RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

N^0 d'ordre : ....

N^0 de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour obtenir le diplôme de

Master

Spécialité : *Mathématiques.*

Option : *Analyse fonctionnelle.*

Thème

Quelques théorèmes de point fixe et leurs applications

Présenté par : Benchouieb Khaoula

Devant le jury :

Président	: Yarou Mustapha Fateh	Prof. Université de Jijel
Encadreur	: Fetouci Nora	M.C.B. Université de Jijel
Examinateur	: Bensouilah Bachir	M.A.A. Université de Jijel

Promotion 2020/2021

Remerciements

Je tiens avant tout de remercier dieu tout puissant qui m'a donné la force, la volonté et le courage pour la réalisation de ce mémoire.

*Je remercie chaleureusement mon encadreur M^lle **N. Fetouci** pour la pertinence de ses remarques et ses précieux conseils, ainsi pour le temps qu'elle a consacré à la réalisation de ce travail. J'admire beaucoup sa manière de diriger qui furent pour mois une grande source d'inspiration et de motivation.*

*Je remercie vivement Mr **M.F. Yarou** pour avoir accepté de présider le jury de la soutenance.*

*J'adresse également mes vifs remerciements à l'examinateur Mr **B. Bensouilah** pour avoir accepté d'être membre de ce jury.*

Votre présence au sein du jury constitue pour moi un grand honneur.

Je remercie aussi tous les enseignants du département de mathématique de l'université de Jijel.

J'exprime toute ma gratitude du fond du coeur à ma mère, mon père, mes soeurs et mes frères pour leur soutien constant et leur soin le plus attentif.

*Mes remerciements vont encore a mes amies proches **Fouzia**, **Lyna**, **Amina**, et qui m'ont accompagnée durant ces cinq années.*

Khaoula

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

La théorie du point fixe est un domaine à part entière de l'analyse mathématique. Elle constitue aussi un outil essentiel dans de nombreuses branches des mathématiques ainsi que leurs applications, notamment en analyse non linéaire où elle fournit les méthodes pour les questions d'existence de solutions dans de nombreux problèmes.

En 1922, S. Banach a établi le théorème du point fixe qui porte son nom ou connu sous le nom du principe de contraction de Banach qui est un outil important en théorie des espaces métriques et en analyse en général, il garantit l'existence et l'unicité de points fixe pour certaines applications qui diminuent les distances et donne une méthode constructive pour trouver ces points.

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique, sous sa forme la plus simple, ce théorème exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermé borné dans lui-même.

Le théorème du point fixe de Schauder établi en 1930, est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer, il affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

En 1974, Ćirić a prouvé le théorème de point fixe sur un espace métrique complet, qui généralise le principe de contraction de Banach.

En 1976, Caristi [12] a obtenu, à l'aide de l'induction transfinie, un théorème de point fixe qui, contrairement au théorème de Banach, n'exige pas que la fonction en question soit une contraction.

Et nous avons choisi de présenter la démonstration du théorème de Caristi qui utilise le lemme de Bishop-Phelps, puisqu'elle est beaucoup plus simple que celle originalement faite par Caristi.

Ce mémoire se décompose en trois chapitres partagés de la manière suivante :
Le premier chapitre est consacré aux définitions, notions et résultats qui nous serviront tout au long de ce travail, citons entre autres : quelques concepts d'analyse convexe, topologie faible et faible* et des généralités sur les multi-applications.

Nous présentons dans le deuxième chapitre quelques théorèmes de point fixe pour des fonctions univoques avec leurs démonstrations (Banach, Ćirić, Caristi, Brouwer, Shauder) et on terminera par une application en appliquant le théorème de Schauder pour étudier l'existence de la solution au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Le troisième chapitre de ce mémoire est construit de la même manière que le chapitre précédent, mais il est dédié aux fonctions multivoques. Nous introduirons le théorème du point fixe de Kakutani publié en 1941 qui généralise celui de Brouwer à des fonctions à valeurs ensemblistes et un théorème du point fixe beaucoup plus sophistiqué dû à Kakutany et Ky Fan avec sa version faible. Ce chapitre concerne la généralisation du théorème de point fixe univoque pour une fonction multivoque définie sur un sous-ensemble d'un espace métrique complet muni de la distance de Hausdorff H induite par la métrique d. Le théorème de point fixe de Banach a été généralisé aux contractions multivoques par Nadler en 1969. De plus, nous avons introduit une version multivoque du théorème de Caristi, nous donnons les preuves de ces théorèmes.
Nous finissons notre travail par étudier l'existence d'une solution absolument continue par l'application du théorème de Kakutani pour l'inclusion différentielle de la forme suivante :

$$\begin{cases} x'(t) \in F(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

où $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs non vides convexes compactes.

Notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de ce travail.

- $\mathbb{R}$ Ensemble des nombres réels.
- $\overline{\mathbb{R}}$ $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
- $\mathbb{R}^+$ Ensemble des nombres réels positifs .
- $\mathbb{N}$ Ensemble des entiers naturels.
- $B(x_0, r)$ La boule ouverte de centre x_0 et de rayon r.
- $B_f(x_0, r)$ La boule fermée de centre x_0 et de rayon r.
- $\overline{\mathbb{B}}$ La boule unité fermée.
- $S(x_0, r)$ La sphère de centre x_0 et de rayon r.
- I Un intervalle de $\mathbb{R}$.
- $C(X_1, X_2)$ L'ensemble des applications continues définies de X_1 à X_2.
- $L^1(I)$ L'espace des applications intégrables définies sur I.
- $L^\infty(I)$ L'espace des applications essentiellement bornées sur I.
- $\mathrm{gph}(F)$ Le graphe de la multifonction F.
- E' Le dual de E.
- $< .,. >$ Croché de dualité.
- $\sigma\left(L^1, L^\infty\right)$ Topologie faible sur L^1.
- $\sigma\left(L^\infty, L^1\right)$ Topologie faible* sur L^∞.
- $x_n \to x$ $(x_n)_n$ converge fortement vers x.
- $x_n \rightharpoonup x$ $(x_n)_n$ converge faiblement vers x.
- $x_n \rightharpoonup^* x$ $(x_n)_n$ converge faiblement* vers x.
- $d(x, A)$ La distance métrique entre le point x et l'ensemble A.

CHAPITRE 1

CONCEPTS DE BASE ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Au début de ce chapitre, on rappelle quelques définitions et notions mathématiques de base nécessaires qui seront utilisées dans la suite du travail.

1.1 Espace métrique

Pour plus de détails voir [2] et [17]

Définition 1.1. (***Distance***) *Soit X un ensemble non vide. On appelle distance sur X, toute application $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les axiomes suivants :*

1. ***Séparation**. Pour tous $x, y \in X \quad d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.*
2. ***Symétrie**. Pour tous $x, y \in X \quad d(x,y) = d(y,x)$.*
3. ***Inégalité triangulaire**. Pour tous $x, y, z \in X \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.*

Définition 1.2. (***Espace métrique***) *Un espace métrique est un couple (X, d) où X est un ensemble et d est une distance.*

1.1.1 Boule fermée - Boule ouverte - Sphère

Définition 1.3. *Soit* (X, d) *un espace métrique,* $x_0 \in X$ *et* $r > 0$.

• *On appelle boule fermée de centre* x_0 *et de rayon* r *l'ensemble*

$$B_f(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}.$$

• *On appelle boule ouverte de centre* x_0 *et de rayon* r *l'ensemble*

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}.$$

• *On appelle sphère de centre* x_0 *et de rayon* r *l'ensemble*

$$S(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) = r\}.$$

Remarque 1.1. $B_f(x_0, r) = B(x_0, r) \cup S(x_0, r)$

Définition 1.4. *Soit* (X, d) *un espace métrique. On dit qu'une partie* $A \subset X$ *est bornée si elle est contenue dans une boule fermée, c'est-à-dire, s'il existe* $x_0 \in X$ *et* $r > 0$ *tels que* $A \subset B_f(x_0, r)$,
en d'autre terme

$$\forall x \in A,\ d(x_0, x) \leq r.$$

1.1.2 Ouverts - Fermés

Définition 1.5. *Soit* (X, d) *un espace métrique et* U, $F \subset X$. *On dit que :*

• U *est ouvert dans* X, *si pour tout* x *dans* U *il existe un* $r > 0$ *tel que* $B(x, r) \subset U$.

• F *est fermé dans* X, *si son complément* $X \backslash F$, *est ouvert dans* X.

Définition 1.6. *Soit* (X, d) *un espace métrique. On appelle diamètre d'une partie non vide* A *de* X *la quantité suivante :*

$$diam(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

1.1.3 Convergence des suites - Suite de Cauchy - Suite extraite

Définition 1.7. (***Suite convergente***) *Une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments d'un espace métrique* (X, d) *converge ou tend vers un point* $a \in X$ *lorsque* $n \to \infty$ *si et seulement si*

$\lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0$. *C'est-à-dire* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : d(x_n, a) < \varepsilon$.
On dit aussi que a est la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et on note* $x_n \to a$ *où* $(\lim_{n\to\infty} x_n = a)$

Proposition 1.1. *si la limite d'une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *existe, alors sa limite est unique.*

Démonstration. En effet
si on a a et b dans X tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ tel que } n \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, a) < \varepsilon,$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0' \text{ tel que } n \geq n_0' \Longrightarrow d(x_n, b) < \varepsilon,$$

alors, pour $n \geq \max\{n_0, n_0'\}$ on a $d(a,b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) \leq 2\varepsilon$, et donc $d(a,b) \leq 2\varepsilon, \forall \varepsilon > 0$. D'où $d(a,b) = 0$, ce qui donne $a = b$. □

Théorème 1.1. *Soit* (X,d) *un espace métrique, et* $F \subset X$, $a \in X$,

$$F \text{ est fermé} \iff \left[\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F, \lim_{n\to\infty} x_n = a \Longrightarrow a \in F\right].$$

Définition 1.8. (***Suite de Cauchy***) *On dit qu'une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'un espace métrique* (X,d) *est de Cauchy si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tel que pour tous* $m, n \geq N_\varepsilon$
on a $d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$.
C'est-à-dire si dans $\mathbb{R}$, *on a* $\lim_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n) = 0$.

Remarque 1.2. *On peut écrire* $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall m \in \mathbb{N} : d(x_{n+m}, x_n) \leq \varepsilon$.

Proposition 1.2. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

Démonstration. Soit $(x_n)_n \subset X$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, on a $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Soit $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m > n \geq n_0$ donc $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$, d'où

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

C'est-à-dire $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy. □

Remarque 1.3. *La réciproque de la proposition précédente n'est pas vraie en général, par exemple dans l'espace métrique* $X =]0, +\infty[$ *muni de la distance induite par la distance* *usuelle* $d(x, y) = |x - y|$ *de* $\mathbb{R}$, *la suite de terme générale* $x_n = \frac{1}{n}$ *est de Cauchy puisqu'elle converge vers 0 dans* $\mathbb{R}$, *mais* $0 \notin X$. *L'unicité de la limite entraine que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *ne converge pas dans* X.

Définition 1.9. (***Suite extraite***) *On appelle suite extraite (ou sous suite) de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de la forme* $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *où* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *est une application strictement croissante.*

Lemme 1.1. *Soit* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *une application strictement croissante. Alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $\varphi(n) > n$.

Proposition 1.3. *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. *On a* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers a si et seulement si toute sous suite* $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* a.

