République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....
№ de série : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité Mathématiques
Option Analyse Fonctionnelle

Thème

Sur un problème d'évolution régi par un opérateur dépendant du temps et de l'état

par

BELHIMER KHAOULA

Devant le jury

Président	W.Boukrouk	M.C.B	U.M.S.B. Jijel
Encadreur	I.Boutana	M.C.B	U.M.S.B. Jijel
Examinateur	B.Saoudi	M.C.B	U.M.S.B. Jijel

Promotion **2020/2021**

Remerciements

Tout d'abord, je tines à remercier le bon dieu « **ALLAH** » qui m'a a donné la force et la patience pour préparer ce mémoire .

Je tiens à exprimer mes profond respect et remerciement à mon encadreur Madame **BOUTANA IMEN** qui m'a procurée, son aide, son assistance permanente ainsi que ses fructueux conseils.

Je présente également mes remerciements aux membres du jury composé de **M**^{elle} **W.Boukrouk** et **M**^{r} **B.Saoudi** qui ont accepté de participer à l'évaluation de mon travail. Je suis très reconnaissante de l'honneur que vous me faites en acceptant de juger ce travail et de l'enrichir par vos propositions.

Je veux aussi remercier tous les enseignants qui ont contribué à ma formation, ainsi qu'à toute l'équipe du département de mathématiques.

Mes remerciements vont à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail. Je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné la force et le courage de finir ce travail que je dédie :

À mon père «BOUALEM » rabi yrahmo : qui a été toujours l'épaule solide, l'œil attentif compréhensif et la personne la plus digne de mon estime et de mon respect. Aucune dédicace ne pourrait exprimer mon respect, ma considération et mes profonds sentiments envers lui.

À ma mère «NASIHA», je dis : que tu représentes pour moi le symbole de la générosité par excellence, la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de

m'encourager et de prier pour moi. Il suffit de regarder tes yeux pour savoir combien tu donnes sans jamais prendre.

À mes chers frères : MOUHAMED LAMIN, AYMEN *pour leur soutien dans mes choix et leur attention sans faille, avec mes souhaits de bonheur, de santé et de succès..*

À toute ma famille sans exception *la famille* ***BELHIMER*** *et la famille* ***ZEKIOUK****... et surtout mes cousines* ***LOUBNA*** *,* ***AMINA*** *et* ***JIHAN*** *.*

À mes chères amies :YOUSRA, SARA, LATIFA, MARIEM, MALAK *je vous remercie pour votre amitié chère à mon cœur et je vous souhaite toute le bonheur du monde.*

KHAOULA

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à la lumière de ma vie, à

A ma mère,

« Celle qui m'a élevé et qui m'a tout appris ; qui n'a jamais cessé de m'encourager et de prier pour moi. Tout ce que je peux t'offrir ne pourra exprimer l'amour et la reconnaissance que je te porte. Je te remercie pour tes sacrifices et l'affection dont tu m'as toujours entourée. »

A mon pére,

«L'âme de mon père qui malheureusement n' a pas partagé ma joie avec nous.»

A mes deux frères,

«A tous les moments d'enfance passés avec vous mes frère, en gage de ma profonde estime pour l'aide que vous m'avez apporté. vous m'avez soutenu, réconforté et encouragé. Puissent nos liens fraternels se consolider et se pérenniser encore plus. »

A toute ma famille,

«Aucun langage ne saurait exprimer mon respect et ma considération pour votre soutien et encouragements. Je vous dédie ce travail en reconnaissance de l'amour que vous m'offrez quotidiennement et votre bonté exceptionnelle. Que Dieu le Tout Puissant vous garde et vous procure santé et bonheur. »

A toutes mes amies,

Table des matières

Introduction

Les mathématiques consistent d'abord en un langage, qui permet de transcrire des problèmes de nature quantitative : c'est la modélisation. Une fois cette transcription faite, des outils sont disponibles pour comprendre et résoudre les problèmes issus des phénomènes du monde réel qui utilise les lois de la physique (mécanique, thermodynamique, électromagnétisme, etc...), ces lois sont, généralement, écrites sous la forme de bilans qui se traduisent mathématiquement par des Équations Différentielles Ordinaire ou par des Équations aux dérivées partielles.

Aujourd'hui, la théorie des équations différentielles (univoques et multivoque) est devenue plus importante et plus attirante. Son champ d'application s'est considérablement développé, et s'est avéré Fructueuse dans de nombreux domaines comme : la mécanique unilatérale, l'économie mathématiques, les sciences de l'ingénieur (circuit électrique non régulier), etc..., plus récemment, elle est devenue une des méthodes importantes pour l'étude des inégalités variationnelles d'évolution.

Ce mémoire représente mon premiers pas dans le domaine de la recherche, ceci par la lecture, l'étude et le détail des résultats dans les articles [3], [9], [15], partant sur l'existence et l'unicité de solutions pour certaines classes d'inclusions différentielles du premier ordre régies par un opérateur maximale monotone dans [3], [15] dépendant du temps et dans [9] dépendant du temps et de l'état.

Les opérateurs monotones (en générale, multivoques), jouent un rôle très important dans beaucoup de domaines mathématiques. Notons, par exemple l'optimisation (Les sous différentielles des fonctions propres convexes et semi continues inférieurement sont des opérateurs maximaux monotones). Tout sa a abouti à une large étude de ces opérateurs.

Puisque la nature d'un opérateur monotone peut être assez difficile à manipuler, soit du point de vue théorique, soit du point de vue numérique, de nombreux auteurs se sont intéressés à chercher des approximations ou régularisations d'un opérateur, pour obtenir à partir d'un opérateur monotone donné, un autre qui a plus de propriétés régulière par exemple la régularité de Yosida.

Les problèmes gouvernés par les opérateurs maximaux monotones constituent une classe importante d'inclusions différentielles. Ce type de problème a été d'abord étudié lorsque l'opérateur A ne dépend pas du temps. En 1971, H.Brezis [7] utilise la méthode de la régularisation de Yosida pour démontrer l'existence et l'unicité d'une solution Lipschitzienne de l'inclusion

$$(\mathcal{P}_1)\begin{cases} -\dot{u}(t) \in Au(t), \quad p.p.t \in [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 \in D(A). \end{cases}$$

Où $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ est un opérateur maximal monotone et H est un espace de Hilbert.

Plusieurs résultats ont suivi avec diverses classes de perturbations.Voir par exemple [4], [18] et leurs références pour d'autres Théorèmes.

Une continuation aux travaux cité ci-dessus, donne naissance à l'étude de problèmes dévolution gouvernés par des opérateurs maximaux monotones dépendant du temps, c'est à dire les problèmes qui se présentent sous la forme

$$(\mathcal{P}_2)\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t), \quad p.p.t \in I \\ u(0) = u_0 \in D(A(0)). \end{cases}$$

Citons par exemple [2], [3], [15].

Dans [15], les auteurs on montré l'existence de solution à variation bornée et absolument continue pour le problème $(\mathcal{P}_2)$ avec une condition utilisant une pseudo-distance introduite par Vladimirov [18].

Dans le cas où A dépend du temps et de l'état, plusieurs travaux ont généralisé les travaux cité ci-dessus et les problèmes se présentent sous la forme

$$(\mathcal{P}_3)\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t, x(t))u(t), \quad p.p.t \in I \\ u(t) \in D(A(t, x(t))), \quad \forall t \in I \\ u(0) = u_0 \in D(A(0, x(0))). \end{cases}$$

où $x(t) = x_0 + \displaystyle\int_0^t u(s)ds, \quad t \in I.$

Ces type de problèmes est dit aussi problème de second ordre par rapport à l'état x.

De nombreux travaux peuvent être trouvés dans la litérature voir par exemple [9], [11].
Un bref schéma du contenu présenté dans ce mémoire peut se décrire comme suit :
On commence par des notations et quelques espaces usuels qu'on utiliser a tout au long de ce mémoire.
Le premier chapitre est intitulé "Préliminaires", il réunit un ensemble de Définitions, Propositions et Théorèmes sur l'analyse fonctionnelle ansi que le propriétés fondamentales des opérateurs maximaux monotones dans un espace de Hilbert, et d'autres bagages mathématiques qui vont nous servir de clé dans les chapitres qui suivent.
Dans le deuxième chapitre intitulé "Existence de solutions pour une inclusion du premier ordre gouvernée par un opérateur dépendant du temps" on donne un résultat d'existence et d'unicité pour le problème $(\mathcal{P}_2)$ dans le cas où $t \mapsto A(t)$ est absolument continue au sens de Vladimirov.
On a essayé de détailler le papier de Azzam et all . Ce résultat se trouve aussi dans la référence [15] avec des démonstrations différentes. On suit l'algorithme de discrétisations donné dans [3].
Le troisième chapitre intitulé "Existence de solutions pour une inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par un opérateur dépendant du temps et de l'état" est une continuation de travail établi dans le deuxième chapitre c'est-à-dire c'est un travail qui utilise le résultat du deuxième chapitre. En effet, on s'intéresse à l'étude de l'existence de solution pour le problème $(\mathcal{P}_3)$ dans un espace de Hilbert séparable H.
On essaye de détailler une partie du papier de Castaing et al dans [9], concernant l'existence de solution pour une inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par un opérateur maximale monotone dépendant du l'état et de temps, on peut dire aussi inclusion différentielle du second ordre par rapport à l'état x.

Notation

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de ce mémoire.

- I=[0,T] Un intervalle de $\mathbb{R}$, $T > 0$.
- H Un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ muni de produit scalaire $<.,.>$ et la norme $\|.\|$.
- I_H L'opérateur unité de H.
- $\overline{B}_H$ La boule unité fermée de H.
- Pour tout sous ensemble A de H, on note par $\overline{A}$ la fermeteur de A.
- $co(A)$ L'enveloppe convexe de A et $\overline{co}(A)$ son enveloppe convexe fermée .
- $\mathbf{1}_A$ La fonction caractéristique de A définie par

$$\mathbf{1}_A : x \in H \to \begin{cases} 1 \quad si \quad x \in A; \\ 0 \quad si \quad x \notin A. \end{cases}$$

- $d(.,A)$ La fonction distance à A définie par

$$d(.,A) : x \in H \mapsto d(x,A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|.$$

- $\delta(.,A)$ La fonction indicatrice à A définie par

$$\delta_A : x \in H \mapsto \begin{cases} 0 \quad si \quad x \in A; \\ +\infty \quad si \quad x \notin A. \end{cases}$$

- $\delta^*(.,A)$ La fonction Polaire de $\delta(.,A)$, appelée aussi fonction d'appui de A, définie sur H par

$$\delta^*(.,A) : x \in H \mapsto \delta^*(x,A) = \sup_{y \in A} <x,y>.$$

- $x_n \to x$ Exprime que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers x.
- $x_n \rightharpoonup x$ Exprime que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x.

• $\mathcal{P}(H)$ L'ensemble des parties de H.

• $\mathcal{L}(I)$ La tribu de Lebesgue sur l'intervalle I.

• dt la mesure de Lebesgue.

• $\mathbf{L}^p(I,H)$ L'espace des applications définies sur I à valeurs dans H $p^{ième}$ intégrables $(1 < p < +\infty)$ c'est à dire mesurables et $\int_I \|u(t)\|^p dt < +\infty$, muni de la norme

$$\|u(.)\|_{L^p} = \Big(\int_I \|u(t)\|^p dt \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

• $\mathbf{L}^\infty(I,H)$ L'espace des applications essentiellement bornées définies sur I à valeurs dans H, muni de la norme

$$\|u(.)\|_{L^\infty} = \inf\{c \geq 0 : \quad \|u(t)\| \leq c \quad p.p. \quad \text{sur} I\}.$$

• $C(I,H)$ L'espace de toutes les applications continues définies sur I à valeurs dans H, muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|u(t)\|_C = \sup_{t\in I} \|u(t)\|.$$

• Soit $u \in C(I,H)$ une fonction absolument continue, on note par $\dot{u}(t)$ la dérivée de u au point t, c'est à dire $\dot{u}(t) = \dfrac{du}{dt}(t)$.

• $W^{(1,2)}(I,H)$ L'espace de toutes les applications u définie sur I à valeurs dans H, absolument continue ayant une dérivée première $\dot{u} \in \mathbf{L}^2(I,H)$.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions et résultats de base qui nous seront utiles dans les preuves de nous Théorèmes d'existence dans les chapitres suivantes.
Ce résultats ont été pris des références [6, 7, 8, 12, 14, 17].

1.1 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Continuité des applications

Définition 1.1.1. ***(Aplication continue)***
Soit $(X,d),(Y,d')$ deux espaces métriques et $f : X \to Y$, on dit que f est continue au point $x_0 \in X$, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X : d(x,x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x),f(x_0)) < \varepsilon.$$

• *f est continue sur X ssi elle est continue en tout point $x \in X$.*

Définition 1.1.2. ***(Aplication équicontinue)***
Soit $(X,d),(Y,d')$ deux espaces métrique. Une partie H de $F(X,Y)$ est dite équicontinue au point $x_0 \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma > 0, \forall x \in X, , \forall f \in H : d(x,x_0) < \gamma \Rightarrow d'(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$$

• *H est dite équicontinue sur X si elle est équicontinue en tout point $x \in X$.*

Définition 1.1.3. ***(Application absolument continue)***
Soit $(E, \| \, . \, \|)$ *un espace vectoriel normé. Une fonction* $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to E$ *est dite absolument continue si est seulement si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que pour toute partition dénombrable de l'intervalle* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *par des intervalles disjoints* $[a_k, b_k]$ *vérifiant,* $\sum_k (b_k - a_k) < \delta$ *on a* $\sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\| < \varepsilon$

Théorème 1.1.1. *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé. une fonction* $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to E$ *est absolument continue, si et seulement si, il existe une fonction intégrable* $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $t \in [a, b]$

$$f(t) - f(a) = \int_a^t v(s)ds,$$

dans ce cas f *est dérivable presque par tout (p.p) et sa dérivée* $\dot{f} = v$ *p.p.*

Remarque 1.1.1. *1.Toute fonction absolument continue est une fonction continue.*
2.Toute fonction absolument continue est dérivable presque partout.

Définition 1.1.4. *Soit* $\psi : H \to \mathbb{R}$. *On dit que* ψ *est Lipschitzienne de rapport* $L > 0$, *si et seulement si,*

$$\forall x, y \in H, \|\psi(x) - \psi(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Remarque 1.1.2. *Toute fonction Lipschitzienne est absolument continue.*

Théorème 1.1.2. ***(Théorème de différentiation de Lebesgue)***
Soit $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé. Pour tout fonction intégrable au sens de Lebesgue sur* $\mathbb{R}$ *on a pour presque tout* $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(\tau)d\tau = f(x).$$

Définition 1.1.5. ***(Inégalité de Cauchy-schwartz)***
Soient H *un espace de Hilbert,* $I \subset \mathbb{R}$. *Alors,*

$$\forall x, y \in H, \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Soit $f, g \in C(I, \mathbb{R})$. *Alors,*

$$\int_0^1 |fg| \leq \left(\int_0^1 |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |g|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 1.1.6. ***(Inégalité de Minkowski)***
Soient H *un espace de Hilbert,* $I \subset \mathbb{R}$. *Soit* $f, g \in L^p(I, H)(1 < p < \infty)$. *Alors,*

$$\left(\int_0^1 |f + g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^1 |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 |g|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.1.2 Fonction à Variation Bornée

Définition 1.1.7. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Etant donnée un fonction $f : I = [0, T] \to E$, on appelle variation totale de f sur I l'expression*

$$var(f, I) = \sup\Big\{ \sum_{k=1}^{n} \|f(t_k) - f(t_{k+1})\|, n \in \mathbb{N}, \quad \forall 0 < t_1 < ... < t_n = T \Big\}$$

Si $var(f, I) < \infty$, on dit que f est à variation bornée.

