

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahai - Jijel



Faculté des Sciences Exactes et Informatiques
Département de Mathématiques

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Spécialité : Mathématiques.

Option : Équation aux dérivées partielles et applications.

Thème

Le caractère bien posé pour un problème d'évolution

Présenté par :

- Lahkiri Souad.
- Guerdouh Amina.

Devant le jury :

Président	: Arroud Chems eddine	M.C.B Université de Jijel
Encadreur	: Haddad Tahar	Professeur Université de Jijel.
Examineur	: Zarouk Hassina	M.A.A Université de Jijel

Dédicace

A

Mes parents,

mes frères et mes sœurs,

mon fiancé,

tous mes amis,

à tous ceux qui ont toujours cru à ma réussite...

» L.Souad »

Dédicace

A

*Mes chers parents pour leur soutien et leurs prières,
Mon époux et mon enfant Racim,
Mes souers et mes frères,
Ma grande famille ,
tous ceux qui me sont chers...*

Nous dédions ce modeste travail.

≪ G.Amina ≫

Remerciements

Tout d'abord et avant tout, je remercie *ALLAH* qui m'a donné la force, la volonté, la patience et le courage pour accomplir ce modeste travail.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et gratitude à mon encadreur *Mr Haddad Tahar*, pour avoir accepté de diriger ce travail ainsi que pour ses conseils avec beaucoup de patience et d'encouragements.

Je remercie les membres du jury qui ont accepté de juger mon travail. *Ch. Arroud*, qui me fait l'honneur de présider ce jury. *Z.Hassina*, pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens à remercier tous ceux qui se sont impliqués dans ce travail, directement ou indirectement.

A, TOUS, UN GRAND MERCI.

Table des matières

Introduction	4
1 Concepts de base et résultats préliminaires	6
1.1 Ensembles convexes	6
1.2 Fonctions convexes	7
1.3 Topologie faible	8
1.4 Semi-continuité	8
1.5 Sous-différentiel et cône normal	10
1.6 Fonction indicatrice	12
1.7 Fonction support	13
1.8 Distance de Hausdorff	15
1.9 Multi-applications et continuité	16
1.10 Opérateurs maximaux monotones	16
1.11 Fonctions absolument continues	19
1.12 Inégalités de Grönwall	20
1.13 Quelques résultats de compacité	20
2 Inégalité variationnelle d'évolution	22
2.1 Résultat principal	23
2.2 Résultat d'existence et d'unicité	25
2.3 Exemple	33
3 Application	34
3.1 Circuits électriques non réguliers	35
Conclusion	40
Bibliographie	41

Notations et abréviations

$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
H	espace de Hilbert
Ω	est un domaine de \mathbb{R}^d ($d = 2$ ou 3).
Γ	la frontière de Ω supposée régulière .
$C([0, T], H)$	espace des fonctions continues de $[0, T]$ à valeurs dans H .
$co(A)$	enveloppe convexe d'un sous ensemble A .
$\overline{co}(A)$	enveloppe convexe fermée de A .
$int(A)$	intérieur de A .
$adh(C)$	adhérence d'un ensemble C .
$\iota_C(\cdot)$	la fonction caractéristique d'un ensemble C .
$\nabla f(x_0)$	le gradient de f au point x_0 .
$Div(f)$	la divergence de la fonction f .
ν	La normale unitaire sortante à Γ .
$p.p$	presque par tout.
$\ \cdot\ _{C([0, T], H)}$	La norme de $C([0, T], H)$.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	le produit scalaire de H .
(\cdot, \cdot)	les crochets de dualités.
\rightharpoonup	convergence faible.
$\partial f(x_0)$	le sous différentiel de f au point x_0 .
$N_C(\cdot)$	le cone normal à C .
d_H	la distance de Hausdorff.
$dom f$	domaine effectif de la fonction f .
$D(F)$	domaine effectif de la multi-application F .
$epi f$	epigraphe de f .
$\delta_C(\cdot)$	fonction indicatrice de C .
$P_C(\cdot)$	projection sur l'ensemble C .
B_r/\overline{B}_r	boule ouverte/fermée de rayon r .
$s.c.i$	semi-continue inférieurement.
$L^\infty([0, T], H)$	espace des applications essentiellement bornées définies sur $[0, T]$
$L^2([0, T], H)$	espace des applications essentiellement bornées définies sur $[0, T]$ à valeurs dans H .

Introduction

Ce mémoire est consacré à l'étude des inclusions différentielles associées à des cônes normaux. Ce type de problème a été introduit en 1971 dans un célèbre exposé de J.J.Moreau. En effet, dans [9] ce dernier a introduit et a étudié minutieusement le problème suivant qui est connu sous le nom de processus de rafle :

$$\begin{cases} u'(t) \in -N_{C(t)}(u(t)) & p.p \text{ sur } [0, T], \\ u(0) = u_0 \in C(0), \end{cases}$$

où $N_{C(t)}(u(t))$ dénote le cône normal au sens de l'analyse convexe à l'ensemble convexe $C(t)$ au point $u(t)$.

L'interprétation mécanique de ce problème est comme suit : quand $u(t)$ se trouve à l'intérieur de $C(t)$ le cône normal se réduit à zéro et donc, la vitesse du point est nulle, c-à-d le point ne bouge pas. Par contre, tout contact du point $u(t)$ avec la frontière de l'ensemble $C(t)$ produit un choc qui repousse ce point avec une vitesse opposée à la normale de l'ensemble.

Le processus de rafle intervient dans beaucoup de domaine comme dans l'élastoplasticité, en contrôle optimale, en médecine avec la modélisation de canaux de médicaments, en modélisation de mouvement de foule, circuit électrique non réguliers, etc... .

Récemment, dans [1] les auteurs ont proposé une nouvelle variante du processus de rafle avec des contraintes sur la vitesse :

$$\begin{cases} A_1 u'(t) + A_0 u(t) - f(t) \in -N_{C(t)}(u'(t)) & p.p \text{ sur } [0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

Où $A_0, A_1 : H \rightarrow H$ sont deux opérateurs linéaires bornés. Ils ont montré le caractère bien posé pour cette variante sous la bornitude de C . Des applications sur les circuits électriques non-réguliers ont été fournis. Le cas des contraintes non bornées C a été relaxé dans [2].

Dans ce mémoire, nous allons détailler les résultats prouvés dans [1]. En fait, pour démontrer le caractère bien posé de notre problème nous allons utiliser une discrétisation temporelle combinée avec la construction d'une suite de Cauchy via une interpolation linéaire

qui converge fortement vers une solution unique de (2). Nous rappelons dans le chapitre 1 quelques notations de base, des définitions et des résultats qui sont utilisés dans tout le mémoire. Dans le chapitre 2, le caractère bien-posé de (2) est soigneusement étudié en utilisant une discrétisation temporelle . Enfin, des applications de nos résultats théoriques aux circuits électriques non-réguliers font l'objet de dernier chapitre.

Concepts de base et résultats préliminaires

Dans ce chapitre nous allons introduire tous les résultats et les notions qui nous seront très utiles tout au long de ce mémoire. On commence par quelques notations, puis nous présentons quelques concepts d'analyse convexe et d'analyse fonctionnelle.

1.1 Ensembles convexes

Définition 1.1.1 (Ensembles convexes). Un sous-ensemble C de H est dit convexe si

$$\forall x, y \in C \quad \forall \lambda \in [0, 1] : \lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

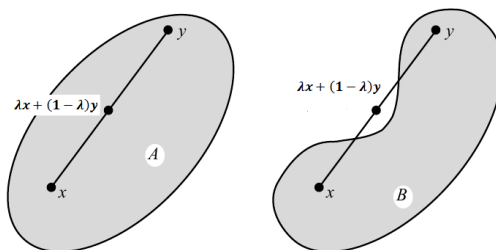


FIGURE 1.1 – A convexe, B non convexe.

