t.
Alors par le Théorème 1.11.25 et par (3.11), on a

$$\begin{aligned}
0 < \int_0^1 e\Big(\overline{co}(F(t,u_*(t),\dot{u}_*(t))),F(t,u_*(t),\dot{u}_*(t))\Big)dt \\
&= \int_0^1 \sup_{x\in\overline{co}(F(t,u_*(t),\dot{u}_*(t)))} d(x,F(t,u_*(t),\dot{u}_*(t)))dt\\
&= -\int_0^1 \inf_{x\in\overline{co}(F(t,u_*(t),\dot{u}_*(t)))}(-d(x,F(t,u_*(t),\dot{u}_*(t))))dt\\
&= -\inf_{v\in\Gamma}\Big(-\int_0^1 d(v(t),F(t,u_*(t),\dot{u}_*(t)))\Big)dt\\
&= \sup_{v\in\Gamma}\int_0^1 d(v(t),F(t,u_*(t),\dot{u}_*(t)))dt
\end{aligned}$$

où, $\Gamma = S^2_{\overline{co}(F(.,u_*(.),\dot{u}_*(.)))}$.
Donc, il existe $\varepsilon>0$ telle que $\sup\limits_{v\in\Gamma}\int_I d(v(t),F(t,u_*(t),\dot{u}_*(t)))dt \geq \varepsilon/2$.
En utilisant la définition de la borne supérieure, il existe $v_\varepsilon \in \Gamma$ telle que

$$0 \leq \sup_{v\in\Gamma}\int_I d(v(t),F(t,u_*(t),\dot{u}_*(t)))dt - \frac{\varepsilon}{2} < \int_I d(v_\varepsilon(t),F(t,u_*(t),\dot{u}_*(t)))dt$$

D'où

$$\int_I d(v_\varepsilon(t), F(t, u_*(t), \dot{u}_*(t)))dt > 0 \tag{3.13}$$

et

$$v_\varepsilon(t) \in \overline{co}(F(t, u_*(t), \dot{u}_*(t))),\ p.p\ t \in I.$$

De (3.13), en déduit qu'il existe un intervalle non vide $I_0 \subset I$ et il existe $r > 0$ tels que

$$d(v_\varepsilon(t), F(t, u_*(t), \dot{u}_*(t))) > 3r,\ \forall t \in I_0. \tag{3.14}$$

Comme k est mesurable, par le théorème de Lusin, pour $\varepsilon' \in]0, \mu(I_0)[$ il existe un compact $I_1 \subset I_0$, tel que $\mu(I_0 \backslash I_1) < \varepsilon'$ et $k_{|_{I_1}}$ est continue sur I_1. Or,

$$\begin{aligned} \mu(I_0) &= \mu(I_1) + \mu(I_0 \backslash I_1) \\ &< \mu(I_1) + \varepsilon'. \end{aligned}$$

D'où $\mu(I_1) > \mu(I_0) - \varepsilon' > 0$.

En utilisant une autre fois le théorème de Lusin, il existe un compact $I_2 \subset I_1$, tel que $\mu(I_2) > 0$ et $t \mapsto d(v_\varepsilon(t), F(t, u_*(t), \dot{u}_*(t)))$ et v_ε sont continues sur I_2.

Soit $x \in H$ tel que $\|x - v_\varepsilon(t)\| < r$, $\forall t \in I_2$. Pour $z \in F(t, u_*(t), \dot{u}_*(t))$ on a

$$\begin{aligned} \|x - z\| &\geq |\|x - v_\varepsilon(t)\| - \|v_\varepsilon(t) - z\|| \\ &\geq \|v_\varepsilon(t) - z\| - \|x - v_\varepsilon(t)\| \\ &\geq \inf_{z \in F(t, u_*(t), \dot{u}_*(t))} \|v_\varepsilon(t) - z\| - \|x - v_\varepsilon(t)\|, \end{aligned}$$