Proposition 1.1.1. *Soit H un espace de Hilbert. Soit $u : I \subset \mathbb{R} \to H$ une application continue à variation bornée et soient $a, b, c \in I$ tel que $a \leq b \leq c$. Alors, on a*

1. $\displaystyle\int_{[a,b]} du = \int \mathbf{1}_{[a,b]} du = du([a, b]) = u(b) - u(a)$.
2. $\displaystyle\int_{[a,c]} du = \int_{[a,b]} du + \int_{[b,c]} du$.

Proposition 1.1.2. ***(Formule de Moreau)***

Soit $u : I \subset \mathbb{R} \to H$ une application continue à variation bornée. Alors, la formule de Moreau est donnée par

$$d\big(\|u\|^2\big) = 2\langle u, du\rangle.$$

1.1.3 Rappel sur la topologie la moins fine rendant continues une famille d'applications

Soient X un ensemble et $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Pour chaque $i \in I$, on se donne une application $\varphi_i : X \to Y_i$. La question naturelle qui se pose est comment munir X de la topologie θ la moins fine (avec le minimum d'ouverts) qui rende continues toutes les applications $\varphi_i (i \in I)$. Avant de répondre à cette question, nous donnons la définition de la topologie la moins fine et un résultat utile de la théorie des ensembles.

Définition 1.1.8. *Soient θ, θ' deux topologies sur X. On dit que θ est moins fine que θ' ssi $\theta \subset \theta'$.*

Lemme 1.1.3. *Soient F, J_i et $A_j (i \in F, j \in J_i)$ des ensembles quelconques. Alors*

$$\bigcap_{i\in F}\bigcup_{j\in J_i} A_j = \bigcup_{\psi\in\mathcal{F}}\bigcap_{i\in F} A_{\psi_i}$$

où F est l'ensemble de toutes les applications $\psi : i \in F \mapsto \psi(i) \in J_i$.

Cette formule montre que si A est une famille d'ensembles, alors toute intersection finie des unions d'éléments de A est une union d'intersections finies d'éléments de A.

La topologie faible

Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé réel. On note $E^{'}$ l'espace dual, c'est-à-dire, l'espace des formes linéaires continues sur E muni de la norme

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in \overline{B}_E} |f(x)|.$$

Définition 1.1.9. *Soit $f \in E^{'}$ et soit*

$$\varphi_f : E \to \mathbb{R}$$
$$x \to \varphi_f = f(x) =: \langle f, x \rangle$$

La topologie faible sur E notée $\sigma(E, E^{'})$ est la topologie la moins fine rendant continues les applications $\varphi_f (f \in E^{'})$.

Proposition 1.1.4. *La topologie faible $\sigma(E, E^{'})$ est séparée.*

Proposition 1.1.5. *Soit $(x_n)_n$ une suite de points de E. Alors*
1. $(x_n)_n$ *converge vers* x *pour* $\sigma(E, E')$ *(ou faiblement) si et seulement si* $(\langle f, x_n \rangle)_n$ *converge vers* $\langle f, x \rangle$ *pour tout* $f \in E'$ *;*
2. *si* $(x_n)_n$ *converge faiblement vers* x *alors* $\|x\|_E$ *est bornée et nous avons*

$$\|x\|_E \leq \liminf_{n \to \infty} \|x_n\|_E$$

La topologie faible étoile

Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé, $E^{'}$ son dual et $E^{''}$ son bidual $\Big($c'est à dire le dual de $E^{'}$ muni de la norme $\|\xi\|_{E''} = \sup_{f \in \overline{B}_{E'}} |<\xi, f>|\Big)$. On a une injection canonique $J : E \to E^{''}$ définie de la façon suivante : soit $x \in E$ fixé ; alors l'application $f \mapsto <f, x>$ de $E^{'}$ dans $\mathbb{R}$ est une forme linéaire continue sur $E^{'}$ et donc est un élément de $E^{''}$ qu'on note J_x. On a

$$<J_x, f>_{E'', E'} = <f, x>_{E', E}, \forall x \in E, \forall f \in E^{'}.$$

Il est clair que J_x est linéaire et que c'est une isométrie, i.e.

$$\|J_x\|_{E''} = \sup_{f \in \overline{B}_{E'}} |<J_x, f>| = \sup_{f \in \overline{B}_{E'}} |<f, x>| = \|x\|_E$$

Sur l'espace $E^{'}$ sont définies déjà deux topologies :
La topologie forte associée à la norme de $E^{'} \Big(\|f\|_E^{'} = \sup_{f \in \overline{B}_{E'}} |<f, x>| \Big)$.

La topologie faible $\delta(E^{'}, E^{''})$.
On définit une troisième topologie sur $E^{'}$ comme suit
Pour chaque $x \in E$, on considère l'application $\varphi x : E^{'} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi_x(f) = <f, x>.$$

Définition 1.1.10. *La topologie faible* sur $E^{'}$ est la topologie la moins fine sur $E^{'}$ qui rende continues toutes les applications $\varphi_x(x \in E)$. On la note $\delta(E^{'}, E)$.*

Proposition 1.1.6. *Soit $(f_n)_n$ une suite de $E^{'}$. Alors*
$(f_n)_n$ converge vers f pour $\delta(E^{'}, E)$ (ou faiblement) si et seulement si $(<f_n, x>)_n$ converge vers $<f, x>$ pour tout $x \in E$.*

1.1.4 Quelques notions de l'analyse convexe

Définition 1.1.11. *Soit E un espace vectoriel, et soit $S \subset E$. On dit que S est convexe ssi*

$$\forall u, v \in S, \forall \lambda \in [0, 1] : \lambda u + (1 - \lambda)v \in S.$$

Autrement dit, pour tous $u, v \in S$, le segment de droite

$$[u, v] = \{\lambda u + (1 - \lambda)v / \lambda \in [0, 1]\} \subset S.$$

Définition 1.1.12. *On appelle simplexe de $\mathbb{R}^n$ l'ensemble Δndéfini par*

$$\Delta_n = \Big\{(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n / \lambda_i \geq 0 \quad et \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\Big\}.$$

Définition 1.1.13. *Soit E un espace vectoriel et soient $x_1, x_2, ..., x_n \in E$. On appelle combinaison convexe des éléments $x_1, x_2, ..., x_n$ tout élément $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ tel que $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \Delta_n$.*

Proposition 1.1.7. *Soit E un espace vectoriel et soit $S \subset E$. Alors S est convexe ssi il contient toutes les combinaisons convexes de ses éléments.*

Définition 1.1.14. 1) *Soit E un espace vectoriel et soit $S \subset E$. On appelle enveloppe convexe de S qu'on note $co(S)$, l'intersection de tous les sous ensembles convexes de E qui contiennent S, c'est en fait le plus petit convexe de E qui contient S.*
2) *Si E est un espace vectoriel topologique, on appelle enveloppe convexe fermée de S qu'on note $co(S)$ le plus petit convexe fermé de E qui contient S.*

Définition 1.1.15. *Soit E un espace vectoriel et soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est convexe ssi*

$$\forall x, y \in dom(f), \forall \lambda \in [0,1] : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Théorème 1.1.3. ***(Théorème de séparation)***
Soit E un espace vectoriel normé, alors pour tout ensemble $S \subset E$ non vide

$$\overline{co}(S) = \{x \in E : \quad \langle x', x\rangle \leq \delta^*(x', S) \quad \forall x' \in E'\}.$$

1.2 Multiapplication (ou fonction multivoque)

Dans cette partie, nous rassemblons quelques résultats de base des multi-application nécessaire pour notre étude.
Pour une étude détaillée des multiapplications on peut se référer à [1], [12], [10].

Définition 1.2.1. *Soient X, Y deux ensembles non vides. Une multiapplication(ou application multivoque) F définie sur X à valeurs dans Y est une application qui associe à chaque élément $x \in X$ un sous ensemble $F(x)$ de Y.*
Il y a dans la littérature plusieurs notations mais nous allons adopter la suivante

$$F : X \rightrightarrows Y.$$

Le domaine, le graphe et l'image (dite aussi le rang) de la multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ sont donnée respectivement par

$$dom(F) = \Big\{x \in X : F(x) \neq \emptyset\Big\}.$$
$$gph(F) = \Big\{(x,y) \in X \times Y : x \in dom(F), y \in F(x)\Big\}.$$
$$\mathcal{R}(F) = Im(F) = \bigcup_{x \in dom(F)} F(x).$$

Définition 1.2.2. *Soient A, B deux sous ensembles d'un espace métrique (X, d), l'écart entre A et B est défini par*

$$e(A,B) = \sup_{a \in A} \quad d(a,B),$$

avec

$$d(a,B) = \inf_{b \in B} d(a,b),$$

et la distance de Hausdorff entre A et B est définie par

$$\mathcal{H}(A,B) = \max\big(e(A,B), e(B,A)\big).$$

Notons que $\mathcal{P}_f(X)$ muni de la distance de Hausdorff $\mathcal{H}$ est un espace métrique.

1.3 Quelques résultats de convergence et compacité

Pour les résultats ci-dessous on peut se référence à [1, 6, 14, 13, 16].

Théorème 1.3.1. ***(Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki)***
Soit E un espace de Banach. Alors la boule unité fermée de E' est compacte pour la topologie $\sigma(E, E')$.

Théorème 1.3.2. ***(Théorème de Mazur)***
Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et A un sous-ensemble compact de E. Alors, $\overline{co}(A)$ est compact.

Théorème 1.3.3. *Soit E un espace de Banach réflexif et soit $(x_n)_n$ une suite bornée dans E. Alors il existe une sous-suite extraite $(x_{n_k})_k$ qui converge pour la topologie $\sigma(E, E^{'})$.*

Théorème 1.3.4. ***(Théorème de Banach-Mazur)****.*
Soit E un espace de Banach et soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E convergeant faiblement vers x, alors il existe une suite $(z_n)_n$ telle que chaque z_n est une combinaison convexe des éléments $x_n, x_{n+1}, ...$ et (z_n) converge fortement vers x.

Définition 1.3.1. *Soient E un espace topologique séparé, S une partie de E. On dit que S est relativement compacte si son adhérence dans E est compacte.*

Théorème 1.3.5. (***Théorème d'Eberlin-Smulian***)
Soit S un sous ensemble d'un espace de Banach. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes
1. *S est faiblement (relativement) séquentiellement compact.*
2. *S est faiblement (relativement) compact.*

Théorème 1.3.6. (***Théorème d'Arzelà-Ascoli***)
Soit (K, d) un espace métrique compact, $(X, d^{'})$ un espace métrique complet, et $H \subset C(K, X)$ muni de la distance de la convergence uniforme. Alors H est relativement compact ssi H est équicontinu et $H(x)$ est relativement compact pour tout $x \in K$, avec

$$H(x) = \{f(x) | f \in H\}$$

Théorème 1.3.7. *Soit E un espace de Banach et soit C un sous ensemble convexe de E, alors C est faiblement fermé si et seulement si C est fortement fermé.*

Définition 1.3.2. ***(Convergence au sens de Komlos)***
Soit X un espace vectoriel normé, et soit $(w_n)_n$ une suite de points de X. On dit que la suite $(w_n)_n$ converge vers $w \in X$ au sens de Komlos si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=i}^{n} w_j = w$$

Proposition 1.3.1. *Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, X un espace vectoriel normé et soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $L^1(\Omega, X)$. Si $(u_n)_n$ est une suite bornée dans $L^1(\Omega, X)$, alors il existe une sous suite $(v_n)_n$ de $(u_n)_n$ qui converge au sens de Komlos vers un élément $x \in L^1(\Omega, X)$ p.p., i.e.,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} v_j(t) = x(t) \quad p.p.$$

Proposition 1.3.2. *Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et soit X un espace vectoriel normé. Si $(u_n)_n$ est une suite de X qui converge vers un élément $u \in X$. Alors,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \|u_k - u\|_X = 0$$

Théorème 1.3.8. ***(Théorème de la convergence dominée de Lebesgue).***
Soit $1 \le p < \infty$ et soit $(f_n)_n \subset L^p([0,T], H)$. On suppose que
1. $(f_n)_n$ converge presque partout vers une fonction f sur $[0,T]$; 2. il existe une fonction positive $g(\cdot) \in L^p([0,T], \mathbb{R})$ telle que pour tou $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(t)| \le g(t) \quad p.p.t \in [0,T].$$

Alors $f(\cdot) \in L^p([0,T], H)$ et la suite $(f_n)_n$ converge vers dans $L^p([0,T], H)$.

Lemme 1.3.3. ***(Lemme de Fatou).***
Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré. Pour toute suite $(f_n)_n$ de fonctions mesurables sur Ω à valeurs dans $[0, +\infty]$, la limite inférieure (resp. supérieure) de la suite $(f_n)_n$ est mesurable et l'on a :

$$\int \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \le \liminf_{nß+\infty} \int f_n d\mu$$

resp.

$$\int \limsup_{n\to+\infty} f_n d\mu \ge \limsup_{nß+\infty} \int f_n d\mu$$

L'égalité n'est en général pas vérifiée.

Lemme 1.3.4. ***(Lemme de Gronwall)***
Soient $(\alpha)_{i\in\mathbb{N}}$, $(\beta)_{i\in\mathbb{N}}$, $(\gamma)_{i\in\mathbb{N}}$ *des suites de nombre réels positifs vérifiant*

$$a_{i+1} \leq \alpha_i + \beta_i(a_0 + ... + a_{i-1}) + (1+\gamma_i)a_i \quad \text{pour} \quad i \in \mathbb{N}.$$

Alors,

$$a_i \leq \Big(a_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k\Big).\exp\Big(\sum_{k=0}^{i-1}\big(k\beta_k + \gamma_k\big)\Big) \quad \text{pour} \quad i \in \mathbb{N}^* \tag{1.1}$$

Théorème 1.3.9. *Soit* (Ω, Σ, μ) *un espace mesuré avec* $\mu \quad \sigma-$*finie et* $\Sigma \quad \mu-$*complète. Soit* E *un espace de Banach séparable et* $\Gamma : \Omega \rightrightarrows E$ *une multi-application à valeurs non-vides, convexes compactes. On suppose que pour tout* $x' \in E'$ *la fonction* $\delta^*\big(x', \Gamma(\cdot)\big)$ *est intégrable, i.e.,* $t \mapsto \delta^*\big(x', \Gamma(t)\big) \in L^1(\Omega, E)$. *Soit pour toute application* $g \in L^\infty(\Omega, E)$

$$\int_\Omega g\Gamma d\mu = \Big\{\int_\Omega gf d\mu : \quad f \in S_\Gamma\Big\}.$$

Soit S_Γ *l'ensemble des sélection mesurable de* Γ *défini par*

$$S_\Gamma = \Big\{f \in L(\Omega, E) : f(t) \in \Gamma(L), \quad \mu - p.p\Big\}$$

Alors, $\displaystyle\int_\Omega g\Gamma d\mu$ *est convexe,* $\sigma(E, E')$*-compact dans* E. *De plus, sa fonction d'appui est donnée par*

$$\delta^*\Big(x', \int_\Omega g(t)\Gamma(t)d\mu(t)\Big) = \int_\Omega \delta^*\Big(x', g(t)\Gamma(t)\Big)d\mu(t), \quad \forall x' \in E'.$$

En particulier, si Γ *est univoque, i.e.,* $\Gamma(\cdot) = h(\cdot) : \Omega \to E$

$$\Big\langle x', \int_\Omega g(t)h(t)d\mu(t)\Big\rangle = \int_\Omega \langle x', g(t)h(t)\rangle d\mu(t).$$

Théorème 1.3.10. *Soit* $1 \leq p < \infty$ *et soit* $(f_n)_n \subset L^p([0,T], H)$ *une suite convergeant vers une fonction* $f \in L^p([0,T], H)$ *pour la norme de* $L^p([0,T], H)$. *Alors, il existe une sous suite* $(f_{n_k})_k$ *convergeant vers* f *p.p sur* $[0,T]$.