Démonstration. Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a c-à-d $\forall\varepsilon > 0$ fixé, $\exists n_0 \geq 1$ tel que $\forall n \geq n_0 : d(x_n, a) < \varepsilon$. On a $1 \leq \varphi(1) < \varphi(2) < \ldots < \varphi(n) < \varphi(n+1)$, et d'après le Lemme 1.1 on a $\varphi(n) \geq n$. Alors $\forall n \geq n_0$, $\varphi(n) \geq n \geq n_0$, donc $d\left(x_{\varphi(n)}, a\right) < \varepsilon$. D'où montrons que $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a. Réciproquement, c'est évident puisque la sous suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue en prenant pour φ l'identité de $\mathbb{N}$ c-à-d

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longrightarrow \varphi(n) = n \end{aligned}$$

est la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elle même donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a. □

Définition 1.10. *Soit* (X, d) *un espace métrique. On dit que la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *est bornée s'il existe* $x_0 \in X$ *et* $r > 0$ *tels que*

$$d(x_0, x_n) \leq r, \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.1.4 Bolzano-Weierstrass

Théorème 1.2. (***Bolzano-Weierstrass***) *[15] de toute suite bornée de nombres réels on peut extraire une sous suite convergente.*

Proposition 1.4. *Dans un espace métrique* (X, d) *on a :*

1. *Toute suite de Cauchy est bornée.*
2. *Toute suite extraite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.*
3. *Toute suite de Cauchy admettant une sous suite convergente est convergente.*

1.2 Espace complet

Définition 1.11. *Un espace métrique* (X, d) *est dit complet si toute suite de Cauchy* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* X *converge dans* X.

Proposition 1.5. *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $A \subset X$

• *Si* (A, d) *est complet, alors* A *est un fermé de* X.

• *Si* (X, d) *est complet et* A *est un fermé de* X*, alors* (A, d) *est complet.*

Démonstration. • Si $A \subset X$ est complet et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ est une suite qui converge vers $a \in X$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy (puisque dans X elle converge), alors elle doit converge dans A vers un point $b \in A$. D'après l'unicité de la limite (dans X) on a $a = b \in A$ donc A est fermé.

• Si X est complet, et A fermé dans X, toute suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ doit converger dans X vers un point $a \in X$, puisque celui-ci est complet et A fermé, cette limite doit appartenir à A, ce qui prouve que A est complet. $\square$

1.3 Continuité, Compacité et Convexité

- **Continuité**

Définition 1.12. (***Application continue***) *Soit* (X, d) *et* (Y, d') *deux espaces métriques et soit* $a \in X$*. On dit qu'une application* $f : X \to Y$ *est continue au point a si :*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X : d(a, x) < \delta \Longrightarrow d'(f(a), f(x)) < \varepsilon.$$

Définition 1.13. (***Continuité sur un ensemble***) *On dira que* $f : (X, d) \to (Y, d')$ *est continue sur* (X, d) *si elle est continue en tout point de* X.

Définition 1.14. *Une application* $f : (X, d) \to (Y, d')$ *est dite uniformément continue sur* X *si elle vérifie :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x' \in X : d(x, x') \leq \delta \Longrightarrow d'(f(x), f(x')) \leq \varepsilon.$$

Définition 1.15. (***Fonction absolument continue***) *Soient Y un espace de Banach, $I = [\alpha, \beta]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to Y$ est dite absolument continue si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tel que pour toute partition dénombrable de l'intervalle I par des intervalles disjoints $[\alpha_k, \beta_k]$ vérifiant $\sum_k (\beta_k - \alpha_k) < \delta$ on a*

$$\sum_k \|f(\beta_k) - f(\alpha_k)\| < \varepsilon.$$

Théorème 1.3. *Une fonction $f : I \to Y$ est dite absolument continue si et seulement si elle est l'intégrable de sa dérivé, c'est-à-dire*

$$f(\beta) - f(\alpha) = \int_\alpha^\beta f'(s)ds.$$

De plus une fonction absolument continue est dérivable presque partout.

Remarque 1.4. *Une fonction absolument continue est continue.*

- **Compacité**

Définition 1.16. (***Recouvrement***) *Soit (X, d) un espace métrique. Une famille d'ensemble $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de X si :*

$$\bigcup_{i\in I} U_i = X$$

Définition 1.17. (***Ensemble compact***) *Soit (X, d) un espace métrique, $K \subset X$ est dit compact si pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X, on peut extraire un sous recouvrement fini. C'est-à-dire*

$$\left(X = \bigcup_{i\in I} U_i\right) \Longrightarrow \exists J \subset I; J \text{ fini}, X = \bigcup_{i\in J} U_i.$$

Définition 1.18. *Soient (X, d) un espace métrique, $A \subset X$.*
On dit que A est relativement compact si $\bar{A}$ est compact dans X.

Proposition 1.6. *Pour une partie K d'un espace métrique (X, d), les deux assertions suivantes sont équivalentes*

1. K *compacte.*
2. *De toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K, on peut extraire une sous suite convergente dans K.*

Proposition 1.7. *Tout espace métrique compact est complet.*

Démonstration. Soit (X, d) un espace métrique compact et considérons une suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de X alors, d'après la proposition précédente, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergente dans X . Or toute suite de Cauchy possédant une sous suite convergente est convergente donc X est complet. □

Théorème 1.4. *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$,*

1. *Si (A, d) est compact, alors A fermé dans X.*
2. *Si (X, d) est compact et A fermé, alors (A, d) est compact.*

Proposition 1.8. *un espace topologique localement compact est un espace séparé qui admet des voisinages compacts pour tous ses points.*

Proposition 1.9. *Dans un espace métrique tout compact est borné.*

- **Convexité**

Définition 1.19. (***Ensemble convexe***) *On dit que* $\mathrm{C} \subset X$ *est un ensemble convexe si :*

$$\forall\alpha \in [0, 1], \forall(x, y) \in C^2 : \{\alpha x + (1 - \alpha)y\} \in C$$

Définition 1.20. (***Fonction convexe***) *Soit $C \subset X$ un ensemble convexe et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur C si :*

$$f(\alpha y + (1 - \alpha)x) \leq \alpha f(y) + (1 - \alpha)f(x), \forall x, y \in C, \forall\alpha \in [0, 1]$$

Définition 1.21. (***Fonction propre***) *La fonction f est dite propre si et seulement si $f(x) \neq -\infty, \forall x \in X$ et $f \not\equiv +\infty$ (i.e., il existe $x_0 \in X, f(x_0) \neq +\infty$)*

Définition 1.22. (***Fonction indicatrice***) *Soit A un sous ensemble de X, la fonction indicatrice notée I_A et définie par*

$$I_A : X \to \overline{\mathbb{R}}$$

$$x \mapsto I_A(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \\ +\infty & x \notin A \end{cases}$$

Proposition 1.10. *La fonction indicatrice I_A est une fonction convexe si et seulement si A est un ensemble convexe.*

Définition 1.23. (***Fonction support***) *Soient X un espace vectoriel, $A \subset X$, on appelle fonction support de A notée par $I_A^*(.)$ la fonction définie sur X' par*

$$I_A^* : X' \to \overline{\mathbb{R}}$$

$$x' \to I_A^*(x') = \sup_{x \in A} < x', x >$$

c'est la fonction conjuguée associée à la fonction indicatrice I_A.

Définition 1.24. *Un espace localement convexe est un espace vectoriel topologique dont la topologie peut être définie à l'aide d'une famille de semi-normes.*

Exemple 1.1.

• *Tout espace vectoriel normé est localement convexe.*

• *La topologie faibe d'un espace vectoriel topologique est localement convexe.*

Définition 1.25. *Une combinaison convexe (finie) des points $x_1, x_2, ..., x_n$ de X est représentée par $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$*

Définition 1.26. (***L'enveloppe convexe***) *Soit $A \subset X$, l'enveloppe convexe de A est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes (finies) des éléments de A. C'est le plus petit convexe qui contient A.*

Définition 1.27. *On appelle simplexe de $\mathbb{R}^n$ l'enveloppe convexe de $(n+1)$ points qui ne sont pas contenus dans un même hyperplan.*

1.4 Topologie faible-faible*

Pour plus de détails sur cette section voir [2].

1.4.1 Topologie faible

Soient E un espace de Banach et $f \in E', E'$ est le dual de E.
On désigne par $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f(x) =< f, x >$ Lorsque f décrit E', on obtient une famille d'applications $(\varphi_f)_{f \in E'}$ de Y dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.28. *La topologie faible $\sigma(E, E')$ est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f \in E'}$.*

Définition 1.29. *Soit $(x_n)_n$ une suite de $\overline{\mathbb{R}}$. On définit les limites inférieure et supérieure de $(x_n)_n$ comme suit*

$$\lim_{n\to\infty} \inf x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf_{k\geq n} x_k).$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{k\geq n} x_k).$$

Proposition 1.11. *Soit $(x_n)_n$ une suite de E et soit $(f_n)_n$ une suite de points de E' On a*

1. $x_n \rightharpoonup x$ *pour* $\sigma(E,E') \Longleftrightarrow < f, x_n > \to < f, x >, \forall f \in E'$.
2. *Si* $x_n \to x$ *alors* $x_n \rightharpoonup x$ *pour* $\sigma(E,E')$.
3. *Si* $x_n \rightharpoonup x$ *pour* $\sigma(E,E')$, *alors la suite* $(\|x_n\|)_n$ *est bornée et* $\|x\| \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \|x_n\|$.
4. *Si* $x_n \rightharpoonup x$ *pour* $\sigma(E,E')$ *et si* $f_n \to f$ *dans* E', *alors* $< f_n, x_n > \to < f, x >$.

1.4.2 Topologie faible*

On va définir maintenant la topologie faible* que l'on note $\sigma(Y',Y)$. Pour chaque $x \in Y$ on considère l'application $\varphi_x : Y' \to \mathbb{R}$ définie par $f \mapsto \varphi_x(f) = < f, x >$. Lorsque x parcourt Y on obtient une famille d'applications $(\varphi_x)_{x\in Y}$ de Y' dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.30. *La topologie faible * désignée aussi $\sigma(Y',Y)$ est la topologie la moins fine sur Y' rendant les applications $(\varphi_x)_{x\in Y}$.*

Proposition 1.12. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E'. On a*

1. $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(E',E) \Longleftrightarrow < f_n, x > \to < f, x >, \forall x \in E$.
2. *Si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(E',E)$, *alors* $\|f_n\|$ *est bornée et* $\|f\| \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \|f_n\|$.
3. *Si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(E',E)$ *et si* $x_n \to x$ *fortement dans* E, *alors* $< f_n, x_n > \to < f, x >$.

Proposition 1.13. *si E est de dimension finie alors*

- La topologies faible et faible coincident sur E'.*

- La topologie forte et la topologie faible $\sigma(E,E')$ coincident.

Théorème 1.5. (***Banach-Alaoglu-Bourbaki***) *Soit $(E, ||.||)$ un espace de Banach, alors la boule unité fermée de E' est compacte pour la topologie faible* $(\sigma(E',E))$.*

Proposition 1.14. (***Théorème d'Alaoglu***) *Soit $M' \subset E'$ si M' est borné pour la norme de E' et fermé pour la topologie $\sigma(E',E)$, alors M' est compact pour cette topologie $\sigma(E',E)$.*

Définition 1.31. *Un espace topologique est métrisable s'il existe une métrique qui induit sa topologie.*

Théorème 1.6. *Soit E un espace de Banach séparable. Alors la boule unité fermée de E' est métrisable pour la topologie $\sigma(E', E)$ c'est à dire on peut construire sur cette boule une métrique qui induit la même topologie que la topologie faible* $(\sigma(E', E))$.*

1.5 Quelques notions d'analyse multivoque

L'analyse multivoque est une branche très importante en mathématiques, dans cette section on donne quelques définitions et notions élémentaires sur l'analyse multivoque. Pour plus de détails sur cette partie voir [1] et [9].

