République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Seddik BenYahia - Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse Fonctionnelle.

Thème

Fonctions hypergéométriques p-adiques

Présenté par :

Bouchouit Amal

Devant le jury :

Président :	**A. Makhlouf**	M.C.B Université de Jijel
Encadreur :	**R. Belhadef**	M.C.B Université de Jijel
Examinateur :	**B. Saoudi**	M.C.B Université de Jijel

Promotion **2020/2021**

Remerciements

Louange et remerciements à **Dieu** le Tout-Puissant qui m'a donné l'opportunité d'étudier suivi de la volonté, du courage et de la patience pour terminer ce mémoire.

Tout d'abord, je suis honoré de remercier tout particulièrement mien encadreur, l'enseignant **R. Belhadef**, qui m'a guidé, soutenu et encouragé, en particulier ses précieux conseils et sa belle patience tout en faisant ce travail.

Un grand merci aux membres du jury, le Président **A. Makhlouf**, et l'examinateur **B. Saoudi** pour l'honneur qu'il m'y a fait accepter une évaluation du travail.

Sincères remerciements à tous les enseignants du département de mathématiques de l'université de Jijel qui m' on suivi pendant mes années d'études à l'université, A tous mes camarades de classe.

Je tiens également à remercier ma famille et mes amis Pour leur patience, leur attention et leurs encouragements envers moi.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué d'une manière ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

Notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de ce travail.

$\mathbb{K}$	:	Un corps.
$\mathbb{K}[x]$	:	L'ensemble de polynome.
p	:	Un nombre premier.
$\mathbb{N}$	:	L'ensemble des entiers naturels réels.
$\mathbb{Z}$	:	L'ensemble des entiers relatifs réels.
$\mathbb{Z}^{+}$	:	L'ensemble des entiers relatifs réels positifs.
$\mathbb{Z}_{-}$	:	L'ensemble des entiers relatifs réels nigatifs.
$\mathbb{Q}$	:	L'ensemble des nombres rationnels.
$\mathbb{Q}_p$	:	L'ensemble des nombres p-adiques.
$\mathbb{Q}^{*}{}_p$	:	L'ensemble des nombres p-adiques non nuls.
$\mathbb{Z}_p$	:	L'ensemble des entiers p-adiques .
$\mathbb{Z}^{\times}{}_p$	:	L'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}_p$.
$\mathbb{C}$	:	L'ensemble des nombres complexes.
$\mathbb{C}_p$	:	L'ensemble des nombres complexes p-adiques .
v	:	La valuation sur $\mathbb{K}$.
$S_p(n)$	:	La somme des chiffres de l'écriture de n en base p.
$D^{+}(a,r)$	:	Le disque fermé de centre a et de rayon r.
$D^{-}(a,r)$	:	Le disque ouvert de centre a et de rayon r.
$D(a,r)$	:	L'un ou l'autre de ces deux disques.
$C(a,r)$	:	Le cercle de centre a et de rayon r.
v_p	:	La valuation p-adique.
$\lvert\cdot\rvert_p$	:	La norme p-adique.
$\overline{\mathbb{Q}}_p$	:	La clôture algébrique du corps $\mathbb{Q}_p$.
$\mathcal{A}(D(a,r))$	:	L'ensemble des fonctions analytiques sur $D(a,r)$.
$\mathbb{C}_p[X]$	:	L'ensemble des polynômes sur $\mathbb{C}_p$.
$\mathbb{Z}_p[X]$	:	L'ensemble des polynômes sur $\mathbb{Z}_p$.
$\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$	:	L'ensemble des fonctions entiers sur $\mathbb{C}_p$.
$\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[X]$	:	L'ensemble des fonctions entiers transcendantes sur $\mathbb{C}_p$.
$\mathbb{C}_p(X)$	:	L'ensemble des fonctions rationnelles sur $\mathbb{C}_p$.

INTRODUCTION

La fonction hypergéométrique généralisée (dans le cas réel et p-adique) est donnée par la formule suivante :

$$_kF_s(\alpha_1, ..., \alpha_k; \gamma_1, ..., \gamma_s; x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha_1)_n \cdots (\alpha_p)_n}{(\gamma_1)_n \cdots (\gamma_s)_n n!} x^n.$$

Cette fonction satisfait l'équation différentielle linéaire :

$$x\frac{dy}{dx}\prod_{j=1}^{s}(x\frac{dy}{dx} - \gamma_j + 1) - x\prod_{i=1}^{k}(x\frac{dy}{dx} + \alpha_i) = 0$$

Dans le cas réel, la notion de fonction hypergéométrique a vu la lumière pour la première fois en 1655 par J. Wallis, qui a utilisé l'expression « progressio hypergeometrica » pour décrire la série de terme général

$$\frac{a(a+b)\cdots[a+(n-1)b]}{b.2b\cdots(n-1)b}.$$

Puis en 1778, L. Euler a remarque que cette série vérifie une équation différentielle linéaire du deuxième ordre. En 1797, J. Pfaff consacre un chapitre à l'étude de cette équation et aux diverses formes des séries qui la vérifient.

C'est bien G. F. Gauss en 1813, qui a fondé la théorie des fonctions hypergéométriques, en désignant la série par $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$, il introduit la notion de « fonctions confluentes » et forme les équations qui lient de telles fonctions ; il développe en fraction continue le quotient de deux fonctions contiguës ; il retrouve l'équation différentielle d'Euler.

Dans le cas p-adique, les séries hypergéométriques ont été considérées pour la première fois par B. Dwork [7] lors de ses manipulations sur la fonction zêta d'une hypersurface, dont il a évalué la convergence d'un quotient de deux fonctions hypergéométriques au point $x = 1$.

Après, il vient N. Koblitz [13] avec son étude de l'analogue p-adique de la formule de Gauss de ${}_2F_1(a, b; c; 1)$. Ainsi que, J. Diamond [5] qui a amélioré les résultats de Koblitz, et il a donné aussi des conditions suffisantes pour la validité de la conjecture de Koblitz sur la limite du quotient des sommes partielles des fonctions hypergéométriques.

Dans son article [17], P. T. Young a présenté quelques formules explicites au points $x = 1$ et $x = -1$ pour les prolongements analytiques des rapports de fonctions hypergéométriques p-adiques généralisées.

Pour certains cas de fonctions ${}_3F_2$ et ${}_2F_1$, il a évalue le prolongement en terme de la fonction gamma p-adique, sous des formes qui donnent des produits de sommes de Jacobi (via la formule de Gross-Koblitz). Il a exprimé également certaines congruences de groupes formels satisfaites par les nombres d'Apéry et par des coefficients binomiaux, toujours en termes de fonctions hypergéométriques p-adiques.

Young a obtenu des résultats similaires aux théorèmes de Kummer, Saalschütz, Dixon, et Watson, en utilisant des identités combinatoires et des propriétés de bases de la fonction gamma p-adique.

Ce mémoire est réparti sur l'introduction générale et trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on commence par la définition de la fonction gamma. Puis, on rappel les définitions et les propriétés de la fonction hypergéométrique dans $\mathbb{R}$.

Dans le deuxième chapitre, on commence par donner quelques rappels des notions fondamentales du corps normés dans le cas générale, puis on définit la valuation et la norme p-adique et on construit le corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$ et le corps des nombres complexes p-adiques $\mathbb{C}_p$. On termine ce chapitre par une représentation des suites, des séries entières p-adiques et les fonctions analytiques.

Dans le dernier chapitre, on donne les définitions et les propriétés de la fonction gamma p-adique, puis on présente les définitions et les propriétés de la fonction hypergéométrique p-adique. On termine ce chapitre par quelques applications de la fonction hypergéométrique p-adique.

CHAPITRE 1

FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES RÉELS

1.1 Motivation

L'équation différentielle du type hypergéométrique est donnée par la formule suivante :

$$z'' + \frac{\tau(t)}{\sigma(t)}z' + \frac{\delta(t)}{\sigma^2(t)}z = 0, \tag{1.1}$$

telle que : $\sigma(t)$, $\delta(t)$ et $\tau(t)$ sont des polynômes, avec $\deg(\sigma), \deg(\delta) \leqslant 2$ et $\deg(\tau) \leqslant 1$.

Après des changements des variables convenables, on peut réduire l'équation (1.1) aux trois équations suivantes :

1) La première est donnée par

$$s(1-s)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)s]y' - \alpha\beta y = 0,$$

qui s'appelle l'équation hypergéométrique. La solution de cette équation s'appelle fonction hypergéométrique.

2) La deuxième est donnée par

$$sy'' + (\gamma - s)y' - \alpha y' = 0,$$

qui s'appelle l'équation hypergéométrique dégénérée. La solution de cette équation s'appelle fonction hypergéométrique dégénérée.

3) La troisième est donnée par

$$y'' - 2sy' + 2vy = 0,$$

qui s'appelle l'équation d'Hermite. La solution de cette équation s'appelle fonction d'Hermite.

1.2 Définitions et Propriétés

Les fonctions hypergéométriques sont représentées par deux types : Intégrale et en sériés entières. Dans cette section on va donner les définitions et quelques propriétés de la fonction hypergéométrique réel.
On commence par la fonction gamma réel.