donc

$$\inf_{z \in F(t, u_*(t), \dot{u}_*(t))} \|x - z\| \geq \inf_{z \in F(t, u_*(t), \dot{u}_*(t))} \|v_\varepsilon(t) - z\| - \|x - v_\varepsilon(t)\|,$$

c'est à dire,

$$\begin{aligned} d(x, F(t, u_*(t), \dot{u}_*(t))) &\geq d(v_\varepsilon(t), F(t, u_*(t), \dot{u}_*(t))) - \|x - v_\varepsilon(t)\| \\ &\geq 3r - r = 2r. \end{aligned} \tag{3.15}$$

De $\mathbf{H_2(F)}$, pour tout $y, z \in H$ et $t \in I$, on a

$$\mathcal{H}(F(t, u_*(t), \dot{u}_*(t)), F(t, y, z)) \leq k(t)(\|u_*(t) - y\| + \|\dot{u}_*(t) - z\|), \tag{3.16}$$

Comme k est continue sur I_2 et I_2 compact, donc le sup est atteint, i.e, il existe $t_0 \in I_2$ tel que $\sup_{t \in I_2} k(t) \leq k(t_0) < +\infty$.

Donc, si $\|u_*(t) - y\| < \gamma$, $\|\dot{u}_*(t) - z\| < \gamma$ et de (3.16), on a

$$\mathcal{H}(F(t, u_*(t), \dot{u}_*(t)), F(t, y, z)) \leq 2\gamma k(t_0) < r, \tag{3.17}$$

si $\gamma \in]0, \frac{r}{2k(t_0)}[$.
De (3.16), on obtient

$$\mathcal{H}(F(t,u_*(t),\dot{u}_*(t)),F(t,y,z)) = \sup_{x\in H}|d(x,F(t,u_*(t),\dot{u}_*(t))) - d(x,F(t,y,z))| < r$$

Donc,

$$d(x,F(t,u_*(t),\dot{u}_*(t))) - d(x,F(t,y,z)) < r.$$

En utilisant (3.15), on obtient

$$d(x,F(t,y,z)) > r,\ p.p\ t \in I_2. \tag{3.18}$$

pour tous $x,y,z \in H$, $\|x - v_\varepsilon(t)\| < r$, $\|u_*(t) - y\| < \gamma$, $\|\dot{u}_(t) - z\| < r$.
Soit $t_* \in I_2$ un point de densité droite de I_2. On note $T_n = [t_*, t_* + 1/n] \cap I_2$.
On considérons une suite $v_n : I \to H$, définie par

$$v_n(t) = \begin{cases} v_\varepsilon(t) & si\ t \in T_n, \\ f_*(t) & si\ t \in I \backslash T_n, \end{cases}$$

où $f_* \in S^2_{F(.,u_*(.),\dot{u}_*(.))}$ et $\phi(f_*) = (u_*, \dot{u}_*)$.
Pour $t \neq t_*$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $t \notin [t_*, t_* + 1/n_0]$ et $\forall n \geq n_0$, on a $1/n \leq 1/n_0$ et donc $t \notin [t_*, t_* + 1/n]$, alors

$$\begin{aligned} t \notin T_n &\Rightarrow v_n(t) = f_*(t) \\ &\Rightarrow \|v_n(t) - f_*(t)\| = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|v_n(t) - f_*(t)\| = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\lim_{n\to\infty} v_n(t) = f_*(t)$, et comme $\mu(\{t_*\}) = 0$, alors

$$v_n \to f_*\ p.p\ sur\ I. \tag{3.19}$$

Par les même arguments utilisés dans la démonstration du Théorème 3.1.1, pour tout $n \geq 1$ il existe une application continue $h_n : \mathcal{R}(u_0, v_0) \to L^2(I, H)$ tel que

$$h_n(u,\dot{u})(t) \in \overline{co}(F(t,u(t),\dot{u}(t)))\ \ p.p\ sur\ I, \tag{3.20}$$

et

$$\|v_n(t) - h_n(u,\dot{u})(t)\| \leq \frac{1}{n} + k(t)\Big(\|u_*(t) - u(t)\| + \|\dot{u}_*(t) - \dot{u}(t)\|\Big)\ p.p\ sur\ I. \tag{3.21}$$