Théorème 1.3.11. ***(Théorèmes de Schauder et de Cauchy-Arzela-Peano)***
Soit E *espace vectoriel normé. Soit* $C \subset E$ *un convexe fermé non vide. Soit* $f : C \to C$ *une application continue telle que* $\overline{f(C)}$ *est compact dans* E.
Alors, f *admet un point fixe.*

Théorème 1.3.12. *Soit* $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ *une suite de fonctions à variation bornée définies sur* $I \subset \mathbb{R}$ *à valeurs dans* H*. On suppose que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément bornée en variation et en norme, i.e., il existe deux constantes positives* K *et* M *tel que*

$$\sup_{t\in I}\|u_n(t)\| \leq K \quad et \quad var(u_n, I) \leq M.$$

Alors, il existe une sous suite $(u_{n_k})_k$ *de* $(u_n)_n$ *et une fonction* $u : I \to H$ *à variation bornée tel que pour tout* $t \in I$

$$u_n(t) \rightharpoonup u(t) \quad et \quad var(u, I) \leq M.$$

1.4 Notions sur les opérateurs maximaux monotone

Dans cette partie nous donnons quelques définitions et propriétés des opérateurs maximaux monotones qui nous serons utiles par la suite.
Les résultats suivants sont pris des références [4, 7, 18]

1.4.1 Notions sur les opérateurs dans un espace de Hilbert

Définition 1.4.1. • *On appelle opérateur moltivoque de* H *une multi-application* $A : H \rightrightarrows H$

• *Le domaine de* A *est donné par*

$$D(A) = \{x \in H; Ax \neq 0\}$$

• *L'image de* A *(dit aussi rang de* A*) est l'ensemble*

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(A) &= \{y \in H; \exists x \in D(A) \quad tel\ que \quad y \in Ax\}\\ &= \bigcup_{x\in H} Ax.\end{aligned}$$

• *On identifie* A *avec son graphe dans* $H \times H$ *et l'on écrit*

$$gph(A) = \{(x, y) : x \in D(A), y \in Ax\} = A.$$

• *L'ensemble des opérateurs est ordonné par l'inclusion des graphes,*

$$A \subset B \Rightarrow gph(A) \subset gph(B).$$

Définition 1.4.2. *soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ une multi-application (opérateur multivoque). On dit que A est monotone si, pour tous $x_1, x_2 \in D(A)$, $y_1 \in Ax_1$, $y_2 \in Ax_2$, nous avons*

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

.

Proposition 1.4.1. *Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur multivoque. A est monotone si est seulement si,*

$$\forall x_1, x_2 \in D(A), \forall \lambda > 0, \|x_1 - x_2\| \leq \|(x_1 - x_2) + \lambda(Ax_1 - Ax_2)\|.$$

Ou plus précisément,

$$\forall x_1, x_2 \in D(A), \forall y_1 \in Ax_1, \forall y_2 \in Ax_2, \forall \lambda > 0,$$

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2\| \tag{1.2}$$

Définition 1.4.3. *Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur monotone. On dit que A est maximal monotone s'il est maximal dans l'ensemble des opérateur monotone.*
C'est à dire, s'il n'existe pas d'opérateur monotone $\tilde{A}$ de H, telle que $gph(A) \subset gph(\tilde{A})$.

Proposition 1.4.2. *Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur multivoque . Alors A est maximal monotone si seulement si, A est monotone et pour tous $x, y \in H$ telle que $\langle y - \eta, x - \xi \rangle \geq 0$ pour tout $\xi \in D(A)$ et pour tout $\eta \in A\xi$, alors, $x \in D(A)$ et $y \in Ax$.*

Proposition 1.4.3. *Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur multivoque. Alors on a équivalence entre les propriétés suivantes.*
1.A est maximal monotone.
2.A monotone et $\mathcal{R}(I_H + \lambda A) = H$, $\forall\ \lambda >0$.

Proposition 1.4.4. *Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur multivoque. Si A est maximal monotone, alors l'ensemble Ax est convexe fermé, pour tout $x \in D(A)$.*

Définition 1.4.4. *Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone.*
On note par $\overset{0}{A}(x)$ la projection de 0 sur Ax. Cet élément existe et est unique gràce a Théorème de la projection dans les espaces de Hilbert.
Notons que $\overset{0}{A}(x) \in Ax$ et $\|\overset{0}{A}(x)\| = \inf\limits_{y \in Ax} \|y\| = d(0, A(x))$.

Définition 1.4.5. *soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur monotone et $\lambda > 0$. Alors*
1. L'opérateur J_λ^A défini par

$$J_\lambda^A = (I + \lambda A)^- 1$$

est appelé la résolvante de A.
2. L'opérateur A_λ défini par

$$A_\lambda = \frac{(I - J_\lambda^A)}{\lambda}$$

est appelé l'approximation Yosida de A.

Théorème 1.4.1. *Soit H un espace de Hilbert. Alors, le graphe de tout opérateur maximal monotone $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ est fortement-faiblement séquentiellement fermé.*

Proposition 1.4.5. *(i) pour tout $x \in H$ on a $J_\lambda^A(x) \in D(A)$ et $A_\lambda(x) \in AJ_\lambda^A(x)$.*
(ii) A_λ est maximal monotone et lipschitzien de rapport $\frac{1}{\lambda}$.
(iii) Pour tout $x \in D(A)$, on a $\|A_\lambda(x)\| \leq \|\overset{0}{A}(x)\|$ et $A_\lambda(x) \to \overset{0}{A}(x)$ quand $\lambda \to 0$ avec $\|A_\lambda(x) - \overset{0}{A}(x)\|^2 \leq \|\overset{0}{A}(x)\|^2 - \|A_\lambda(x)\|^2$.

Définition 1.4.6. *Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone. On appelle section principale de A, tout opérateur univoque $A' \subset A$ avec $D(A) = D(A')$ et tel que pour tout $(x, y) \in D(A) \times H$, l'inégalité*

$$\langle A'(\xi) - y, \xi - x\rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in D(A)$$

implique que $x \in D(A)$ et $y \in Ax$, i.e., $[x, y] \in A$.

Proposition 1.4.6. *L'opérateur $\overset{0}{A}$ est une section principale de A.*

1.4.2 La pseudo-distance de Vladimirov

Dans cette partie nous donnons la définition et quelques résultats sur la pseudo-distance introduite par Vladimirov (pour une étude détaillée, on peut se référer à [18]). Cette pseudo-distance a été utilisé par plusieurs auteurs pour l'étude des inclusion différentielles faisant intervenir un opérateur maximal monotone, nous citons [2], [3], [15].

Définition 1.4.7. *Soient A et B deux opérateurs maximaux monotones définis sur un espace de Hilbert dans lui même.On définit la distance de Vladimirov entre A et B par*

$$dis(A, B) := sup \left\{ \frac{\langle y_1 - y_2, x_2 - x_1\rangle}{\|y_1\| + \|y_2\| + 1}, x_1 \in D(A), y_1 \in Ax_1\, x_2 \in D(B), y_2 \in Bx_2 \right\}.$$

Remarque 1.4.1. *La distance $dis(.,.)$ peut prendre la valeur $+\infty$.*
La distance $dis(.,.)$ n'est pas une métrique, car, en général l'inégalité triangulaire n'est pas satisfaite.

Lemme 1.4.7. *Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n un opérateur maximal monotone tel que $dis(A_n, A) \to 0$ pour un opérateur maximal monotone A. Supposons aussi que $x_n \in D(A_n)$ avec $x_n \to x$ et que $y_n \in A_n x_n$ avec $y_n \rightharpoonup y$ faiblement pour $x, y \in H$. Alors $x \in D(A)$ et $y \in Ax$.*

Lemme 1.4.8. *Soient A, B deux opérateurs maximaux monotones. Alors pour tout $\lambda > 0$ et $x \in D(A)$*

$$\|x - J_\lambda^B(x)\| \leq \lambda\|\overset{0}{A}(x)\| + dis(A, B) + \sqrt{\lambda(1 + \|\overset{0}{A}(x)\|)dis(A, B)}.$$

Lemme 1.4.9. *Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n un opérateur maximal monotone tel que $dis(A_n, A) \to 0$ pour un opérateur maximal monotone A. Supposons aussi que $\eta_n \in D(A_n)$ avec $\eta_n \to \eta$ pour tout $\eta \in D(A)$ et tel que $M = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|\overset{0}{A}_n\eta_n\| < +\infty$. Alors, il existe une suite (ξ_n) tel que*

$$\xi_n \in D(A_n), \quad \xi_n \to \eta \quad et \quad \overset{0}{A}_n\xi_n \to \overset{0}{A}\eta \tag{1.3}$$

Plus précisément, on peut prendre $\xi_n = J_{\lambda_n}^{A_n}$ avec

$$\lambda_n = \big(|\eta_n - \eta| + dis(A_n, A)\big)^{\frac{1}{2}} \to 0$$

En particulier, si $dis(A_n, A) \to 0$ et $\|\overset{0}{A}_n x\| \leq c(1 + \|x\|)$ pour $c > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $x \in D(A_n)$, alors pour tout $\eta \in D(A)$, il existe une suite (ξ_n) tel que (1.3) soit satisfaite.

Chapitre 2

Résultats d'Existence de solutions pour une inclusion du premier ordre gouvernée par un opérateur dépendant du temps

2.1 Introduction

Dans ce ce chapitre on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité de solution de problème d'évolution du premier ordre gouverné par un opérateur maximal monotone dépendant du temps, dans un espace da Hilbert séparable H. Il s'agit du problème de la forme

$$(\mathcal{P})\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t), \quad p.p.t \in I \\ u(0) = u_0 \in D(A(0)). \end{cases}$$

Où, pour tout $t \in I = [0, T]$, $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$ est un opérateur maximal monotone et l'application $t \mapsto A(t)$ est à variation absolument continue.

Ce résultat à été donné dans les référence[15](Théorème.3), et dans [3],Théorème 3-1

Nous avons essayé de le présenter avec une preuve détaille, Nous suivons l'algorithme de disrétization du dernier.

Ce résultat sera utilisé pour prouver l'existence de solutions pour l'inclusion différentielle, étudiée dans le chapitre suivant.

Dans tout qui suit H est un espace de Hilbert séparable et $I = [0, T] \subset \mathbb{R}$.

2.2 Résultat d'existence

Théorème 2.2.1. *Soit pour tout* $t \in I$, $A(t) : D\big(A(t)\big) \subset H \rightrightarrows H$ *un opérateur maximal monotone vérifiant les hypothèses suivantes*
$(H1)$ *Il existe une fonction* $\beta \in \mathbf{W}^{1,2}(I, \mathbb{R})$ *positive sur* I *et croissant tel que*

$$dis\big(A(t), A(s)\big) \leq |\beta(t) - \beta(s)| \quad \forall t, s \in I \tag{2.1}$$

$(H2)$ *Il existe une constante positive* c, *tel que*

$$\|\overset{0}{A}(t, x)\| \leq c\big(1 + \|x\|\big) \quad \forall t \in I, x \in D\big(A(t)\big). \tag{2.2}$$

Alors, pour $u_0 \in D\big(A(0)\big)$ *le problème* $(\mathcal{P})$ *admet une solution unique absolument continue.*
De plus,

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K(1 + \dot{\beta}(t)) \quad p.p.t \in I,$$

pour une certaine constante $K \in [0, +\infty[$ *dépendant de* $\|u_0\|$, c, T *et* β.
Plus précisément, $K := 2\big(1+c(1+K_1)\big)$, *avec* $K_1 := \Big(\|u_0\|+2(1+c)(T+\beta(T))\Big)\exp\big(2c(T+\beta(T))\big)$.

Démonstration. On suppose que, sans perte de generalité, $\beta(T) < \infty$ et $\beta(0) = 0$
Ètape 1 : Construction des suites
On considère la partition de l'intervalle $[0, T]$ comme suit :

$$0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_{k_n}^n = T$$

On choisit une suite quelconque $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]0, 1]$ décroissante vers 0 lorsque $n \to +\infty$.
Comme la fonction β est absolument continue alors : $t \to \beta(t) + t$ est aussi absolument continue, on peut supposer que

$$|t_{i+1}^n - t_i^n| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} |\ \dot{\beta}(t)\ |\ dt \leq \varepsilon_n, \text{pour} \quad i = 0, ..., k_n - 1 \tag{2.3}$$

On pose

$$\delta_{i+1}^n = |t_{i+1}^n - t_i^n|, \quad \eta_{i+1}^n = |\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n)|, \text{pour} \quad i = 0, ..., k_n - 1 \tag{2.4}$$

alors, l'inégalité (2.3) peut être réécrite sous la forme :

$$\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n \leq \varepsilon_n \leq 1. \tag{2.5}$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on construit une application en escalier $u_n : I \to H$ continue à droite, comme suit

$$\begin{cases} u_n(t) = u_0^n = u_0, \quad \text{pour} \quad t \in [0, t_1^n[, \\ u_n(t) = u_i^n, \quad \text{pour} \quad i = 1, ..., k_n, t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[, \\ u_n(T) = u_{k_n}^n \end{cases} \tag{2.6}$$

où, pour $i = 0, ..., k_n - 1$,

$$u_{i+1}^n = J_{i+1}^n(u_i^n) := (I_H + \delta_{i+1}^n A(t_{i+1}^n))^{-1}(u_i^n), \tag{2.7}$$

Alors, $J_{i+1}^n(u_i^n) = J_{\delta_{i+1}^n}^{A(t_{i+1}^n)}(u_i^n)$, et $u_i^n \in (I_H + \delta_{i+1}^n A(t_{i+1}^n))u_{i+1}^n$.
D'après la Proposition 1.4.5(i)),

$$u_{i+1}^n = J_{i+1}^n(u_i^n) \in D\big(A(t_{i+1}^n)\big) \quad \text{et} \quad A_{\delta_{i+1}^n}(u_i^n) \in AJ_{i+1}^n(u_i^n) \tag{2.8}$$

Donc,

$$-\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n} = \frac{u_i^n - J_{i+1}^n(u_i^n)}{\delta_{i+1}^n} \overset{(def1.4.5)}{=} A_{\delta_{i+1}^n}(u_i^n) \in A(t_{i+1}^n)J_{\delta_{i+1}^n}^{A(t_{i+1}^n)}(u_i^n) = A(t_{i+1}^n)u_{i+1}^n \tag{2.9}$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application $v_n : I \to H$ par

$$\begin{cases} v_n(t) = \dfrac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}(u_{i+1}^n - u_i^n) + u_i^n \quad \text{pour} \quad t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[, i = 0, ..., k_n - 1, \\ v_n(T) = u_{k_n}^n \end{cases} \tag{2.10}$$

Il est clair que l'application v_n est absolument continue et

$$v_n(t_i^n) = u_i^n \qquad \dot{v}_n(t) = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}, \quad \forall t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[. \tag{2.11}$$

Donc, $-\dot{v}_n(t) \in A(t_{i+1}^n)v_n(t_{i+1}^n), \quad \forall t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$.
On définit la fonction $\theta_n : I \to I$ par

$$\theta_n(t) = \begin{cases} t_{i+1}^n \qquad \text{pour} \quad t \in]t_i^n, t_{i+1}^n], i = 0, 1, ..., k_n - 1, \\ 0 \qquad \text{pour} \quad t = 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

On obtient l'inclusion suivante

$$-\dot{v}_n(t) \in A\big(\theta_n(t)\big)v_n\big(\theta_n(t)\big), \quad p.p.t \in I. \tag{2.13}$$

Ètape 2 : La convergence des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$

Pour prouver la convergence de la suite $(u_n)_n$, nous allons montrer qu'elle est bornée en variation et en norme.