1.5.1 Mutlti-applications

Définitions générales

Définition 1.32. *Soient X_1, X_2 deux ensembles non vides. On dit que F est une multi-application de X_1 dans X_2 si pour tout $x \in X_1$ elle associe un ensemble $F(x)$ de X_2. Et on note*

$$F : X_1 \rightrightarrows X_2$$

$$x \mapsto F(x).$$

Où

$$F : X_1 \to 2^{X_2}$$

$$x \mapsto F(x).$$

Exemple 1.2. *Toute application univoque est une image d'une application multivoque. Soit $f : X \to Y$ une application univoque. On définit $T : X \rightrightarrows Y$ par $Tx = \{f(x)\}$.*

Définition 1.33. *Soit $F : X_1 \rightrightarrows X_2$ une multi-application, on définit*

• *Le domaine effectif : est noté $D(F)$ et définie par*

$$D(F) = \{x \in X_1 : F(x) \neq \emptyset\}$$

• *L'image : est notée $\mathrm{Im}(F)$ et définie par*

$$\mathrm{Im}(F) = \bigcup_{x \in D(F)} F(x) = \{y \in X_2, \exists x \in D(F), y \in F(x)\}$$

• *Soit $A \subset X_1$. On appelle image de A par F qu'on note $F(A)$ le sous ensemble de X_2 défini par*

$$F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x) = \{y \in X_2, \exists x \in A, y \in F(A)\}.$$

• *Le graphe : est noté* $\mathrm{gph}(F)$ *et défini par*

$$gph(F) = \{(x, y) \in X_1 \times X_2 : x \in D(F), y \in F(x)\}.$$

• *La norme : est notée $\|F\|$ et donnée par*

$$\|F\| = \sup_{y \in F(x)} \|y\|.$$

On appelle sélection de F toute application $f : X_1 \to X_2$ vérifiant :

$$f(x) \in F(x), \forall x \in X_1.$$

(f est univoque).

Définition 1.34. *La multi-application inverse est notée F^{-1} et définie par*

$$F^{-1} : X_2 \rightrightarrows X_1$$
$$y \mapsto F^{-1}(y)$$

avec

$$y \in F(x) \Leftrightarrow x \in F^{-1}(y).$$

1.5.2 Continuité des multi-applications

. •**Semi-continuité supérieure (s.c.s.)**.

Définition 1.35. *Soient X et Y deux espaces topologiques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-fonction.*

▷ *On dit que F est semi-continue supérieurement (s.c.s.) au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert V de Y tel que $F(x_0) \subset V$, il existe un voisinage Ω de x_0, tel que*

$$F(x) \subset V, \forall x \in \Omega.$$

▷ *On dit que F est s.c.s. sur X si elle est s.c.s. en tout point de X.*

Proposition 1.15. *Soient X et Y deux espaces topologiques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction à valeurs fermées, ($F(x)$ un fermé de $Y, \forall x \in X$).*

$\triangleright$ *Si F est s.c.s. sur X alors le graphe de F est fermé.*

Proposition 1.16. *Soient X et Y deux espaces topologiques, tel que Y est compact et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.*

$\triangleright$ *Si le graphe de F est fermé alors F est s.c.s. sur X.*

Théorème 1.7. *Soient X et Y deux espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

i) *F est semi-continue supérieurement sur X,*

ii) *L'ensemble $F_+^{-1}(V) = \{x \in X : F(x) \subset V\}$ est un ouvert de X pour tout ouvert V de Y,*

iii) *l'ensemble $F^{-1}(M) = \{x \in X : F(x) \cap M \neq \emptyset\}$ est un fermé de X pour tout fermé M de Y.*

Proposition 1.17. *[1] Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs compactes semi-continue supérieurement sur X. Alors pour chaque ensemble compact $K \subset X$, l'image $F(K) = \bigcup_{x\in K} F(x)$ est compact dans Y.*

Proposition 1.18. *[10] Soient X et Y deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction à valeurs compactes, alors F est semi-continue supérieurement sur X si et seulement si pour chaque $x \in X$ et chaque suite $(x_n)_n$ de X telle que $x_n \to x$, et $(y_n)_n$ de Y avec $y_n \in F(x_n)$, il existe une sous suite (y_m) de (y_n) telle que*

$$\lim_{m\to\infty} y_m \in F(x).$$

- **Semi-continuité inférieure (s.c.i.)**

Définition 1.36. *Soient X et Y deux espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.*

$\triangleright$ *On dit que F est semi-continue inférieurement (s.c.i.) au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert V de X tel que*

$F(x_0) \cap V \neq \emptyset$, il existe un voisinage Ω de x_0, tel que

$$F(x) \cap V \neq \emptyset, \forall x \in \Omega.$$

▷ *On dit que F est s.c.i. sur X si elle est s.c.i. en tout point de X.*

Remarque 1.5.

▷ *Une multi-application est continue en un point si elle est s.c.s. et s.c.i. en ce point.*

▷ *Une multi-application est continue sur un ensemble A si elle est continue en tout point de A.*

- **Hémi-continuité supérieure (h.c.s.)**

Définition 1.37. *Soient $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ deux espaces topologiques muni de la topologie faible et $F : \mathcal{T}_1 \rightrightarrows \mathcal{T}_2$ une multi-application.*

On dit que F est hémi-continue supérieurement (ou scalairement semi-continue supérieurement) en x_0 si pour tout $(t, t') \in (\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2')$, ($\mathcal{T}_2'$ est le dual de $\mathcal{T}_2$) la fonction $I^*_{F(t)}(t')$ est semi-continue supérieurement en x_0.

Proposition 1.19. *Toute multi-application semi-continue supérieurement définie de $\mathcal{T}_1$ à valeurs dans $\mathcal{T}_2$ qui est muni de la topologie faible est hémi-continue supérieurement.*

1.5.3 Mesurabilité des multi-applications

Définition 1.38. *Soit (T, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique, $F : T \rightrightarrows X$ une multifonction, on dit que F est Σ-mesurable si pour tout ouvert V de $X, F^{-1}(V) \in \Sigma$.*

$$F^{-1}(V) = \{t \in T : F(t) \cap V \neq \emptyset\}$$

Théorème 1.8. (***Théorème de Kuratowski et Ryll-Nardzewski***) *[11].*
Soit (J, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique complet séparable et $F : J \rightrightarrows X$ une multifonction Σ -mesurable à valeurs fermées, alors F admet au moins une sélection mesurable.

Proposition 1.20. *Soit X un espace topologique, et Y un espace métrique, F une multi-application semi-continue supérieurement définie comme $F : X \rightrightarrows Y$. Alors l'image inverse des ensembles ouverts sont des boréliens*

1.5.4 Théorème de convergence

Théorème 1.9. *[1] Soit F une multifonction h.c.s. définie sur un espace de Hausdorff localement convexe X à valeurs fermées convexes dans un espace de Banach Y.*
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_k(.)$ et $y_k(.)$ des fonctions mesurables de I dans X (respectivement Y) vérifiant
pour presque tout $t \in I$, et tout voisinage V de 0 dans $X \times Y$, il existe $k_0 = k_0(t, V)$ tel que

$$\forall k \geq k_0, (x_k(t), y_k(t)) \in \operatorname{gph}(F) + V,$$

si on a

i) $x_k(.)$ *converge p.p. vers une fonction* $x(.)$,

ii) $y_k(.) \in L^1(I, Y)$ *et converge faiblement vers* $y(.)$ *dans* $L^1(I, Y)$,

alors

$$(x(t), y(t)) \in \operatorname{gph}(F),$$

c'est-à-dire

$$y(t) \in F(x(t)) \quad \textit{pour presque tout } t \in I.$$

1.6 Quelques résultats classiques

Définition 1.39. *Soient $(X_1, d), (X_2, d')$ deux espaces métriques, $\mathcal{F}(X_1, X_2)$ l'espace de toutes les applications $f : X_1 \to X_2$ et S un sous ensemble de $\mathcal{F}(X_1, X_2)$. On dit que S est équi-continu au point $x \in X_1$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in X_1, d(x, y) < \delta \Longrightarrow \forall f \in S, d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Théorème 1.10. (***Théorème d'Ascoli-Arzelà***) *[7] Soient (X_1, d) un espace métrique compact, (X_2, d') un espace métrique complet et S un sous ensemble de $C(X_1, X_2)$, l'espace des applications continues définies sur X_1 à valeurs dans X_2, muni de la topologie de la convergence uniforme. Alors S est relativement compact si et seulement si*

$$\begin{cases} \textit{1. } S \textit{ est équi-continu,} \\ \textit{2. pour tout } x \in X_1, S(x) = \{f(x)/f \in S\} \textit{ est relativement compact.} \end{cases}$$

Théorème 1.11. (***Corollaire du théorème d'Ascoli-Arzelà***) *[7]*
Soient I un intervalle compact de $\mathbb{R}$, E un espace de Banach de dimension finie et soit (x_n) une suite de fonctions absolument continues définies sur I à valeurs dans E vérifiant les conditions suivantes

1. *$\forall t \in I, (x_n(t))_n$ est un sous ensemble relativement compact dans E,*
2. *il existe une fonction à valeurs réelles positives $c \in L^1(I, \mathbb{R}^+)$ tel que*

$$\|x'(t)\| \leq c(t), \ \ p.p. \ sur \ I.$$

Alors il existe une sous suite (notée encore $(x_n)_n$) et une fonction absolument continue $x : I \to E$ au sens suivant :

i) $(x_n)_n$ *converge uniformément vers x sur un ensemble compact de I,*

ii) $(x'_n)_n$ *converge faiblement vers x' dans $L^1(I, E)$.*

CHAPITRE 2

QUELQUES THÉORÈMES DE POINT FIXE POUR DES FONCTIONS UNIVOQUES

Dans ce chapitre on va étudier quelques théorèmes de point fixe pour des fonctions univoques définies sur un espace métrique et à valeurs dans lui-même.
On commencera par le plus simple et le plus connu d'entre eux : **le théorème du point fixe de Banach** pour les applications contractantes, on verra ensuite des théorèmes plus puissants et un peu plus profonds, on pourra ainsi étudier successivement **le théorème du point fixe de Caristi** qui est contrairement au théorème de Banach, n'exige pas que la fonction en question soit une contraction, puis **le théorème de point fixe de Ciric**, **le théorème du point fixe de Brouwer** valable en dimension finie puis **le théorème du point fixe de Schauder** qui en est la généralisation en dimension infinie, et enfin on terminera par **une application** en utilisant **le théorème de Schauder** au **problème de Cauchy**.

2.1 Théorème du point fixe de Banach

Ce théorème est dit principe de l'application contractante, il est la base de la théorie du point fixe.

Ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même. Ce théorème prouvé en **1922** par **Stefan Banach** est basé essentiellement sur les notions d'application contractante.

Définition 2.1. (***Point fixe***) *Soit* (X, d) *un espace métrique, et* $f : X \longrightarrow X$ *une application. On appelle point fixe de* f *tout point* $x \in X$ *tel que* $f(x) = x$. *(On utilise aussi la notation* $fx = x$*).*

Définition 2.2. *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $f : X \to X$ *une application.*

— f *est dite* ***Lipschitzienne*** *s'il existe un nombre réel* $\theta \geq 0$, *tel que pour tout* $x, y \in X$, *on a*

$$d(fx, fy) \leq \theta d(x, y).$$

— f *est une application* ***contractante*** *s'il existe* $\theta \in [0, 1[$ *tel que pour tout* $x, y \in X$ *on a*

$$d(fx, fy) \leq \theta d(x, y).$$

— f *est dite* ***non expansive*** *si* $\theta = 1$.

Remarque 2.1.