Notons que, dans (3.4), on a utilisée l'inégalité $\mathcal{H}(\overline{co}(A), \overline{co}(B)) \leq \mathcal{H}(A,B)$.
Pour tout $n \geq 1$, on définit un opérateur $\mathcal{A}_n : S_\lambda \to S_\lambda$ tel que, pour tout $f \in S_\lambda$;

$\mathcal{A}_n(f) = h_n \circ \phi(f)$. En appliquant le Théorème de point fixe de Schauder-Tikhonov (Théorème 1.14.1), on obtient un point fixe $f_n \in S_\lambda$ tel que $\mathcal{A}_n(f_n) = (h_n \circ \phi)(f_n) = f_n$, on pose $(u_n, \dot{u}_n) = \phi(f_n)$, alors

$$\ddot{u}_n(t) + A(t, \dot{u}_n(t)) + Bu_n(t) = h_n(u_n, \dot{u}_n)(t) \quad p.p \ sur \ I. \tag{3.22}$$

Donc, par (3.20) on a

$$(u_n, \dot{u}_n) \in \mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0, v_0),$$

et par (3.21), on a

$$\|v_n(t) - f_n(t)\| \leq \frac{1}{n} + k(t)\Big(\|u_*(t) - u_n(t)\| + \|\dot{u}_*(t) - \dot{u}_n(t)\|\Big) \quad p.p \ sur \ I. \tag{3.23}$$

Fixons $t \in I$. Par soustraction des deux équations (3.23) et (3.12), on obtient

$$\ddot{u}_n(t) - \ddot{u}_*(t) + A(t, \dot{u}_n(t)) - A(t, \dot{u}_*(t)) + Bu_n(t) - Bu_n(t) = f_n(t) - f_*(t) \quad p.p \ sur \ I.$$

En multipliant par $\dot{u}_n(t) - \dot{u}_*(t)$, on trouve

$$\begin{aligned}&\langle \ddot{u}_n(t) - \ddot{u}_*(t) + A(t, \dot{u}_n(t)) - A(t, \dot{u}_*(t)) + Bu_n(t) - Bu_n(t), \dot{u}_n(t) - \dot{u}_*(t)\rangle \\ &\qquad = \langle f_n(t) - f_*(t), \dot{u}_n(t) - \dot{u}_*(t)\rangle \quad p.p \ sur \ I.\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $A(t, .)$ est monotone et que B coercif, on aura

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\dot{u}_n(t) - \dot{u}_*(t)\|^2 + \frac{c}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t) - u_*(t)\|^2 \leq \Big\langle f_n(t) - f_*(t), \dot{u}_n(t) - \dot{u}_*(t)\Big\rangle \ p.p \ sur \ I.$$

En intégrant entre 0 et t, et sachant que $\dot{u}_n(0) = \dot{u}_*(0) = v_0$ et $u_n(0) = u_*(0) = u_0$, on obtient

$$\frac{1}{2}\|\dot{u}_n(t) - \dot{u}(t)\|^2 + \frac{c}{2}\|u_n(t) - u(t)\|^2 \leq \int_0^t \Big\langle f_n(s) - f_*(s), \dot{u}_n(s) - \dot{u}_*(s)\Big\rangle ds \ p.p \ sur \ I.$$