Exemple 1.1.1.

1. H et \emptyset sont convexes.
2. Les convexes de \mathbb{R} sont les intervalles de \mathbb{R} .
3. Une boule ouverte ou fermée est convexe.

1.2 Fonctions convexes

Définition 1.2.1 (Domaine effectif). Soient H un espace de Hilbert et une fonction $J : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On appelle domaine effectif de J l'ensemble défini par :

$$\text{dom}J := \{x \in H : J(x) < +\infty\}.$$

Définition 1.2.2 (Fonction propre). La fonction J est dit propre si $\text{dom}f \neq \emptyset$. et $J(x) \neq -\infty, \forall x \in H$.

Définition 1.2.3 (Fonction convexe). On dit qu'une fonction $J : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est convexe si pour tout $x, y \in \text{dom}J$ et pour tout $t \in [0, 1]$ on a :

$$J(tx + (1-t)y) \leq tJ(x) + (1-t)J(y).$$

Exemple 1.2.1. Soient $B : H \rightarrow H$ une application linéaire symétrique et une fonction $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle Bx, x \rangle$ alors :
 B est semi-défini positive si et seulement si f est convexe.

Définition 1.2.4 (Épigraphe). On appelle épigraphe d'une fonction $J : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble défini par :

$$\text{epi}J := \{(x, t) \in H \times \mathbb{R} : J(x) \leq t\}.$$

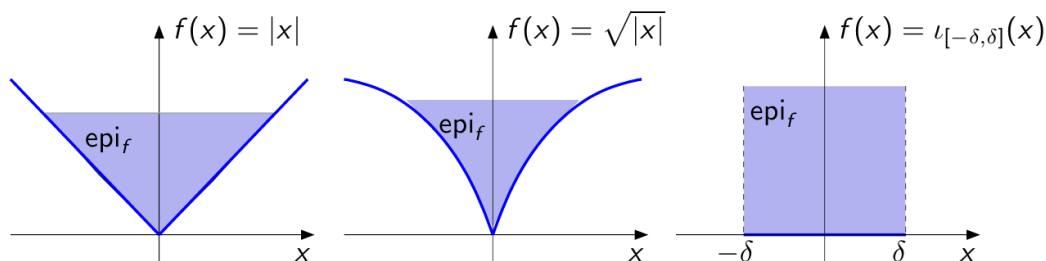


FIGURE 1.2 – Exemples Épigraphe des fonctions usuelles.

propriété 1.2.1.

1. J est convexe si et seulement si son épigraphe est fermé dans $H \times \mathbb{R}$.
2. Si J_1 et J_2 sont des fonctions convexes, alors $J_1 + J_2$ est convexe.
3. $(J_i)_{i \in I}$ est une famille de fonctions convexe alors **l'enveloppe supérieure** des (J_i) est convexe c'est-à-dire la fonction J définie par :

$$J(x) = \sup_{i \in I} J_i(x)$$

est convexe.

1.3 Topologie faible

Soient E un espace de Banach et E' son dual topologique i.e., $E' = \{f : E \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ linéaire continue}\}$ tel que pour tout $f \in E'$,

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |\langle f, x \rangle|.$$

On désigne par $\varphi_f : E \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$. Lorsque f décrit E' on obtient une famille $(\varphi_f)_{f \in E'}$ d'applications de E dans \mathbb{R} .

Définition 1.3.1. La **topologie faible** $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E (avec le minimum d'ouverts) rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f \in E'}$.

Définition 1.3.2. On dit qu'une suite $(x_n)_n$ est convergente vers x pour la topologie faible $(x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x)$ si et seulement si $(f, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (f, x)$, $\forall f \in E'$.

Remarque 1.3.1. Si E est un espace de Hilbert donc on peut identifier E' par E , alors $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \Leftrightarrow \langle y, x_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle y, x \rangle$, $\forall y \in E$.
où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire de E .

Proposition 1.3.1. [5] Tout ensemble borné B dans un espace de Hilbert H est **faiblement relativement compact** i.e. de toute suite $(w_n)_n$ de B , il existe $w \in H$ et une sous-suite extraire $(w_{n_k})_k$ tels que $(w_{n_k})_k$ converge faiblement vers w dans H i.e.
 $\forall \varphi \in H : \langle w_{n_k}, \varphi \rangle \rightarrow \langle w, \varphi \rangle$, quand $k \rightarrow \infty$.

Proposition 1.3.2. [5] Soit C un convexe fermé de E , alors C est faiblement fermé.

1.4 Semi-continuité

Pour une fonction $J : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ nous pouvons définir la semi-continuité.

Définition 1.4.1 (Semi-continuité inférieure). Une fonction $J : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est semi-continue inférieurement sur H (**en abrégé s.c.i**) si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers x , on a :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} J(x_n) \geq J(x)$$

Exemple 1.4.1. Soit $A : H \rightarrow H$ une application linéaire, symétrique et semi-définie positive, alors

la fonction $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle Ax, x \rangle$ est s.c.i sur H .

En effet,

Soit x_n une suite converge vers x dans H alors par la linéarité de A , on a

$$\begin{aligned} f(x - x_n) &= \langle A(x - x_n), x - x_n \rangle \\ &= \langle Ax, x \rangle - \langle Ax, x_n \rangle - \langle Ax_n, x \rangle + \langle Ax_n, x_n \rangle \end{aligned}$$

Par la symétrie de A et du produit scalaire, on a

$$\begin{aligned} f(x - x_n) &= \langle Ax, x \rangle - 2\langle Ax, x_n \rangle + \langle Ax_n, x_n \rangle \\ &= f(x) - 2\langle Ax, x_n \rangle + f(x_n) \end{aligned}$$

Et comme A est semi-définie positive, on déduit que

$$f(x) - 2\langle Ax, x_n \rangle + f(x_n) \geq 0$$

Or

$$2\langle Ax, x_n \rangle - f(x) \leq f(x_n)$$

Il est clair que $\langle Ax, x_n \rangle \rightarrow \langle Ax, x \rangle = f(x)$ quand $n \rightarrow \infty$ (par la continuité du produit scalaire), donc en passant à la limite inférieure, on obtient

$$f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

D'où le résultat.

Remarque 1.4.1.

1. J est s.c.s si $(-J)$ est s.c.i .
2. J est continue si et seulement si J est s.c.s et s.c.i. à la fois.

propriété 1.4.1.

1. J est s.c.i si et seulement si son épigraphe est fermé dans $H \times \mathbb{R}$.
2. Si J_1 et J_2 sont s.c.i alors $J_1 + J_2$ est s.c.i.
3. $(J_i)_{i \in I}$ est une famille de fonctions s.c.i alors **l'enveloppe supérieure** des (J_i) est s.c.i.

Définition 1.4.2. Une fonction $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est faiblement semi-continue inférieurement sur H si pour tout $x_n \rightarrow x$, on a

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \geq f(x).$$

Remarque 1.4.2. Toute fonction faiblement s.c.i alors elle est s.c.i mais la réciproque est n'est pas vraie en générale, elle est juste sous la convexité de la fonction.

Exemple 1.4.2. Soit $A : H \rightarrow H$ une application linéaire, symétrique et semi-définie positive, alors

la fonction $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle Ax, x \rangle$ est faiblement s.c.i sur H .

Théorème 1.4.1. [3] Soit E un espace vectoriel topologique compact et soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction s.c.i, alors f atteint son minimum sur E .

1.5 Sous-différentiel et cône normal

Définition 1.5.1 (Sous-différentiel). Soient H un espace de Hilbert et f une fonction convexe, propre et définie de H à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in \text{dom}(f)$.