Nous avons par l'hypothèse $(H1)$,

$$dis\Big(A(t_i^n), A(t_{i+1}^n\Big) \leq |\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n))| = \eta_{i+1}^n, \quad \text{pour} \quad i = 0, ..., k_n - 1. \tag{2.14}$$

Et par (2.8), $u_i^n \in D\big(A(t_i^n)\big)$.

D'après le Lemme (1.4.8) $a)$ on obtient

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n - u_i^n\| &= \|J_{i+1}^n(u_i^n) - u_i^n\| \\
&\leq \delta_{i+1}^n \|\overset{0}{A}(t_i^n, u_i^n)\| + dis\big(A(t_i^n), A(t_{i+1}^n)\big) \\
&\quad + \sqrt{\delta_{i+1}^n \Big(1 + \|\overset{0}{A}(t_i^n, u_i^n)\|\Big) dis\Big(A(t_i^n), A(t_{i+1}^n)\Big)} \\
&\overset{(2.14)+(H_2)}{\leq} \delta_{i+1}^n c\Big(1 + \|u_i^n\|\Big) + \eta_{i+1}^n + \sqrt{\delta_{i+1}^n \Big(1 + c(1 + \|u_i^n\|)\Big)\eta_{i+1}^n} \\
&\leq \Big(1 + c(1 + \|u_i^n\|)\Big)(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n) + \sqrt{(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n)^2 (1 + c(1 + \|u_i^n\|))} \\
&\leq 2\Big(1 + c(1 + \|u_i^n\|)\Big)(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n\| &\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + \|u_i^n\| \\
&\leq 2\Big(1 + c(1 + \|u_i^n\|)\Big)(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n) + \|u_i^n\| \\
&\leq (1 + 2c(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n))\|u_i^n\| + 2(1 + c)(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n).
\end{aligned}$$

On applique alors le Lemme 1.3.4, on trouve pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $i = 0, ..., k_n$,

$$\|u_i^n\| \leq \Big(\|u_0\| + 2(1 + c)\sum_{k=0}^{i-1}(\delta_{k+1}^n + \eta_{k+1}^n)\Big) \exp\Big(2c\sum_{k=0}^{i-1}(\delta_{k+1}^n + \eta_{k+1}^n)\Big)$$

Comme $\sum\limits_{k=0}^{i-1} \eta_{k+1}^n = \beta(t_i^n) - \beta(t_0^n) \leq \beta(T)$, et $\sum\limits_{k=0}^{i-1} \delta_{k+1}^n = t_i^n \leq T$.

Alors,

$$\|u_i^n\| \leq \Big(\|u_0\| + 2(1 + c)(\beta(T) + T)\Big) \exp(2c(\beta(T) + T)) =: K_1. \tag{2.16}$$

D'où, l'inégalité (2.15) devient

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq 2\Big(1 + c(1 + K_1)\Big)(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n) =: K_2(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n). \tag{2.17}$$

D'où,

$$\sum_{i=0}^{k_n-1} \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq K_2\Big(T + \beta(T)\Big)$$

Si on pose $K = Max(K_1, K_2)$, on obtient

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in I} \|u_n(t)\| \leq K \quad et \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} var(u_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{i=0}^{k_n-1} \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \Big) \leq K(\beta(T) + T). \tag{2.18}$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\|u_n(t) - u_n(s)\| \leq K\Big((\beta(t) - \beta(s)) \Big) + (t-s) + \varepsilon_n \Big) \tag{2.19}$$

En effet, fixons $s \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$ et $t \in [t_j^n, t_{j+1}^n[$ avec $j > i$. Alors,

$$\begin{aligned}
\|u_n(t) - u_n(s)\| &= \|u_j^n - u_i^n\| \\
&= \|u_j^n - u_{j-1}^n + u_{j-1}^n + ... - u_{i+1}^n + u_{i+1}^n - u_i^n\| \\
&\leq \|u_j^n - u_{j-1}^n\| + ... + \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{j-i-1} \|u_{i+k+1}^n - u_{i+k}^n\| \\
&\overset{(2.17)}{\leq} \sum_{k=0}^{j-i-1} K(\delta_{i+k+1}^n - \eta_{i+k}^n) \\
&\overset{(2.4)}{\leq} K \sum_{k=0}^{j-i-1} (\beta(t_{i+k+1}^n) - \beta(t_{i+k}^n) + (t_{i+k+1}^n - t_{i+k}^n)) \\
&= K\Big((\beta(t_j^n) - \beta(t_i^n) + (t_j^n - t_i^n) \Big) \\
&= K\Big((\beta(t_j^n) - \beta(t) \big) + \big(\beta(t) - \beta(s)\big) \\
&+ \big(\beta(s) - \beta(t_i^n)\big) + (t_j^n - t) + (t-s) + (s - t_i^n) \Big) \\
&\leq K\Big(\big(\beta(t) - \beta(s)\big) + (t-s) + \big(\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n)\big) + \big(t_{i+1}^n - t_i^n\big) \Big). \\
&\overset{(2.3)}{=} K\Big(\big(\beta(t) - \beta(s)\big) + (t-s) + \varepsilon \Big)
\end{aligned}$$

On conclut que, $(u_n)_n$ est une suite d'application à variation bornée continues à droite uniformément bornée, en norme et en variation.
D'après le Théorème 1.3.12, il existe une application à variation bornée $u : I \to H$ telle que

$$u_n(t) \rightharpoonup u(t) \quad \text{pour tout} \quad t \in I. \tag{2.20}$$

La condition initial $u(0) = u_0$ est satisfaite.
En effet, $(u_n(t))_n$ converge faiblement vers $u(t)$ pour tout $t \in I$, en particulier pour $t = 0$.
Donc, pour tout $x \in H$

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n(0), x \rangle = \langle u(0), x \rangle.$$

et par définition (2.6) on obtient,

$$\langle u_0, x\rangle = \langle u(0), x\rangle$$

Donc, $u(0) = u_0$.

De plus, en utilisant (2.19) et la Proposition (1.1.5), on obtient pour tous $0 \le s \le t \le T$,

$$\|u(t) - u(s)\| \le \liminf_{n\to\infty}\|u_n(t) - u_n(s)\| \le K\big((t-s) + \beta(t) - \beta(s)\big). \tag{2.21}$$

Donc,

$$\frac{\|u(t) - u(s)\|}{t-s} \le K\Big(1 + \frac{\beta(t)-\beta(s)}{t-s}\Big),$$
$$\lim_{s\to t}\Big\|\frac{u(t) - u(s)}{t-s}\Big\| \le K\Big(1 + \lim_{s\to t}\frac{\beta(t)-\beta(s)}{t-s}\Big).$$

Donc,

$$\|\dot{u}(t)\| \le K\big(1 + \dot{\beta}(t)\big) \quad p.p. t \in I. \tag{2.22}$$

Par conséquent, u est absolument continue. On obtient $u \in \mathbf{W}^{1,2}(I, H)$ car $\beta \in \mathbf{W}^{1,2}(I, \mathbb{R})$.
D'autre part, la suite (v_n) est aussi bornée en norme et en variation.
En effet, par (2.10), pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$, $i = 0, 1, ..., k_n - 1$

$$v_n(t) = \frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}(u_{i+1}^n - u_i^n) + u_i^n.$$

Donc,

$$\|v_n(t)\| \le \frac{t_{i+1}^n - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}\|u_{i+1}^n - u_i^n\| + \|u_i^n\|, \tag{2.23}$$

On utilisant (2.16),(2.17) on obtient,

$$\|v_n(t)\| \le K_2 + K_1 \le 2K$$

et aussi

$$\begin{aligned}\|v_n(t_{i+1}^n) - v_n(t_i^n)\| &\overset{(2.10)}{=} \Big\|\frac{t_{i+1}^n - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}(u_{i+1}^n - u_i^n) + u_i^n - \frac{t_i^n - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}(u_{i+1}^n - u_i^n) - u_i^n\Big\|\\ &= \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \overset{(2.17)}{\le} K(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n).\end{aligned} \tag{2.24}$$

Par suite,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|v_n\| \le 2K \quad et \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} var(v_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i=0}^{k_n-1}\|v_n(t_{i+1}^n) - v_n(t_i^n)\| \le K\big(\beta(T) + T\big). \tag{2.25}$$

Nous avons pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$,

$$
\begin{aligned}
\|v_n(t) - u_n(t)\| &\overset{(2.6)}{=} \|v_n(t) - u_i^n\| \\
&\overset{(2.10)}{=} \frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \\
&\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \\
&\overset{(2.17)}{\leq} K(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n) \\
&\overset{(2.3)}{\leq} K\varepsilon_n. \qquad (2.26)
\end{aligned}
$$

Donc, pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$
\begin{aligned}
\|v_n(t) - v_n(s)\| &\leq \|v_n(t) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u_n(s)\| + \|u_n(s) - v_n(s)\| \\
&\overset{(2.26)+(2.19)}{\leq} K\varepsilon_n + K\big((\beta(t) - \beta(s)) + (t - s) + \varepsilon_n\big) + K\varepsilon_n \\
&= K\big((t - s) + (\beta(t) - \beta(s)) + 3\varepsilon_n\big). \qquad (2.27)
\end{aligned}
$$

La suite (v_n) est bornée en norme et en variation. Alors, on peut lui extraire une sous suite qui converge faiblement ponctuellement dans H.
Donc, puisque $u_n(t) \rightharpoonup u(t)$ pour tout $t \in I$, on utilisant (2.26) pour tout $\eta \in H$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\Big|\langle v_n(t) - u(t), \eta\rangle\Big| &= \lim_{n\to\infty}\Big|\langle v_n(t) - u_n(t), \eta\rangle + \langle u_n(t) - u(t), \eta\rangle\Big| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} K\varepsilon_n\|\eta\| = 0.
\end{aligned}
$$

D'où,

$$
v_n(t) \rightharpoonup u(t) \quad \text{pour} \quad t \in I. \qquad (2.28)
$$

De plus, par (2.11) pour tout $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$ nous avons

$$
\begin{aligned}
\|\dot{v}_n(t)\| &= \left\| \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n} \right\| \\
&\overset{(2.17)}{\leq} \frac{K(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n)}{|t_{i+1}^n - t_i^n|} \\
&\overset{(2.4)}{\leq} K\frac{(|t_{i+1}^n - t_i^n| + |\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n))|)}{|t_{i+1}^n - t_i^n|} \\
&\leq K\Big(1 + \Big|\frac{\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n)}{t_{i+1}^n - t_i^n}\Big|\Big). \qquad (2.29)
\end{aligned}
$$

On a $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$, et $\lim\limits_{n\to\infty} t_i^n = \lim\limits_{n\to\infty} t_{i+1}^n = t$, on applique le Théorème de différentiation de Lebesgue(Théorème 1.1.2) sur $\dot{\beta} \in \mathbf{L}^2(I, \mathbb{R}) \subset \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R})$, on obtient pour presque tout

$t \neq t^n{}_i, \forall i$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta(t^n_{i+1}) - \beta(t^n_i)}{t^n_{i+1} - t^n_i} = \dot{\beta}(t), \tag{2.30}$$

On conclut l'existence de $C_t < \infty$ tel que

$$\|\dot{v}_n(t)\| \leq C_t, \quad p.p.t \in I \tag{2.31}$$

C'est à dire, $\exists \Omega \subset I$ de mesure nulle tel que $I \setminus \Omega$ l'ensemble sur lequel (2.31) soit satisfaite.

Donc,

$$\begin{aligned}
\|\dot{v}_n\|_{\mathbf{L}^1} &= \int_0^T \|\dot{v}_n(t)\| dt \\
&= \sum_{i=0}^{k_n-1} \int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}} \|\dot{v}_n(t)\| dt \\
&\overset{(2.31)}{\leq} \sum_{i=0}^{k_n-1} \|v_n(t^n_{i+1}) - v_n(t^n_i)\| \\
&= var(v_n) \\
&\overset{(2.16)}{=} K\big(T + \beta(T)\big).
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Pour tout $t \in I$, soit $\gamma(t) = K\big(\dot{\beta}(t) + 1\big)$, alors

$$\begin{aligned}
\|u^n_{i+1}(t) - u^n_i(t)\| &= \|u(t^n_{i+1}) - u(t^n_i)\| \\
&= \int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}} \dot{u}(\tau) d\tau \\
&\overset{(2.22)}{\leq} \int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}} K\big(1 + \dot{\beta(\tau)}\big) d\tau \\
&\leq \int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}} \gamma(\tau) d\tau
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Comme $\gamma \geq 0$ et $\gamma \in \mathbf{L}^2(I, \mathbb{R})$, nous avons par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\|u^n_{i+1} - u^n_i\| \leq (t^n_{i+1} - t^n_i)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}} (\gamma(\tau))^2 d\tau \Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.34}$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
\|\dot{v}_n\|_{\mathbf{L}^2}^2 &= \int_0^T \|\dot{v}_n(s)\|^2 ds \\
&= \sum_{i=0}^{k_n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|\dot{v}_n(s)\|^2 ds \\
&\overset{(2.11)}{=} \sum_{i=0}^{k_n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \frac{\|u_{i+1}^n - u_i^n\|^2}{(t_{i+1}^n - t_i^n)^2} ds \\
&= \sum_{i=0}^{k_n-1} \frac{\|u_{i+1}^n - u_i^n\|^2}{t_{i+1}^n - t_i^n} \\
&\overset{(2.34)}{\leq} \sum_{i=0}^{k_n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \big(\gamma(\tau)\big)^2 d\tau \\
&= \int_0^T \big(\gamma(t)\big)^2 dt = \|\gamma\|_{\mathbf{L}^2}^2 < +\infty
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

Donc, on peut supposer que $(\dot{v}_n)$ converge faiblement dans $\mathbf{L}^2(I, H)$ vers une application $w \in \mathbf{L}^2(I, H)$.

En utilisant le Théorème 1.3.9, pour $t \in]0, T]$ et $x \in H$ on a

$$
\begin{aligned}
\Big\langle x, u(t) - u(0) \Big\rangle &= \lim_{n\to\infty} \Big[\Big\langle x, v_n(t) \Big\rangle - \Big\langle x, v_n(0) \Big\rangle \Big] \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big\langle x, \int_0^t \dot{v}_n(\tau) d\tau \Big\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle x, \int_I \mathbf{1}_{]0,t]} \dot{v}_n(\tau) \Big\rangle d\tau \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_I \langle x, \mathbf{1}_{]0,t]} \dot{v}_n(\tau) \Big\rangle d\tau \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big\langle \mathbf{1}_{]0,t]}(\tau) x, \dot{v}_n(\tau) \Big\rangle d\tau \\
&= \int_I \Big\langle \mathbf{1}_{]0,t]}(\tau) x, w(\tau) \Big\rangle d\tau \\
&= \Big\langle x, \int_0^t w(\tau) d\tau \Big\rangle
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
u(t) - u(0) = \int_0^t w(\tau) d\tau.
$$

Par le Théorème 1.1.1, $\dot{u} = w$ p.p.sur I.