Définition 1.1
On définit la fonction gamma comme suit

1) *Sur $\mathbb{N}$, pour un entier naturel $n \geqslant 1$*

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(n-1)} dt.$$

2) *Sur $\mathbb{R}$, pour tout $y \in]0, +\infty[$*

$$\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(y-1)} dt.$$

3) *Sur $\mathbb{C}$, pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $Re(s) > 0$*

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(s-1)} dt.$$

Définition 1.2

Soient $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ on définit le symbole de Pochhammer $(a)_n$ par

$$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1),$$

pour $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, $Re(a) > 0$, on a

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}.$$

avec $(a)_0 = 1$.

Définition 1.3

- *La fonction hypergéométrique généralisée notée ${}_pF_q(.;.;.)$ est définie par Pour $z \in \mathbb{C}$*

$${}_pF_q(a_1, ..., a_p; b_1, ..., b_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n n!} z^n.$$

- *L'appellation "fonction hypergéométrique" fait référence au cas spécial : Pour $p = 2$, $q = 1$, $a_1 = a$, $a_2 = b$, $b_1 = c$, la fonction hypergéométrique est définie par*

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n.$$

Exemple 1.1

Si $a = 1$ et $b = c$, la fonction hypergéométrique est réduite à la série géométrique $1 + z + z^2 + ...$, i.e : ${}_2F_1(1, b; b; z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$.

Théorème 1.1 *[10]*

Quelles que soient les paramètres complexes a, b, c, la série hypergéométrique admet $C_0 = \{x \in \mathbb{C}, \mid x \mid < 1\}$ comme disque de convergence.

Sur C_0 la série est

1) *absolument convergente, si $Re(c - a - b) > 0$.*
2) *divergente, si $Re(c - a - b) \leq -1$.*

Théorème 1.2 *[1]*

Soient $a, b, c, z \in \mathbb{C}$, on a

1) ${}_2F_1(a, b; c; z) = {}_2F_1(b, a; c; z)$.
2) ${}_2F_1(a, b; c; z) = (1 - z)^{c-a-b}\, {}_2F_1(c - a, c - b; c; z)$.
3) ${}_3F_2(-n, a, b; c, a + b - c - n + 1; 1) = \dfrac{(c - a)_n(c - b)_n}{(c)_n(c - a - b)_n}, n = 0, 1, 2, ...$

Théorème 1.3 *[1] (**Représentation intégrale**)*

Si $Re(c) > Re(b) > 0$, nous avons

$$
{}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c - b)} \int_0^1 t^{b-1}(1 - t)^{c-b-1}(1 - zt)^{-a}dt,
$$

pour tout z dans le plan complexe tel que $\mid z \mid < 1$.

Théorème 1.4 *[1] (**Formule de Gauss**)*

Si $Re(c - a - b) > 0$, ona :

$$
{}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a)\Gamma(c - b)}.
$$

Théorème 1.5 *[1]*
Si $c \neq 0,-1,-2,...$, *nous avons :*

$$_2F_1(-n,b;c;1) = \frac{(c-b)_n}{(c)_n}, n = 0,1,2,...$$

Théorème 1.6 *[1] (**Transformation de Pfaff**)*
Soient $a,b,c,z \in \mathbb{C}$, *on a*

$$_2F_1(a,b;c;z) = (1-z)^{-a}\ _2F_1(a,c-b;c;\frac{z}{z-1}).$$

Théorème 1.7 *[1]*
Soient $a,b,c,z \in \mathbb{C}$, *pour* $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$_3F_2(-n,a,b;c,a+b-c-n+1;1) = \frac{(c-a)_n(c-b)_n}{(c)_n(c-a-b)_n}.$$

Proposition 1.1 *[10] (**Dérivées**)*
En dérivant terme à terme la série hypergéométrique par rapport à z, on obtient :

$$\frac{d}{dz}\ _2F_1(a,b;c;z) = \frac{ab}{c}\ _2F_1(a+1,b+1;c+1;z).$$

Plus généralement,

1) $\frac{d^n}{dz^n}\ _2F_1(a,b;c;z) = \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\ _2F_1(a+n,b+n;c+n;z).$
2) $[\frac{d^n}{dz^n}\ _2F_1(a,b;c;z)] = \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}$, *pour* $z = 0$.

Proposition 1.2 *[1][10] (**Équation différentielle**)*
$F(z)$ *satisfait à l'équation différentielle*

$$z(1-z)\frac{d^2F}{dz^2} + (c-(a+b+1))\frac{dF}{dz} - abF = 0.$$

1.3 Fonction hypergéométrique confluente

Définition 1.4 *[1]*
On appelle fonction hypergéométrique confluente notée ${}_1F_1(.;.;.)$ *la fonction définie par*

$$ {}_1F_1(a,b,z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(a)_n}{(b)_n n!} z^n. $$

Proposition 1.3 *[1]*

1) $\lim\limits_{b\longrightarrow+\infty} {}_2F_1(a,b,c,\frac{z}{b}) = {}_1F_1(a,c,z).$

2) $\lim\limits_{c\longrightarrow+\infty} {}_2F_1(a,b,c,cz) = {}_2F_0(a,b,.,z).$

Théorème 1.8 *[1]*
La fonction hypergéométrique confluente ${}_1F_1(a,b,z)$ *est une solution de l'équation :*

$$ z^2\frac{d^2F}{dz^2} + (b-z)\frac{dF}{dz} - aF = 0. $$

Remarque 1.1
Si b n'est pas un entier une seconde solution indépendante est donnée par :

$$ z^{1-b}\ {}_1F_1(a-b+1, 2-b, z). $$

Théorème 1.9 *[1] (**Représentation intégrale**)*
Si $Re(b) > Re(a) > 0$*, nous avons*

$$ {}_1F_1(a,b,z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-a-1} e^{zt} dt. $$

CHAPITRE 2

ANALYSE *P*-ADIQUE

Dans ce chapitre on va donner quelques notations importantes dans le domaine p-adique, qu'on aura besoin dans le chapitre 3.

2.1 Corps normés

Définition 2.1
Soit $\mathbb{K}$ *un corps. On appelle une norme sur* $\mathbb{K}$ *toute application* $\| \,.\, \|: \mathbb{K} \longrightarrow [0, +\infty[$ *telle que :*

1) $\| x \| \Longleftrightarrow x = 0.\ \forall x \in \mathbb{K}.$
2) $\| xy \| = \| x \| \| y \|.\ \forall x, y \in \mathbb{K}.$
3) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|.\ \forall x, y \in \mathbb{K}$ *(**Inégalité triangulaire**).*

Exemple 2.1
Sur un corps $\mathbb{K}$ *il y'a toujours au moins une norme à savoir l'application* $\| \,.\, \|$:

$\mathbb{K} \longrightarrow [0, +\infty[$ *définie par :*

$$\| x \| = \begin{cases} 1 & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0, \end{cases}$$

appelé norme triviale (grossière).

Remarque 2.1

Sur un corps $\mathbb{K}$ on peut définie la norme usuelle :

$$\| x \|_\infty = \max(x, -x) = \begin{cases} x & , x \geq 0, \\ -x & , x < 0. \end{cases}$$

2.2 Construction de $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{C}_p$

2.2.1 Valuation p-adique

Définition 2.2

Soit $x \in \mathbb{Z}$. La valuation p-adique de x notée par $v_p(x)$ est le plus grand nombre naturel α telle que p^α divise x i.e.

$$v_p(x) = \max\{\alpha \in \mathbb{N}.\ \ p^\alpha \backslash x\}$$

Par convention on a : $v_p(0) = +\infty$.
Si $x = \dfrac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^*$, on a

$$v_p(x) = v_p(a) - v_p(b).$$

Exemple 2.2

- $37 = 1.3^0 + 3^2 + 3^3$, *alors* $v_3(37) = 0$.

- $x = p^1 + p^2 + p^3 + ...$, *alors* $v_p(x) = 1$, *pour* $p \geq 2$.
- $y = \frac{37}{p+p^2+p^3}$, *alors* $v_p(y) = 0 - 1 = -1$, *pour* $p \geq 2$.

Proposition 2.1 *[3]*

Soient $x, y \in \mathbb{Z}^*$. *On a*

1) $v_p(1) = 0$.

2) $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$.

3) $v_p(x + y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}$.

Preuve.