Le sous-différentiel de f au point x_0 , noté $\partial f(x_0)$ est le sous-ensemble de H défini par :

$$\partial f(x_0) := \{\xi \in H : f(x) \geq f(x_0) + \langle \xi, x - x_0 \rangle, \forall x \in H\}.$$

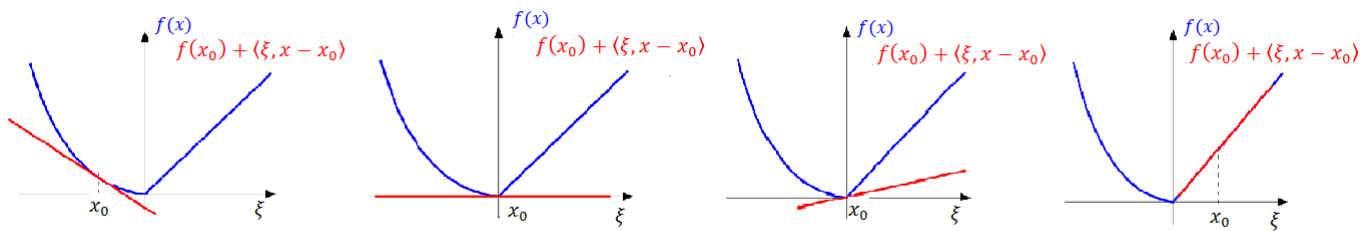


FIGURE 1.3 – Le sous différentiel (animation).

Remarque 1.5.1. Si $x_0 \notin \text{dom}(f)$, alors $\partial f(x_0) = \emptyset$.

Exemple 1.5.1.

Considérons la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = |x|. \end{aligned}$$

$\partial f(0) = [-1, 1]$. En effet,

$$\begin{aligned} \partial f(0) &= \{y \in \mathbb{R} : f(x) \geq f(0) + \langle y, x \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : |x| \geq x \cdot y \quad \forall x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : xy \leq x, \forall x > 0\} \cap \{y \in \mathbb{R} : xy \leq -x, \forall x < 0\} \cap \mathbb{R} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : y \leq 1\} \cap \{y \in \mathbb{R} : y \geq -1\} \cap \mathbb{R} \\ &= [-1, 1]. \end{aligned}$$

Proposition 1.5.1. Si $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et différentiable en x_0 alors $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.

Définition 1.5.2 (Cône). Un sous-ensemble $C \subset H$ est un cône si

$$\forall x \in C, \forall \lambda \geq 0, \quad \lambda x \in C.$$

Définition 1.5.3 (Cône normal). Soit $C \subset H$ un sous-ensemble convexe et $x_0 \in C$. On appelle cône normal de C au point x_0 l'ensemble noté $N_C(x_0)$ défini par :

$$N_C(x_0) = \{\xi \in H : \langle \xi, x - x_0 \rangle \leq 0, \quad \forall x \in C\}.$$

On vérifie aisément que $N_C(x_0)$ est un cône convexe et fermé et que $\{0\} \in N_C(x_0)$.

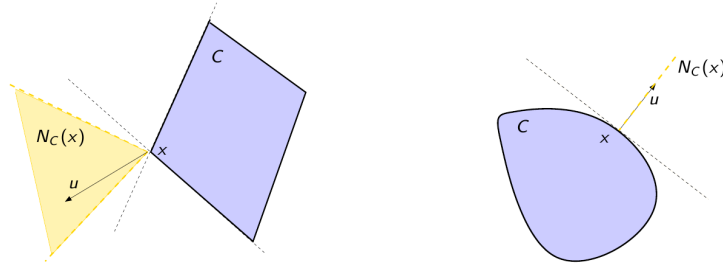


FIGURE 1.4 – Exemple de Cônes normaux.

Théorème 1.5.1. Soit E un espace vectoriel normé, $C \subset E$ un sous-ensemble convexe tel que $\text{int}(C) \neq \emptyset$. Alors si $x \in \text{int}(C)$, on a $N_C(x) = \{0\}$.

Preuve. Soit $v \in N_C(x) \implies v = 0$?

$$x \in \text{int}(C) \implies \exists \delta > 0 \quad x + \delta B(0, 1) \subset C,$$

$$\langle v, x + \delta e - x \rangle \leq 0 \quad \forall e \in B(0, 1),$$

$$\langle v, \delta e \rangle \leq 0 \quad \forall e \in B(0, 1),$$

$$\langle v, e \rangle \leq 0 \quad \forall e \in B(0, 1).$$

Soit $r > 0$ suffisamment petit telle que $rv \in B(0, 1)$

$$\langle v, rv \rangle \leq 0 \implies r \|v\|^2 \leq 0,$$

$$\implies \|v\| = 0 \implies v = 0.$$

□

Proposition 1.5.2. Soit C un sous-ensemble convexe de H et $x, y \in H$ tel que $x + y \in C$, $-x \in C$ alors :

$$1) N_C(x + y) = N_{C-y}(x).$$

$$2) N_C(-x) = -N_{-C}(x).$$

Preuve.

$$1) \text{ soit } z \in N_C(x + y) \iff \langle z, w - x - y \rangle \leq 0 \quad \forall w \in C,$$

$$\iff \langle z, (w - y) - x \rangle \leq 0 \quad \forall w \in C,$$

$$\iff z \in N_{C-y}(x).$$

$$\begin{aligned}
2) \text{ soit } z \in N_C(-x) &\iff \langle z, w+x \rangle \leq 0 \quad \forall w \in C, \\
&\iff \langle -z, -w-x \rangle \leq 0 \quad \forall w \in C, \\
&\iff -z \in N_{-C}(x).
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

1.6 Fonction indicatrice

Définition 1.6.1. Soit C un sous-ensemble non vide de H , la fonction indicatrice associée à C est définie par :

$$\begin{aligned}
\delta_C(\cdot) : H &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\
x &\longmapsto \delta_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C, \\ +\infty & \text{si } x \notin C. \end{cases}
\end{aligned}$$

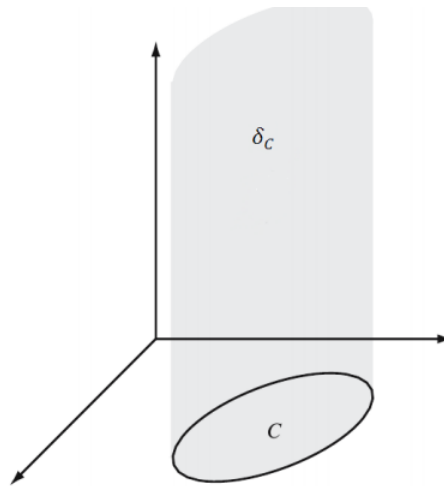


FIGURE 1.5 – Fonction indicatrice.

Remarque 1.6.1.

1. $\text{dom}(\delta_C) = C$ et $\text{epi}(\delta_C) = C \times [0, +\infty]$.
2. La fonction $\delta_C(\cdot)$ est convexe si et seulement si C est convexe de H .
3. La fonction $\delta_C(\cdot)$ est s.c.i si et seulement si C est fermé dans H .

Proposition 1.6.1. Soit C un sous-ensemble non vide et convexe de H , et $x_0 \in H$, alors

$$\partial\delta_C(x_0) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x_0 \notin C. \\ N_C(x_0) & \text{si } x_0 \in C. \end{cases}$$

Preuve. .

* Si $x_0 \notin C$, on a évidemment que $\partial\delta_C(x_0) = \emptyset$.

* Si $x_0 \in C$, on va montrer que $\partial\delta_C(x_0) = N_C(x_0)$.