Notons que : contraction $\Longrightarrow$ *non expansive* $\Longrightarrow$ *lipschitzienne, et que toutes ces fonctions sont uniformément continues.*

• *Une fonction lipschitzienne est absolument continue.*

Théorème 2.1. (***Banach 1922***) *[16] Soit* (X, d) *un espace métrique complet (ou bien un espace de Banach si X possède une norme) et* $f : X \to X$ *une contraction. Alors f admet un point fixe unique dans X, c-à-d il existe* $x \in X$ *tel que* $fx = x$. *En outre ce point peut-être obtenu comme limite de toute suite engendrée par allitération*

Démonstration.

(a) Existence:

Soit x_0 un point initial quelconque et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par:

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Nous allons établir que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque f est contractante, on a

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq \theta d(x_{n-1}, x_n) \leq ... \leq \theta^n d(x_0, x_1)$$

Ainsi, pour $m > n$, ou $n \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \theta^n d(x_1, x_0) + \theta^{n+1} d(x_1, x_0) + \cdots + \theta^{m-1} d(x_0, x_1) \\ &\leq \theta^n [1 + \theta + \theta^2 + \cdots + \theta^{m-n-1}] d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_0, f(x_0)) \to 0 \text{ quand } n \to \infty \;\; car \;\; \theta \in [0, 1[. \end{aligned}$$

Ceci montre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy et comme X est un espace complet, alors il existe $x \in X$ tel que $x_n \to x$. Par ailleurs puisque f est continue, on a :

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x).$$

donc x est un point fixe de f.

(b) Unicité:

Supposons qu'il existe deux points $x, y \in X$ tel que $x \neq y$, $x = f(x)$ et $y = f(y)$.

Alors, on a

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y),$$

donc

$$\frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} = 1,$$

d'autre part, f contractante donc

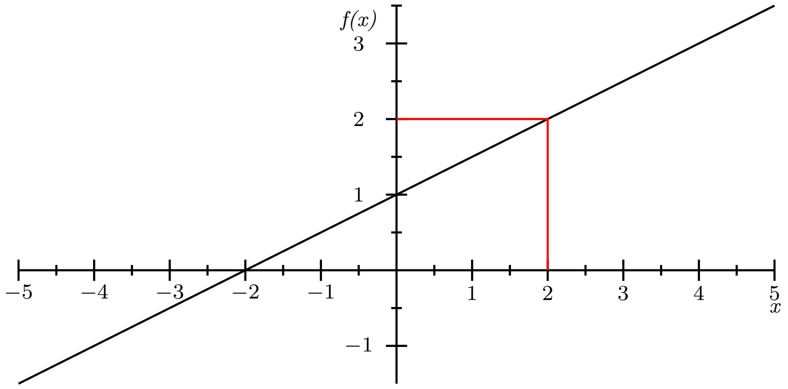
$$\frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} \leq \theta \frac{d(x, y)}{d(x, y)} < 1,$$

ce qui est contradiction, d'où l'unicité. □

Exemple 2.1.

Soit $X = \mathbb{R}$ et l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$



Alors f est contractante et admet un unique point fixe $x = 2$.

Remarque 2.2.

Les exemples suivants montrent que chacune des hypothèses du théorème du point fixe de Banach sont essentiels, si nous en négligeons seulement une, alors le point fixe n'existe pas.

— *X n'est pas stable par f*: $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ *sur* $X = [0, 1]$.

Or X fermé dans $\mathbb{R}$, et complet car $\mathbb{R}$ est complet. De plus,

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1 \Longrightarrow \sup\limits_{x\in X}|f'(x)| < 1 \Longrightarrow$ *f est contractante. Mais f n'admet pas de point fixe car $f([0, 1]) = [1, \sqrt{2}] \nsubseteq [0, 1]$ i.e. X n'est pas stable par f.*

— *f n'est pas contractante*: $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ *sur* $X = [0, \infty[$.

Or $f : X \longrightarrow X$, et X est un fermé de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ est complet donc X est complet.

Mais f n'admet pas de point fixe car $\sup\limits_{x\in X}|f'(x)| = 1$ donc f n'est pas contractante.

— *X n'est pas complet*: $f(x) = \frac{\sin(x)}{2}$ *sur* $X =]0, \frac{\pi}{4}]$.

Or $f(]0, \frac{\pi}{4}]) =]0, \frac{\sqrt{2}}{4}] \subset]0, \frac{\pi}{4}]$, et $\sup\limits_{x\in X}|f'(x)| = \frac{1}{2} < 1$

donc, f est contractante. Mais X n'admet pas de point fixe car X n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ donc X n'est pas complet.

2.2 Théorème du point fixe de Caristi

Définition 2.3. *Une fonction $\phi : X \to \mathbb{R}$ est dite semi-continue inférieurement si, pour tout $x \in X$*

$$\liminf_{y \to x} \phi(y) \geq \phi(x),$$

où, de façon équivalente, si l'ensemble $\{x \in X : \alpha \geq \phi(x)\}$ est fermé pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.2. (***Caristi***) *[3] [5] Soit (X, d) un espace métrique complet et $\phi : X \to \mathbb{R}$ une fonction semi-continue inférieurement bornée inférieurement. Soit $f : X \to X$ une fonction quelconque telle que*

$$d(x, f(x)) \leq \phi(x) - \phi(f(x)) \text{ pour tout } x \in X.$$

Alors f a un point fixe.

*Une preuve plus simple utilisant un résultat de **Bishop** et **Phelps** a par la suite été faite. Avant d'énoncer ce lemme, voici le théorème **d'intersection de Cantor** qui nous sera nécessaire pour faire la preuve du lemme de **Bishop-Phelps**.*

Théorème 2.3. (***Intersection de Cantor***) *[10] Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles non vides fermés de X tels que $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \cdots$ et tels que $\lim_{n\to\infty} diam(A_n) = 0$ Alors, l'ensemble $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est constitué d'un unique point.*

Lemme 2.1. (***Bishop-Phelps***) *Soient $\phi : X \to \mathbb{R}$ une fonction semi-continue inférieurement bornée inférieurement et λ une constante positive. Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe $x^* \in X$ tel que*

$$\lambda d(x_0, x^*) \leq \phi(x_0) - \phi(x^*),$$

et

$$\lambda d(x, x^*) > \phi(x^*) - \phi(x) \text{ pour tout } x \in X \text{ tel que } x \neq x^*.$$

Démonstration.

pour tout $z \in X$, soit $T(z) = \{y \in X : \phi(y) + \lambda d(z, y) \leq \phi(z)\}$.

Puisque la fonction ϕ est semi-continue inférieurement, $T(z)$ est fermé pour tout $z \in X$.

Soit $x_0 \in X$, Choisissons d'abord $x_1 \in T(x_0)$ tel que

$$\phi(x_1) \leq 1 + \inf[\phi(T(x_0))],$$

choisissons ensuite inductivement $x_n \in T(x_{n-1})$ tel que

$$\phi(x_n) \leq \frac{1}{n} + \inf\left[\phi(T(x_{n-1}))\right].$$

Il est clair que $T(x_0) \supset T(x_1) \supset T(x_2) \supset \cdots$

Estimons le diamètre de $T(x_n)$ pour un n donné. Soit $w \in T(x_n) \subset T(x_{n-1})$.

Nous avons que

$$\phi(w) \geq \inf\left[\phi(T(x_{n-1}))\right] \geq \phi(x_n) - \frac{1}{n}.$$

Puisque $w \in T(x_n)$, nous avons que

$$\lambda d(x_n, w) \leq \phi(x_n) - \phi(w) \leq \frac{1}{n}.$$

Donc, $\operatorname{diam} T(x_n) \leq \frac{2}{\lambda n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par le théorème d'intersection de Cantor, il existe un unique $x^* \in \bigcap_{n=0}^{\infty} T(x_n)$.

Puisque $x^* \in T(x_0)$

$$\lambda d(x_0, x^*) \leq \phi(x_0) - \phi(x^*).$$

De plus, si $\lambda d(x, x^*) \leq \phi(x^*) - \phi(x)$, alors $x \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} T(x_n)$, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\lambda d(x_n, x) &\leq \lambda d(x_n, x^*) + \lambda d(x^*, x) \\
&\leq \phi(x_n) - \phi(x^*) + \phi(x^*) - \phi(x) \\
&= \phi(x_n) - \phi(x),
\end{aligned}$$

et par unicité $x = x^*$. Voici une démonstration du théorème de Caristi utilisant le lemme de Bishop-Phelps.

Démonstration du théorème2.2 : Posons $\lambda = 1$ et choisissons $x_0 \in X$. Par le Lemme 2.1 il existe $x^* \in X$ tel que, si $x \neq x^*$,

$$d(x, x^*) > \phi(x^*) - \phi(x),$$

or, par hypothèse

$$d(x^*, f(x^*)) \leq \phi(x^*) - \phi(f(x^*)),$$

de ces deux inégalités, on déduit que $x^* = f(x^*)$. $\square$

2.3 Théorème du point fixe de Ćirić

Définition 2.4. *Soit* $T : X \to X$, *un orbite de* T *à* x_0 *est une suite définie par* $\{x_n : x_n \in Tx_{n-1}, n = 1, 2, \ldots\}$.

Pour $A \subset X$ *soit* $\delta(A) = \sup\{d(a,b) : a, b \in A\}$ *et pout tout* $x \in X$, *soit*

$$O(x;n) = \{x, Tx, \ldots, T^n x\} \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$O(x;\infty) = \{x, Tx, \ldots, T^n x, \ldots\}$$

Définition 2.5. *Soit* T *une application d'un espace métrique* (X,d) *dans lui-même.* T *est dite une quasi-contraction s'il existe un nombre réel* $q \in [0,1[$ *tel que pour tout* $x, y \in X$ *on a*

$$d(Tx, Ty) \leq q \max\{d(x,y); d(x,Tx); d(y,Ty); d(x,Ty); d(y,Tx)\}.$$

Lemme 2.2. *Soit* T *une quasi-contraction sur* X, *et* n *un nombre entier positif. Alors pour tout* $x \in X$ *et tous entiers positifs* i, j *tels que* $i, j \in \{1, 2, \ldots n\}$ *on a*

$$d\left(T^i x, T^j x\right) \leq q\delta[O(x;n)].$$

Démonstration

Soit $x \in X$ un élément arbitraire, n un entier positif et soit i, $j \in \{1, 2, ..., n\}$, et $T^{i-1}x, T^i x, T^{j-1}x, T^j x \in O(x,n)$ (il est claire que $T^0 x = x$) et comme T est quasi contraction, on a

$$\begin{aligned} d\left(T^i x, T^j x\right) &= d\left(TT^{i-1}x, TT^{j-1}x\right) \\ &\leq q \max\{d(T^{i-1}x, T^{j-1}x), d(T^{i-1}x, T^i x), d(T^{j-1}x, T^j x), d(T^{i-1}x, T^j x), d(T^i x, T^{j-1}x)\} \\ &\leq q\delta[O(x,n)]. \end{aligned}$$

Remarque 2.3.