Par suite

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|\dot{u}_n(t) - \dot{u}_*(t)\|^2 + \frac{c}{2}\|u_n(t) - u_*(t)\|^2 \\ &\leq \int_0^t \Big\langle f_n(s) - v_n(s) + v_n(s) - f_*(s), \dot{u}_n(s) - \dot{u}_*(s)\Big\rangle ds \\ &= \int_0^t \Big\langle f_n(s) - v_n(s), \dot{u}_n(s) - \dot{u}_*(s)\Big\rangle ds + \int_0^t \Big\langle v_n(s) - f_*(s), \dot{u}_n(s) - \dot{u}_*(s)\Big\rangle ds \\ &= \int_0^t \Big\langle v_n(s) - f_*(s), \dot{u}_n(s) - \dot{u}_*(s)\Big\rangle ds + \int_0^t \|\dot{u}_n(s) - \dot{u}_*(s)\|\|f_n(s) - v_n(s)\| ds.\end{aligned}$$

D'après (3.23), on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|\dot{u}_n(t)-\dot{u}_*(t)\|^2+\frac{c}{2}\|u_n(t)-u_*(t)\|^2\\
&\leq \int_0^t \Big\langle v_n(s)-f_*(s),\dot{u}_n(s)-\dot{u}_*(s)\Big\rangle ds\\
&+\int_0^t \left(\frac{1}{n}+k(t)\Big(\|\dot{u}_n(s)-\dot{u}_*(s)\|+\|u_n(s)-u_*(s)\|\Big)\right)\|\dot{u}_n(s)-\dot{u}_*(s)\|ds\\
&=\int_0^t \Big\langle v_n(s)-f_*(s),\dot{u}_n(s)-\dot{u}_*(s)\Big\rangle ds+\frac{1}{n}\int_0^t\|\dot{u}_n(s)-\dot{u}_*(s)\|ds+\int_0^t k(s)\|\dot{u}_n(s)-\dot{u}_*(s)\|^2ds\\
&+\int_0^t k(s)\|\dot{u}_n(s)-\dot{u}_*(s)\|\|u_n(s)-u_*(s)\|ds
\end{aligned}$$

Par (3.19) et en faisant tendre $n\to\infty$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|\dot{u}_n(t)-\dot{u}_*(t)\|^2+\frac{c}{2}\|u_n(t)-u_*(t)\|^2 &\leq \int_0^t k(s)\|\dot{u}_n(s)-\dot{u}_*(s)\|^2ds\\
&+\int_0^t k(s)\|\dot{u}_n(s)-\dot{u}_*(s)\|\|u_n(s)-u_*(s)\|ds.
\end{aligned}$$

En utilisant les même arguments dans la démonstration du Théorème 3.1.1, on obtient que $(u_n,\dot{u}_n)$ converge vers $(u_*,\dot{u}_*)$ dans $C(I,H)\times C(I,H)$ et dans $C(I,H)\times w-W^{1,2}(I,H)$. De (3.23), il existe $I'\subset I$ tel que $\mu(I')=0$ et

$$\begin{aligned}
\|v_n(t)-f_n(t)\| &\leq \frac{1}{n}+k(t)\Big(\|u_*(t)-u(t)\|+\|\dot{u}_*(t)-\dot{u}(t)\|\Big)\\
&\leq \frac{1}{n}+k(t_0)\Big(\|u_*-u\|_C+\|\dot{u}_*-\dot{u}\|_C\Big)\ sur\ I_2\backslash I'.
\end{aligned}$$

Alors

$$\sup_{t\in I_2\backslash I'}\|v_n(t)-f_n(t)\|\leq \frac{1}{n}+k(t_0)\Big(\|u_*-u\|_C+\|\dot{u}_*-\dot{u}\|_C\Big).$$

D'où

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in I_2\backslash I'}\|v_n(t)-f_n(t)\|=0.$$