1) Evident car

$$1 = p^0 + 0.p + 0.p^2 + ... = p^0 \Longrightarrow v_p(1) = 0 \ \forall p - premier.$$

2) Soit

$$x \in \mathbb{Z}^*, \quad x = p^{v_p(x)}.n_1 \ et \ (p, n_1) = 1,$$

et

$$y \in \mathbb{Z}^*, \quad y = p^{v_p(y)}.n_2 \quad et \quad (p, n_2) = 1.$$

Alors

$$xy = p^{v_p(x)}.n_1.p^{v_p(y)}.n_2 = p^{v_p(x)}.p^{v_p(y)}.n_1.n_2, \ (p, n_1.n_2) = 1.$$

$$xy = p^{v_p(x)+vp(y)}.n_1.n_2, \ (p, n_1.n_2) = 1.$$

Donc

$$v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y).$$

3) Soit

$$x \in \mathbb{Z}^*, \quad x = p^{v_p(x)}.n_1 \quad \text{et} \quad (p,n_1)=1,$$

et

$$y \in \mathbb{Z}^*, \quad y = p^{v_p(y)}.n_2 \quad \text{et} \quad (p,n_2)=1.$$

Alors
$$x+y=p^{v_p(x)}.n_1+p^{v_p(y)}.n_2.$$
Supposons que $v_p(x)\le v_p(y)$
$$x+y=p^{v_p(x)}\underbrace{(n_1+p^{v_p(y)-v_p(x)}.n_2)}_{c_1}$$

- Si (p,c_1)=1, alors
$$v_p(x+y)=v_p(x)=\min(v_p(x),v_p(y))$$

- Si $(p,c_1)\neq 1$, alors
$$v_p(x+y)=v_p(x)+v_p(c_1)\ge v_p(x)=\min(v_p(x),v_p(y))$$

Donc
$$v_p(x+y)\ge\min(v_p(x),v_p(y)),\ \ \forall x,y\in\mathbb{Z}^*$$

■

Proposition 2.2
Pour tout $x,y\in\mathbb{Z}^*$, on a
$$v_p(x)\neq v_p(y)\Longrightarrow v_p(x+y)=\min\{v_p(x),v_p(y)\}.$$

Preuve.
On prend $v_p(x)<v_p(y)$, comme on a
$$v_p(x+y)\ge\min\{v_p(x),v_p(y)\},\forall x,y\in\mathbb{Z}^*,$$

alors $v_p(x+y) \geq v_p(x)$.
Il reste de montrer que $v_p(x) \geq v_p(x+y)$. On a

$$v_p(x) = v_p(x - y + y) \geq \min\{v_p(x+y), v_p(y)\}.$$

Si $\min\{v_p(x+y), v_p(y)\} = v_p(y)$, alors $v_p(x) \geq v_p(y)$, c'est une contraction avec l'hypothèse, donc $v_p(x) \geq v_p(x+y)$. ■

Lemme 2.1 *[11]*

$$v_p(n!) = \frac{n - S_p(n)}{p-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

où $S_p(n)$: désigne la somme des chiffres de l'écriture de n en base p, c-à-d

$$S_p(n) = a_0 + a_1 + ... + a_n \text{ où } n = a_0 + a_1 p + ... + a_n p^n.$$

Preuve.

On a

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i \Longrightarrow v_p(n!) = \sum_{i=1}^{n} v_p(i),$$

tel que

$$i = a_j p^j + ... + a_l p^l, a_j \neq 0.$$

Donc

$$v_p(i) = j.$$

Alors

$$\begin{aligned} i &= a_j p^j + ... + a_l p^l \\ &= p^j - p^j + a_j p^j + ... + a_l p^l \\ &= p^j + (a_j - 1)p^j + \sum_{s=j+1}^{l} a_s p^s, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} i-1 &= p^j - 1 + (a_j - 1)p^j + \sum_{s=j+1}^{l} a_s p^s \\ &= (p-1)\sum_{s=0}^{j-1} p^s + (a_j-1)p^j + \sum_{s=j+1}^{l} a_s p^s. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} S_p(i-1) &= (p-1)\sum_{s=0}^{j-1} 1 + a_j - 1 + \sum_{s=j+1}^{l} a_s \\ &= j(p-1) + a_j + \sum_{s=j+1}^{l} a_s - 1 \\ &= j(p-1) + \sum_{s=j}^{l} a_s - 1 \\ &= v_p(i)(p-1) + \sum_{s=j}^{l} a_s - 1 \\ &= v_p(i)(p-1) + S_p(i) - 1. \end{aligned}$$

Alors

$$v_p(i) = \frac{S_p(i-1) - S_p(i) + 1}{p-1}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
v_p(n!) &= \sum_{i=1}^{n} v_p(i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{S_p(i-1) - S_p(i) + 1}{p-1} \\
&= \frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^{n} [S_p(i-1) - S_p(i) + 1] \\
&= \frac{1}{p-1} \Big[\sum_{i=1}^{n} [S_p(i-1) - S_p(i)] + \sum_{i=1}^{n} 1 \Big] \\
&= \frac{n - \sum_{i=1}^{n} [S_p(i) - S_p(i-1)]}{p-1} \\
&= \frac{n - S_p(n)}{p-1}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

2.2.2 Norme p-adique

Définition 2.3

On définit la norme p-adique $|\ .\ |_p$ *sur* $\mathbb{Q}$ *comme suit :*

$$| x |_p = \begin{cases} \dfrac{1}{p^{v_p(x)}} & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Avec $v_p(x)$ *est la valuation p-adique de x.*

Exemple 2.3

1) $x = 2p^4 + 3p^8$ *pour* $p > 3$, $| x |_p = \frac{1}{p^{v_p(x)}} = \frac{1}{p^4} = p^{-4}$.

2) $x = 7^2$ *pour* $p = 7$, $| x |_7 = \frac{1}{7^{v_7(x)}} = 7^{-2}$.

3) $\forall n \in \mathbb{N} : | n! |_p = p^{-v_p(n!)} = p^{-\frac{n - Sp(n)}{p-1}}$.

Définition 2.4
On dit qu'une norme sur un corps $\mathbb{K}$ est non archimédienne si elle vérifie

$$\|x + y\| \leq max(\|x\|, \|y\|),\ \forall x, y \in \mathbb{K}\,(\textbf{\textit{inégalité triangulaire forte}}).$$

Proposition 2.3 *[5]*
La norme p-adique est une norme non archimédienne.

Preuve.
Soient $x, y \in \mathbb{Q}$, donc on a

$$\begin{aligned} |x + y|_p = p^{-v_p(x+y)} &\leq p^{-\min\{v_p(x), v_p(y)\}} \\ &= p^{\max\{-v_p(x), -v_p(y)\}} \\ &= \max\{p^{-v_p(x)}, p^{-v_p(y)}\} \\ &= \max\{|x|_p, |y|_p\}. \end{aligned}$$

D'où, la norme p-adique $|.|_p$ est non archimédinne. ■

Remarque 2.2
$(\mathbb{Q}, |\ .\ |_p)$ *est un corps non-archimédienne.*

Théorème 2.1 *[11] (**Caractéristique des normes non-archimédienne**)*
Soit $\|\ .\ \|$ une norme sur le corps $\mathbb{K}$, on a :

$$\|\ .\ \|\ \textit{est non-archimédienne} \Longleftrightarrow \|\ n\ \| \leq 1, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Remarque 2.3

$$\|\ .\ \|\ \textit{archimédienne} \Longleftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{Z}, \|\ n_0\ \| > 1.$$

Exemple 2.4

1) *La norme triviale est une norme non-archimédienne .*

2) *La norme usuelle est une norme archimédienne .*

Proposition 2.4 *[11]*
Soit $\mathbb{K}$ un corps non-archimédienne et $a, x \in \mathbb{K}$ on a

$$\| x - a \| < \| a \| \Longrightarrow \| x \| = \| a \| .$$

Remarque 2.4
Dans un corps non-archimédienne tous les triangulers sont isocels.

2.2.3 Corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$

Le corps $\mathbb{Q}$ n'est pas complet par rapport à la norme p-adique $| \, . \, |_p$, on le complète, on obtient un corps complet qui noté $\mathbb{Q}_p$ et qui s'appelle le corps des nombre p-adique. Le corps des nombres p-adique $\mathbb{Q}_p$ peut alors être défini comme la complétion de l'espace normé $\mathbb{Q}$.

Définition 2.5

- *L'ensemble $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adiques est donné par*

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : | \, x \, |_p \leq 1\} = \{x \in \mathbb{Q}_p : x = \sum_{n \geq 0} a_n p^n\}.$$

- *L'ensemble des entiers p-adiques inversibles dans $\mathbb{Z}_p$ noté $\mathbb{Z}_p^*$*

$$\mathbb{Z}_p^* = \{x \in \mathbb{Q}_p : | \, x \, |_p = 1\}.$$

Remarque 2.5 *Le corps $\mathbb{Q}_p$ est l'ensemble des fractions de $\mathbb{Z}_p$*

$$\mathbb{Q}_p = \{\frac{a}{b}, (a, b) \in \mathbb{Z}_p \;\; et \;\; b \neq 0\}$$

.

Définition 2.6
Pour un nombre p-adique $x \in \mathbb{Q}_p$ on définit son développement de Hensel par la série suivante :

$$x = \sum_{n \geq n_0} a_n p^n$$

où $n_0 \in \mathbb{Z}$ et les a_n sont des nombres entiers entre 0 et $p-1$, en particulier $a_{n_0} \neq 0$.

Remarque 2.6

1) *Le développement de Hensel de x est unique.*
2) *La partie $\mathbb{Z}_p$ est un sous anneau de $\mathbb{Q}_p$.*

Conséquence 2.1
Si $x \in \mathbb{Q}_p$ et $|x|_p = p^{-n}$ alors x admet une unique représentation

$$x = p^n u, u \in \mathbb{Z}_p^*$$

car

$$|x|_p = p^{-n} \Longrightarrow x = p^n.u, (p, u) = 1 \Longrightarrow x = p^n(a_0 + a_1 p + ...), a_0 \neq 0$$

où

$$|u|_p = |a_0 + a_1 p + ...|_p = 1 \Longrightarrow u \in \mathbb{Z}_p^*.$$

Remarque 2.7
L'inverse de p n'est pas un entier p-adique.

2.2.4 Corps des nombres complexes p-adiques

Définition 2.7
On dit qu'un corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clôs si chaque polynôme $p(x)$ dans $\mathbb{K}[x]$de

degré n admet n racines dans $\mathbb{K}$.