De ce lemme, il s'ensuit que si T *est une quasi-contraction et* $x \in X$, *alors pour tout entier positif* n *il existe un entier positif* $k \leq n$, *tel que*

$$d\left(x, T^k x\right) = \delta[O(x,n)].$$

Lemme 2.3. *Si* T *est une quasi-contraction sur* X *alors*

$$\delta[O(x;\infty)] \leq \left(\frac{1}{1-q}\right) d(x,Tx), \ \textit{pour tout } x \in X.$$

Démonstration

On remarque que

$$\delta\left[O\left(x,1\right)\right] \leq \delta[O(x,2)] \leq \cdots \leq \delta[O(x,n)] \leq \delta[O(x,n+1)] \cdots$$

c-à-d

$$\delta[O(x,\infty)] = \sup\{\delta[O(x,n)], n \in \mathbb{N}\}.$$

Donc il suffit de montrer que

$$\delta[O(x,n)] \leq \frac{1}{1-q} d(x,Tx) \qquad \forall n \in N.$$

D'après la remarque de Lemme 2.2 on déduit qu'il existe $T^k x \in O(x,n)$**,** $k \in \{1,2,...n\}$ **tel que**

$$d\left(x,T^k x\right) = \delta[O(x,n)].$$

D'après l'inégalité triangulaire et Lemme 2.2 on obtient

$$\begin{aligned} d\left(x,T^k x\right) &\leq d(x,Tx) + d\left(Tx,T^k x\right) \\ &\leq d(x,Tx) + q\delta[O(x,n)] \\ &= d(x,Tx) + qd\left(x,T^k x\right) \end{aligned}$$

d'o$\grave{u}$

$$\delta[O(x,n)] = d\left(x,T^k x\right) \leq (1/(1-q))d(x,Tx).$$

Théorème 2.4. (***Ćirić 1974***)*[4] Soit T une quasi-contraction d'un espace métrique complet (X,d) dans lui-même. Alors*

i) *T admet un point fixe unique $u \in X$,*

ii) $\lim_{n\to\infty} T^n x = u$ *et*

iii) $d\left(T^n x,u\right) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x,Tx)$ *pour tout* $x \in X$.

Démonstration.

Soit x un point arbitraire de X, nous allons établir que la suite $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. pour n et m deux entiers positives tel que $n < m$, et comme T une quasi contraction, d'après le Lemme 2.2 on a :

$d\left(T^n x, T^m x\right) = d\left(TT^{n-1}x, T^{m-n+1}T^{n-1}x\right) \leq q\delta\left[O\left(T^{n-1}x, m-n+1\right)\right]$,

d'après la remarque du Lemme 2.2, il existe un entier k_1 , $1 \leq k_1 \leq m-n+1$ tel que

$$\delta\left[O\left(T^{n-1}x, m-n+1\right)\right] = d\left(T^{n-1}x, T^{k_1}T^{n-1}x\right),$$

une autre fois, d'après le Lemme 2.2, on a

$$\begin{aligned} d\left(T^{n-1}x, T^{k_1}T^{n-1}x\right) &= d\left(TT^{n-2}x, T^{k_1+1}T^{n-2}x\right) \\ &\leq q\delta\left[O\left(T^{n-2}x, k_1+1\right)\right] \\ &\leq q\delta\left[O\left(T^{n-2}x, m-n+2\right)\right], \end{aligned}$$

par conséquent, nous avons le système d'inégalités suivantes

$$d\left(T^n x, T^m x\right) \leq q\delta\left[O\left(T^{n-1}x, m-n+1\right)\right] \leq q^2\delta\left[O\left(T^{n-2}x, m-n+2\right)\right],$$

on continue de cette manière on obtient

$$d\left(T^n x, T^m x\right) \leq q\delta\left[O\left(T^{n-1}x, m-n+1\right)\right] \leq \cdots \leq q^n\delta[O(x,m)],$$

alors d'après le Lemme 2.3 on trouve

$$d\left(T^n x, T^m x\right) \leq \left(q^n/(1-q)\right) d(x, Tx) \tag{2.1}$$

et comme $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0, (T^n x)$ est de Cauchy. Et comme X est un espace complet, $(T^n x)$ a une limite u dans X.

Pour montrer que $Tu = u$, nous considérons les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} d(u,Tu) &\leq d\left(u, T^{n+1}x\right) + d\left(TT^n x, Tu\right) \\ &\leq d\left(u, T^{n+1}x\right) + q\max\left\{d\left(T^n x, u\right), d\left(T^n x, T^{n+1}x\right)\ d(u,Tu), d\left(T^n x, Tu\right), d\left(T^{n+1}x, u\right)\right\} \\ &\leq d\left(u, T^{n+1}x\right) + q\left[d\left(T^n x, T^{n+1}x\right) + d\left(T^n x, u\right) + d(u,Tu) + d\left(T^{n+1}x, u\right)\right]. \end{aligned}$$

D'où

$$d(u,Tu) \leq \frac{1}{1-q}\left[(1+q)d\left(u, T^{n+1}x\right) + qd\left(u, T^n x\right) + qd\left(T^n x, T^{n+1}x\right)\right].$$

Et comme

$$\lim_{n\to\infty} T^n x = u,$$

donc

$$d(u,Tu) = 0,$$

c-à-d

$$T(u) = u.$$

Donc on a montré (i) et (ii).

Quand m tend vers l'infini en (2.1), on obtient l'inégalité (iii). □

2.4 Théorème du point fixe de Brouwer

Ce théorème donne l'existence d'un point fixe (mais pas nécessairement l'unicité) pour une fonction continue sur une boule fermée dans un espace de dimension finie.

Théorème 2.5. *Toute application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle même admet un point fixe.*

La démonstration de ce théorème nécessite des démonstrations élémentaires et assez techniques liées à la topologie algébrique.

Définition 2.6. *Si $D \subset E \subset \mathbb{R}^n$, une rétraction de E sur D est une application continue $R : E \to D$ telle que $R(x) = x$ pour tout $x \in D$. Si une telle rétraction, D est appelé un rétracte de E.*

Proposition 2.1. *Si D est un rétracte de E et si E a la propriété du point fixe (c-à-d toute application continue de E dans E admet un point fixe), alors D aussi a la propriété du point fixe (c-à-d toute application continue de D dans D admet un point fixe).*

Cas d'une partie convexe compacte non vide

Théorème 2.6. *Soit K une partie non vide compacte et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \longrightarrow K$ une fonction continue. Il existe $x \in K$ tel que $f(x) = x$.*

Ce théorème donne l'existence d'un point fixe (mais pas nécessairement l'unicité) pour une fonction continue sur un convexe fermé borné de la norme euclidienne.

On aura besoin pour la démonstration du lemme suivant :

Lemme 2.4. *L'application $P_k : x \to P_k(x)$ est contractante donc continue.*

Démonstration. (du Théorème2.6)
K est un convexe compact non vide, donc il est fermé borné de $\mathbb{R}^n$:

$$\exists r > 0 \quad tq \quad K \subset B_f(0, r)$$

Étape 1 :
Toute application continue $f : B_f(0, r) \to B_f(0, r)$ admet un point fixe.

Démonstration. Il est clair que $\overline{\mathbb{B}}$ est homéomorphe à $B_f(0, r)$. Soit $h : \overline{\mathbb{B}} \to B_f(0, r)$ l'homéomorphisme et h^{-1} sa réciproque. Puisque l'application $h^{-1} \circ f \circ h : \overline{\mathbb{B}} \to \overline{\mathbb{B}}$ est continue, elle admet un point fixe c-à-d $\exists x \in \overline{\mathbb{B}}$ tel que : $(h^{-1} \circ f \circ h)(x) = x$. Ce qui implique que $(f \circ h)(x) = h(x)$. D'où $h(x)$ est un point fixe de f. □

Étape 2 :
K est un rétracte de B_f.

Démonstration. Comme K est un compact convexe de $\mathbb{R}^n$ l'application de projection $P_K : B_f \to K$ est une rétraction. □

La démonstration du Théorème 2.6 s'ensuit du l'étape 1, l'étape 2 et de la Proposition 2.1. □

2.5 Théorème du point fixe de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

Le théorème du point fixe de Schauder est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Théorème 2.7. *Soit K un sous-ensemble non vide, compact convexe dans un espace de Banach X et supposons $T : K \to K$ une application continue. Alors T admet un point fixe.*

Démonstration.
Soit K un sous ensemble compact convexe d'un espace de Banach E, et soit $T : K \to K$

une application continue. Comme K est compact, T est uniformément continue alors, si on fixe $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in K$, on a

$$\|x - y\| \leq \delta \Longrightarrow \|T(x) - T(y)\| \leq \varepsilon.$$

De plus, on peut recouvrir K par un nombre fini de boules ouvertes de rayon δ et de centres x_j, i.e.

$$K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} B(x_j, \delta)$$

Soit $L = \operatorname{vec}(T(x_j))_{1 \leq j \leq p}$ le sous espace vectoriel engendré par $T(x_j)$ tel que $1 \leq j \leq p$ alors L est de dimension finie, et $K^* = K \cap L$ est compact convexe de dimension finie. Pour $1 \leq j \leq p$, on définit les fonctions continues $\psi_j : X \longrightarrow R$ par :

$$\psi_j = \begin{cases} 0 \text{ si } \|x - x_j\| \geq \delta \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta} \text{ sinon } , \end{cases}$$

il est clair que ψ_j est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle ailleurs. On a donc, pour tout $x \in K$

$$\sum_{j=1}^{p} \psi_j(x) > 0$$

Ainsi, on peut définir sur K les fonctions continues positives φ_j par :

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^{p} \psi_k}.$$

Pour les quelles, on a $\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) = 1$, pour tout $x \in K$.

Posant, pour $x \in K$

$$g(x) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) T(x_j)$$

La fonction g est continue (car elle est la somme des fonctions continues) et prend ses valeurs dans K^* (car $g(x)$ est un barycentre des $T(x_j)$).

D'après le théorème de Brouwer la restriction $g_{/K^*} : K^* \to K^*$ possède un point fixe $y \in K^*$.

De plus

$$\begin{aligned} T(y) - y &= T(y) - g(y) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) T(y) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) T(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) \left[T(y) - T(x_j)\right]. \end{aligned}$$

Or, si $\varphi_j(y) \neq 0$ alors $\|y - x_j\| < \delta$, et par suite $\|T(y) - T(x_j)\| < \varepsilon$. Par conséquent pour tout j on a :

$$\begin{aligned} \|T(y) - y\| &\leq \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) \|T(y) - T(x_j)\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y)\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc, pour tout entier m, on peut trouver un point $y_m \in K$ tel que

$$\|T(y_m) - y_m\| < 2^{-m}.$$

Et puisque K est compact, on peut extraire une sous suite (y_{m_k}) de la suite $(y_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ et qui converge vers un point $y^* \in K$.

Alors T étant continue, la suite $(T(y_{m_k}))$ converge vers $T(y^*)$, et on conclut par la suite que $T(y^*) = y^*$, i.e. y^* est un point fixe de T sur K. □

2.6 Application

Théorème de Cauchy-Peano Le théorème de Cauchy-Peano-Arzelà est un théorème qui garantit qu'un problème de Cauchy possède toujours au moins une solution locale, sous réserve que la fonction définissant l'équation différentielle soit continue.

Théorème 2.8. *[6] (**Cauchy-Peano**) Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}, U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $(t_0, x_0) \in I \times U$ et $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ une application continue. On considère le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Alors le problème admet une solution locale.

Démonstration. On commence par remarquer que (2.2) est équivalent à

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, X(s)) ds$$

car f est continue.

On va se placer sur un cylindre de sécurité : soit $r, M > 0$ tels que

$$B_f(x_0, r) \subset U, J := \left[t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M}\right] \quad \text{et} \quad \sup_{(t,x)\in J\times B(x_0,r)} \|f(t, x)\| \leq M$$

On note $A := \{x : J \to B_f(x_0, r)$ M-lipschitzienne telle que $x(t_0) = x_0\}$ que l'on munit de la norme uniforme et on définit l'opérateur T sur A par :

$$T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))ds.$$

Le but est donc de montrer que T admet un point fixe. On commence par montrer que T est bien défini :

pour $x \in A$ et $t \in J$, on a

$$\begin{aligned} \|T(x)(t) - x_0\| &= \| \int_{t_0}^{t} f(s, X(s)) \text{ ds } \| \\ &\leq |t - t_0| \sup \|f(s, X(s))\| \\ &\leq |t - t_0| \, M < r, \end{aligned}$$

et pour $t_1, t_2 \in J$,

$$\|T(x)\,(t_2) - T(x)\,(t_1)\,\| = \| \int_{t_1}^{t_2} f(s, X(s))ds\| \leq M\,|t_2 - t_1|\,,$$

donc T est bien défini.