C'est à dire, $(\dot{v}_n)$ converge faiblement vers $\dot{u}$ dans $\mathbf{L}^2(I, H)$.

On doit montrer maintenant que la suite (v_n) converge uniformément sur I. Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ et presque tout $t \in I$, nous avons par (2.13)

$$
-\dot{v}_n(t) \in A\big(\theta_n(t)\big) v_n\big(\theta_n(t)\big) \quad \text{et} \quad -\dot{v}_m(t) \in A\big(\theta_m(t)\big) v_m\big(\theta_m(t)\big)
$$

Par (H_1) et la définition (1.4.7)

$$\begin{aligned}
\Big\langle \dot{v}_m(t) - \dot{v}_n(t), v_m(\theta_m(t)) - v_n(\theta_n(t))\Big\rangle &\overset{(1.4.7)}{\leq} \Big(1 + \|\dot{v}_n(t)\| + \|\dot{v}_m(t)\|\Big) dis\Big(A(\theta_n(t)), A(\theta_m(t))\Big)\\
&\overset{(H_1)}{\leq} \Big(1 + \|\dot{v}_n(t)\| + \|\dot{v}_m(t)\|\Big)|\beta(\theta_n(t)) - \beta(\theta_m(t))|\\
&\leq \Big(1 + \|\dot{v}_n(t)\| + \|\dot{v}_m(t)\|\Big)\Big(|\beta(\theta_n(t)) - \beta(t)|\\
&\qquad + |\beta(\theta_m(t) - \beta(t)|\Big)\\
&\leq \Big(1 + \|\dot{v}_n(t)\| + \|\dot{v}_m(t)\|\Big)(\varepsilon_n + \varepsilon_m). \qquad (2.36)
\end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \dot{v}_m(t) - \dot{v}_n(t), v_m(t) - v_m(\theta_m(t)) - v_n(t) + v_n(\theta_n(t))\Big\rangle\\
&\quad\leq \Big(\|\dot{v}_m(t)\| + \|\dot{v}_n(t)\|\Big)\Big(\|v_m(t) - v_m\Big(\theta_m(t)\Big)\| + \|v_n\Big(\theta_n(t)\Big) - v_n(t)\|\Big)\\
&\quad\overset{(2.27)}{\leq} K\Big(\|\dot{v}_m(t)\| + \|\dot{v}_n(t)\|\Big)\Big(|\theta_n(t) - t| + |\beta(\theta_n(t)) - \beta(t)| + 3\varepsilon_n\\
&\qquad + |\theta_m(t) - t| + |\beta(\theta_n(t)) - \beta(t)| + 3\varepsilon_m\Big)\\
&\quad\overset{(2.3)}{\leq} 4K(\varepsilon_m + \varepsilon_n)\Big(1 + \|\dot{v}_m(t)\| + \|\dot{v}_n(t)\|\Big). \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

D'après (2.36) et (2.37) on obtient

$$\begin{aligned}
\Big\langle \dot{v}_n(t) - \dot{v}_m(t), v_n(t) - v_m(t)\Big\rangle &= \Big\langle \dot{v}_m(t) - \dot{v}_n(t), v_m(t) - v_m(\theta_m(t)) - v_n(t) + v_n(\theta_n(t))\Big\rangle\\
&\quad + \Big\langle \dot{v}_m(t) - \dot{v}_n(t), v_m(\theta_m(t)) - v_n(\theta_n(t))\Big\rangle\\
&\leq (4K+1)(\varepsilon_n + \varepsilon_m)\big(1 + \|\dot{v}_m(t)\| + \|\dot{v}_n(t)\|\big) \qquad (2.38)
\end{aligned}$$

D'après la Proposition 1.1.2, on obtient

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|v_n(t) - v_m(t)\|^2\Big) = \Big\langle v_n(t) - v_m(t), \dot{v}_n(t) - \dot{v}_m(t)\Big\rangle \quad dt - p.p.$$

Alors, comme $v_n(0) = v_m(0)$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|v_n(t) - v_m(t)\|^2 &= \int_0^t \Big\langle v_n(s) - v_m(s), \dot{v}_n(s) - \dot{v}_m(s)\Big\rangle ds\\
&\leq (4K+1)(\varepsilon_n + \varepsilon_m)(T + \|\dot{v}_n\|_{\mathbf{L}^1} + \|\dot{v}_m\|_{\mathbf{L}^1}).
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (2.32), on obtient

$$\|v_n(\cdot) - v_m(\cdot)\|^2 \leq 2(4K+1)(\varepsilon_n + \varepsilon_m)(T + 2K(T + \beta(T))). \qquad (2.39)$$

Quand n, m tendent vers $+\infty$, on conclut que, $(v_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $C(I, H)$. Donc, $(v_n)_n$ converge uniformément et fortement vers une fonction continue. Et d'après

(2.28), $(v_n)_n$ converge fortement vers u.
C'est à dire,

$$\|v_n(\cdot) - u(\cdot)\| \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

Par (2.26), nous avons aussi

$$\|v_n(t) - u(t)\| \to 0, \quad \text{uniformément sur} \quad I \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

Et par (2.27), $\Big\| v_n(\theta_n(t)) - v_n(t) \Big\| \to 0$ fortement sur I lorsque $n \to \infty$.
Alors pour tout $t \in I$

$$\|u(t) - v_n(\theta_n(t))\| \leq \|u(t) - v_n(t)\| + \|v_n(t) - v_n(\theta_n(t))\| \to 0 \quad \text{sur} \quad I \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty. \tag{2.40}$$

Ètape 3 : Existence de solution.

Dans ce qui suit, nous allons prouver que u est une solution à notre problème $(\mathcal{P})$. En premier lieu montrons que $u(t) \in D\big(A(t)\big)$ pour tout $t \in I$.
En effet, soit pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : I \to I$ une application définie par

$$\begin{cases} \varphi_n(t) = t_i^n, \quad \text{pour} \quad t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[, \\ \varphi_n(T) = T. \end{cases}$$

Dans (2.8) on a, $u_i^n \in D\Big(A(t_i^n)\Big)$.
Par (2.6), $u_n(t) \in D\Big(A\big(\varphi_n(t)\big)\Big)$ pour tout $t \in I$.
C'est à dire la suite $(x_n) = (u_n(t))_n$ vérifier $x_n \in D\Big(A\big(\varphi_n(t)\big)\Big)$ et $x_n \to u(t)$
D'autre part, on a par (H_1), pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} dis(A\big(\varphi_n(t)\big), A(t)) &= dis\big(A(t_i^n) - A(t)\big) \quad ,\forall n \in \mathbb{N} \\ &\leq |\beta(t_i^n) - \beta(t)| \quad ,\forall n \in \mathbb{N} \\ &\leq \varepsilon_n \quad ,\forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Par conséquent, en fixant $t \in I$, on obtient $dis(A_n, A) \to 0$, où $A_n = A\big(\varphi_n(t)\big)$ et $A = A(t)$.
Et par (H_2),

$$\begin{aligned} \|\overset{0}{A}\Big(\varphi_n(t), u_n(t)\Big)\| &\leq c\Big(1 + \|u_n(t)\|\Big) \\ &\overset{(2.18)}{\leq} c(1 + K), \quad \forall t \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

C'est à dire, la suite $(y_n)_n = \Big(\overset{0}{A}\Big(\varphi_n(t), u_n(t)\Big)\Big)_n$ est bornée, alors on peut extraire une sous suite (notée aussi(y_n)) qui converge faiblement vers y, de plus,

$$y_n = \overset{0}{A}(\varphi_n(t), u_n(t)) \in A(\varphi_n(t)u_n(t) = A_n x_n$$

Donc, on peut appliquent le Lemme (1.4.7), on obtient

$$u(t) \in D(A) = D\big(A(t)\big).$$

Montrons maintenant l'inclusion $-\dot{u}(t) \in A(t)u(t), \quad p.p.t \in I$.
Par la définition (1.4.6) et la Proposition (1.4.6), il suffit de montre que

$$\Big\langle \dot{u}(t), u(t) - \eta \Big\rangle \leq \Big\langle \overset{0}{A}(t,\eta), \eta - u(t) \Big\rangle \quad p.p.t \in I, \quad \forall \eta \in D\big(A(t)\big). \tag{2.41}$$

En effet, Soit $\eta \in D\big(A(t)\big)$, en fixant $t \in I$, $\tilde{A}_n = A\big(\theta_n(t)\big)$ et $A = A(t)$.
Par (H_2)

$$\|\overset{0}{\tilde{A}}_n x\| = \|\overset{0}{A}\big(\theta_n(t), x\big)\| \leq c(1 + \|x\|), \quad \forall x \in D\big(A(\theta_n(t))\big).$$

Et par (H_1), on fixons $t \in I$,

$$\begin{aligned} dis(\tilde{A}_n, A) &= dis\Big(A\big(\theta_n(t)\big), A(t)\Big), \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\leq \Big|\, \beta\big(\theta_n(t) - \beta(t)\big) \Big|, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\leq \varepsilon_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

on obtient $dis(\tilde{A}_n, A) \to 0$.
Donc, on peut appliquer le cas particulier du Lemme (1.4.9), on obtient pour tout $\eta \in D\Big(A(t)\Big)$, l'existence d'une suite (ξ_n) tel que

$$\xi_n \in D\big(A(\theta_n(t))\big), \quad \xi_n \to \eta \quad \text{et} \quad \overset{0}{\tilde{A}}_n \xi_n = \overset{0}{A}\big(\theta_n(t), \xi_n\big) \to \overset{0}{A}(t, \eta). \tag{2.42}$$

D'autre part, d'après (2.13), pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I \backslash N_n$ l'ensemble sur lequel

$$-\dot{v}_n(t) \in A\big(\theta_n(t)\big) v_n\big(\theta_n(t)\big)$$

est satisfait.
Comme chaque $A\big(\theta_n(t)\big)$ est monotone, en particulier pour $t \in I \setminus N_n$, nous avons

$$\Big\langle -\dot{v}_n(t) - \overset{0}{A}\big(\theta_n(t), \xi_n\big), v_n\big(\theta_n(t)\big) - \xi_n \Big\rangle \geq 0 \tag{2.43}$$

ou bien

$$\Big\langle \dot{v}_n(t), v_n\big(\theta_n(t)\big) - \xi_n \Big\rangle \leq \Big\langle \overset{0}{A}\big(\theta_n(t), \xi_n\big), \xi_n - v_n\big(\theta_n(t)\big) \Big\rangle. \tag{2.44}$$

On par (2.31), (2.40), pour tout $t \in I \setminus \Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} N_n \bigcup \Omega \Big)$ nous avons

$$\|\dot{v}_n(t)\| \leq C_t \quad , \quad \|u(t) - v_n\big(\theta_n(t)\big)\| \to 0 \quad \text{et} \quad \xi_n \to \eta.$$

On obtient alors,

$$\begin{aligned}\Big\langle \dot v_n(t), u(t)-\eta\Big\rangle &= \Big\langle \dot v_n(t), v_n\big(\theta_n(t)\big)-\xi_n\Big\rangle + \Big\langle \dot v_n(t), \Big(u(t)-v_n\big(\theta_n(t)\big)\Big)-(\eta-\xi_n)\Big\rangle\\ &\overset{(2.44)}{\leq} \Big\langle A^0\big(\theta_n(t),\xi_n\big), \xi_n - v_n\big(\theta_n(t)\big)\Big\rangle + \|\dot v_n(t)\|\Big(\|\xi_n-\eta\| + \|u(t)-v_n\big(\theta_n(t)\big)\|\Big)\\ &\leq \Big\langle A^0\big(\theta_n(t),\xi_n\big), \xi_n - v_n\big(\theta_n(t)\big)\Big\rangle + C_t\big(\|\xi_n-\eta\| + \|u(t)-v_n\big(\theta_n(t)\big)\|\big).\end{aligned}$$

D'où, par (2.42)

$$\limsup_{n\to\infty}\big\langle \dot v_n(t), u(t)-\eta\big\rangle \leq \big\langle A^0(t,\eta), \eta-u(t)\big\rangle. \tag{2.45}$$

D'autre part, on a montrée que $(\dot v_n)_n$ converge faiblement vers $\dot u$ dans $\mathbf{L}^2(I,H)$, on applique le Théorème de Mazur 1.3.4, on obtient l'existence d'une suite $(w_j)_j$ tel que pour tout $j\in\mathbb{N}$, $w_j\in co\{\dot v_k; k\geq j\}$ et $(w_j)_j$ converge fortement vers $\dot u$ dans $\mathbf{L}^2(I,H)$.
Donc, on peut extraire une sous suite qui converge presque partout vers $\dot u$.
C'est à dire, il existe un sous ensemble $N\subset I$ de mesure nulle et une sous suite (i_p) de $\mathbb{N}$ tel que

$$\text{pour}\quad t\in I\setminus N : w_{j_p}(t)\to \dot u(t). \tag{2.46}$$

Pour tout t $\in I\setminus N$, posons $S_n=\{\dot v_k(t),\quad k\geq j_n\},\quad \forall n\in\mathbb{N}$.
Alors,

$$\dot u(t)\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{co}(S_n).$$

Et par le Théorème 1.1.3,

$$\overline{co}(S_n)=\{x\in H,\quad \langle z,x\rangle\leq\delta^*(z,S_n),\quad \forall z\in H\}$$

Donc, pour $z\in H$

$$\begin{aligned}&\big\langle z,\dot u(t)\big\rangle \leq \delta^*(z,S_n)=\sup_{k\geq j_n}\big\langle z,\dot v_k(t)\big\rangle,\quad \forall n\in\mathbb{N},\\ &\Rightarrow \big\langle z,\dot u(t)\big\rangle\leq \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geq j_n}\big\langle z,\dot v_n(t)\big\rangle.\\ &\Rightarrow \big\langle z,\dot u(t)\big\rangle\leq \limsup_{n\to\infty}\big\langle z,\dot v_n(t)\big\rangle.\end{aligned} \tag{2.47}$$

Pour $z=u(t)-\eta$, on obtient

$$\begin{aligned}\big\langle \dot u(t),u(t)-\eta\big\rangle &\leq \limsup_{n\to\infty}\big\langle \dot v(t),u(t)-\eta\big\rangle\\ &\overset{(2.45)}{\leq}\big\langle \overset{0}{A}(t,\eta),\eta-u(t)\big\rangle.\end{aligned}$$

C'est à dire, l'estimation (2.41) est vérifié.

Par conséquent,

$$-\dot{u}(t) \in A(t)u(t) \quad p.p.t \in I.$$

Par (2.6), $u(0) = u_0$.