Proposition 2.5 *[2]*

Pour tout p premier. le corps $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clôs.

Preuve.

Soient le polynôme $p(x) = x^3 - p^4 \in \mathbb{Q}_p[x]$. Supposons que ce polynôme admet des racines dans $\mathbb{Q}_p$.

Donc

$$p(x) = 0 \Longleftrightarrow x^3 = p^4$$

Alors

$$| x^3 |_p = | x |_p^3 = | p^4 |_p = p^{-4}$$

D'où

$$\begin{aligned} | x |_p^3 = p^{-4} &\Longleftrightarrow | x |_p = p^{-\frac{4}{3}} \\ &\Longleftrightarrow v_p(x) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Contradiction avec $\forall x \in \mathbb{Q}_p, v_p(x) \in \mathbb{Z}$. Donc les racines de $p(x)$ ne sont pas dans $\mathbb{Q}_p$. Alors $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clôs. ■

Définition 2.8

Le corps des nombres complexes p-adiques est le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ par rapport à la norme p-adique $| \,.\, |_p$.

Remarque 2.8

L'ensemble des valeurs de $\mathbb{C}_p^*$ (i.e $| \mathbb{C}_p^* |_p = \{| x |_p, x \in \mathbb{C}_p, x \neq 0\}$) est l'ensemble des puissances rationnelles de p.

2.3 Suites et séries p-adiques

Théorème 2.2 *[11]*

Une suite $(a_n)_n$ dans $\mathbb{Q}_p$ est une suite de Cauchy, et donc convergente, si et seulement si elle vérifie

$$\lim_{n\to+\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0. \tag{2.1}$$

Proposition 2.6 *[14]*

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbb{Q}_p$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{Q}_p$ et $a \neq 0$ alors $|a_n|_p = |a|_p$, pour n assez grand.

Preuve.

Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$.
Pour $\varepsilon = |a|_p$ on a

$$\exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Longrightarrow |a_n - a_p| < |a|_p.$$

D'après l'inégalité ultramétrique

$$|a_n| = \max(|a_n|_p, |a|_p) = |a|_p.$$

■

Définition 2.9

Soit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ une série dans $\mathbb{Q}_p$.

1) *La somme partielle de cette séries est donnée par :*

$$S_N = a_0 + a_1 + ... + a_N = \sum_{n=0}^{N} a_n.$$

2) *La série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_n$ est de Cauchy.*

Proposition 2.7 *[11]*
Si la série $\sum |a_i|_p$ converge dans $\mathbb{R}$, alors $\sum a_i$ converge dans $\mathbb{Q}_p$.

Preuve.
Si $\sum |a_i|_p$ converge, alors d'après le Critère de Cauchy on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, m > n \geq N \Longrightarrow \sum_{i=n+1}^{m} |a_i|_p < \varepsilon$$

On aura

$$|S_m - S_n|_p = \left| \sum_{i=n+1}^{m} a_i \right|_p \leq \sum_{i=n+1}^{m} |a_i|_p < \varepsilon$$

Ce qui implique que $(S_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy et ainsi la série $\sum a_i$ converge en $\mathbb{Q}_p$. ■

Corollaire 2.1 *[9]*
Une série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ avec $a_n \in \mathbb{Q}_p$ est convergente si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, nous avons aussi

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right|_p \leq \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n|_p. \tag{2.2}$$

Définition 2.10
Une série entière dans $\mathbb{Q}_p$ définit sous la forme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, où $(a_n)_n \subset \mathbb{Q}_p$ et $x \in \mathbb{Q}_p$

Notation 2.1
L'ensemble des séries entières sur $\mathbb{Q}_p$ est notée par : $\mathbb{Q}_p[[x]]$.

Remarque 2.9 *En cas de convergence pour $x \in \mathbb{Q}_p$, on écrit*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ tel que } f \in \mathbb{Q}_p[[x]].$$

Définition 2.11

Le rayon de convergence d'une séries entière $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{Q}_p[[x]]$ *est le nombre réel* $0 \leq r_f \leq \infty$ *défini par :*

$$r_f = sup\{r \geq 0 : |a_n|_p r^n \longrightarrow 0\}.$$

Proposition 2.8 *[9]*

Soit $x \in \mathbb{Q}_p$ *et* $r \geq 0$ *tel que* $|a_n|_p r^n \longrightarrow 0$ *alors, la série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge si* $|x|_p \leq r$ *.*

Preuve.

Pour montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge, il suffit de montrer que $|a_n x^n|_p \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$

On a

$$0 \leq |a_n x^n|_p = |a_n|_p |x|_p^n \leq |a_n|_p r^n \longrightarrow 0$$

D'ou

$$|a_n x^n|_p \longrightarrow 0, quand\ n \longrightarrow +\infty.$$

■

Proposition 2.9 *[9]*

Soit $x \in \mathbb{Q}_p$*, alors la série* $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ *converge si* $|x|_p < r_f$ *et diverge si* $|x|_p > r_f$*.*

Preuve.

1) Si $|x|_p > r_f$ (cela ne peut arriver que si $r_f < \infty$), on a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} |x|_p |a_k|_p^{\frac{1}{k}} &= |x|_p \lim_{n\to\infty} \sup_{k\leq n} |a_k|_p^{\frac{1}{k}} \\ &= |x|_p \frac{1}{r_f} > 1.\end{aligned}$$

Donc pour tout $k \geq 0$, on a $|a_k|_p |x|_p^k > 1$. À savoir, le terme général $a_k x^k$

de la série ne tend pas vers 0. Alors la série $\sum_{k\geq 0} a_k x^k$ diverge.

2) Si $|x|_p < r_f$(cela ne peut arriver que si $r_f > 0$).
   On peut choisir : $|x|_p < r < r_f$, on a

$$\lim_{n\to\infty} sup_{k\geq n} r|a_k|_p \frac{1}{k} = r \lim_{n\to\infty} sup_{k\geq n}|a_k|_p \frac{1}{k} < 1.$$

   Nous en déduisons que pour certain grand N

$$sup_{k\geq N} r|a_k|_p \frac{1}{k} < 1.$$

   Par conséquent, $|a_k|_p r^k < 1$ pour tous $k \geq N$, et

$$0 \leq |a_k x^k|_p = |a_k|_p r^k \left(\frac{|x|_p}{r}\right)^k < \frac{|x|_p^k}{r^k} \longrightarrow 0(k \longrightarrow \infty)$$

cela montre que le terme générale la série $\sum_{k\geq 0} a_k x^k$ tend vers zéro, et la série converge. ■

Définition 2.12
Une série entière dans $\mathbb{C}_p$ est une séries de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ où $n \in \mathbb{N}, a, x \in \mathbb{C}_p$ et $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}_p$.

Définition 2.13 *(**Rayon de convergence**)*
Le rayon de convergence d'une séries complexe p-adique $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ noté R est définie par :

$$R = \sup\{|\ x-a\ |_p, x \in \mathbb{C}_p et \sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n converge\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

Proposition 2.10 *[8] (**Calcule de rayon de convergence**)*
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ ou $a_n \in \mathbb{C}_p$, alors :

1) *Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|_p}{|a_n|_p} = L$, on a $R = \frac{1}{L}$ (**Formule d'Alembert**).*

2) *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\mid a_n \mid_p} = L$, *on a* $R = \frac{1}{L}$ ***(Formule de Cauchy).***

3) *Si* $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|_p}}$ ***(Formule de Hadamard).***

Théorème 2.3 *[8]*

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ *une séries entière, où* $a_n \in \mathbb{C}_p$, *et* R *le rayon de convergence*

1) *Si* $\mid x-a \mid_p < R, \forall x \in \mathbb{C}_p$, *alors* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ *converge.*

2) *Si* $\mid x-a \mid_p > R, \forall x \in \mathbb{C}_p$, *alors* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ *diverge.*

3) *Si* $\mid x-a \mid_p = R, \forall x \in \mathbb{C}_p$, *donc on peut avoir :*

   - *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \mid a_n \mid_p R^n = 0$, *alors la série* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ *est converge sur la totalité du cercle* $C(a,R)$.

   - *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \mid a_n \mid_p R^n \neq 0$, *alors la série* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ *est diverge sur la totalité du cercle* $C(a,R)$.

Définition 2.14

La série $\sum\limits_{n\geq 1} na_n(x-a)^{n-1}$, *avec* $a_n \in \mathbb{C}_p$ *est appelée série dérivée de la série* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$.

Proposition 2.11 *[2]*

La série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ *et sa série dérivée ont le même rayon de convergence.*

2.4 Fonctions analytiques

Définition 2.15

On dit que la fonction $f : D^+(a,r) \to \mathbb{C}_p$ *est analytique sur* $D^+(a,r)$ $\forall r > 0$, *s'il existe une suite* $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}_p$ *telle que* $\mid a_n \mid_p r^n \to 0$, *et on a*

$$\forall x \in D^+(a,r);\ f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n.$$

Définition 2.16

On dit que la fonction $f : D^-(a,r) \to \mathbb{C}_p$ est analytique sur $D^-(a,r)$, s'il existe une suite unique $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}_p$ satisfaisant $\mid a_n \mid_p r^n \to 0$ pour $0 < r < R$, on a

$$\forall x \in D^+(a,r);\ f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n.$$

Remarque 2.10

1) *Une fonction de variable complexe p-adique définie sur un disque $D(a,r)$ ou $a \in \mathbb{C}_p$ est dite analytique sur ce disque lorsqu'elle admet un développement en séries entière en tout point de $D(a,r)$.*
2) *Si $r = +\infty$, alors f est analytique sur tout $\mathbb{C}_p$ et on dit que f est entière.*

Exemple 2.5

Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} p^{2n^2} x^n, x \in \mathbb{C}_p$, on a

$$r_f = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\mid a_n \mid_p}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} p^{-2n}} = +\infty.$$

Alors $\sum_{n\geq 0} p^{2n^2} x^n$ est converge sur $\mathbb{C}_p$, donc f est une fonction entière.