On montre que A est convexe et fermé :

soit $x_1, x_2 \in A, t_1, t_2 \in J$ et $\alpha \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \|\alpha x_1(t_2) + (1-\alpha)x_2(t_2) - \alpha x_1(t_1) - (1-\alpha)x_2(t_1)\| &\leq \alpha \|x_1(t_2) - x_1(t_1)\| + (1-\alpha) \|x_2(t_2) - x_2(t_1)\| \\ &\leq \alpha M|t_2 - t_1| + (1-\alpha)M|t_2 - t_1| \\ &= M|t_2 - t_1| \end{aligned}$$

d'où $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ est M-lipschitzienne.

on a $x_1, x_2 \in A$ d'où :

$$\|x_1 - x_0\| < r \quad \text{et} \quad \|x_2 - x_0\| < r$$

$$\|\alpha(x_1 - x_0)\| < \alpha r \;\; et \;\; \|(1-\alpha)(x_2 - x_0)\| < (1-\alpha)r$$

par l'addition on trouve :

$$\|(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) - x_0\| < r.$$

Donc A est convexe.

On montre que A est fermé :

Si $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de A converge uniformement vers une fonction continue $x : J \to B_f(x_0, r)$, On a alors

$$\begin{aligned} x\left(t_0\right) &= \lim_{i\to\infty} x_i\left(t_0\right) = x_0 \text{ et } \forall t, t' \in J \\ \|x(t) - x\left(t'\right)\| &= \lim_{i\to\infty} \|x_i(t) - x_i\left(t'\right)\| \\ &\leq M\left|t - t'\right| \end{aligned}$$

Et donc $x \in A$. On en déduit que A est fermé.
De plus, pour $t \in J$ et tout $x \in A$, on a

$$\|x(t) - x_0\| = \|x(t) - x\left(t_0\right)\| \leq M\left|t - t_0\right| \leq r$$

ce qui montre que la famille $A(t) = \{x(t) : x \in A\}$ est incluse dans la boule $B_f\left(x_0, r\right)$, et donc $A(t)$ est relativement compacte.

Et puisque A est l'ensemble des fonctions M-lipschitziennes A est équicontinu.
Le théorème d'Ascoli assure que A est relativement compact, et comme A est fermé, alors A est compact.

Montrons que T est continue pour pouvoir appliquer le théorème de Schauder.
Comme F est uniformément continue sur le compact $J \times B_f(x_0, r)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout (s, x) et (s', x') appartenant à $J \times B_f(x_0, r)$, on a

$$\max(\mid s - s' \mid, \|x - x'\|_\infty) < \eta \Longrightarrow \|f(s, x) - f(s', x')\| < \varepsilon \frac{M}{r}$$

alors, si x et y appartiennent à A et si $\|x - y\|_\infty < \eta$, on a

$$\forall s \in J, \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| < \varepsilon \frac{M}{r}$$

Donc, pour tout $t \in J$

$$\|T(x)(t) - T(y)(t)\| = \| \int_{t_0}^{t} (f(s, x(t)) - f(s, y(t)))ds\| \leq |t - t_0|\varepsilon \frac{M}{r} \leq \varepsilon$$

Ceci montre que $\|t(x) - t(y)\| \leq \varepsilon$ i.e. $T : A \to A$ est une application continue.
On peut donc appliquer le théorème de Schauder qui donne l'existence d'un point fixe $x \in A$ de T, c'est-à-dire que x est une solution au problème de Cauchy. $\square$

CHAPITRE 3

THÉORÈMES DE POINT FIXE POUR DES FONCTIONS MULTIVOQUES

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques théorèmes de point fixe multivoques. Nous commençons par le théorème du point fixe qui généralise celui de Brouwer à des fonctions à valeurs ensemblistes, puis nous introduisons un théorème de point fixe beaucoup plus sophistiqué dû à Kakutani et Ky Fan ainsi que sa version faibe. Nous énonçons le théorème de Nadler qui est une généralisation du principe de contraction de Banach aux contractions multivoques, le théorème de Caristi multivoque et nous terminons le chapitre par une application du théorème de Kakutani à la résolution d'une inclusion différentielle du premier ordre.

Définition 3.1. *Un point $x_0 \in X$ est dit un point fixe de T si $x_0 \in Tx_0$.*

Notation : Soit (X, d) un espace métrique. On note

— $CB(X)$ l'ensemble de tous les sous-ensembles fermés et bornés dans X.

— $B(X)$ l'ensemble des sous-ensembles bornés dans X.

— $C(X)$ l'ensemble des sous-ensembles compacts dans X.

Définition 3.2. (***Distance de Hausdorff***) *Soient (X, d) un espace métrique, A, $B \in CB(X)$.*

L'excès (ou écart) de A sur B (respectivement de B sur A) est défini par

$$e(A,B) = \sup\{d(x,B)/x \in A\}$$

et

$$e(B,A) = \sup\{d(y,A)/y \in B\}.$$

Où

$$d(x,B) = \inf_{y \in B} d(x,y)$$

est la distance de x à B.

On appelle distance de hausdorff la fonction numérique $H(A,B)$ définie par

$$H(A,B) = \max\{e(A,B), e(B,A)\}.$$

Remarque 3.1.

(CB(X),H) est un espace métrique complet si (X,d) est un espace métrique complet.

Définition 3.3. *Soit (X,d) un espace métrique. On dit que $T : X \to CB(X)$ est une contraction, s'il existe $0 \leq \lambda < 1$ telle que*

$$H(Tx,Ty) \leq \lambda d(x,y)$$

pour tout $x, y \in X$.

Lemme 3.1. *[13] Soit (X,d) un espace métrique. Soient $A, B \in CB(X)$, pour tout $a \in A$ et $b \in B$ on a*

$$d(a,b) \leq H(A,B).$$

Lemme 3.2. *[13] Soit (X,d) un espace métrique $A, B \in CB(X)$ et $a \in A$. Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists b \in B$ tel que*

$$d(a,b) \leq H(A,B) + \varepsilon.$$

Définition 3.4. (***Espace séquentiel***) *Un espace séquentiel est un espace topologique dont la topologie est définie par l'ensemble de ses suites convergentes.*

Remarque 3.2. *Tout espace métrisable est séquentiel.*

Théorème 3.1. (***Théorème d'Eberlein-Smulian***) *[10] Soit S un sous ensemble d'un espace de Banach. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) S est faiblement (relativement) séquentiellement compact.

ii) S est faiblement (relativement) compact.

Théorème 3.2. (***Théorème de Smulian***) *[10] Soit S un sous ensemble de l'espace de Banach X.*
Si S est relativement faiblement compact, alors pour chaque $x \in \bar{S}^{\omega}$ (fermeture faible de S) il existe une suite (x_n) d'éléments de S convergeant faiblement vers x.

3.1 Théorème du point fixe de Kakutani-Ky-Fan

Le théorème du point fixe de **Kakutani** est un théorème de point fixe qui généralise celui de **Brouwer** à des fonctions à valeurs ensemblistes. Il fournit une condition suffisante pour qu'une telle fonction, définie sur un compact convexe d'un espace euclidien, possède un point fixe.

Théorème 3.3. (***Kakutani 1941***)*[10] Soient X une partie compacte et convexe de $\mathbb{R}^n$ et F une application de X dans l'ensemble 2^X des parties de X vérifiant*

i) pour tout $x \in X$, on a $F(x) \neq \emptyset$,

ii) l'ensemble $F(x)$ est convexe,

iii) le graphe $\{(x, y); y \in F(x)\} \subset X \times X$ est fermé.
Alors, il existe un point $x^* \in X$ tel que $x^* \in F(x^*)$.

Démonstration.
Soit X un k-simplexe avec des sommets $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$. Formons la n^ième^ subdivision simpliciale de X.

Nous allons construire une suite de fonctions continues $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ allant de Xvers X. Soit $n \in \mathbb{N}$, nous définissons la fonction $f_n : X \to X$ de la manière suivante :

$$f_n(x) = \begin{cases} f_n(s_i) \text{ si } x = s_i, \quad \text{où} \quad s_i \in \{s_0, \ldots, s_k\}, \\ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f_n(s_i) \quad \text{où} \quad \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_i \geq 0, \forall i \in \{0, \ldots, k\} \quad \text{sinon,} \end{cases}$$

où les $f_n(s_i)$ sont fixés de manière à ce que pour tout $i \in \{0, \ldots, k\}$, nous avons $f_n(s_i) \in F(s_i)$.

La fonction f_n construite de cette façon est donc continue. d'après le théorème de Brouwer, nous savons que chaque fonction $f_n : X \to X$ possède un point fixe, notons le x_n^*.

Soit A_n un k -sous-simplexe, supposons que $x_n^* \in A_n$.
Soit $(s_0^n, \ldots, s_k^n)$ les sommets de A_n, notons $f_n\left(s_j^n\right) = u_j^n$. Alors

$$x_n^* = f_n\left(x_n^*\right) = \sum_{j=0}^{k} u_j^n \lambda_j^n \quad \text{où} \quad \sum_{j=0}^{k} \lambda_j^n = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_j^n \geq 0, \forall j \in \{0, \ldots, k\}$$

Puisque X est compact alors toute suite $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\lambda_j^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(u_j^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente vers x^*, λ_j et u_j, avec $j \in \{0, \ldots, k\}$ respectivement.
Lorsque $n \to \infty$, le diamètre des sous-simplexes tend vers 0, d'où nous avons :
$\lim\limits_{n\to\infty} s_j^n = x^* \quad \forall j \in \{0, \ldots, k\}$. Ceci nous permet d'écrire que

$$x^* = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i u_i, \text{ avec } \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1 \text{ et } \lambda_i \geq 0$$

ce qui signifie que x^* est une combinaison convexe des u_i.

Puisque la fonction F est a graphe fermé nous pouvons alors affirmer que $u_i \in F\left(x^*\right)$ pout tout $i \in \{0, \ldots, k\}$.

De plus, $F\left(x^*\right)$ est un ensemble convexe, et $x^* = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i u_i$ est une combinaison convexe des u_i, nous pouvons donc en conclure que $x^* \in F\left(x^*\right)$. Ceci termine notre preuve du théorème de point fixe de Kakutani. □

énonçons par la suite un théorème de point fixe beaucoup plus sophistiqué dû à Kakutany et Ky Fan

Théorème 3.4. (***Théorème du point fixe de Kakutani-Ky-Fan***) *Soient X un espace topologique de Hausdorff localement convexe, S un sous ensemble non vide convexe compact de X et $F : S \rightrightarrows S$ une multifonction semi-continue supérieurement à valeurs convexes fermées, alors F admet un point fixe dans S, c'est à dire il existe $x \in S$, tel que $x \in F(x)$.*

Comme corollaire du théorème précédent, on obtient une version faible du théorème de point fixe.

Théorème 3.5. (***Corollaire du théorème de Kakutani-Ky-Fan***) *Soit X un espace de Banach, S un sous ensemble non vide convexe faiblement compact de X et $F : S \rightrightarrows S$ une multifonction faiblement-faiblement semi-continue supérieurement (c-à-d X muni de* *la topologie faible) et à valeurs non vides convexes faiblement compactes, alors F admet un point fixe dans S.*

Démonstration.