De plus, par (2.22),

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K\big(1 + \dot{\beta}(t)\big) \quad p.p.t \in I.$$

Ètape 4 : Unicité de la solution

Supposons qu'il existe deux solution u, v pour le problème $(\mathcal{P})$, c'est-à-dire,

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t), & p.p.t \in I \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\dot{v}(t) \in A(t)v(t), & p.p.t \in I \\ v(0) = v_0. \end{cases}$$

Puisque $u_0 = v_0$, $A(t)$ est monotone, donc

$$\big\langle \dot{u}(t) - \dot{v}(t), u(t) - v(t) \big\rangle \leq 0 \quad p.p.t \in I.$$

Posons, L'application $w : I \to H$ définie par $w(t) = u(t) - v(t), \quad \forall t \in I.$

w est absolument continue et $w(0) = u(0) - v(0)$.

Alors, on applique la formule de Moreau 1.1.2,

$d\big(\|w\|^2\big) = 2\langle w, dw \rangle$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|u(t) - v(t)\| = \frac{1}{2}\big(\|w(t)\|^2 - \|w(0)\|^2\big) &= \frac{1}{2}\int_{]0,t]} d\big(\|w(s)\|^2\big) \\ &= \int_{]0,t]} \big\langle w(\tau), \frac{dw(\tau)}{d\tau} d\tau \big\rangle \\ &= \int_{]0,t]} \big\langle w(\tau), \dot{w}(\tau) \big\rangle d\tau \\ &= \int_{]0,t]} \big\langle \dot{u}(\tau) - \dot{v}(\tau), u(\tau) - v(\tau) \big\rangle d\tau \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

D'où, $u = v \quad p.p.$

Ceci terminer la preuve du Théorème. ■

Chapitre 3

Résultats d'existence de solutions pour une inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par un opérateur dépendant du temps et de l'état

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude de l'existence de solutions pour un problème d'évolution du premier ordre (du seconde ordre par rapport à l'état) gouverné par un opérateur maximale monotone dépendant du temps et de l'état, dans un espace de Hilbert séparable H.
il s'agit du problème de la forme

$$(\mathcal{P}_1)\begin{cases} x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds, \quad \forall t \in I \\ x(0) = x_0, u(0) = u_0 \in D(A(0, x_0)) \\ -\dot{u}(t) \in A(t, x(t))u(t) \quad p.p.t \in I \\ u(t) \in D(A(t, x(t))), \quad \forall t \in I \end{cases}$$

Ce résultat est une extension du Théorème 2.2.1 dans le chapitre 2, au cas où l'opérateur A dépendant aussi de l'état.
Ce résultat à été donné dans la référence ([9],(Théorème 1)

Nous avons éssayé de le présenter avec une preuve d'ètaillé.

3.2 Résultat d'existence

Avant de donner le résultat final, on commence par le résultat suivant où on étude l'existence et l'unicité de solution absolument continue pour le problème $(\mathcal{P})$ du deuxième chapitre, au cas ou l'opérateur A dépend du temps et de l'état.
Soit H un espace de Hilbert séparable, et $I = [0, T]$ $(T > 0)$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 3.2.1. *Soit pour tout $t \in I$, $x \in H$, $A(t, x) : D(A(t, x)) \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone vérifiant les hypothèses suivantes :*
(H_1) Il existe une constante $c > 0$,telle que

$$\|\overset{0}{A}(t, x)y\| \leq c\Big(1 + \|x\| + \|y\|\Big), \, \forall (t, x, y) \in I \times H \times D\Big(A(t, x)\Big).$$

(H_2) Il existe une fonction $a : I \to [0, +\infty[$ croissant absolument continues dans I avec $a \in W^{1,2}(I, \mathbb{R})$ telle que

$$dis(A(t, x), A(\tau, y)) \leq a(t) - a(\tau) + r\|x - y\|,$$

$\forall t, \tau \in I$, $(0 \leq \tau \leq t \leq T)$ et pour tous $(x, y) \in H \times H$.
Alors, pour tout $x \in W^{1,2}(I, H)$ absolument continue et pour tout $u_0 \in D(A(0, x(0)))$ le problème

$$(\mathcal{P}_x) \quad \begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t, x(t))u(t), \quad p.p.t \in I \\ u(t) \in D\big(A(t, x(t))\big), \forall t \in I \\ u(0) = u_0 \in D\big(A(0, x(0))\big), \end{cases}$$

admet une solution unique absolument continue.
De plus ,
$\|\dot{u}(t)\| \leq k(1 + \dot{\beta}(t))$, où $\beta(t) = \displaystyle\int_0^t [\dot{a}(s) + r\|\dot{x}(s)\|]ds$, $\forall t \in I$ et k une constante positive dépendant de $\|u_0\|$,c, T,x et β.

Démonstration. Soit $x : I \to H$ une application absolument continue telle que $\dot{x} \in L^2(I, H)$ et considérons l'application $B : I \to H$ définie pour tout $t \in I$ par

$$B(t) = A(t, x(t))$$

Alors,

$$D\big(B(t)\big) = D\big(A(t, x(t))\big), D\big(B(0)\big) = D\big(A(0, x(0)\big),$$

et B est un opérateur maximal monotone à variation absolument continue.

B vérifie les hypothèse du Théorème (2.2.1).

En effet,

soit $\tau, t \in I, 0 \leq \tau \leq t \leq T$,

par (H_2),

$$\begin{aligned}
dis\Big(B(t) - B(\tau)\Big) &= dis\Big(A(t, x(t)), A(\tau, x(t)\Big) \\
&\leq \mid a(t) - a(\tau) \mid + r\|x(t) - x(\tau)\| \\
&\leq \int_\tau^t \dot{a}(s)ds + r\int_\tau^t \|\dot{x}(s)\|ds \\
&= \int_\tau^t \Big[\dot{a}(s) + r\|\dot{x}(s)\|\Big]ds \\
&= \int_0^t \Big[\dot{a}(s) + r\|\dot{x}(s)\|\Big]ds - \int_0^\tau \Big[\dot{a}(s) + r\|\dot{x}(s)\|\Big]ds \\
&= \beta(t) - \beta(\tau).
\end{aligned}$$

où $\beta(t) = \displaystyle\int_0^t \big[\dot{a}(s) + r\|\dot{x}(s)\big\|\big]ds, \forall t \in I, \beta \in W^{1,2}(I, \mathbb{R})$ croissante.

De plus, par (H_1) pour tout $y \in D\big(A(t, x(t))\big)$, on a,

$$\begin{aligned}
\|\overset{0}{B}(t, y)\| &= \|\overset{0}{A}(t, x(t), y)\| \\
&\leq c\big(1 + \|x(t)\| + \|y\|\big) \\
&\leq c\big(1 + \|y(t)\| + c(1 + \|y\|\big)\|x\| \\
&\leq c\big(1 + \|y(t)\|\big)\big(1 + \|x\|\big) \\
&= c_1(1 + \|y\|)
\end{aligned}$$

où $c_1 = c\big(1 + \|x\|\big) > 0$.

Alors, l'opérateur B vérifiant tout les hypothèses du Théorème (2.2.1).

Donc, pour $u_0 \in D(B(0))$, le problème,

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} -\dot{u}(t) \in B(t)u(t), \quad p.p.t \in I \\ u(t) \in D\big(B(t)\big) \\ u(0) = u_0 \in D\big(B(0)\big) \end{cases}$$

admet une solution unique absolument continue avec

$$\|\dot{u}(t)\| \leq k(1+\dot{\beta}(t))$$

où $\beta(t) = \displaystyle\int_0^t \big[\dot{a}(s) + r\|\dot{x}(s)\|\big]ds$, $\forall t \in I$ et k une constante positive dépendant de $\|u_0\|$, c, T et β.
Ce qui donne l'existence et l'unicité de solution du problème $(\mathcal{P}_1)$. ■

Le Théorème suivante donne la maximal monotoni d'un nouveau opérateur qui utile de la preuve du Théorème principale de ce chapitre.

Théorème 3.2.2. *Soit pour tout $t \in I$, $x \in H$, $A(t,x) : D\big(A(t,x)\big) \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone vérifiant les hypothèses $(H_1), (H_2)$ et*
(H_3) pour tout $t \in I$, $x \in H$, $y \in H$, la résolvante :

$$(t,x,y) \to J_\lambda^{A(t,x)}(y)$$

est $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(H) \otimes \mathcal{B}(H) -$ mesurable.
Alors, l'opérateur de composition $\mathcal{A}(x) : D\big(\mathcal{A}(x)\big) \subset L^2(I,H) \rightrightarrows L^2(I,H)$ défini par

$$\mathcal{A}(x)u := \{v \in L^2(I,H) : v(t) \in A(t,x(t))u(t) \quad p.p.t \in I\},$$

pour chaque $u \in D\big(\mathcal{A}(x)\big)$, où

$$D(\mathcal{A}(x)) := \{u \in L^2_H(I) : u(t) \in D(A(t,x(t))) \quad p.p.t \in I, \quad \textit{pour lequel} \quad \exists v \in L^2_H(I) \\ \textit{telle que } v(t) \in A(t,x(t))u(t), \quad p.p.t \in I\},$$

est un opérateur maximal monotone. Par conséquence, le graphe de $\mathcal{A}(x)$ est fortement faiblement séquentillement fermé dans $L^2(I,H) \times L^2(I,H)$.

Démonstration. D'après le théorème (3.2.1), il existe une solution absolument continue de l'inclusion $-\dot{u}(t) \in A(t,x(t))u(t), \quad p.p.t \in I$.
De plus, cette solution et sa dérivée $\dot{u}$ sont dans $L^2(I,H)$, on conclue que $\mathcal{A}(x)$ est monotone.
En effet,
soit $u_1, u_2 \in D(\mathcal{A}(x)), v_1 \in \mathcal{A}(x)u_1$ et $v_2 \in \mathcal{A}(x)u_2$, et $\lambda \geq 0$.
On a $u_1(t), u_2(t) \in D\Big(A(t,x(t))\Big), p.p.t \in I$.

$$v_1(t) \in A\big(t,x(t)\big)u_1(t) \quad \text{et} \quad v_2(t) \in A\big(t,x(t)\big)u_2(t), \quad p.p.t \in I$$

Puisque, pour tout $t \in I$, $x \in H$, $A(t, x(t))$ est un opérateur monotone,
par la proposition (1.4.1), on a

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq \big\| \big(u_1(t) - u_2(t)\big) + \lambda\big(v_1(t) - v_2(t)\big) \big\| \tag{3.1}$$

On obtient alors,

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|^2 &= \int_0^T \|u_1(t) - u_2(t)\|^2 dt \\ &\overset{3.1}{\leq} \int_0^T \|u_1(t) - u_2(t) + \lambda(v_1(t) - v_2(t)\|^2 dt \\ &= \|u_1 - u_2 + \lambda(v_1 - v_2)\|^2 \end{aligned}$$

par suite $\mathcal{A}_x$ est monotone.
Montrons maintenant que $\mathcal{A}(x)$ est maximal monotone, c'est à dire que

$$\mathcal{R}\big(I_{L^2(I,H)} + \lambda\mathcal{A}(x)\big) = L^2(I, H), \forall\lambda > 0.$$

Soit $g \in L^2(I, H)$,
Comme pour tout $t \in I$, $x \in H$, $A\Big(t, x(t)\Big)$ est maximal monotone, alors l'application

$$t \to v(t) = J_\lambda^{A\big(t,x(t)\big)} g(t) = g(t) - \lambda A_\lambda^{A\big(t,x(t)\big)} g(t)$$

est bien définie, car par (H_3), $J_\lambda^{A\big(t,x(t)\big)} g(t)$ est mesurable.
Considérons l'application

$$\begin{aligned} h : t \to h(t) =& \lambda A_\lambda^{A\big(t,x(t)\big)} g(t) \\ =& \lambda A_\lambda^{A\big(t,x(t)\big)} g(t) - \lambda A_\lambda^{\big(A(t,x(t)\big)} u(t) + \lambda A_\lambda^{A\big(t,x(t)\big)} u(t), \end{aligned}$$

où u est la solution de $(\mathcal{P}_1)$.
Alors,

$$\|\, h(t) \,\| \leq \lambda \Big\| A_\lambda^{A\big(t,x(t)\big)} \big(g(t) - u(t)\big) \Big\| + \lambda \Big\| A_\lambda^{A\big(t,x(t)\big)} u(t) \Big\|.$$

D'après la Proposition (1.4.5) on a $A_\lambda^{A\big(t,x(t)\big)}$ est $\dfrac{2}{\lambda}$ Lipschitzien,
C'est-à-dire

$$\|\, A_\lambda^{A\big(t,x(t)\big)} \big(g(t) - u(t)\big) \,\| \leq \frac{2}{\lambda} \,\|\, g(t) - u(t) \,\|.$$

Alors,

$$\|h(t)\| \leq 2\|g(t) - u(t)\| + \lambda \,\|\, A_\lambda^{A\big(t,x(t)\big)} u(t) \,\|,$$

et par (H_1),

$$\begin{aligned}\| A_\lambda^{A\big(t,x(t)\big)} u(t)\| &\leq \|\overset{0}{A}\big(t,x(t)\big)u(t)\| \\ &\leq c\big(1+\|x(t)\|+\|u(t)\|\big).\end{aligned}$$

Donc,

$$\|h(t)\| \leq 2\|g(t)-u(t)\| + c\lambda\big(1+\|x(t)\|+\|u(t)\|\big).$$

Et puisque $g \in L^2(I,H)$, $u \in L^2(I,H)$, alors, on utilise l'inégalité de Minkowski (1.1.6), on obtient

$$\begin{aligned}\|h(t)\|_{L^2} &= \Big(\int_0^T \|h(t)\|^2 dt\Big)^{1/2} \\ &\leq \Big(2^2\int_0^T \|g(t)-u(t)\|^2 dt + c^2\lambda^2\int_0^T \big(1+\|x\|+\|u(t)\|\big)^2 dt\Big)^{1/2} \\ &\leq 2\Big(\int_0^T \|g(t)-u(t)\|^2 dt\Big)^{1/2} + c\lambda\Big(\int_0^T \big(1+\|x\|+\|u(t)\|\big)^2 dt\Big)^{1/2} \\ &\leq 2\Big[\Big(\int_0^T \|g(t)\|^2 dt\Big)^{1/2} + \Big(\int_0^T \|u(t)\|^2 dt\Big)^{1/2}\Big] + c\lambda\Big[\sqrt{T} + \Big(\int_0^T \|x(t)\|^2 dt\Big)^{1/2} \\ &\qquad + \Big(\int_0^T \|u(t)\|^2) dt)^{1/2}\Big)\Big] \\ &\leq 2\Big(\|g\|_{L^2}+\|u\|_{L^2}\Big) + c\lambda\Big(\sqrt{T}+\|x\|_{L^2}+\| u\|_{L^2}\Big) < +\infty,\end{aligned}$$

on concluent que $h \in L^2(I,H)$.
Donc, $v \in L^2(I,H)$ et $g \in v + \lambda\mathcal{A}(x)v$.
D'où,

$$\mathcal{R}\big(I_L^2(I,H)+\lambda\mathcal{A}(x)\big) = L^2(I,H).$$

Donc, $\mathcal{A}(x)$ est maximal monotone sur $L^2(I,H)$.
Par le Théorème (1.4.1), le graphe de $\mathcal{A}(x)$ est fortement faiblement séquentiellement fermé. ■

On donne maintenant une application très utile pour la suite

Corollaire 3.2.1. *soit pour tout $t \in I$, $x \in H$ $A(t,x) : D(A(t,x)) \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone satisfaisant les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3).*
Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites dans $L^2(I,H)$ telles que,

$$v_n(t) \in A(t,x(t))u_n(t)$$

pour presque tout $t \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si $(v_n)_n$ converge faiblement vers $v \in L^2(I,H)$ et $(u_n)_n$ converge fortement vers $u \in$

$L^2(I, H)$.
Alors,

$$v(t) \in A(t, x(t))u(t) \quad \textit{pour presque pour tout} \quad t \in I.$$

Démonstration. Considérons l'opérateur de composition

$$\mathcal{A}(x) : D(\mathcal{A}(x)) \subset L^2(I, H) \rightrightarrows L^2(I, H)$$

défini par

$$\mathcal{A}(x)u := \{v \in L^2(I, H) : v(t) \in A(t, x(t))u(t) \quad p.p.t \in I\},$$

pour chaque $u \in D(\mathcal{A}(x))$
où,
$D\big(\mathcal{A}(x)\big) := \{u \in L^2(I, H) : u(t) \in D\Big(A(t, x(t))\Big) \quad p.p.t \in I,$ pour lequel $\quad \exists v \in L^2(I, H) \quad$ telle que $A(t, x(t))u(t), \quad p.p.t \in I\}$.
Par le théorème (3.2.1), le graphe de $\mathcal{A}(x)$ est fortement faiblement séquentiellement fermé.
Donc, si $(u_n)_n$ converge fortement vers u et $(v_n)_n$ converge faiblement vers v dans $L^2(I, H)$, on conclut que $u \in D(\mathcal{A}(x)x)$ et $v \in \mathcal{A}(x)u$,
et donc $u(t) \in D\big(A(t, x(x)\big)$ et $v(t) \in A\big(t, x(t)\big)u(t)$, pour presque tout $t \in I$.