Notation 2.2

- *On note $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ l'ensemble des fonctions entières sur $\mathbb{C}_p$, et $\mathcal{A}(D(0,r))$ l'ensemble des fonctions analytiques sur le disque $D(0,r)$.*
- *On note $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[x]$ l'ensemble des fonctions entières qui ne sont pas des polynômes.*

CHAPITRE 3

FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES *P*-ADIQUES

Dans ce chapitre on va donner la définition de la fonction gamma p-adique et la définition de la fonction hypergéométrique p-adique, ainsi que les propriétés et les congruences de ces fonctions. Puis, on termine le chapitre par quelques applications.

3.1 Rappel sur la fonction gamma p-adique

Définition 3.1

Soit n un entier naturel non nul. On définit la factorielle p-adique de n, noté $(n)!_p$

par

$$(n)!_p = \prod_{1\leq j\leq n, (p,j)=1} j.$$

Par convention $(0)!_p = 1$.

Définition 3.2

- *Soit n un entier naturel non nul, on définit la fonction gamma p-adique, noté* Γ_p*, par*
$$\Gamma_p(n) = (-1)^n \prod_{\substack{1\leq j\leq n-1\\(p,j)=1}} j.$$
C'est-à-dire que $\Gamma_p(n) = (-1)^n(n-1)!_p$.
- *Pour* $x \in \mathbb{Z}_p$*, on définit la fonction* Γ_p *par la formule :*
$$\Gamma_p(x) = \lim_{n\to x}(-1)^n \prod_{\substack{1\leq j\leq n-1\\(p,j)=1}} j.$$

Proposition 3.1 *[16]*
La fonction gamma p-adique satisfait l'équation fonctionnelle :

$$\Gamma_p(x+1) = \begin{cases} -x\Gamma_p(x), & si\ |x|_p = 1,\\ -\Gamma_p(x), & si\ |x|_p < 1. \end{cases}$$

Théorème 3.1 *[13]*
La fonction gamma p-adique $\Gamma_p : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Q}_p$ *est continue. On a les propriétés suivantes :*

1) $\Gamma_p(0) = 1, \Gamma_p(1) = -1, \Gamma_p(2) = 1, (1 \leq n < p)$.
2) $|\Gamma_p(x)|_p = 1,\ \forall x \in \mathbb{Z}_p$.
3) $|\Gamma_p(x) - \Gamma_p(y)|_p \leq |x-y|_p$ *et* $|\Gamma_p(x) - 1|_p \leq |x|_p,\ \forall x, y \in \mathbb{Z}_p$.

4) $\Gamma_p(x+1) = h_p(x)\Gamma_p(x)$, *tel que :*

$$h_p(x) = \begin{cases} -x, & si \quad x \in \mathbb{Z}_p^\times \\ -1, & si \quad x \in p\mathbb{Z}_p \end{cases}$$

5) $\Gamma_p(x)\Gamma_p(1-x) = (-1)^{R(x)}$, *tel que* $R(x) \in \{1, 2...p\}$ *et* $R(x) \equiv x(\mod p)$.

Corollaire 3.1 *[5]*
Si $p \neq 2$, *on a* $\dfrac{1}{2} \in \mathbb{Z}_p$ *et* $\Gamma_p(\frac{1}{2})^2 = (-1)^{\frac{p+1}{2}}$.
Alors pour $p \equiv 1 (\mod 4)$, *on a* $(-1)^{\frac{1}{2}} = i \in \mathbb{Q}_p$.

Preuve.
On a

$$\Gamma_p\Big(\frac{1}{2}\Big)^2 = \Gamma_p\Big(\frac{1}{2}\Big)\Gamma_p\Big(1-\frac{1}{2}\Big) = (-1)^{R(\frac{1}{2})},$$

comme $p+1 \equiv 1(\mod p)$, alors

$$\frac{p+1}{2} \equiv \frac{1}{2}(\mod p) \quad et \quad R\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{p+1}{2}.$$

Ainsi

$$\Gamma_p\Big(\frac{1}{2}\Big)^2 = (-1)^{\frac{p+1}{2}}.$$

Si $p = 4m+1$, on a

$$\Gamma_p\Big(\frac{1}{2}\Big)^2 = (-1)^{2m+1} = -1,$$

c'est-à-dire que $\Gamma_p(\frac{1}{2})$ est une racine carrée de -1 dans $\mathbb{Q}_p$. ■

Lemme 3.1
Soit p un nombre premier impaire, pour $a \in \mathbb{Z}_p$, $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $a, a+1...a+(n-1)$ *dans* $p\mathbb{Z}_p$, *alors*

$$(a)_n = (-1)^n \frac{\Gamma_p(a+n)}{\Gamma_p(a)}.$$

Tel que $(a)_n$ est le symbole de Pochhammer pour les nombres p-adiques défini par

$$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$$

Proposition 3.2 *[15]*
On suppose que $0 < a < b < p-1$ et $r \geq 0$, avec $n_r = b\dfrac{p^r-1}{p-1}$, $m_r = a\dfrac{p^r-1}{p-1}$.
Alors, pour $r > 0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\binom{n_r}{m_r}}{\binom{n_{r-1}}{m_{r-1}}} &= -\frac{\Gamma_p(1+n_r)}{\Gamma_p(1+m_r)\Gamma_p(1+n_r-m_r)}\\ &= \frac{\Gamma_p(-m_r)\Gamma_p(m_r-n_r)}{\Gamma_p(-n_r)}.\end{aligned}$$

Preuve.
A partir de la définition on calcule

$$-\Gamma_p(1+n_r) = (-1)^{n_r} p^{n_r-1}\frac{n_r!}{n_{r-1}!},$$

et de même pour $1+m_r$, et $1+n_r-m_r$, d'où la première égalité suit. La seconde égalité est obtenue à partir de la formule de réflexion de Γ_p, en notant que $R(-m_r)+R(m_r-n_r)-R(-n_r) = (p-a)+(p+a-b)-(p-b) = p$ et $(-1)^p = -1$. Notons que par récurrence, cette proposition implique que pour chaque $r \geq 0$, le coefficient binomial $\binom{n_r}{m_r}$ est une unité p-adique. ∎

3.2 Définitions et Propriétés

Définition 3.3
Pour n, k, $s \in \mathbb{N}$, on définit la fonction hypergéométrique p-adique généralisée

comme dans le cas réel par la formule suivante :

$$ {}_kF_s(\alpha_1, ..., \alpha_k; \gamma_1, ..., \gamma_s; x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha_1)_n \cdots (\alpha_k)_n}{(\gamma_1)_n \cdots (\gamma_s)_n n!} x^n. \tag{3.1} $$

avec $\alpha_1, ..., \alpha_K, \gamma_1, ..., \gamma_s, x \in \mathbb{Z}_p$.

Pour $k = 2$, $S = 1$, *on a la formule de la fonction hypergéométrique p-adique*

$$ {}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n. $$

Remarque 3.1

La plupart des auteurs utilisent la fonction hypergéométrique p-adique ${}_kF_{k-1}$ *(i.e pour* $s = k - 1$*).*

Remarque 3.2

Dans le cas où quelques paramètres α_i *sont nuls ou négatifs, alors la série* (3.1) *est un polynôme.*

Remarque 3.3

Pour $\alpha_i, \gamma_i \in \mathbb{Z}_p$ *la série* (3.1) *est convergente si* $| x |_p < 1$.

Définition 3.4

- *On dit que la fonction hypergéométrique p-adique est bien-posé (well-poised) si*

$$ 1 + \alpha_1 = \gamma_1 + \alpha_2 = ... = \gamma_{k-1} + \alpha_k, \forall k \in \mathbb{N}. $$

- *On dit que la fonction hypergéométrique p-adique est de Saalschützian si*

$$ \alpha_1 + ... + \alpha_k = \gamma_1 + ... + \gamma_{k-1} - 1, \forall k \in \mathbb{N}. $$

Notation 3.1

Pour $\alpha \in \mathbb{Z}_p$, on définit α' et μ_α comme suit :

$$p\alpha' - \alpha = \mu_\alpha \in \{0, 1, ..., p-1\}.$$

Aussi pour $i \geq 1$, on définit

$$\alpha^{(i)} = (\alpha^{(i-1)})' \text{ et } \mu_\alpha^{(i)} = \mu_\alpha(i).$$

Si $-\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$ est le développement p-adique de $-\alpha$, alors

$$\mu_\alpha^{(i)} = a_i \text{ et } \alpha^{(i)} = -\sum_{j=i}^{\infty} a_j p^{j-i} = -h_i(-\alpha)$$

Dans [7, 8], B. Dwork a démontré que pour α_i, $\beta_i \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p$, certain ration (rapport) des fonctions hypergéométrique peut se prolonger vers une fonction analytique sur un domaine plus large que le disque de la convergence.