Donc, il existe $n_1\in\mathbb{N}$, tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_1$ implique que $\sup\limits_{t\in I_2\backslash I'}\|v_n(t)-f_n(t)\|<r$. Ceci implique que

$$\|v_n(t)-f_n(t)\|<r\quad p.p\ sur\ I_2, \tag{3.24}$$

et pour γ, il existe $n_2\in\mathbb{N}$, tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_2$, on a $\sup\limits_{t\in I}\|u_n(t)-u_*(t)\|<\gamma$ et $\sup\limits_{t\in I}\|\dot{u}_n(t)-\dot{u}_*(t)\|<\gamma$, alors

$$\|u_n(t)-u_*(t)\|<\gamma,\ \|\dot{u}_n(t)-\dot{u}_*(t)\|<\gamma,\ t\in\ I. \tag{3.25}$$

Puisque $v_n(t)=v(t)$ pour $t\in T_n$, alors de (3.18), (3.24) et (3.25) nous obtenons que pour $n_0=max\{n_1,n_2\}$ et pour tout $n\geq n_0$, l'inégalité

$$d(f_n(t),F(t,u_n(t),\dot{u}_n(t)))>r\quad p.p\ sur\ T_n. \tag{3.26}$$

est vrai. Puisque t_* est un point de densité droite de I_0, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(T_n \cap [t_*, t_* + 1/n]}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \mu(T_n).n = 1,$$

i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \geq N :\ |\mu(T_n).n - 1| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow 1 - \varepsilon < \mu(T_n).n < 1 + \varepsilon,$$

Donc, si on prend $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe $N \geq n_0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ implique que $\mu(T_n) > \frac{1}{2n} > 0$. Ainsi, d'une part la suite $(u_n, \dot{u}_n) \in \mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0, v_0)$ converge vers $(u_*, \dot{u}_*) \in \mathcal{R}_F(u_0, v_0)$ et d'autre part, par (3.26) $(u_n, \dot{u}_n) \notin \mathcal{R}_F(u_0, v_0)$ pour $n \geq N$.
Ceci achève la démonstration. ■

Corollaire 3.2.2. *Supposons que* $\mathbf{H}(\mathbf{F})(1)$*,* $\mathbf{H}(\mathbf{F})(3)$ *et* $\mathbf{H_2}(\mathbf{F})$ *sont vérifiées et soit* $(u, \dot{u}) \in \mathcal{R}_F(u_0, v_0)$*, si l'inégalité*

$$\mu\Big\{t \in I : e\Big(F(t, u_*(t), \dot{u}_*(t)), \overline{co}(F(t, u_*(t), \dot{u}_*(t)))\Big) > 0\Big\} > 0$$

est vérifie. Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0, v_0) = \overline{\mathcal{R}_F(u_0, v_0)} &= \overline{\mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0, v_0) \backslash \mathcal{R}_F(u_0, v_0)} \\
&= \overline{\mathcal{R}_F(u_0, v_0) \cap \mathcal{R}_{ext(\overline{co}(F))}(u_0, v_0)} \\
&= \overline{\mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(u_0, v_0) \backslash \mathcal{R}_F(u_0, v_0) \cap \mathcal{R}_{ext(\overline{co}(F))}(u_0, v_0)}
\end{aligned}$$

ou la barre supérieure signifie la fermeture dans $C(I, H) \times C(I, H)$ *(resp. dans* $C(I, H) \times w{-}W^{1,2}(I, H)$*). Ce corollaire suit immédiatement des Corollaire 3.1.2 et Théorème 3.2.1.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] N.U. Ahmed et S. Kerbal, Optimal control of nonlinear second-order evolution equations, J. Appl. Math. Stochastic Anal. 6, 123-136, (1993).

[2] J.P. Aubin et A. Cellina, Differential inclusions Set-Valued maps and Viability theory. Springer-Verlag, Berlin, (1984).

[3] E. Avgerinos et N.S. Papageorgiou, Extremal solutions and relaxation for second order vector differential inclusions, Arch. Math, vol 34 , 427-434, (1998).

[4] D. Azzam-Laouir, Contribution à l'étude de problèmes d'évolution du second ordre, Thèse de doctorat d'état, Constantine, (2003).