Soit $\xi \in \partial\delta_C(x_0)$, alors

$$\langle \xi, x - x_0 \rangle \leq \delta_C(x) - \delta_C(x_0), \quad \forall x \in H.$$

En particulier pour $x \in C$ on a

$$\langle \xi, x - x_0 \rangle \leq 0, \quad \forall x \in C.$$

Or $\xi \in N_C(x_0)$.

Inversement, si $\xi \in N_C(x_0)$ alors

$$\langle \xi, x - x_0 \rangle \leq 0, \quad \forall x \in C$$

Or $\langle \xi, x - x_0 \rangle \leq \delta_C(x) - \delta_C(x_0)$, $\forall x \in C$.

De plus $\langle \xi, x - x_0 \rangle \leq \delta_C(x) - \delta_C(x_0)$, $\forall x \in H$ (puisque $\delta_C(x) = +\infty$, si $x \notin C$), donc $\xi \in \partial\delta_C(x_0)$.

D'où le résultat. □

1.7 Fonction support

Définition 1.7.1. On appelle fonction support de $C \subset H$ qu'on note $\sigma(C, \cdot)$ la fonction définie sur H par :

$$\begin{aligned} \sigma(C, \cdot) : H &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ \xi &\longmapsto \sigma(C, \xi) = \sup_{x \in C} \langle \xi, x \rangle. \end{aligned}$$

Le domaine de $\sigma(C, \cdot)$ est appelé le **cône barrière** de C et souvent désigné par $b(C) := \text{dom}(\sigma(C, \cdot))$.

Exemple 1.7.1.

1. Si $C = \{x\}$, alors $\sigma(C, \xi) = \langle \xi, x \rangle$.
2. Si $C = \mathbb{B}$, alors $\sigma(C, \xi) = \|\xi\|$.
3. Si C est un cône, alors $\sigma(C, \xi) = \delta_C(\xi)$ et $b(C) = C^-$.
4. Si C est un sous-espace vectoriel, alors $\sigma(C, \xi) = \delta_{C^\perp}(\xi)$ et $b(C) = C^\perp$.

Proposition 1.7.1.

1. Pour tout $C \subset H$ non vide la fonction support est sous-additive, positivement homogène (i.e. $\sigma(C, \xi_1 + \xi_2) \leq \sigma(C, \xi_1) + \sigma(C, \xi_2)$ et $\sigma(C, \lambda\xi) = \lambda\sigma(C, \xi) \forall \lambda > 0$).
2. Pour tout $C_1, C_2 \subset H$, et $\xi \in H$, nous avons : $\sigma(C_1 + C_2, \xi) = \sigma(C_1, \xi) + \sigma(C_2, \xi)$ et $\sigma(C_1 \cup C_2, \xi) = \max(\sigma(C_1, \xi), \sigma(C_2, \xi))$.

Remarque 1.7.1. soit C un ensemble **non vide** de H :

$$1. \delta_C^*(y) = \sup_{x \in H} \{\langle y, x \rangle - \delta_C(x)\} = \sup_{x \in C} \langle y, x \rangle = \sigma_C(y), \quad \forall y \in H.$$

Donc la fonction support est la conjuguée de l'indicatrice.

2. D'après la proposition précédente la fonction support $\sigma(C, \cdot)$ est convexe sur H même si l'ensemble C n'est pas convexe de H .

3. La fonction support est propre et s.c.i même si l'ensemble C n'est pas fermé de H .

Proposition 1.7.2. Soit C un sous-ensemble non vide et convexe de H et x un élément de C , alors

$$\xi \in N_C(x) \Leftrightarrow \sigma(C, \xi) = \langle \xi, x \rangle.$$

Preuve. Soit $y \in C$, alors

$$\begin{aligned} \xi \in N_C(x) &\Leftrightarrow \langle \xi, y - x \rangle \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \langle \xi, y \rangle \leq \langle \xi, x \rangle. \end{aligned}$$

En appliquant le sup sur y on obtient :

$$\xi \in N_C(x) \Leftrightarrow \sigma(C, \xi) \leq \langle \xi, x \rangle.$$

Comme $x \in C$, on a $\sigma(C, \xi) \geq \langle \xi, x \rangle$, alors

$$\xi \in N_C(x) \Leftrightarrow \sigma(C, \xi) = \langle \xi, x \rangle.$$

D'où le résultat. □

Lemme 1.7.1. Soient C_1 et C_2 deux sous-ensembles d'un espace de Hilbert H , et $z \in H$. Supposons que $d = d_H(C_1, C_2) < +\infty$ (c'est-à-dire C_1 et C_2 ne sont pas vides), alors nous avons

$$|\sigma(C_1, z) - \sigma(C_2, z)| \leq \|z\| d_H(C_1, C_2). \quad (1.1)$$

Preuve. D'après la définition de Distance de Hausdorff on a

$$\sup_{x \in C_1} d_{C_2}(x) \leq d = d_H(C_1, C_2).$$

Par conséquent, $C_1 \subset C_2 + d\bar{B}$. D'autre part, nous avons :

$$\sigma(C_1, z) = \sup_{x \in C_1} \langle z, x \rangle \leq \sup_{x \in C_2 + d\bar{B}} \langle z, x \rangle = \sup_{x \in C_2} \langle z, x \rangle + d \sup_{x \in \bar{B}} \langle z, x \rangle = \sigma(C_2, z) + d\|z\|.$$

Donc,

$$\sigma(C_1, z) - \sigma(C_2, z) \leq \|z\| d_H(C_1, C_2).$$

Puisque C_1 et C_2 jouent un rôle symétrique,

on obtient (1.1)

□

1.8 Distance de Hausdorff

Définition 1.8.1 (Fonction distance). Soit $C \subset H$ une partie non vide.

La fonction distance associée à C est définie par : $d_C(x) := \inf_{y \in C} \|x - y\|$.

Proposition 1.8.1. Soit $C \subset H$ une partie non vide, alors

1. $d_C(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \text{adh}(C)$.
2. La fonction distance est continûment Lipschitzienne de rapport égale à 1.

Définition 1.8.2 (Distance de Hausdorff). Soient H un espace de Hilbert, C_1 et C_2 deux sous-ensembles fermés non vide de H . On appelle distance de Hausdorff entre C_1 et C_2 la fonction numérique $d_H(\cdot, \cdot)$ définie par :

$$\begin{aligned} d_H(C_1, C_2) &:= \sup_{y \in H} |d_{C_1}(y) - d_{C_2}(y)| \\ &:= \max(\sup_{x \in C_2} d_{C_1}(x), \sup_{x \in C_1} d_{C_2}(x)). \end{aligned}$$

Proposition 1.8.2. Soient $C_1, C_2 \subset H$ deux sous-ensembles non vide et fermés de H alors : $d_H(C_1, C_2) \leq \varepsilon \Leftrightarrow C_1 \subset C_2 + \varepsilon\mathbb{B}$ et $C_2 \subset C_1 + \varepsilon\mathbb{B}$, $\varepsilon > 0$.

Preuve. Supposons que $d_H(C_1, C_2) \leq \varepsilon$, donc d'après la définition précédente, nous avons

$$|d_{C_1}(y) - d_{C_2}(y)| \leq d_H(C_1, C_2) \leq \varepsilon, \quad \forall y \in H. \quad (1.2)$$

Soit $y \in C_1$, comme ce dernier est un fermé de H , alors de (1.2) on a :

$$d_{C_2}(y) \leq \varepsilon. \quad (1.3)$$

soit $z \in C_2$ une projection de y sur C_2 (puisque C_2 est un fermé de H de plus cette projection n'est pas unique), alors de (1.3) on a :

$$\|y - z\| := d_{C_2}(y) \leq \varepsilon.$$

Or $y - z \in \varepsilon\mathbb{B}$ i.e. $y \in C_2 + \varepsilon\mathbb{B}$.

D'où $C_1 \subset C_2 + \varepsilon\mathbb{B}$, et de même façon on trouve que $C_2 \subset C_1 + \varepsilon\mathbb{B}$.