Théorème 3.2 *[6]*

Supposons que $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{k-1} \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p$, qu'aucun des γ_j n'est un entier nul ou négatif, que $\gamma_i \neq 1$ pour $1 \leq j \leq q$ et $\gamma_j = 1$ pour $q < j \leq k-1$.
Pour $i \geq 0$, Soit

$$F^{(i)}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} A^{(i)}(n) X^n = {}_k F_{k-1}(\alpha_1^{(i)}, ..., \alpha_k^{(i)}, \gamma_1^{(i)}, ..., \gamma_{k-1}^{(i)}; X) \in \mathbb{Q}_p[X],$$

et pour $i, s \geq 0$, on définit $F_s^{(i)}(X) = \sum_{n=0}^{p^s-1} A^{(i)}(n) X^n$. Supposons en outre que les paramètres satisfont aux conditions

1) *$|\gamma_j^{(i)}|_p = 1$ pour tout $i \geq 0$, $j = 1, ..., k-1$*
2) *Pour $i \geq 0$, en supposant que les indices soient réarrangés de $\mu_{\alpha_1}^{(i)} \leq ... \leq \mu_{\alpha_k}^{(i)}$ et $\mu_{\gamma_1}^{(i)} \leq ... \leq \mu_{\gamma_q}^{(i)}$ telle que $\mu_{\gamma_j}^{(i)} > \mu_{\alpha_{j+1}}^{(i)}$*

Alors

1) *Pour tout $i \geq 0$, telle que $F^{(i)}(X) \in \mathbb{Z}_p[X]$, et pour $r \geq s \geq 0$, on a*

$$F^{(0)}_{r+1}(X)F^{(1)}_s(X^p) \equiv F^{(1)}_r(X^p)F^{(0)}_{s+1}(X) \mod p^{s+1}\mathbb{Z}_p[X].$$

2) *Si $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{C}_p :\mid F^{(i)}_r(x^p) \mid = 1$ pour tout $i \geq 0$ $\}$, alors $\dfrac{F^{(0)}(x)}{F^{(1)}(x^p)}$ est la restriction à $\mid x \mid < 1$ d'un élément analytique f du support $\mathcal{D}$ donnée par*

$$f(x) = \lim_{r\to+\infty} \frac{F^{(0)}_{r+1}(x)}{F^{(1)}_r(x^p)}.$$

Théorème 3.3 *[6]*
Pour $r = 0, 1, ...,$ soit $A^{(r)}$ une application de $\mathbb{Z}^+$ dans Ω^* et soit g_r une application de $\mathbb{Z}^+$ dans $D - \{0\}$ telle que :

1) *$\mid A^{(r)}(0) \mid_p = 1$;*
2) *$A^{(r)}(m) \in g_r(m)D$;*
3) *Pour tout $a, r, \mu, s \in \mathbb{Z}^+$ tel que $a < p$, $\mu < p^s$; On a*

$$\frac{A^{(r)}(a + p\mu + mp^{s+1})}{A^{(r)}(a + p\mu)} - \frac{A^{(r+1)}(\mu + mp^s)}{A^{(r+1)}(\mu)} \in p^{(s+1)} \frac{g_{r+s+1}(m)}{g_r(a + p\mu)} D.$$

De plus, soient :

$$F(X) = \sum_{j=0}^{+\infty} A^{(0)}(j)X^j,\ G(X) = \sum_{j=0}^{+\infty} A^{(1)}(j)X^j,$$

et soit $F_{m,s}$ (respectivement $G_{m,s}$) la somme partielle :

$$\sum_{j=mp^s}^{(m+1)p^s-1} A^{(0)}(j)X^j \left(resp. \sum_{j=mp^s}^{(m+1)p^s-1} A^{(1)}(j)X^j \right).$$

Alors

$$F(X)G_{m,s}(X^p) \equiv G(X^p)F_{m,s+1}(X) \pmod{g_s(m)p^{(s+1)}[[X]]}.$$

Théorème 3.4 *[4]*
Si $a, b, c \in \mathbb{Z}_p$ et les conditions suivantes sont satisfaites pour $i = 0, 1, ...$

1) $\mid c^{(i)} \mid_p = 1$;

2) si $c \neq 1$, alors $\mu_a^{(i)}, \mu_b^{(i)} < \mu_c^{(i)}$;

3) $\mid {}_2F_1(a^{(i)}, b^{(i)}; c^{(i)}; 1) \mid_p = 1$;

alors

$$\mathscr{F}(a, b; c; x) = \frac{{}_2F_1(a, b; c; x)}{{}_2F_1(a', b'; c'; x^p)},$$

a une suite analytique vers $x = 1$ avec la valeur

$$\mathscr{F}(a, b; c; x) = \frac{\Gamma_p(c)\Gamma_p(c - a - b)}{\Gamma_p(c - a)\Gamma_p(c - b)}.$$

Preuve.
On suppose que $a, c \in \mathbb{Z}_p$, avec c vérifie la condition (1) du théorème.

Soit l'ensemble

$$S(a, c) = \left\{ b : b \in \mathbb{Z}_p \text{ et } a, b, c \text{ vérifions (2) et (3) du théorème} \right\}.$$

Il est facile de vérifier que l'esnemble $\mathbb{Z}_-$ est dense dans $S(a, c)$, et que la fonction $\mathcal{F}(a, b; c; 1)$ est continue par rapport b sur l'ensemble $S(a, c)$. Koblitz observe que dans la construction de Dwork de la fonction $\mathcal{F}(a, b; 1; x)$ l'application en la variable b

$$G : b \longrightarrow \mathcal{F}(a, b; 1; 1)$$

est limite uniforme d'une suite de fonctions continues, donc elle est continue. Cette remarque reste vrai pour l'application

$$G_1 : b \longrightarrow \mathcal{F}(a, b; c; 1)$$

Alors, il est suffisante de démontrer la relation pour les entiers négatifs dans $S(a, c)$.

En effet, si $b \in \mathbb{Z}_-$ la formule classique de Gauss donne

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{(c-a)\ldots(c-a-b-1)}{c\ldots(c-b-1)}$$

(c'est une identité pour les polynômes donc elle est vrai dans le cas p-adique).

Maintenant, on applique plusieur fois l'équation fonctionnelle de la fonction gamma p-adique $\Gamma_p(x) = (x-1)\Gamma_p(x-1)$, et le résultat du théorème 1.2 (Diamond, [5]), on aura

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma_p(c)\Gamma_p(c-a-b)}{\Gamma_p(c-a)\Gamma_p(c-b)} &= \frac{(c-1)\Gamma_p(c-1)(c-a-b-1)\Gamma_p(c-a-b-1)}{(c-a-1)\Gamma_p(c-a-1)(c-b-1)\Gamma_p(c-b-1)} \\
&\quad \ldots\ldots \\
&= \frac{(c-1)\Gamma_p(c-1)(c-a-b-1)\ldots(c-a-1)\Gamma_p(c-a-1)}{(c-a-1)\Gamma_p(c-a-1)(c-b-1)\ldots(c-1)\Gamma_p(c-1)} \\
&= \frac{(c-a-b-1)\ldots(c-a)}{(c-b-1)\ldots c} = {}_2F_1(a, b, c, 1)
\end{aligned}$$

■

Dans le lemme suivant, Diamond a démontré la convergence de la série hypergéométrique p-adique dans le cas général, puis il a étudié ses propriétés au point $x = 1$.

Lemme 3.2 *[4]*
Soit l'ensemble $\Omega_p = \{x \in \mathbb{C}_p / \mid x \mid_p \geq 1\}$, supposons que $u, v \in \Omega_p$.

1) *Si $dist(u, \mathbb{Z}_p) < dist(v, \mathbb{Z}_p)$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (u)_n/(v)_n = 0$.*

2) Si $dist(u, \mathbb{Z}_p) = dist(v, \mathbb{Z}_p) \neq 0$, alors $(u)_n/(v)_n$ est borné $\forall n \in \mathbb{N}$.

Lemme 3.3 *[4]*
Si b est une entier positif et $dist(a, \mathbb{Z}_p) < dist(c, \mathbb{Z}_p)$, alors

$$ {}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{(c-1)...(c-b)}{(c-a-1)...(c-a-b)}. $$

Dans les théorèmes qui suit, Diamond donné l'analogue p-adique des propriétés connu dans le cas réel : le théorème de Dixon et la formule de Saalschütz. L'avantage dans le cas p-adique c'est que la formule de Saalschütz est vraie pour $b \in \mathbb{Z}_p$, par contre dans le cas réel, elle est vraie pour $b \in \mathbb{Z}_-$ seulement.