[5] D. Azzam-Laouir, Cours d'analyse convexe, Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées, Université de Jijel (2014).

[6] D. Azzam-Laouir, Polycopié, cours d'analyse multivoque, Laboratoire de Mathématiques Pure et Appliquées, Université de Jijel (2009).

[7] D. Azzam-Laouir, Policopié, cours de mesure et intégration, Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées, Université de Jijel (2009).

[8] V. Barbu, Nonlinear Semigroups and Differential Equation in Banach Spaces, Nooedhoff, Leyden (1976).

[9] A.E. Bashirov, Partrally observable linear systems under dependent noisis, Basel, Birkhauser Verlag, (2003).

[10] R. Bouabdalah et N. Bouhali, Inclusions différentielles avec perturbation non bornée : Théorèmes d'existence et de relaxation, mémoire de Master, Université Med Seddik Ben Yahia-Jijel (2017-2018).

[11] A. Bressan et G. Colombo, Extensions and selections of maps with decomposable values, Studia Mathematica, vol 90 (1), 69-86, (1988).

[12] H. Brézis, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Masson, (1983).

[13] H. Brézis, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contraction dans les espaces de Hilbert, North-Holland, Amsterdam, (1973).

[14] C. Castaing et M. Valadier, Convex analysis and measurable multifunctions, Lectures Notes in Math. Springer-Verlag, Berlin, (1977).

[15] F.S. De Blasi, G. Pianigiani, On the density of extremal solutions of differential inclusions, Ann. Polon. Math, V. 56 (2), 133-142, (1992).

[16] K. Deimling, Multivalued Differential Equations, Walter de Gruyter, Berlin, New Yourk, (1992).

[17] R.D. Descombes, Cours d'analyse, Librairie Vuibert, Paris, (1962).

[18] N. Dunford et J.T. Schwartz, Linear operators, PART I , General theory, Wiley Classics Library Edition Published, (1988).

[19] L.C. Evans, Partial differential equations, volume 19 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, Second edition, (2010).

[20] L. Gasinski et N. S. Papageorgiou, Series in Mathematical Analysis and Applications, Volume 9 : Nonlinear analysis, National University of Ireland, (2005).

[21] F. Hiai et H. Umegaki, Integrals, conditional expectations and martingales of multivalued functions, I. Multivariate Anal. 7, 149-182, (1977).

[22] C.J. Himmelberg, Measurable relations, Fund. Math. 87, 53-72, (1975).

[23] S. Hu et N. S. Papageorgiou, Handbook of Multivalued Analysis, Volume I : Theory, Kliwer, Dorfrecht, the Netherlands (1997).

[24] S. Hu et N. S. Papageorgiou, Handbook of Multivalued Analysis, Volume II : Application, Kliwer, Dorfrecht, the Netherlands (2000).

[25] M. Kisieliwicz, Differential inclusion and optimal control, PWN-Polish Scientific Publishers, Kluwer Academic Publishers, Dortrecht, Boston, London (1991).

[26] M. Kunze et M.D.P. Monteiro Marques, BV solution problems with time-dependent domains. Set-Valued Analysis. 5, 57-72, (1997).

[27] J. Lehec, Analyse convexe approfondie, Université Paris-Dauphine M1MMD, (2013-2014).

[28] K.S. Papageorgiou et S.T. Kiritsy-Yaillourou, Handbook of Applied Analysis, Volume 19 (2008).

[29] N.S. Papageorgiou, On the 'bang-bang' principle for nonlinear evolution inclusions, Dynamic Systems Appl. 2, 61-74, (1993).

[30] T. Sathiyaraj, Pagavathigounder Balasubramaniam, in mathematical techniques of Fractional ordre systems, 229-248, (2018).

[31] J.V. Tiel, Convex analysis, An introductory text, Wiley, New York (1984).