■

On donne maintenant le résultat principale de ce chapitre.
En effet, le Théorème d'existence de solution absolument continue de l'inclusion donnée ci dessous

Théorème 3.2.3. *Soient $I = [0, T]$, H un espace de Hilbert séparable. Soit pour tout $t \in I$ et $x \in H$, $A(t, x(t)) : D(A(t, x(t))) \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone satisfaisant :*
(H_1) Il existe une constante $c > 0$, tele que

$$\|A^0(t, x)y\| \leq c\Big(1 + \|x\| + \|y\|\Big), \quad \forall (t, x, y) \in I \times H \times D\Big(A(t, x)\Big).$$

(H_2) Il existe une fonction $a : I \to [0, +\infty[$ croissant absolument continues dans I, avec $a \in W^{1,2}(I)$ et un constante $r > 0$, telle que

$$dis(A(t, x), A(\tau, y)) \leq a(t) - a(\tau) + r \parallel x - y \parallel, \forall t, \tau \in I, 0 \leq \tau \leq t \leq T$$

et pour tous $(x,y) \in H \times H$.
(H_4) $D(A(t,x))$ *est mesurable compact bornée c'est à dire, pour tout ensemble* $B \subset H$*, il existe une application* $\Psi_B : I \to H$ *intégrablement bornée a valeurs mesurable compacte tels que* $D(A(t,x)) \subset \Psi_B(t) \subset \gamma(t)\overline{B}_H$*, pour tous* $(t,x) \in I \times B$ *où* $\gamma \in L^2(I,\mathbb{R}^+)$.
Alors, pour tout $(x_0,u_0) \in H \times D(A(0,x_0))$*, il existe une application absolument continu* $x : I \to H$ *et une application absolument continu* $u : I \to H$ *tels que*

$$(\mathcal{P}_x)\begin{cases} x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds, \quad \forall t \in I \\ x(0) = x_0, u(0) = u_0 \in D(A(0,x_0)) \\ -\dot{u}(t) \in A(t,x(t))u(t) \quad p.p.t \in I \\ u(t) \in D(A(t,x(t))), \quad \forall t \in I \end{cases}$$

Démonstration. Nous partagerons la preuve en 4 étape :
Ètape 1. Soit $\gamma \in L^2(I,\mathbb{R})$ Considérons $\mathcal{X}_\gamma$ un sous ensemble dans l'espace de Banach $C(I,H)$ défini par,

$$\mathcal{X}_\gamma =: \left\{ h \in W^{1,2}(I,H) : h(t) = x_0 + \int_0^t \dot{h}(s)ds, \forall t \in I, \|\dot{h}(s)\| \leq \gamma(s) p.p.s \in I, \gamma \in L^2(I,\mathbb{R}) \right\}$$

Il est clair que $\mathcal{X}_\gamma$ est un ensemble convexe fermé dans $C(I,H)$.
En effet,
Soient $\lambda \in [0,1]$ et $h_1, h_2 \in \mathcal{X}_\gamma$, alors d'après la définition de $\mathcal{X}_\gamma$, pour tout $t \in I$
$h_1(t) = x_0 + \int_0^t \dot{h}_1(s)ds, \quad h_2(t) = x_0 + \int_0^t \dot{h}_2(s)ds$
et $\quad \|\dot{h}_1(s)\| \leq \gamma(s), \quad \|\dot{h}_2(s)\| \leq \gamma(s) \quad p.p.s \in I.$
C'est-à-dire, il existe $N_1 \subset I$ négligeable telle que pour tout $s \in I \setminus N_1$, $\|\dot{h}_1(s)\| \leq \gamma(s)$ et il existe $N_2 \subset I$ négligeable telle que pour tout $s \in I \setminus N_2$, $\|\dot{h}_2(s)\| \leq \gamma(s)$
Donc, pour $s \in I \setminus (N_1 \cup N_2)$

$$\begin{aligned} \|\lambda \dot{h}_1(s) + (1-\lambda)\dot{h}_2(s)\| &\leq \lambda \|\dot{h}_1(s)\| + (1-\lambda)\|\dot{h}_2(s)\| \\ &\leq \lambda\gamma(s) + (1-\lambda)\gamma(s) \\ &= \gamma(s). \end{aligned}$$

De plus, $\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2$ est absolument continu et $\lambda \dot{h}_1 + (1-\lambda)\dot{h}_2 \in L^2(I,H)$.

pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}\lambda h_1(t) + (1-\lambda)h_2(t) &= \lambda\Big(x_0 + \int_0^t \dot{h}_1(s)ds\Big) + (1-\lambda)\Big(x_0 + \int_0^t \dot{h}_2(s)ds\Big)\\ &= x_0 + \int_0^t \big(\lambda\dot{h}_1(s) + (1-\lambda)\dot{h}_2(s)\big)ds.\end{aligned}$$

Alors, $\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2 \in \mathcal{X}_\gamma$, c-à-d $\mathcal{X}_\gamma$ est convexe.

Montrons maintenant que $\mathcal{X}_\gamma$ est fermé dans $C(I,H)$

Soit (h_n) est une suite de $\mathcal{X}_\gamma$ converge dans $C(I,H)$ vers une application continue h.

Soient $s \in I \setminus N$ telle que N de mesure nulle, $n \in \mathbb{N}$,

d'après la définition de $\mathcal{X}_\gamma$,

$$\|\dot{h}_n(s)\| \leq \|\gamma(s)\|,$$

Alors

$$\Big\|\frac{\dot{h}_(s)}{\gamma(s)}\Big\| \leq 1.$$

Posons $g_n(s) = \dfrac{\dot{h}_n(s)}{\gamma(s)}$, alors $\|g_n(s)\| \leq 1$, donc $(g_n)_n \subset \overline{B}_{L^2(I,H)}$.

D'après le Théorème de (Banach-Alaoglu-Bourbaki 1.3.1), $\overline{B}_{L^2(I,H)}$ est faiblement* compacte dans $L^2(I,H)$ $\quad(\sigma(L^2_H, L^2_H)$-compacte).

On peut donc extraire de (g_n) une sous suite qu'on note aussi $(g_n)_n$ qui converge $\sigma(L^2_H, L^2_H)$ vers une application $g \in \overline{B}_{L^2(I,H)}$, c'est à dire, pour tout $\xi \in L^2(I,H)$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^T \langle g_n(s), \xi(s)\rangle ds \to \int_0^T \langle g(s), \xi(s)\rangle ds. \tag{3.2}$$

Soit $y(\cdot) \in L^2(I,H)$, alors $\gamma(\cdot)y(\cdot) \in L^2(I,H)$,

car d'après l'inégalité de Minkowski (1.1.6)

$$\begin{aligned}\|\gamma y\|_{L^2(I,H)} &= \Big(\int_0^T \|\gamma(s)y(s)\|^2 ds\Big)^{1/2}\\ &\leq \Big(\int_0^T \|\gamma(s)ds\|^2\Big)^{1/2}\Big(\int_0^T \|y(s)ds\|^2\Big)^{1/2}\\ &= \|\gamma\|_{L^2}\|y\|_{L^2} \leq +\infty.\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\int_0^T \langle \dot{h}_n(s), y(s)\rangle ds &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^T \langle g_n(s)\gamma(s), y(s)\rangle ds \\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_0^T \langle g_n(s), \gamma(s)y(s)\rangle ds \\
&\overset{(3.2)}{=} \int_0^T \langle g(s), \gamma(s)y(s)\rangle ds \\
&= \int_0^T \langle g(s)\gamma(s), y(s)\rangle ds.
\end{aligned}$$

En posant $w(\cdot) = g(\cdot)\gamma(\cdot)$, la suite $(\dot{h}_n(\cdot))_n$ converge faiblement dans $L^2(I,H)$ vers $w(\cdot) \in L^2(I,H)$.

En particulier pour $y(\cdot) = \mathbf{1}_{[0,t]}(\cdot)e_j$, $(e_j)_j$ une base de H et $t \in [0,T]$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^T \langle \dot{h}_n(s), \mathbf{1}_{[0,t]}(s)e_j\rangle ds = \int_0^T \langle w(s), \mathbf{1}_{[0,t]}(s)e_j\rangle ds,$$

par suite

$$\lim_{n\to+\infty}\langle \int_0^t \dot{h}(s)ds, e_j\rangle = \langle \int_0^t w(s)ds, e_j\rangle$$

i,e,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^t \dot{h}(s)ds = \int_0^t w(s)ds, \quad \forall t \in I,$$

donc, pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} h_n(t) &= \lim_{n\to+\infty}\left(x_0 + \int_0^t \dot{h}_n(s)ds\right) \\
&= x_0 + \lim_{n\to+\infty}\int_0^t \dot{h}_n(s)ds \\
&= x_0 + \int_0^t w(s)ds = h(t).
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\dot{h}(s) = w$, c'est-à-dire, $\dot{h}(.) \in L^2(I,H)$ et $h(t) = x_0 + \int_0^t \dot{h}(s)ds, \quad \forall t \in I$,

$$\|\dot{h}_n(s)\| = \|w(s)\| = \|g(s)\gamma(s)\| \leq \gamma(s) \quad p.p.s \in I.$$

Ceci implique que $h \in \mathcal{X}_\gamma$, c'est-à-dire, $\mathcal{X}_\gamma$ est fermé dans $C(I,H)$.

Montrons maintenant que $\mathcal{X}_\gamma$ est èquicontinu.

En effet,

soit $h \in \mathcal{X}\gamma$, pour tous $\tau, t \in I(\tau \leq t)$, on a

$$\begin{aligned}
\|h(t) - h(\tau)\| &= \|x_0 + \int_0^t \dot{h}(s)ds - \big(x_0 + \int_0^\tau \dot{h}(s)ds\big)\| \\
&= \| \int_\tau^t \dot{h}(s)ds\| \\
&\leq \int_\tau^t \|\dot{h}(s)\|ds \\
&\leq \int_t^\tau \gamma(s)ds.
\end{aligned}$$

Sachant que $\gamma \in L^2(I, \mathbb{R})$, nous obtenons l'équicontinuté de $\mathcal{X}_\gamma$.
D'après le Théorème 3.2.1, pour tout $h \in \mathcal{X}_\gamma$, il existe une application unique $u_h : I \to H$ solution dans $W^{1,2}(I, H)$ de l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_h)\begin{cases} -\dot{u}_h(t) \in A(t, h(t))u_h(t) \quad p.p.t \in I \\ u_h(t) \in D\big(A(t, h(t))\big), \quad \forall t \in I \\ u_h(0) = u_0 \in D\big(A(0, h(0))\big) = D\big(A(0, x_0)\big) \end{cases}$$

avec, $\| \dot{u}_h(t) \| \leq k(1+\dot{\beta}(t))$, où $\beta(t) = \displaystyle\int_0^t [\dot{a}(s)+\gamma(s)]ds, \forall t \in I$ et k un constante positive dépendant de $\| u_0 \|, c, T, \beta$.

Ètape 2. Dans cette étape, nous transformons le problème $(\mathcal{P}_x)$ en un problème du point fixe dans l'espace $\mathcal{X}_\gamma$. C'est à dire, l'existence de solutions de $(\mathcal{P}_x)$ est équivalent au problème de trouver $h \in \mathcal{X}_\gamma$ telle que $x(t) = x_0 + \int_0^t u_h(s)ds, \quad \forall t \in I$. C'est à dire u_h est une solution absolument continue de $(\mathcal{P}_x)$.
Donc, pour chaque $h \in \mathcal{X}_\gamma$, on définit l'application $\Phi : \mathcal{X}_\gamma \to L^2(I, H)$ par

$$\Phi(h) := x_0 + \int_0^t u_h(s)ds.$$

où u_h est la solution unique absolument continue de l'inclusion $(\mathcal{P}_h)$.
Montrons que Φ définie de $\mathcal{X}_\gamma$ dans lui même.
En effet, D'après l'étape 1, $u_h(s) \in D\Big(A\big(s, h(s)\big)\Big) \subset \bigcup_{x \in \mathcal{X}_\gamma(s)} D(A(s, x))$.
D'autre part, par l'hypothèse (H_4), (s)il existe une application $\Psi_\gamma : I \to H$ mesurable intégrablement bornée à valeurs compactes telle que

$$D\Big(A(s, x)\Big) \subset \Psi_\gamma(s) \subset \gamma(s)\overline{B}_H, \quad \forall s \in I, x \in \mathcal{X}_\gamma.$$

C'est à dire,

$$u_h(s) \in \gamma(s)\overline{B}_H, \quad \forall s \in I.$$

$$\|u_h(s)\| \leq \gamma(s), \quad \forall s \in I.$$

Alors,

$$\Phi(h) \in \mathcal{X}_\gamma.$$

Ce qui donne, Φ applique $\mathcal{X}_\gamma$ dans lui même $\Phi : \mathcal{X}_\gamma \to \mathcal{X}_\gamma$.
Il est clair que, si h est un point fixe de Φ c'est à dire $h(t) = \Phi(h)()t$, alors u_h est une solution absolument continue de $(\mathcal{P}_x)$.
Donc, il suffit de montrer que $\Phi(\mathcal{X}_\gamma)$ est équicontinue et relativement compact dans $C(I, H)$.
En effet, Comme $u_h(s) \in D\Big(A\big(s, h(s)\big)\Big) \subset \Psi_\gamma(s)$.
Donc,

$$u_h(s) \in \overline{co}\Psi_\gamma(s).$$

Ceci implique,
pour tout $t \in I$,

$$\Phi(h)(t) \in x_0 + \int_0^t \overline{co}\Psi_\gamma(s)ds,$$

De plus, on a Ψ_γ à valeurs compactes, d'après le Théorème de Mazur 1.3.2, $s \mapsto \overline{co}\Psi_\gamma(s)$ est une multiapplication à valeur convexes compactes intégrablement bornée.
Alors, par le Théorème d'Ascoli-Arzela 1.3.6, $\Phi(\mathcal{X}_\gamma)$ est relativement compact dans $C(I, H)$.
Montrons que $\Phi : \mathcal{X}_\gamma \to \mathcal{X}_\gamma$ est continue.
En effet, il suffit de montrer que, si (h_n) converge uniformément vers h dans $\mathcal{X}_\gamma$ alors (u_{h_n}) converge uniformément vers u_h telles que (u_{h_n}) est la solution absolument continue du problème

$$(\mathcal{P}_{h_n}) \begin{cases} -\dot{u}_{h_n}(t) \in A(t, h_n(t))u_{h_n}(t) \quad p.p.t \in I \\ u_{h_n}(t) \in D(A(t, h_n(t))), \quad \forall t \in I \\ u_{h_n}(0) = u_0 \in D(A(0, h_n(0))), \end{cases}$$

et u_h est la solution absolument continue du problème

$$(\mathcal{P}_h) \begin{cases} -\dot{u}_h(t) \in A(t, h(t))u_h(t) \quad p.p.t \in I \\ u_h(t) \in D(A(t, h(t))), \quad \forall t \in I \\ u_h(0) = U_0 \in D(A(0, h(0))). \end{cases}$$