Théorème 3.5 *[4]*
Si $b \in \mathbb{Z}_p$, $dist(c, \mathbb{Z}_p) < dist(e, \mathbb{Z}_p)$ et ${}_3F_2(x)$ est bien - posé, alors ${}_3F_2(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{C}_p$ avec $| x |_p \leq 1$, et on a

$$ {}_3F_2(1) = \frac{{}_2F_1(b, c; \frac{1}{2}(c+e+1); 1)}{{}_2F_1(b, c; c+e; 1)}. $$

Théorème 3.6 *[4]*
Si ${}_3F_2(x)$ est Saalschützian , $b \in \mathbb{Z}_p$, $dist(a, \mathbb{Z}_p)$, $dist(c, \mathbb{Z}_p) < dist(e, \mathbb{Z}_p)$, alors

$$ {}_3F_2(a, b; c; 1) = \frac{{}_2F_1(a, b; e; 1)}{{}_2F_1(a, b; e-c; 1)}. $$

Dans [13], Koblitz a prouvé que

$$ \mathscr{F}(\alpha, \beta; 1; 1) = \frac{\Gamma_p(\alpha)\Gamma_p(\beta)}{\Gamma_p(\alpha+\beta)} $$

lorsque $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p$, satisfait les conditions

$$a_1 + b_i < p \quad pour\, i \geq 0$$

Avec $-\alpha = \sum_{i\geq 0} a_i p^i$, $-\beta = \sum_{i\geq 0} b_i p^i$
La méthode de Koblitz basé sur la formule de convolution de Vandermonde suivante :

$$\binom{m+n}{n} = \sum_{k=0}^{min(m,n)} \binom{m}{k}\binom{n}{k} = {}_2F_1(-m,-n;1;1)$$

pour $m, n \in \mathbb{Z}^+$, cette méthode est également applicable dans d'autres situations. Young a prouver un analogue p-adique du théorème de Kummer [16], qui donne la valeur en $x = -1$ d' un fonction ${}_2F_1$ bien - posé. Cette formule classique démontre qu'une fonction bien - posé ${}_2F_1(-1)$ peut être exprimée en termes de la fonction gamma même que $x = -1$ ne soit pas un point singulier de l'équation différentielle satisfait par ${}_2F_1$.

Théorème 3.7 *[16]*
Supposons $0 < 2a \leq b < p-1$ *et* $2(b-a) < p-1$. *Alors*

$$\mathcal{F}(\frac{2a}{p-1}, \frac{b}{p-1}; 1 + \frac{2a-b}{p-1}; -1) = (-1)^a \frac{\Gamma_p(\frac{a}{p-1})\Gamma_p(\frac{b-a}{p-1})}{\Gamma_p(\frac{2a}{p-1})\Gamma_p(\frac{b-2a}{p-1})}.$$

Preuve.
Pour $n \geq 2m \geq 0$, on a

$$\binom{n}{2m-k}\binom{n-2m+k}{k} = \binom{n}{2m}\binom{2m}{k}. \tag{3.2}$$

On a l'identité combinatoire suivante :

$$(-1)^m \binom{n}{m} = \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n}{2m-k}. \tag{3.3}$$

On remplace la relation (3.2) dans la relation (3.3), on trouve

$$(-1)^m \binom{n}{m} = \binom{n}{2m} \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k \frac{\binom{n}{k}\binom{2m}{k}}{\binom{n-2m+k}{k}}. \tag{3.4}$$

Que nous réécrivons comme suit

$$(-1)^m \frac{\binom{n}{m}}{\binom{n}{2m}} = {}_2F_1(-2m, -n, 1+n-2m; -1). \tag{3.5}$$

Pour $r \geq 0$, on pose $n = n_r$, $m = m_r$ avec $n_r = b\dfrac{p^r-1}{p-1}$, $m_r = a\dfrac{p^r-1}{p-1}$. Alors, $n_r \geq 2m_r$.

D'après la proposition (3.2), on voit que

$$\binom{n_r}{m_r}, \binom{n_r}{2m_r} \in \mathbb{Z}_p^{\times}.$$

Donc, de (3.2) et (3.4), on trouve que

$${}_2F_1(-2m_r, -n_r; 1+n_r-2m_r; X) \in \mathbb{Z}_p[X], \tag{3.6}$$

et la relation (3.5) implique que la valeur à $x = -1$ est une unité p-adique, pour $r \geq 0$.

Dans $\mathbb{Q}_p$, on a les limites suivantes lorsque $r \longrightarrow +\infty$

$$-2m_r \longrightarrow \alpha,\ -n_r \longrightarrow \beta \ \ et \ \ 1+n_r-2m_r \longrightarrow \gamma,$$

avec $\alpha = \dfrac{2a}{p-1}, \beta = \dfrac{b}{p-1}, \dfrac{c}{p-1}$, où $c = p-1+2a-b$.

Noter que $\alpha^{(i)} = \alpha$, $\beta^{(i)} = \beta$, $\gamma^{(i)} = \gamma$ et $\mu_\alpha^{(i)} = 2a$, $\mu_\beta^{(i)} = b$, $\mu_\gamma^{(i)} = c$, pour $i \geq 0$.

Puisque $b < p-1$

$$\mu_\gamma^{(i)} = c > 2a = \mu_\alpha^{(i)}.$$

Et $2(b-a) < p-1$, on a

$$\mu_\gamma^{(i)} = p - 1 + 2(a-b) + b > b = \mu_\beta^{(i)}.$$

Donc

$$\mu_\gamma^{(i)} > \mu_\alpha^{(i)},\ \mu_\beta^{(i)}.$$

Donc, les condition du Théorème (3.2) sont satisfaites pour $F(X) = {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;X)$ et le rapport $\dfrac{F(X)}{F(X^p)}$ s'étend à la région $\mathcal{D}$ où chaque $|F_r^{(i)}(x)| = 1$.
En prenant $F(X) = {}_2F_1(-2m_r, -n_r; 1 + n_r - 2m_r; X)$ et $s = 0$ dans le Théorème (3.2)(1) ,on trouve que, puisque chaque $|F^{(i)}(-1)| = 1$ et $F^{(i)} = F_r^{(i)}$, on avoir $|F_r^{(i)}(-1)| = 1$, pour tout $i, r \geq 0$, en raison de la dépendance continue du polynôme $F_r^{(i)}$ sur ses paramètres, ceci est également vrai pour $F(X) = {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;X)$. Le rapport peut donc être prolongé jusqu'à la valeur $x = -1$, et la valeur donnée par

$$\mathcal{F}(\alpha,\beta;\gamma;1) = \lim_{r\to+\infty} \frac{{}_2F_1(-2m_r, -n_r; 1 + n_r - m_r; -1)}{{}_2F_1(-2m_{r-1}, -n_{r-1}; 1 + n_{r-1} - m_{r-1}; (-1)^p)}$$

$$= \lim_{r\to+\infty} (-1)^{m_r - m_{r-1}} \frac{\binom{n_r}{m_r}\binom{n_{r-1}}{2m_{r-1}}}{\binom{n_{r-1}}{m_{r-1}}\binom{n_r}{2m_r}}$$

$$= (-1)^a \frac{\Gamma_p(\frac{a}{p-1})\Gamma_p(\frac{b-a}{p-1})}{\Gamma_p(\frac{2a}{p-1})\Gamma_p(\frac{b-2a}{p-1})}.$$

■

Un deuxième analogue p-adique qui peut également être obtenu à partir d'une identité combinatoire est celui du théorème de Saalschütz [16], ce qui donne le valeur à $x = 1$ d'une série saalschtützienne ${}_3F_2$. Ceci et les autres résultats de cette section traitent des valeurs de ${}_3F_2$, au point singulier $x = 1$ l'équation différentielle.

Théorème 3.8 *[16]*
Supposons $0 < a, b, c, d, e \leq p-1$, *avec* $a+b+c = d+e-(p-1)$. *Alors*

$$\mathcal{F}(\frac{a}{p-1}, \frac{b}{p-1}, \frac{c}{p-1}; \frac{d}{p-1}; \frac{e}{p-1}; 1) = \frac{\Gamma_p(\frac{d}{p-1})\Gamma_p(\frac{d-a-b}{p-1})\Gamma_p(\frac{d-a-c}{p-1})\Gamma_p(\frac{d-b-c}{p-1})}{\Gamma_p(\frac{d-a}{p-1})\Gamma_p(\frac{d-b}{p-1})\Gamma_p(\frac{d-c}{p-1})\Gamma_p(\frac{d-a-b-c}{p-1})}.$$

Nous donnons ensuite un analogue p-adique du théorème de Dixon [16] qui donne le valeur à $x = 1$ d'une série ${}_3F_2$ bien - posé.