Inversement, supposons que $C_1 \subset C_2 + \varepsilon\mathbb{B}$ et $C_2 \subset C_1 + \varepsilon\mathbb{B}$, $\varepsilon > 0$.

Soit $x \in C_1$, alors $x = z + e$, $e \in \varepsilon\mathbb{B}$ et

$$\begin{aligned} d_{C_2}(x) &\leq \|z - x\| = \|e\| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Or $\sup_{x \in C_1} d_{C_2}(x) \leq \varepsilon$, et de même façon on trouve que $\sup_{x \in C_2} d_{C_1}(x) \leq \varepsilon$.

Et par suite $d_H(C_1, C_2) \leq \varepsilon$. □

1.9 Multi-applications et continuité

Définition 1.9.1. Soient X et Y deux ensembles non vides. On appelle Multi-application (ou fonction multivoque) de X dans Y toute application T de X dans $\mathcal{P}(Y)$ (ensembles des parties de Y) et on note $T : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ ou $T : X \rightrightarrows Y$. Alors $\forall x \in X : T(x) \subset Y$ est un sous-ensemble de Y .

Définition 1.9.2. On appelle domaine (effectif) de T qu'on le note $D(T)$ le sous-ensemble de X défini par :

$$D(T) = \{x \in X : T(x) \neq \emptyset\}.$$

Et l'image de T noté $R(T)$ le sous-ensemble de Y défini par :

$$R(T) = \{y \in Y / \exists x \in X : y \in T(x)\} = \bigcup_{x \in D(T)} T(x).$$

Définition 1.9.3. On appelle graphe de T et on le note $\text{gph}(T)$ le sous-ensemble de $X \times Y$ défini par :

$$\text{gph}(T) = \{(x, y) \in X \times Y : x \in D(T), y \in T(x)\}.$$

Remarque 1.9.1.

1. Si l'ensemble $T(x)$ contient au plus un élément on dira que T est univoque .
2. T^{-1} est la Multi-application dont le graphe est symétrique de celui de T i.e. $y \in T^{-1}(x) \Leftrightarrow x \in T(y)$, on a évidemment $D(T^{-1}) = R(T)$.
3. L'ensemble des Multi-applications est ordonné par l'inclusion des graphes : $T_1 \subset T_2 \Leftrightarrow$ pour tout $x \in X$, $T_1(x) \subset T_2(x)$.

1.10 Opérateurs maximaux monotones

Notion d'opérateur monotone

Définition 1.10.1 (Opérateur monotone). L'opérateur $T : H \rightrightarrows H$ est dit monotone si

$$\forall u, v \in D(T) \quad \forall u_1 \in T(u), \forall v_1 \in T(v), \quad \langle v_1 - u_1, v - u \rangle \geq 0.$$

Proposition 1.10.1. Soit f une fonction convexe propre sur H . Alors le sous-différentiel de f est un opérateur monotone.

Preuve. :

∂f est monotone $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D(\partial f), \forall y_1 \in \partial f(x_1), \forall y_2 \in \partial f(x_2), \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0$.

Soient $x_1, x_2 \in D(\partial f)$ et $y_1 \in \partial f(x_1), y_2 \in \partial f(x_2)$.

$$y_1 \in \partial f(x_1) \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_1) + \langle y_1, x - x_1 \rangle, \quad \forall x \in H, \quad (1.4)$$

$$y_2 \in \partial f(x_2) \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_2) + \langle y_2, x - x_2 \rangle, \quad \forall x \in H, \quad (1.5)$$

on a en particulier pour $x = x_2$ dans (1.4) et pour $x = x_1$ dans (1.5), $f(x_2) \geq f(x_1) + \langle y_1, x_2 - x_1 \rangle$ et $f(x_1) \geq f(x_2) + \langle y_2, x_1 - x_2 \rangle$, par addition

$$\langle y_1, x_2 - x_1 \rangle + \langle y_2, x_1 - x_2 \rangle \leq 0, \text{ donc } \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

D'où la monotonie de ∂f . □

Remarque 1.10.1. *Si T_1 et T_2 sont des opérateurs monotones, alors $T_1 + T_2$ est un opérateur monotone .*

Notion d'opérateur maximale monotone

L'ensemble des opérateurs monotones de H est inductif pour l'inclusion des graphes se qui justifie la définition suivante :

Définition 1.10.2 (Opérateur maximal monotone). *Un opérateur $T : H \rightrightarrows H$ est dit maximal monotone s'il est monotone et s'il n'existe pas d'opérateur monotone $G : H \rightrightarrows H$ tel que $\text{gph}(T) \subset \text{gph}(G)$.*

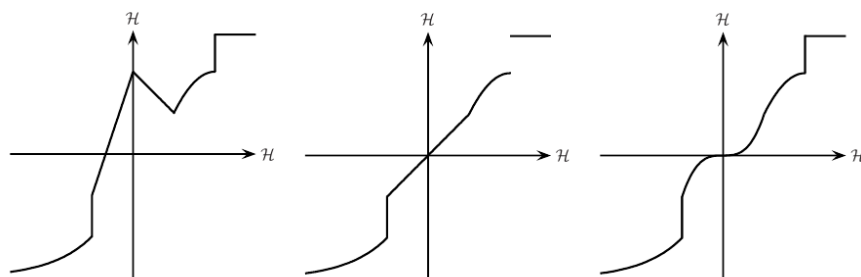


FIGURE 1.6 – Graphe d'un opérateur non monotone (à gauche) et version monotone (en centre) et version maximale monotone (à droite).

Proposition 1.10.2. [6] *Soit un opérateur $T : H \rightrightarrows H$. Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :*

1. T est maximal monotone.
2. T est monotone et $R(I + T) = H$.

Exemple 1.10.1. *Soit $T : H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone de H , les opérateurs T^{-1} et λT pour $\lambda > 0$ sont maximaux monotones.*

Corollaire 1.10.1. [7] *Soit $T : H \rightarrow H$ un opérateur monotone et continu. Alors T est maximal monotone.*

Proposition 1.10.3. [6] *Soit f une fonction convexe propre sur H . Si f est semi-continue inférieurement alors le sous-différentiel de f est maximal monotone.*

Pour la démonstration on a besoin du lemme suivant :

Lemme 1.10.1. [6] Soit f une fonction convexe propre sur H et $\alpha \geq 0$. La fonction convexe $x \mapsto f(x) + \frac{\alpha}{2} \|x - y\|^2$ atteint son minimum en x_0 si et seulement si $\alpha(y - x_0) \in \partial f(x_0)$

Revenons maintenant à la preuve de la proposition 1.10.3.

Preuve. :

On sait déjà d'après la Proposition 1.10.1 que ∂f est monotone, donc il reste à démontrer que $R(I + \partial f) = H$. Il est clair que $R(I + \partial f) \subset H$. Montrons que $H \subset R(I + \partial f)$.

Soit $y \in H$, donc $y \in R(I + \partial f) \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} y \in \bigcup_{x \in D(I + \partial f)} (I + \partial f)(x) &\Leftrightarrow \exists x_0 \in D(I + \partial f) \text{ tel que : } y \in (I + \partial f)(x_0), \\ &\Leftrightarrow \exists x_0 \in D(I + \partial f) \text{ tel que : } y \in x_0 + \partial f(x_0). \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto f(x) + \frac{1}{2} \|x - y\|^2$ est convexe s.c.i et tend vers $+\infty$ lorsque $\|x\| \mapsto +\infty$, donc d'après le Théorème 1.13.1 elle atteint son minimum en $x_0 \in H$ ce qui implique d'après le Lemme 1.10.1 que $y \in x_0 + \partial f(x_0)$. D'où ∂f est maximal monotone d'après la Proposition 1.10.2. \square

Remarque 1.10.2. D'après la proposition précédente (et la remarque 1.6.1), on peut dire que : si C est un sous-ensemble non vide, convexe et fermé de H alors le cône normale de C est un opérateur maximal monotone.