Observons que l'existence d'un point fixe pour F vient immédiatement du théorème de Kakutani-Ky-Fan. Si l'on peut prouver que F est s.c.s. sur S comme étant une multifonction définie sur un sous ensemble d'un espace topologique de Hausdorff localement convexe $(X, \sigma(X, X'))$ muni de la topologie $\sigma(X, X')$ (la topologie faible de X). En vertu du Théorème 1.7 il suffit de prouver que pour tout sous ensemble faiblement fermé B de S, l'ensemble $F^{-1}(B)$ est faiblement fermé.

Soit B un sous ensemble faiblement fermé de S, comme F est faiblement-faiblement semi-continue supérieurement sur $S, F^{-1}(B)$ est séquentiellement faiblement fermé. Or $F^{-1}(B) \subset S$ qui est faiblement compact, donc $F^{-1}(B)$ est relativement séquentiellement compact et le théorème **d'Eberlein-Smulian** assure que $\overline{[F^{-1}(B)]}^{w}$ (la fermeture faible de $F^{-1}(B)$) est faiblement compact.

$\underline{F^{-1}(B)\ \textbf{est faiblement fermé}}$:

— Il est claire que $F^{-1}(B) \subset \overline{[F^{-1}(B)]}^{w}$.

— Il suffit de montrer que $\overline{[F^{-1}(B)]}^{w} \subset F^{-1}(B)$:

Soit $x \in \overline{[F^{-1}(B)]}^{w}$, d'après le théorème de **Smulian**, il existe une suite notée (x_n) de $F^{-1}(B)$ tels que $x_n \rightharpoonup x$.

Or $F^{-1}(B)$ est séquentiellement faiblement fermé, il vient que $x \in F^{-1}(B)$,

c-à-d

$$\overline{[F^{-1}(B)]}^{w} \subset F^{-1}(B).$$

Donc pour tout ensemble $B \subset S$ faiblement fermé, $F^{-1}(B)$ est faiblement fermé.

On déduit que F est s.c.s. de S qui est un convexe compact d'un espace topologique de Hausdorff localement convexe $(X, \sigma(X, X'))$ à valeurs non vides convexes compactes, donc d'après le théorème de Kakutani-Ky-Fan, F admet au moins un point fixe. □

3.2 Théorème du point fixe de Nadler

Le théorème de **Nadler** est une généralisation du principe de contraction de **Banach** pour les contractions multivoques.

Théorème 3.6. (***Nadler 1969***) *[13] Soit (X,d) un espace métrique complet. Si $T : X \rightrightarrows CB(X)$ une multi-application contractante, alors T a un point fixe.*

Démonstration.

Soient $0 < \alpha < 1$ la constante de Lipschitz de T et $x_0 \in X$. On choisit $x_1 \in Tx_0$ Puisque $Tx_0, Tx_1 \in CB(X)$ et $x_1 \in Tx_0$, d'après le Lemme 3.2 il existe un point $x_2 \in Tx_1$ tel que

$$d(x_1, x_2) \leq H(Tx_0, Tx_1) + \alpha.$$

Maintenant, lorsque $T(x_1), T(x_2) \in CB(X)$, il existe un point $x_3 \in Tx_2$ tel que

$$d(x_2, x_3) \leq H(Tx_1, Tx_2) + \alpha^2.$$

en continuant par cette manière, on obtient une suite $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ de points de X telle que $x_{i+1} \in Tx_i$ et

$$d(x_i, x_{i+1}) \leq H(Tx_{i-1}, Tx_i) + \alpha^i \quad \text{pour tout } i \geq 1$$

On remarque que

$$\begin{aligned} d(x_i, x_{i+1}) &\leq H(Tx_{i-1}, Tx_i) + \alpha^i \\ &\leq \alpha d(x_{i-1}, x_i) + \alpha^i \\ &\leq \alpha \left[H(Tx_{i-2}, Tx_{i-1}) + \alpha^{i-1}\right] + \alpha^i \\ &\leq \alpha^2 d(x_{i-2}, x_{i-1}) + 2\alpha^i \\ &\leq \cdots \\ &\leq \alpha^i d(x_0, x_1) + i\alpha^i \end{aligned}$$

pour tout $i \geq 1$ donc

$$\begin{aligned} d(x_i, x_{i+j}) &\leq d(x_i, x_{i+1}) + d(x_{i+1}, x_{i+2}) + \cdots + d(x_{i+j-1}, x_{i+j}) \\ &\leq \alpha^i d(x_0, x_1) + i\alpha^i + \alpha^{i+1} d(x_0, x_1) + (i+1)\alpha^{i+1} + \cdots + \alpha^{i+j-1} d(x_0, x_1) \\ &+ (i+j-1)\alpha^{i+j-1} \\ &= \sum_{n=i}^{i+j-1} \alpha^n d(x_0, x_1) + \sum_{n=i}^{i+j-1} n\alpha^n \\ &\leq d(x_0, x_1) \sum_{n=i}^{i+j-1} \alpha^n + \sum_{n=i}^{i+j-1} n\alpha^n \quad \text{pour tout } i, j \geq 0. \end{aligned}$$

On a

$$\sum_{n=i}^{i+j-1} \alpha^n = \alpha^i \Big[\frac{1-\alpha^j}{1-\alpha}\Big],$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{n=i}^{i+j-1} n\alpha^n &= i\alpha^i + (i+1)\alpha^{i+1} + (i+2)\alpha^{i+2} + \cdots + (i+j+1)\alpha^{i+j-1} \\ &= i\alpha^i[1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{j-1}] + \alpha^{i+1} + 2\alpha^{i+2} + 3\alpha^{i+3} + \cdots + (j-1)\alpha^{i+j-1}. \\ &= i\alpha^i\Big[\frac{1-\alpha^j}{1-\alpha}\Big] + \alpha^{i+1}[1+2\alpha+3\alpha^2+\cdots+(j-1)\alpha^{j-2}] \\ &= i\alpha^i\Big[\frac{1-\alpha^j}{1-\alpha}\Big] + \alpha^{i+1}\Big[\sum_{n=0}^{j-1} n\alpha^{n-1}\Big] \\ &= i\alpha^i\Big[\frac{1-\alpha^j}{1-\alpha}\Big] + \alpha^{i}\Big[\sum_{n=0}^{j-1} n\alpha^{n}\Big],\end{aligned}$$

donc

$$d(x_i, x_{i+j}) \leq d(x_0, x_1)\, \alpha^i\Big[\frac{1-\alpha^j}{1-\alpha}\Big] + i\alpha^i\Big[\frac{1-\alpha^j}{1-\alpha}\Big] + \alpha^i\Big[\sum_{n=0}^{j-1} n\alpha^n\Big]. \tag{3.1}$$

Or $\sum_{i=0}^{+\infty} i\alpha^i$ est une série convergente, par application du critère de d'Alembert, on obtient $\lim\limits_{i\to+\infty} i\alpha^i = 0$,
par passage à la limite dans (3.1) lorsque $i \to +\infty$ et $j \to +\infty$, on trouve :

$$\lim_{i,j\to+\infty} d(x_i, x_{i+j}) = 0.$$

Par conséquent (x_i) est une suite de Cauchy et comme (X, d) est complet alors (x_i) est convergente vers un point $u \in X$.

D'où, la suite (Tx_i) converge vers Tu, et comme $x_{i+1} \in Tx_i$ pour tout i, alors $u \in Tu$. □

3.3 Généralisation du théorème de Nadler

Théorème 3.7. *[8] Soient (X, d) un espace métrique complet et T une multi-appication de X dans $CB(X)$ satisfaisant la condition suivante :*

$$H(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) + \beta[d(x, Tx) + d(y, Ty)] + \gamma[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$$

pour tout $x, y \in X$, où $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ et $\alpha + 2\beta + 2\gamma < 1$. Alors T a un point fixe.

Démonstration.

Soit x_0 arbitraire dans $X, x_1 \in Tx_0$. On définit une suite (x_n) dans X par $x_{n+1} \in Tx_n$.

Posons $r = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{1-(\beta+\gamma)} > 0$.

D'après le Lemme 3.2 on a

$$\left\{\begin{array}{ll} \exists x_2 \in Tx_1 : & d(x_1, x_2) \leq H(Tx_0, Tx_1) + r \\ \exists x_3 \in Tx_2 : & d(x_2, x_3) \leq H(Tx_1, Tx_2) + r^2 \\ & \ldots \\ \exists x_{n+1} \in Tx_n : & d(x_n, x_{n+1}) \leq H(Tx_{n-1}, Tx_n) + r^n \end{array}\right\}$$

Donc

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq H(Tx_{n-1}, Tx_n) + r^n \\ &\leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) + \beta[d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) + d(x_n, Tx_n)] + \gamma[d(x_{n-1}, Tx_n) + d(x_n, Tx_{n-1})] \\ &\quad + r^n \\ &\leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) + \beta[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})] + \gamma[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})] + r^n, \end{aligned}$$

i.e.

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq (\alpha+\beta+\gamma) d(x_{n-1}, x_n) + (\beta+\gamma) d(x_n, x_{n+1}) + r^n,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'où

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq r d(x_{n-1}, x_n) + \frac{r^n}{1-(\beta+\gamma)},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut conclure que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq r^n d(x_0, x_1) + \frac{n r^n}{1-(\beta+\gamma)},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \\ &\leq r^n d(x_0, x_1) + \frac{n r^n}{1-(\beta+\gamma)} + r^{n+1} d(x_0, x_1) + \frac{(n+1) r^{n+1}}{1-(\beta+\gamma)} + \cdots + \\ &(n+m-1) d(x_0, x_1) + \frac{(n+m-1) r^{(n+m-1)}}{1-(\beta+\gamma)} \\ &= d(x_0, x_1) \sum_{i=n}^{n+m-1} r^i + \frac{1}{1-(\beta+\gamma)} \sum_{i=n}^{n+m-1} i r^i \quad \text{pour tout } n, m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

De la même manière que la preuve précédente, on trouve

$$\lim_{n,m\to+\infty} d(x_n, x_{n+m}) = 0$$

(x_n) est une suite de Cauchy dans X qui est complet, d'o*ù* il existe $x^* \in X$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.
On va montrer que x^* est un point fixe de T. Nous avons

$$\begin{aligned}
d(x^*, Tx^*) &\leq d(x^*, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx^*) \\
&\leq d(x^*, x_{n+1}) + H(Tx_n, Tx^*) \\
&\leq d(x^*, x_{n+1}) + \alpha d(x_n, x^*) + \beta[d(x_n, Tx_n) + d(x^*, Tx^*)] + \gamma[d(x_n, Tx^*) + d(x^*, tx_n)],
\end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc

$$d(x^*, Tx^*) \leq d(x^*, x_{n+1}) + \alpha d(x_n, x^*) + \beta[d(x_n, x_{n+1}) + d(x^*, Tx^*)] + \gamma[d(x_n, Tx^*) + d(x^*, x_{n+1})],$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par passage à limite $n \to \infty$, on obtient

$$d(x^*, Tx^*) \leq (\beta+\gamma) d(x^*, Tx^*),$$

comme $\beta + \gamma < 1$, alors $d(x^*, Tx^*) = 0$, ce qui implique que $x^* \in Tx^*$. □

Remarque 3.3. *Si $\beta = \gamma = 0$ dans le Théorème 3.7, on obtient le théorème de Nadler.*

3.4 Théorème du point fixe multivoque de Caristi

Il existe une généralisation du théorème de Caristi aux fonctions multivoques.

Théorème 3.8. *[12] Soient $\varphi : X \to]-\infty, +\infty]$ une fonction propre semi-continue inférieurement bornée inférieurement et $T : X \rightrightarrows X$ une fonction multivoque tel que pour tout $x \in X$ il existe $y \in Tx$ tel que*

$$d(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y).$$

Alors T a un point fixe.

Démonstration.