Nous avons (u_{h_n}) est absolument continue et $\|\dot{u}_{h_n}(t)\| \leq K\big(1 + \dot{\beta}(t)\big) \quad p.p.t \in I, \forall n \in \mathbb{N}$.
Soit Ω un ensemble négligeable tel que

$$\|\dot{u}_{h_n}(t)\| \leq K\big(1 + \dot{\beta}(t)\big), \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{vérifie pour tout} \quad t \in I \setminus \Omega. \tag{3.3}$$

Alors (u_{h_n}) converge uniformément vers un application continue u et $(\dot{u}_{h_n})$ converge faiblement dans $L^2(I,H)$ vers un élément $w \in L^2(I,H)$, i.e.

$$\forall \xi \in L^2(I,H), \quad \lim_{n\to\infty} <\dot{u}_{h_n}, \xi> = <w, \xi>.$$

On obtient

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T <\dot{u}_{h_n}(s), \xi(s)> ds = \int_0^T <w(s), \xi(s)> ds,$$

en particulier pour $\xi(\cdot) = \mathbf{1}_{[0,t]}(\cdot) e_j$, $(e_j)_j$ une base de H et $t \in [0,T]$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T <\dot{u}_{h_n}(s), \mathbf{1}_{[0,t]}(s) e_j> ds = \int_0^T <w(s), \mathbf{1}_{[0,t]}(s) e_j> ds,$$

par suite,

$$\lim_{n\to\infty} < \int_0^t \dot{u}_{h_n}(s) ds, e_j> = < \int_0^t w(s) ds, e_j>,$$

i.e.,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{u}_{h_n}(s) ds = \int_0^t w(s) ds, \quad t \in I.$$

Donc, pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} u_{h_n}(t) &= \lim_{n\to\infty} \Big(u_0 + \int_0^t \dot{u}_{h_n}(s) ds \Big) \\
&= u_0 + \lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{u}_{h_n}(s) ds \\
&= u_0 + \int_0^t w(s) ds := z(t), \quad t \in I.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $u(t) = z(t) = u_0 + \int_0^t w(s) ds, \forall t \in I$ et $\dot{u}(t) = w(t), \forall t \in I$.
On a $u_{h_n} \in D\Big(A(t, h_n(t))\Big), \forall t \in I$ et $u_{h_n}(t) \to u(t)$.
Par (H_1), pour tout $t \in I$
$\overset{0}{A}\big(t, h_n(t)\big) u_{h_n}(t)$ est bornée et par (H_2)

$$dis\Big(A\big(t, h_n(t)\big), A\big(t, h(t)\big)\Big) \leq a(t) - a(t+) r \|h_n(t) - h(t)\| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

On conclut par le lemme (1.4.7) que

$$u(t) \in D\Big(A\big(t, h(t)\big)\Big), \quad \forall t \in I.$$

Etape3. Montrons dans cette étape que u vérifier l'inclusion

$$-\dot{u}(t) \in A\big(t, h(t)\big) u(t), \quad p.p.t \in I$$

c-à-d, u est l'unique solution absolument continue de notre problème $(\mathcal{P})$.
En effet, puisque $(\dot{u}_{h_n})$ bornée converge faiblement dans $L^2(I,H)$ vers $\dot{u}$,
on peut supposer que $(\dot{u}_{h_n})$ converge au sens de Komlos (définition 1.3.2) vers $\dot{u}$ $p.p.$ Par conséquent, il existe un ensemble négligeable N tel que pour tout $t \in I \setminus N$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \dot{u}_{h_j}(t) = \dot{u}(t), \tag{3.4}$$

(par la Proposition 1.3.1).
Comme $u(t) \in D\Big(A(t,h(t))\Big)$, pour tout $t \in I$, (d'après l'étape 2).
Par la Proposition (1.4.6) montrer que

$$-\dot{u}(t) \in A\big(t,h(t)\big)u(t). \quad p.p.t \in I,$$

il suffit de montrer que

$$<\overset{0}{A}\big(t,h(t)\big)\eta + \dot{u}(t), \eta - u(t)> \geq 0 \quad p.p.t \in I, \forall \eta \in D\big(A(t)\big).$$

$$<\overset{0}{A}\big(t,h(t)\big)\eta, \eta - u(t)> \geq <\dot{u}(t), u(t) - \eta> \quad p.p.t \in I, \forall \eta \in D\big(A(t)\big). \tag{3.5}$$

Pour cela, soit $\eta \in D\Big(A\big(t,h(t)\big)\Big)$, par l'hypothèse (H_2), on peut appliquer le lemme (1.4.9) pour assurer l'existence de $(\eta_n) \in D\left(A\big(t,h_n(t)\big)\right)$ tel que $\eta_n \to \eta$ et $\overset{0}{A}\big(t,h_n(t)\big)\eta_n \to \overset{0}{A}\big(t,h(t)\big)\eta$.
pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I \setminus N_n$ l'ensemble sur lequel $-\dot{u}_{h_n}(t) \in A(t,h_n(t))u_{h_n}(t)$ vérifier.
Comme A est monotone, nous avons pour tout $t \in \setminus N_n$,

$$<\overset{0}{A}\big(t,h_n(t)\big)\eta_n + \dot{u}_{h_n}(t), \eta_n - u_{h_n}(t)> \geq 0$$

$$<\overset{0}{A}\big(t,h_n(t)\big)\eta_n, \eta_n - u_{h_n}(t)> \geq <\dot{u}_{h_n}(t), u_{h_n}(t) - \eta_n>. \tag{3.6}$$

D'autre part,

$$<\dot{u}_{h_n}(t), u(t) - \eta> = <\dot{u}_{h_n}(t), u_{h_n}(t) - \eta_n> + <\dot{u}_{h_n}(t), u(t) - u_{h_n}(t)> + <\dot{u}_{h_n}(t), \eta_n - \eta>.$$

On peut écrire

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} <\dot{u}_{h_j}(t), u(t) - \eta> = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} <\dot{u}_{h_j}(t), u_{h_j}(t) - \eta_j> + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} <\dot{u}_{h_j}(t), u(t) - u_{h_j}(t)>$$
$$+ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} <\dot{u}_{h_j}(t), \eta_j - \eta>.$$

Alors par,(3.6) et (3.3) nous avons pour tout $t \in I \setminus \Big(\big(\bigcup_{n=0}^{\infty} N_n\big) \bigcup \Omega \Big)$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} <\dot{u}_{h_j}(t), u(t)-\eta> &\leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} <\overset{0}{A}\big(t,h_j(t)\big)\eta_j, \eta_j - u_{h_j}(t)> + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \|\dot{u}_{h_j}(t)\|\|u(t)-u_{h_j}(t)\| \\
&\quad + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \|\dot{u}_{h_j}(t)\|\|\eta_j - \eta\| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} <\overset{0}{A}\big(t,h_j(t)\big)\eta_j, \eta_j - u_{h_j}(t)> + \frac{1}{n}K\big(1+\dot{\beta}(t)\big)\sum_{j=1}^{n} \|u(t)-u_{h_j}(t)\| \\
&\quad + \frac{1}{n}K\big(1+\dot{\beta}(t)\big)\sum_{j=1}^{n} \|\eta_j - \eta\|. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
<\overset{0}{A}\big(t,h_j(t)\big)\eta_j, \eta_j - u_{h_j}(t)> &= <\overset{0}{A}\big(t,h_j(t)\big) - \overset{0}{A}\big(t,h(t)\big)\eta_j + \overset{0}{A}\big(t,h(t)\big)\eta_j, \eta_j - \eta + \eta \\
&\quad - u(t) + u(t) - u_{h_j}(t)> \\
&= <\overset{0}{A}\big(t,h_j(t)\big)\eta_j - \overset{0}{A}\big(t,h(t)\big)\eta_j + \overset{0}{A}\big(t,h(t)\big)\eta_j, \eta_j - \eta + u(t) - u_{h_j}(t)> \\
&\quad + <\overset{0}{A}\big(t,h_j(t)\big)\eta_j - \overset{0}{A}\big(t,h(t)\big)\eta_j + \overset{0}{A}\big(t,h(t)\big)\eta_j, \eta(t) - u(t)> \\
&+ <\overset{0}{A}\big(t,h(t)\big)\eta_j, \eta(t) - u(t)> + <\overset{0}{A}\big(t,h(t)\big)\eta, \eta_j - \eta + u(t) - u_j(t)> \\
&\leq \|\overset{0}{A}\big(t,h_j(t)\big)\eta_j - \overset{0}{A}\big(t,h(t)\big)\eta_j\|\|\eta_j - \eta u(t) - u_{h_j}(t)\| \\
&+ \|\overset{0}{A}\big(t,h_j(t)\big)\eta_j - \overset{0}{A}\big(t,h(t)\big)\eta_j\|\|\eta - u(t)\| \\
&+ <\overset{0}{A}\big(t,h(t)\big)\eta_j, \eta(t) - u(t)> \\
&\quad + <\overset{0}{A}\big(t,h(t)\big)\eta, \eta_j - \eta + u(t) - u_j(t)>.
\end{aligned}$$

On passe à la limite lorsque $n \to \infty$ dans (3.7), et on utilisent (3.4), on obtient

$$<\dot{u}(t), u(t)-\eta> \leq <\overset{0}{A}\big(t,h(t)\big)\eta, \eta - u(t)>, \quad p.p.t \in I, \forall \eta \in D\big(A(t)\big).$$

Par conséquent, par (3.5) on obtient

$$-\dot{u}(t) \in A\big(t,h(t)\big)u(t) \quad p.p.t \in I$$

avec $u(0) = u_0 \in D\Big(A\big(0,h(0)\big)\Big)$.

Par l'unicité de la limite $u = u_h$.

Finalement, Montrons que $\Phi : \mathcal{X}_\gamma \to: \mathcal{X}_\gamma$ est continue.

En effet,

Soit (h_n) une suite converge uniformément vers h, on a

$$\begin{aligned}\|\Phi(h_n)(t) - \Phi(h)(t)\| &= \left\| \int_0^t u_{h_n}(s)ds - \int_0^t u_h(s)ds \right\| \\ &= \int_0^t \|u_{h_n}(s) - u_h(s)\| ds\end{aligned}$$

Puisque $(u_{h_n}(\cdot))$ converge uniformément vers $u_h(\cdot)$.

On conclure que

$$\sup_{t\in I} \|\Phi(h_n(t) - \phi(h(t))\| \leq \sup_{t\in I} \int_0^t \|u_{h_n}(s) - u_h(s)\| ds \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Alors la suite $\Big(\Phi(h_n)\Big)$ converge vers $\Phi(h)$ dans $C(I, H)$.

C-à-dire, $\Phi : \mathcal{X}_\gamma \to \mathcal{X}_\gamma$ est continue et $\phi(\mathcal{X}_\gamma)$ est relativement compacte.

On applique le Théorème du point fixe 1.3.11 sur l'application $\Phi : \mathcal{X}_\gamma \to \mathcal{X}_\gamma$ on conclut que Φ admet un point fixe, c-à-dire, $h = \Phi(h) \in \mathcal{X}_\gamma$.

Donc, $h(t) = \phi\big(h(t)\big) = x_0 + \displaystyle\int_0^t u_h(s)ds, \quad t \in I.$

Ceci montrer l'existence d'au moins une solution absolument continue pour l'inclusion $(\mathcal{P}_x)$.

Ceci termine la preuve du Théorème. ■

Bibliographie

[1] **J.P.Aubin and H.Frankowska**, *Set-Valued Analysis.* Birkhäser, Boston Basel Berlin (1990).

[2] **D.Azzam-Laouir, W.Belhoula, C.Castaing and M.D.P.M. Marques**, *Perturbed Evolution Problems with Absolutely Continuous Variation in time and applications.* Journal of Fixed Point Theory and Applications, 21, No. 2 (2019) 40.

[3] **D.Azzam-Laouir, W.Belhoula, C.Castaing and M.D.P.M. Marques**, *Multivalued perturbation to evolution problems involving time dependent maximal monotone operators. Evolution Equations and Control Theory*,9,N.1,(2020)219-254.

[4] **V.Barbou**, *Nonlinear Semigroups and Differenial equation in Banach Space.*,Noordhoff Int.Publ.leyden,(1976).

[5] **W.Belhoula**, *Résultats d'existence de solutions pour des inclusions différentielles gouvernées par des opérateurs maximaux monotones dépendant du temps*. Thése de doctorat LMD, Université Mohammed Saddik Ben Yahia-Jijel (2019) .

[6] **H.Brèzis**, *Analyse fonctionnelle theory et application. Masson*, Paris, (1983).

[7] **H. Brézis**, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. North-Holland, Amsterdam (1973).

[8] **C.Castaing**, *Quelques résultats de compacité liés à l'intégration* . Mémoires de la S.M.F (1972)73-81.

[9] **C.Castaing, c. Godet.Thobie and L.K.Tronong**, *Fractional oder of Evolution Inclusion compled with a Time and Stat Dependent Maximal Monotone Operator*. Licensse MDPI.Basel, Switzerland (2020).

[10] **C.Castaing, P.Raynaud de Fitte and M.Valadier**, *Young Measures on Topological Spaces with Applications in Control Theory and Probability Theory*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2004).

[11] **C.Cstaing,A.G.Ibrahim and M.Yarou**, *Some contributions to noconvexe sweeping process.* J. Nonlinear Convex Anal.(2009),10,1-20.

[12] **C.Castaing and M.Valadier**, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions.* Lectures Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 580, (1977).

[13] **A.Idzik,** , *Almost fixed points theorems.* proceedings of the American Mathemattical Society,104,(1988).

[14] **M.Kisieliwicz**, *Differential Inclusion and Optimal Control.* PWN-Polish Scientific Publishers, Kluwer Academic Publishers, Dortrecht, Boston, London (1991).

[15] **M.Kunze and M.D.P.M.Marques**, *BV solutions to evolution problems with time-dependent domains.* Set-Valued Analysis 5.1 (1997) 57-72.

[16] **S.Park**, *Fixed points of approximable maps or kakutani maps* J.Nonlinear convex.Anal.(2006) 1-17.

[17] **Y.Sonntag**, *Topologie et Analyse fonctionnelle. ellipses, édition marketing S.A*, (1998).

[18] **A.A.Vladimirov**, *Nonstationary dissipative evolution equations in a Hilbert space. Nonlinear Analysis :* Theory, Methods and Applications 17.6 (1991) 499-518.