Surjectivité et somme d'opérateurs maximaux monotones

T étant un opérateur maximal monotone, on peut trouver facilement des conditions suffisantes pour que T soit surjectif.

Définition 1.10.3 (Opérateur coercif). On dit que un opérateur $T : H \rightrightarrows H$ est coercif si pour tout $(x_n, y_n) \in \text{gph}(T)$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = +\infty$, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\langle x_n - x_0, y_n \rangle}{\|x_n\|} = +\infty, \quad \forall x_0 \in H. \quad (1.6)$$

Autrement dit, T est coercif s'il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\langle Tx, x \rangle \geq \beta \|x\|^2, \quad \forall x \in H.$$

Corollaire 1.10.2. [6] Soit T un opérateur maximal monotone avec $D(T)$ borné, alors T est surjectif.

Étant donnés A et B maximaux monotones, l'opérateur $A + B$ est monotone mais, en générale, il n'est pas maximal monotone (puisque son domaine peut être vide).

Corollaire 1.10.3. [6] Soient $A, B : H \rightrightarrows H$ deux opérateurs maximaux monotones. si $(D(B) \cap \text{int}(D(A))) \neq \emptyset$, alors $A + B$ est maximal monotone.

1.11 Fonctions absolument continues

Définition 1.11.1. On dit qu'une fonction v de $[0, T]$ dans H est absolument continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute suite d'intervalle $I_n =]\alpha_n, \beta_n[$ deux à deux disjointes vérifiant $\sum_n |\alpha_n - \beta_n| \leq \eta$, on ait $\sum_n \|v(\alpha_n) - v(\beta_n)\| \leq \varepsilon$.

Théorème 1.11.1. Une fonction $v : [0, T] \rightarrow H$ est absolument continue si et seulement si elle est intégrale de sa dérivée, c'est à dire :

$$v(t) - v(0) = \int_0^t v'(s) ds \quad , \forall t \in]0, T[.$$

On voit bien qu'une fonction absolument continue est continue par contre la réciproque est fausse.

Remarque 1.11.1.

1. Toute fonction lipschitzienne est absolument continue.
2. Toute fonction absolument continue est dérivable p.p.

Lemme 1.11.1. Soit $u : [0, T] \rightarrow H$ une fonction continue telle que $u'(t) \in H$, et soit B un opérateur linéaire, borné et symétrique sur H , alors

$$\frac{d}{dt} \langle Bu(t), u(t) \rangle = 2 \langle u'(t), Bu(t) \rangle, \quad \text{p.p } t \in [0, T].$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle Bu(t), u(t) \rangle &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\langle Bu(t+h), u(t+h) \rangle - \langle Bu(t), u(t) \rangle) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\langle B(u(t+h) + u(t) - u(t)), u(t+h) \rangle - \langle Bu(t), u(t) \rangle) \end{aligned}$$

Par la linéarité de B :

$$\frac{d}{dt} \langle Bu(t), u(t) \rangle = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \langle B(u(t+h) - u(t)), u(t+h) \rangle + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\langle Bu(t), u(t+h) \rangle - \langle Bu(t), u(t) \rangle)$$

Par la continuité de B, u et du produit scalaire, on a

$$\frac{d}{dt} \langle Bu(t), u(t) \rangle = \langle Bu(t)', u(t) \rangle + \langle Bu(t), u(t)' \rangle$$

La symétrie de B et du produit scalaire donne :

$$\frac{d}{dt} \langle Bu(t), u(t) \rangle = 2 \langle u(t)', Bu(t) \rangle.$$

□

1.12 Inégalités de Grönwall

Lemme 1.12.1 (version discret). Soit $\alpha > 0$ et $(u_n), (\beta_n)$ sont suites non négatives satisfaites :

$$u_n \leq \alpha + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k u_k, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \text{ (avec } \beta_{-1} := 0 \text{)}.$$

Alors, pour tout n , nous avons

$$u_n \leq \alpha \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} \beta_k\right).$$

Lemme 1.12.2 (version continue). Soit $T > 0$ et $a(\cdot), b(\cdot) \in L^1([0, T]; \mathbb{R})$ avec $b(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$. soit $w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction absolument continue satisfaite :

$$(1 - \alpha)w'(t) \leq a(t)w(t) + b(t)w^\alpha(t), \quad p.p. t \in [0, T].$$

Où $0 \leq \alpha < 1$. alors pour tout $t \in [0, T]$, on a :

$$w^{1-\alpha}(t) \leq w^{1-\alpha}(0) \exp\left(\int_0^t a(\tau) d\tau\right) + \int_0^t \exp\left(\int_s^t a(\tau) d\tau\right) b(s) ds.$$

1.13 Quelques résultats de compacité

Définition 1.13.1 (Variation d'une fonction). La variation d'une fonction $u : [0, T] \rightarrow H$ notée $\text{var}(u)$ ou $\text{var}(u, [0, T])$ est définie par

$$\text{var}(u) = \sup_n \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \|u(t_{i+1}) - u(t_i)\|, n \in \mathbb{N} \right\},$$

où $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < x_n = T$ est une partition de $[0, T]$.

On dit que u est à variation bornée, si $\text{var}(u) < \infty$.

Exemple 1.13.1. [8, p.6]

- Toute fonction $u : [0, T] \rightarrow H$ lipschitzienne est à variation bornée.
- Toute fonction $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ croissante est à variation bornée.

Théorème 1.13.1 (Compacité). [8, p.7] Soient H un espace de Hilbert et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions, $u_n : [0, T] \rightarrow H$ uniformément bornées en norme et en variation i.e.

$$\|u_n(t)\| \leq M_1, \quad n \in \mathbb{N}, t \in [0, T] \quad \text{et} \quad \text{var}(u_n) \leq M_2, \quad n \in \mathbb{N},$$

pour toute $M_1, M_2 > 0$ indépendantes de n et $t \in [0, T]$. Alors il existe une sous suite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ et une fonction $u : [0, T] \rightarrow H$ tels que

$$\text{var}(u) \leq M_2,$$

et

$$u_{n_k}(t) \rightharpoonup u(t) \text{ dans } H \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{dans } H.$$

Lemme 1.13.1. [8, p.7] Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de H faiblement convergente vers u dans H , alors

1. $\|u\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|$.
2. Si $u_n \in C + \bar{B}(0, \varepsilon_n)$ pour tout $C \subset H$ convexe fermé et $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{R}_+^* telle que $\varepsilon_n \rightarrow 0$, alors $u \in C$.

Lemme 1.13.2. [8, p.8] Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions, $u_n : [0, T] \rightarrow H$ telle que $u_n \xrightarrow{*} u_*$ dans $L^\infty([0, T]; H)$, i.e.

$$\int_0^T \langle u_n(t), \varphi(t) \rangle dt \longrightarrow \int_0^T \langle u_*(t), \varphi(t) \rangle dt, \quad n \rightarrow \infty \quad \forall \varphi \in L^1([0, T]; H).$$

Supposons que

1. $C(t) \subset H$ est convexe fermé $\forall t \in [0, T]$,
2. $C(\cdot)$ est L -lipschitzienne sur $[0, T]$.

Soit

$$\phi(u) = \int_0^T \sigma(u(t), C(t)), dt \quad \text{pour } u \in L^\infty([0, T]; H).$$

Alors ϕ est semi-continue inférieurement, i.e., $\phi(u_*) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \phi(u_n)$.