[32] A.A. Tolstonogov, *Continuous selectors of multivalued mappings with nonconvex non-closed values*, Mat. Sat, T. 187, (5), 121-142, (1996).

[33] A.A. Tolstonogov, Extremal selections of multivalued mappings and the 'bang-bang' principle for evolutions inclusions, Soviet Math. Dokl, 43(2), 481-485, (1991).

[34] A.A. Tolstonogov, Extremal selectors of multivalued mappings and the" bang-bang "principle for evolutionary inclusions, Dokl. Academy of Sciences of the USSR, T. 317 (3), S. 589-593, (1991).

[35] A.A. Tolstonogov, Extreme continuous selectors of multivalued maps and there applications, J. Differential Equations, V. 122 (2), 161-180, (1995).

[36] A.A. Tolstonogov et D. A. Tolstonogov On the ≪bang-bang≫ principle for nonlinear evolution inclusions, Nonlinear Differential Equations Appl, V 6 (1), 101-118, (1999).

[37] A.A. Tolstonogov, Properties of solutions of second-order evolutionary control systems. I, Sib. mat. zhurn, volume 43 (4), 907-923, (2002).

[38] A.A. Tolstonogov, Properties of the Set of extreme solutions for a class of nonlinear second-order evolution inclusions, Set-valued Analysis 10, 53-77, (2002).

[39] A.A. Tolstonogov et D.A. Tolstonogov, L_p-continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values : Existence theorems, Set-Valued Anal. 4, 173-203, (1996).

[40] A.A. Tolstonogov et D.A. Tolstonogov , L_p-Continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values : Relaxation theorems, Set-Valued Anal, vol. 87 (4), 237-269, (1996).

[41] D. Wagner, Survey of mesurable selection theorem, Control Optimal, SIAM.J, Vol 15, 859-903, (1977).

[42] E. Zeidler, Non linear Fonctional Analysis and its Applications I : Fixed point theorems, Springer-Verlag New York, (1986).

Résumé

Dans ce mémoire, on a présenté quelques résultats d'existence de solutions pour les inclusions différentielles du second ordre dans un espace de Hilbert et sous différentes hypothèses sur la multi-application F.

Il est réparti en deux parties.

La première concerne la démonstration des théorèmes d'existence de solutions extrêmes pour les inclusions différentielles du second ordre avec F une multi-application à valeurs non vides et fermés.

Dans la deuxième partie, on a démontré deux théorèmes de relaxation pour les inclusions différentielle du second ordre quand la perturbation est lipschitzienne.

Mots clés :

Multi-application, inclusion différentielle, solutions extrêmes, densité, relaxation.

Abstract

In this thesis, we presented some results of the existence of solutions for second order differential inclusions in a Hilbert space and under different hypotheses on the multivalued map F.

It is divided into two parts.

The first concerns the proof of the theorems of existence of extreme solutions for second order differential inclusions with F is a multivalued map with nonempty and closed values.

In the second part, we prove two relaxation theorems for second order differential inclusions when the perturbation is Lipschitzien.

Key words :

Multivalued map, differential inclusion, extreme solutions, density, relaxation.

ملخص

في هذه الأطروحة ، قدمنا بعض نتائج وجود حلول للاحتواءات التفاضلية من الرتبة الثانية في فضاء هيلبرتي وتحت فرضيات مختلفة على التطبيق متعدد القيم F.

وهي مقسمة إلى قسمين.

يتعلق القسم الأول بإثبات نظريات وجود الحلول المتطرفة للاحتواءات التفاضلية من الدرجة الثانية مع F تطبيق متعدد القيم ذو صور غير خالية و مغلقة.

في الجزء الثاني ، أثبتنا نظريتين للاسترخاء للاحتواءات التفاضلية من الدرجة الثانية عندما يكون الاضطراب ليبشيتزي.

الكلمات المفتاحية :

تطبيق متعدد القيمة، احتواء تفاضلي، حلول متطرفة، كثافة، استرخاء.