Théorème 3.9 *[16]*
Supposons $0 < 2a \leq b \leq c < p-1$, *avec* $b+c-a \leq p-1$. *Alors*

$$\mathcal{F}(\frac{2a}{p-1}, \frac{b}{p-1}, \frac{c}{p-1}; 1+\frac{2a-b}{p-1}; 1+\frac{2a-c}{p-1}; 1) = (-1)^a \frac{\Gamma_p(\frac{a}{p-1})\Gamma_p(\frac{b-a}{p-1})\Gamma_p(\frac{c-a}{p-1})\Gamma_p(\frac{b+c-2a}{p-1})}{\Gamma_p(\frac{2a}{p-1})\Gamma_p(\frac{b-2a}{p-1})\Gamma_p(\frac{c-2a}{p-1})\Gamma_p(\frac{b+c-a}{p-1})}.$$

Théorème 3.10 *[16]*
Supposons $2a \leq 2b < 2a+2b \leq p-1$, *et* $2a < 2c \leq p-1$. *Aors*

$$\mathcal{F}(\frac{2a}{p-1}, \frac{2b}{p-1}, \frac{c}{p-1}; \frac{1}{2}+\frac{a+b}{p-1}, \frac{2c}{p-1}; 1) = \frac{\Gamma_p(\frac{1}{2})\Gamma_p(\frac{1}{2}+\frac{c}{p-1})\Gamma_p(\frac{1}{2}+\frac{a+b}{p-1})\Gamma_p(\frac{1}{2}+\frac{c-a-b}{p-1})}{\Gamma_p(\frac{1}{2}+\frac{a}{p-1})\Gamma_p(\frac{1}{2}+\frac{b}{p-1})\Gamma_p(\frac{1}{2}+\frac{c-a}{p-1})\Gamma_p(\frac{1}{2}+\frac{c-b}{p-1})}.$$

3.3 Applications

3.3.1 Les courbes elliptiques et les surfaces

Lors de ses manipulations sur la fonction zêta d'une hypersurface, B.Dwork [7] a évalué la convergence d'un quotient de deux fonctions hypergéométriques au point $x = 1$.
Il est bien connu que les périodes classiques du différentiel, $\omega = dX/2Y$, du

premier type de la courbe elliptique

$$Y^2 = X(X-1)(X-\lambda) \tag{3.7}$$

satisfaite l'équation différentielle hypergéométrique

$$\lambda(1-\lambda)u'' + (1-2\lambda)u' - \frac{1}{4}u = 0. \tag{3.8}$$

on note que modulo p les seules solutions en séries entières de (3.8) sont

$$g(\lambda) = \sum_{j=0}^{(p-1)/2} ((\frac{1}{2})_j/j!)^2 \lambda^j \tag{3.9}$$

Et les produits de g avec les puissance λ^p. (i.e $h(\lambda) = \lambda^p g(\lambda)$)
On sait que

$$F(\lambda) = {}_2F_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} ((\frac{1}{2})_j/j!)^2 \lambda^j \tag{3.10}$$

qui est l'unique solution de (3.8) holomorphe à l'origine.
Dwork a également applique cette technique pour étudier les courbes elliptique données par l'équation :

$$X^3 + Y^3 + Z^3 - 3\lambda XYZ = 0 \tag{3.11}$$

Nous choisissons $(\frac{dX}{2Y}, \frac{\partial}{\partial\lambda}(\frac{dX}{2Y})) = (\omega, \frac{\partial\omega}{\partial\lambda})$ comme base pour les différentiels du second type. Par un calcul bien connu les périodes correspondantes $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ satisfont l'équation différentiel

$$\frac{\partial\omega}{\partial\lambda} = \omega \begin{pmatrix} 0 & 4\lambda(1-\lambda)^{-1} \\ 1 & -(1-2\lambda)/(1-\lambda)\lambda \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

Au voisinage de $\lambda = 0$, avec le cycle de faite est $X = (F, F')$ tel que $F(\lambda) = {}_2F_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; 1)$

On peut voir une application des fonctions hypergéométriques p-adiques sur les surfaces de dégrée 4, qui sont données par l'équation

$$X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 + X_4^4 - 4\lambda X_1 X_2 X_3 X_4 = 0 \tag{3.13}$$

Dwork a prouvé que le système d'équations différentielles pour les vecteurs $(1, 1, 1, 1)$, $(2, 2, 2, 2)$, $(3, 3, 3, 3)$ est donné par

$$\frac{\partial X}{\partial \lambda} = X \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda/16(1-\lambda^4) \\ -4 & 0 & -7\lambda^2/4(1-\lambda^4) \\ 0 & -4 & 6\lambda^3/(1-\lambda^4) \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

Si on pose $X = (X_1, X_2, X_3)$ alors par un calcul élémentaire, X_1 satisfait l'équation différentielle ($t = \lambda^4$)

$$(4t^2(1-t)(\frac{d}{dt})^3 + (9t - 15t^2)(\frac{d}{dt})^2 + (\frac{3}{2} - \frac{31}{4}t)\frac{d}{dt} - \frac{1}{16})X_1 = 0 \tag{3.15}$$

C'est l'équation de la fonction hypergéométrique généralisée ${}_3F_2(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, t)$ et à ∞ l'équation différentielle dans X_1 la solution $\lambda^{-1}F(1/\lambda^4)$, où

$$F(t) = {}_3F_2(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}; 1, 1; t) \tag{3.16}$$

3.3.2 Les nombres d'Apéry

La deuxième application des fonctions hypergéométriques p-adiques consiste a utiliser ce concept pour aboutir à quelques congruances pour les nombres d'Apéry qui sont définies pour $n \geq 0$ par :

$$a(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2;$$

$$b(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k};$$

$$c(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k};$$

$$d(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^3;$$

$$v(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{2k}{k}.$$

Les nombres d'Apéry $a(n)$, $b(n)$ et $c(n)$ sont apparu dans les démonstrations sur la mesure d'irrationalité de $log2$, et de la fonction zêta $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$. Les nombres d'Apéry $a(n)$, $b(n)$, $d(n)$ et $v(n)$ sont apparu dans les coefficients de la solution de l'opérateur différentiel d'Apéry traité par Dwork [7].
Dans [17], Young a démontré les relations entre les nombres d'Apéry et les fonctions hypergéométriques p-adiques.

Théorème 3.11 *[16]*

1) Si $p \equiv 1$ (mod 4), alors pour $r > 0$,

$$\frac{c((p^r-1)/2)}{c((p^{r-1}-1)/2)} = \mathcal{F}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; -1) \quad (mod \quad p^r\mathbb{Z}_p)$$

2) Si $p \equiv 1$ (mod 4), alors pour $r > 0$,

$$\frac{b((p^r-1)/2)}{b((p^{r-1}-1)/2)} = \mathcal{F}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1; 1) \quad (mod \quad p^r\mathbb{Z}_p)$$

3) *Si $p \equiv 1$ (mod 8), alors pour $r > 0$,*

$$\frac{d((p^r-1)/2)}{d((p^{r-1}-1)/2)} = \mathcal{F}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1; -1) \quad (mod \quad p^r\mathbb{Z}_p)$$

Corollaire 3.2 *[16]*

Pour $M = 2, 3, 4$ notons $\beta_{M,p}$ l'inverse du racine unitaire p-adique du polynôme $P_{M,p}(T) = 1 - (4a^2 - 2p)T + p^2T^2$ quand $p = a^2 + Mb^2$, $a, b \in \mathbb{Z}$, on a :

1) *Si $p \equiv 1$ (mod 4), alors*

$$\alpha_{E,p} = {}_2F_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; -1).$$

2) *Si $p \equiv 1$ (mod 4), alors*

$$\beta_{4,p} = {}_3F_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1; 1).$$

3) *Si $p \equiv 1$ (mod 8), alors*

$$\beta_{2,p} = (-1)^{(p-1/2)}\ {}_3F_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1; -1).$$

4) *Si $p \equiv 1$ (mod 6), alors*

$$\beta_{3,p} = {}_3F_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1; 4).$$

5) *Si p est un nombre premier pour lequel le p ième polynôme de Hecke $H_p(T)$ associée à la forme cuspide $Y(q)$ a une racine unitaire p-adique α_p^{-1}, alors*

$$\alpha_p = {}_4F_3(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1, 1; 1),$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \lambda} = \omega \begin{pmatrix} 0 & 4\lambda(1-\lambda)^{-1} \\ 1 & -(1-2\lambda)/(1-\lambda)\lambda \end{pmatrix}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] **W.W. Bell :** Special Functions for Scientists and Engineers.Dover Publications,Inc 2004

[2] **J.P. Bézevin :** Dynamique des fractions rationnels p-adique.23 mai 2005.

[3] **P. Colmez :** Les nombres p-adiques, notes du cours de M2

[4] **J. Diamond :** The p-adic log gamma function and p-adic Euler constant. Trans. Am. Math. Soc. 1977, 233, 321 – 337.

[5] **B. Diarra :** Analyse p-adique Cours de DEA Algèbre Commutative FAST, Université du Mali, (Décembre 1999-Mars 2000-Décembre 2000).

[6] **B. DWORK :** p-adic cycles, Inst. Haules ikdes Sci. Publ. Math. 37 (1969), 27 – 7115.

[7] **B. DWORK :** On p-adic differential equations, IV, Ann. Sci. École Norm. Sup. 6 (1973), 295 – 315.

[8] **A. Escassut ;** Analytic Element in p-adic Analysis, Wordscientific publiching (1995).

[9] **F.Q. Gouvêa :** p-adic numbers An Introduction (1997).

[10] **J. KAMPÉ DE FÉRIET :** La fonction hypergéométrique, Gauthier-Villars, 1937

[11] **S. Katok :** Real and p-adic analysis, cours notes for math 497 C, Mass-program, fall 2000 (2002).

[12] **N. Koblitz :** p-adic analysis and Zeta function,springer-verlag (1984).

[13] **A.M. ROBERT :** A course in p-adic Analysis, Springer- Verlag, Grad, Text in Math,198(2000).

[14] **W.H. Schikhof :** Ultrametric calculus. An introduction to p-adic analysis. Cambridge University Press (1984).

[15] **L. J. SLATER :** "Generalized Hypergeometric Functions", Cambridge Univ. Press. London/ New York, 1966.

[16] **P. T. Young :** Apéry numbers, Jacobi sums, and special values of generalized p-adic hypergeometric functions, J. Number Theory 41 (1992), 231 – 255.