Lemme 1.13.3. [10] Soit $u : [0, T] \rightarrow H$ une fonction absolument continue. Alors

$$(a) \quad \int_0^T \langle u'(t), u(t) \rangle dt = \frac{1}{2} \|u(T)\|^2 - \frac{1}{2} \|u(0)\|^2.$$

$$(b) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 \right) = \langle u'(t), u(t) \rangle = \|u(t)\|^2.$$

Inégalité variationnelle d'évolution

Introduction

La formulation mathématique du processus de rafle (sweeping process) introduit par J.J. Moreau est donnée par :

$$\begin{cases} u'(t) \in -N_{C(t)}(u(t)) & p.p \text{ sur } [0, T], \\ u(0) = u_0 \in C(0), \end{cases} \quad (2.1)$$

où $N_{C(t)}$ désigne le cône normal associé à l'ensemble fermé et convexe $C(t)$ dans un espace de Hilbert H .

Dans [1], les auteurs ont étudié le nouveau modèle suivant :

$$\begin{cases} A_1 u'(t) + A_0 u(t) - f(t) \in -N_{C(t)}(u'(t)) & p.p \text{ sur } [0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

où $C(\cdot)$ est un ensemble mobile borné, $A_0, A_1 : H \rightarrow H$ sont deux opérateurs bornés, symétriques, linéaires et monotones et $f : [0, T] \rightarrow H$ est une fonction continue.

Dans ce mémoire, nous détailler la méthode utilisé dans [1] .

Notre objectif est de Trouver $u : [0, T] \rightarrow H$ vérifiant :

$$\begin{cases} A_1 u'(t) + A_0 u(t) - f(t) \in -N_{C(t)}(u'(t)) & p.p \text{ sur } [0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (2.3)$$

sous les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1 : $\mathcal{A}_i : H \rightarrow H$ sont des opérateurs linéaires bornés, symétriques et semi-définis positifs (i.e. ; $\langle \mathcal{A}_i x, x \rangle \geq 0, \forall x \in H$ pour $i = \overline{0, 1}$).

Hypothèse 2 : pour chaque $t \in [0, T] : C(t) \neq \emptyset$ est un ensemble convexe fermé, $C(0) \subset R\overline{B}$ avec une constante positive $R > 0$, et $t \mapsto C(t)$ est L Lipschitzienne .en ce sens qu'il existe une fonction continue $u(\cdot)$ non décroissante $:[0, T] \rightarrow H$ avec $u(0) = 0$ et tel que

$|d(y, C(t)) - d(y, C(s))| \leq |v(s) - v(t)|$ pour tout $y \in H$ et $s, t \in [0, T]$.

Hypothèse 3 : $f : [0, T] \rightarrow H$ est une fonction continue tel que : $\|f(t)\| \leq \beta$.

Remarque :

- Dans **hypothèse 2** supposons que au moins $C(0)$ borné (donc $C(t)$ est borné)

Cette hypothèse est indispensable dans notre travail.

- Nous devons être prudent avec une telle variante ! . En effet, même dans le cas simple où \mathcal{A}_0 et \mathcal{A}_1 sont les opérateurs nuls, le système (2.2) se réduit à :

$$f(t) \in N_{C(t)}(u'(t)) \quad \text{avec} \quad u(0) = u_0. \quad (2.4)$$

(2.4) n'a pas toujours de solutions

En effet , l'exemple suivante montre la nécessité de la bornétude :

• **Exemple :** $C(t) = [t, +\infty[\subset \mathbb{R}$ et $f(t) = 1$, alors (2.4) n'a pas de solution dans $[0, T]$.

2.1 Résultat principal

Tout d'abord, qu'est-ce qu'on entend par solution du problème non linéaire (2.2) ?

Définition 2.1.1. Une fonction $u : [0, T] \rightarrow H$ est une solution de (2.2), si les conditions suivantes sont vérifiées :

- 1) $u(0) = u_0$.
- 2) $u(\cdot)$ est différentiable presque partout sur $]0, T[$.
- 3) $u'(t) \in C(t)$ p.p sur $[0, T]$.
- 4) $A_1 u'(t) + A_0 u(t) - f(t) \in -N_{C(t)}(u'(t))$ p.p sur $[0, T]$.

Lemme 2.1.1. Si les hypothèses 1, 2 et 3 sont satisfaites alors pour toute condition initiale $u_0 \in H$ le problème (2.2) admet une seule solution continûment lipschitzienne .

Avant montré notre résultat principale , nous allons montrer le caractère bien défini de l'algorithme .

Proposition 2.1.1. si les hypothèses 1, 2 et 3 sont satisfaites alors l'algorithme suivante est bien posé .

Algorithme :

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère la partition suivante de l'intervalle $I := [0, T]$

$$\mu_n = \frac{T}{n} \quad 0 \leq i \leq n \quad t_{i+1}^n := t_i^n + \mu_n$$

$$I_i^n :=]t_i^n, t_{i+1}^n], \quad 0 \leq i \leq n - 1$$

$$\begin{cases} u_n(t_i^n) := u_i^n \\ u_n(t_{i+1}^n) := u_{i+1}^n \\ f_{i+1}^n := f_n(t) \end{cases}$$

D'après le développement de Taylor on a :

on pose $z_{i+1}^n \in C(t_{i+1}^n)$ tel que : $u_{i+1}^n := u_i^n + \mu_n z_{i+1}^n$

$$z_{i+1}^n = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\mu_n}$$

Alors

$$A_1 z_{i+1}^n + A_0 u_{i+1}^n - f_{i+1}^n \in -N_{t_{i+1}^n}(z_{i+1}^n) \quad \Rightarrow \quad A_1 z_{i+1}^n + A_0 u_i^n + A_0 \mu_n z_{i+1}^n - f_{i+1}^n \in -N_C(t_{i+1}^n)(z_{i+1}^n)$$

Donc,

$$-A_0 u_i^n + f_{i+1}^n \in (N_C(t_{i+1}^n) + A_1 + A_0 \mu_n)(z_{i+1}^n)$$

Maintenant nous montrons que $(N_C(t_{i+1}^n) + A_1 + A_0 \mu_n)$ est surjective c'est à dire $(N_C(t_{i+1}^n) + A_1 + A_0 \mu_n)$ est maximale monotone avec $C(t)$ borné

preuve : a) $(N_C(t_{i+1}^n) + A_1 + A_0 \mu_n)$ maximale monotone ?

D'après **hypothèses 1** et le corollaire (1.10.1) on a $(A_1 + A_0 \mu_n)$ est maximale monotone et on a d'après la proposition(1.6.1) et la remarque (1.6.1) $\partial \delta_C(x.)$ est convexe et s.c.i, (1.10.3) implique que $(N_{C(\cdot)})$ est maximale monotone .

$$(int(H) \cap D(N_C)) = H \cap C(\cdot) = C(\cdot) \neq \emptyset,$$

Donc d'après le corollaire 1.10.3, on déduit que $(N_C(t_{i+1}^n) + A_1 + A_0 \mu_n)$ est un opérateur maximal monotone.

b) $C(t)$ borné ?