Pour chaque $x \in X$ posons $f(x) = y$ où y est un élément de X tel que

$$y \in Tx \quad \text{et} \quad d(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y).$$

Alors, f est une fonction de X dans X satisfaisant :

$$d(x, f(x)) \leq \varphi(x) - \varphi(f(x)),$$

pour tout $x \in X$.

Puisque φ est une fonction propre, il existe $u \in X$ tel que $\varphi(u) < +\infty$.

posons

$$X' = \{x \in X : \varphi(x) \leq \varphi(u) - d(u, x)\}.$$

X' n'est pas vide puisque $u \in X'$.

De plus, par la semi-continuité inférieure de φ, X' est fermé et donc un espace métrique complet. Remarquons que la fonction φ restreinte au domaine X' est à valeurs réelles et qu'elle est aussi semi-continue inférieurement et bornée inférieurement.

Montrons maintenant que X' est invariant sous f. Pour tout $x \in X'$, nous avons

$$\begin{aligned}
\varphi(f(x)) &\leq \varphi(x) - d(x, f(x)) \\
&\leq \varphi(u) - (d(u, x) + d(x, f(x))) \\
&\leq \varphi(u) - d(u, f(x)).
\end{aligned}$$

Donc $f(x) \in X'$ pour tout $x \in X'$.

Le théorème de Caristi univoque nous permet de conclure que f a un point fixe $z \in X'$. Donc, $z = f(z) \in Tz$. □

3.5 Application

Théorème 3.9. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $F : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs non vides convexes compactes.*

Donc, il existe $T > 0$, et une fonction absolument continue $x : [t_0 - T, t_0 + T] \to \mathbb{R}^n$ solution de l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} x'(t) \in F(t, x(t)) \quad p.p. \ sur [t_0 - T, t_0 + T], \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Démonstration.

Étape 1 :

1. Il existe $I = [t_0 - T, t_0 + T]$ et M tel que

$$\begin{cases} \text{i) } I \times B_f(x_0, r) \text{ est contenu dans } \Omega, \\ \text{ii) } \|F(t,x)\| \leq M \text{ sur } I \times B_f(x_0, r). \end{cases}$$

En effet :

comme Ω est un ouvert, il existe $r > 0$ et $T > 0$ tel que l'ensemble compact $k = [t_0 - T, t_0 + T] \times B_f(x_0, r)$ est inclus dans Ω. De plus comme F est s.c.s. à valeurs non vides convexes compactes, d'après la Proposition 1.17 $F(K) = \bigcup\limits_{x \in K} F(x)$ est un compact, et par suite il existe M tel que :

$$\sup\{\|u\|, u \in F(t,x), (t,x) \in k\} \leq M.$$

2. Soit $\mathcal{H} = \{x \in C(I, \mathbb{R}^n), x \text{ est lipschitzienne de constante } M \text{ et } x(t_0) = x_0\}$, pour tout x dans $\mathcal{H}$, définissons l'opérateur intégral $\mathcal{L}$ comme suit

$$\mathcal{L}(x) = \{z \in \mathcal{H}, z'(t) \in F(t, x(t)) \text{ p.p. dans } I\}.$$

Montrons que pour tout $x \in \mathcal{H}$, $\mathcal{L}(x)$ est non vide.

En effet :

Comme la multi-application $t \to F(t, x(t))$ est semi-continue supérieurement d'après la Proposition 1.20 l'hypothèse du théorème de sélection mesurable 1.8 est satisfaite, i.e. il existe une sélection mesurable $v : I \to \mathbb{R}^n$, tel que $v(t) \in F(t, x(t))$.

On pose $z(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(s)\, \mathrm{ds}$.

• On vérifie que $z \in \mathcal{L}(x)$; en effet

pour t', $t \in I$ on a

$$\begin{aligned} \|z(t') - z(t)\| &= \|x_0 + \int_{t_0}^{t'} v(s)\, \mathrm{ds} \; - x_0 - \int_{t_0}^{t} v(s)\, \mathrm{ds}\, \| \\ &= \| \int_{t}^{t'} v(s)\, \mathrm{ds}\, \| \\ &\leq \int_{t}^{t'} \|v(s)\|\, \mathrm{ds} \\ &\leq M|t' - t|, \end{aligned}$$

d'où z est M-lipschitzienne.

Il est clair que $z(t_0) = x_0$, donc $z \in \mathcal{H}$.

De plus on a

$$z'(t) = v(t) \text{ p.p.}$$

d'o*ù*

$$z'(t) \in F(t, x(t)),$$

ce qui montre que $z \in \mathcal{L}(x)$.

Étape 2: Montrons que

$$\begin{cases} 1) \quad \text{pour } x \in \mathcal{H}, \mathcal{L}(x) \text{ est convexe,} \\ 2) \quad \text{la multi-application } x \to \mathcal{L}(x) \text{ est s.c.s.,} \\ 3) \quad \text{il existe un point fixe } x^* \in \mathcal{L}(x^*). \end{cases}$$

• $\mathcal{L}$ est convexe :

Soit z_1, $z_2 \in \mathcal{L}(x)$. Alors z_1, $z_2 \in \mathcal{H}$, et $z_1'(t)$, $z_2'(t) \in F(t, x(t))$. En effet pour t', $t \in I$ et $\alpha \in [0, 1]$ on a

$$\|z_1(t') - z_1(t)\| \leq M|t' - t| \quad \text{et} \quad \|z_2(t') - z_2(t)\| \leq M|t' - t|$$

on multiplie la $1^{\text{ère}}$ par α et la $2^{\text{ème}}$ par $(1 - \alpha)$, par l'addition on trouve :

$$\begin{aligned} \|(\alpha z_1(t') + (1 - \alpha)z_2(t')) - (\alpha z_1(t) + (1 - \alpha)z_2(t))\| &\leq \alpha M|t' - t| + (1 - \alpha)M|t' - t| \\ &= M|t' - t|. \end{aligned}$$

D'o*ù* $\alpha z_1 + (1 - \alpha)z_2$ est M-lipschitzienne.

Et $\alpha z_1(t_0) + (1 - \alpha)z_2(t_0) = z_0$. Donc $\alpha z_1 + (1 - \alpha)z_2 \in \mathcal{H}$.

De plus, on a $z_1'(t), z_2'(t) \in F(t, x(t))$, par la convexité des valeurs de F

$$\alpha z_1'(t) + (1 - \alpha)z_2'(t) \in F(t, x(t)), \forall \alpha \in [0, 1].$$

ce qui montre la convexité de $\mathcal{L}$.

• $\mathcal{L}$ est semi-continue supérieurement : on montre d'abord que le graphe de $\mathcal{L}$ est fermé, en effet :

soit $x_n \in \mathcal{H}$, $z_n \in \mathcal{L}(x_n)$, et on suppose que $x_n \to \bar{x}$, $z_n \to \bar{z}$, et on appelle y_n la multi-application $y_n : t \to z_n'(t)$ tel que $\|y_n(t)\| \leq M$ de $L^\infty(I)$, par conséquent d'après le théorème d'Alaoglu, et le Théorème 1.6 on peut extraire une sous suite $(y_n)_n$ tel que

$$y_n \rightharpoonup^* \bar{y} \text{ dans } \sigma(L^\infty, L^1),$$

en particulier pour tout φ dans $L^\infty(I)$,

$$< y_n, \varphi > \to < \bar{y}, \varphi >,$$

c'est à dire on a, d'une part (y_n) converge dans $\sigma\ (L^1, L^\infty)$, et d'autre part

$$z_n(t) = \int_{t_0}^{t} y_n(t) \to \int_{t_0}^{t} \bar{y}(t),$$

i.e. $\bar{y} = \bar{z}'$.

D'après le théorème de convergence (Théorème 1.9) on déduit que $\bar{z}'(t) \in F(t, \bar{x}(t))$, d'où le graphe est fermé.

On montre que $\mathcal{H}$ est compact:

Soit $(x_n)_n$ une suite de $\mathcal{H}$, donc $(x_n)_n$ est une suite de fonction absolument continue sur le compact I. D'après le corollaire du théorème d'Ascoli Arzelà (Corollaire 1.11) il'existe une sous-suite noté aussi $(x_n)_n$ qui converge uniformément vers une fonction absolument continue x, d'où la compacité de $\mathcal{H}$.

Par conséquent comme le graphe de $\mathcal{L}$ est fermé à valeurs dans le compact $\mathcal{H}$, la Proposition 1.16 assure que $\mathcal{L}$ est semi-continue supérieurement.

Par application du Théorème de kakutani il existe un point fixe $x^* \in \mathcal{L}(x^*)$ c'est-à-dire ${x^*}'(t) \in F(t, x^*(t))$.

Par conséquent le problème (3.2) admet au moins une solution. $\square$

CONCLUSION

La théorie du point fixe est d'une importance capitale pour la résolution de nombreux problèmes émergeant dans divers domaines. Notre mémoire présente quleques théorèmes de point fixe univoques et multivoques, ainsi que deux exemples d'application à la résolution en dimension finie d'un problème de Cauchy univoque et une inclusion différentielle du premier ordre.

Le théorème du point fixe de Kakutany s'applique aussi à la résolution des inclusions différentielles d'ordre supérieur, la réduction d'un problème du second ordre à un problème du premier ordre, $\cdots$ etc.

On a vu le théorème de Caristi univoque et multivoque, ce dernier a plus tard été généralisé par plusieurs auteurs en affaiblissant les hypothèses et en introduisant différentes notions de distance.

La théorie de point fixe est une théorie de laquelle découlent pleusieurs applications qui constituent un domaine très actif de la recherche.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. P. Aubin et A. Cellina, Differential inclusions, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[2] H. Brezis, Analyse fonctionnelle théorie et application, MASSON, (1993).

[3] J. Caristi, Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions,Trans. Amer. Math. Soc., 215 (1976), 241-251.

[4] Lj. B. $\acute{C}$irić, A Generalized of Banach's contraction principle. Proc, Amer. MatI. Soc, Vol 45(2) (1974) 267-273.

[5] C. Dazé, Théorème de point fixe et principe variationnel d'Ekeland, Thèse de doctorat, Université de montréal, février 2010.

[6] J. P. Demailly, Analyse numérique et équations Différentielles, Presses Universitaires de Grenoble, 1996.

[7] R. Descombes, Cours d'analyse, Librairie Vuibert, Paris, (1962).

[8] M. Eshaghi gordji, H. Baghani, H. Khodei and M. Ramezani, A Generalization of Nadler's fixed point theorem, J. Non Sci. Appl. 3 (2010), no. 2, 148-151.

[9] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca, Condensing multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Walter de Gruyter. Berlin, New York, 2001.

[10] M. Kisieliwicz, Differential inclusions and optimal control, PWN Polish Scientific Publishers, Tnarzana and Kluwer Academic Publisher, London, 1991

[11] K. Kuratowski and C. Ryll-Nardzewski, A general theorem on selectors, Bull. Acad. Polon.sci. (1965), 397-403.

[12] N. Mizoguchi, W. Takahashi, Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces, J. Math.Anal. Appl. 141 (1989) 177–188.

[13] S.B. Nadler Jr., Multi-valued contraction mappings, PaciÖc J. Math. 30 (1969) 475-488.

[14] S. Reich, Fixed points of contractive functions, Boll. Unione Mat. Ital. 5 (1972) 26–42.

[15] C. W. Schal, Topologie et Analyse fonctionnelle, Hermann Éditeur, 6 Rue de la Sorbonne, 75005 Paris, 2012.

[16] D.R. Smart, Fixed Point Theorems, Cambridge Univ. Press 1973.

[17] Y. Sonntag, Topologie et Analyse Fonctionnelle, Berlin 23-4-1880, 1997