D'après **hypothèses 2** on a $C(0) \subset R\mathbb{B}_H$ et $|d(y, C(t)) - d(y, C(s))| \leq |v(s) - v(t)|$ pour tout $y \in H$ et $s, t \in [0, T]$.

pour $y \in C(s)$ on obtient : $d_H(C(s), C(t)) \leq |v(s) - v(t)|$ pour tout $y \in H$ et $s, t \in [0, T]$

D'après la proposition (1.8.2) on a :

$$C(s) \subset C(t) + |v(s) - v(t)| \mathbb{B} \tag{2.5}$$

et

$$C(t) \subset C(s) + |v(s) - v(t)| \mathbb{B} \tag{2.6}$$

pour $s = 0$ dans (2.6) on obtient :

$$\begin{aligned}
C(t) &\subset C(0) + |v(t)| \mathbb{B} \\
&\subset R\mathbb{B} + |v(t)| \mathbb{B} \\
&\subset R\mathbb{B} + \max |v(t)| \mathbb{B} \\
&\subset (R + \max |v(t)|) \mathbb{B} \\
&\subset cte\mathbb{B} \quad \text{telque} \quad cte = (R + \max |v(t)|)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

ce qui implique que $C(t)$ est borné

Donc d'après le corollaire (1.10.2), on déduit que $(N_C(t_{i+1}^n) + A_1 + A_0\mu_n)$ est surjective \square

donc, par conséquence

$$z_{i+1}^n \in (N_C(t_{i+1}^n) + A_1 + A_0\mu_n)^{-1}(f_{i+1}^n - A_0u_i^n) \tag{2.8}$$

2.2 Résultat d'existence et d'unicité

Dans cette section nous allons aborder la question d'existence et d'unicité d'une solution pour le problème non linéaire (2.2).

Pour démontrer le caractère bien posé du problème (2.2) on va appliquer la méthode de **discrétisation** i.e. on va construire une suite de solution approché $u_n : [0, T] \rightarrow H$ pour (2.2) via la discrétisation de l'intervalle $[0, T]$.

Ensuite on va montrer que u_n converge vers une fonction $u : [0, T] \rightarrow H$ qui est solution du problème (2.2) et que $u'_n(t)$ converge vers $u'(t)$.

Preuve. On commence par l'existence de la solution.

I- Existence

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la partition suivante de l'intervalle $I := [0, T]$

$$I_{i+1}^n := [t_i^n, t_{i+1}^n], \quad t_i^n = i\mu_n, \mu_n = \frac{T}{n}, \quad 0 \leq i \leq n-1.$$

On veut construire une suite $u_n : [0, T] \rightarrow H$ solution de (2.2). Pour cela on va la définir sur chaque sous intervalles I_{i+1}^n , $0 \leq i \leq n-1$ comme suit :

$$\begin{cases} u_n(t_i^n) := u_i^n \\ u_n(t_{i+1}^n) := u_{i+1}^n \end{cases}$$

Algorithme :

-Posons $u_0^n := u_0$, $f_{i+1}^n = f(t_{i+1}^n)$

-Pour $0 \leq i \leq n-1$, trouver z_{i+1}^n et u_{i+1}^n tel que

$$\begin{aligned} f_{i+1}^n - A_0 u_i^n &\in [\mu^n A_0 + A_1 + N_{C(t_{i+1}^n)}](z_{i+1}^n). \\ u_{i+1}^n &= u_i^n + \mu_n z_{i+1}^n. \end{aligned} \quad (2.9)$$

D'après le corollaire (1.10.2) et (2.8), on peut réécrire(2.9) comme

$$\begin{aligned} z_{i+1}^n &\in [\mu^n A_0 + A_1 + N_{C(t_{i+1}^n)}]^{-1}(f_{i+1}^n - A_0 u_i^n). \\ u_{i+1}^n &= u_i^n + \mu_n z_{i+1}^n. \end{aligned} \quad (2.10)$$

D'après la proposition 2.1.1 cet algorithme est bien défini

Maintenant, nous utilisons la suite discrètes (u_i^n) pour construire la suite des solutions approchées (u_n) de $[0, T]$ à H en prenant leurs restrictions sur chaque intervalle I_{i+1}^n comme suit :

$$u_n(t) = \begin{cases} u_0^n & \text{si } t = 0, \\ u_i^n + \frac{t - t_i^n}{\mu_n} (u_{i+1}^n - u_i^n) & \text{si } t \in I_{i+1}^n; \quad i = \overline{0, n-1}. \end{cases}$$

$u_n(t)$ est l'interpolation de Lagrange de u_i^n et u_{i+1}^n .

On remarque que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset C([0, T], H)$, de plus

$$u_n'(t) = z_{i+1}^n, \quad p.p \ t \in I_{i+1}^n, \quad 0 \leq i \leq n-1 \quad (\text{i.e. } p.p \ t \in [0, T]). \quad (2.11)$$

Voir figure 2.1.

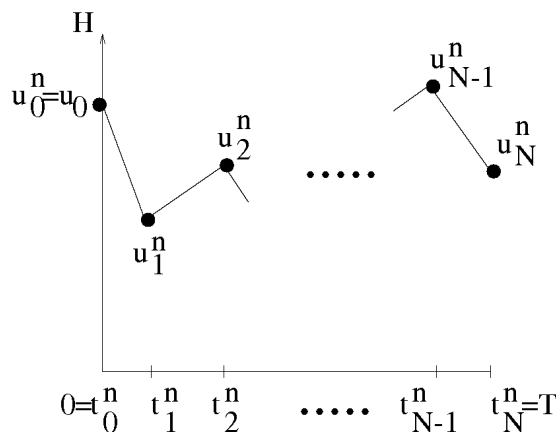


FIGURE 2.1 – La solution approchée u_n .

(a) $u_n(\cdot)$ est uniformément bornée

on a $u_n'(t) = z_{i+1}^n(t) \in C(t) \subset M\mathbb{B}$

D'après (2.7) $C(t)$ borné

D'où

$$\|u'_n(t)\| \leq M, \quad p.p \ t \in [0, T]. \quad (2.12)$$

Et comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est continue alors elle est absolument continue, donc on peut écrire

$$u_n(t) = u_0 + \int_0^t u'_n(\tau) d\tau, \quad \forall t \in [0, T].$$

Par (2.12), on déduit que

$$\|u_n(t)\| \leq \|u_0\| + MT, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.13)$$

Par conséquent la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est uniformément bornée.

(b) convergence

De plus pour tout $t, s \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u_n(s)\| &= \left\| \int_s^t u'_n(\tau) d\tau \right\| \\ &\leq \int_s^t \|u'_n(\tau)\| d\tau \\ &= M|t - s|. \end{aligned}$$

Alors, $u_n(\cdot)$ M-continûment Lipschitz.

Donc $var(u_n(\cdot))$ borné

$$\begin{aligned} u_n(t) &\rightharpoonup u(t) \quad \forall t \in [0, T] \\ u_n(t) &\rightharpoonup u(t) \quad \text{dans } L^\infty([0, T], H) \\ u'_n(t) &\rightharpoonup \xi(t) \quad \text{dans } L^2([0, T], H) \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{cases} \theta_n(t) = t_{i+1}^n & ; \quad t \in I_{i+1}^n \\ \theta_n(0) = t_1^n. \end{cases}$$

On note que :

$$\sup_{t \in [0, T]} |\theta_n(t) - t| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

(c) u solution de (2.2) :

Pour démontrer que u est une solution de (2.2), on va vérifier la définition (2.1.1) :

1) On sait que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = u(t), \forall t \in [0, T]$, pour $t = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(0) = u(0)$, mais $u_n(0) = u_0$, alors $u(0) = u_0$.

2) $u(\cdot)$ est M-continument Lipschitzienne, D'après le lemme (1.13.1) et (2.13), pour tous $s, t \in [0, T]$, on a

$$\|u(t) - u(s)\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n(t) - u_n(s)\| \leq |Mt - Ms| = M|t - s|.$$

Par suite d'après la remarque 1.11.1, on déduit que $u(\cdot)$ est dérivable p.p sur $[0, T]$. Soit

$z \in H$, tel que $\|z\| \leq 1$:

$$\begin{aligned} |\langle z, u_n(\theta_n(t)) - u(t) \rangle| &= |\langle z, u_n(\theta_n(t)) - u(t) + u_n(t) - u_n(t) \rangle| \\ &\leq |\langle z, u_n(\theta_n(t)) - u_n(t) \rangle| + |\langle z, u_n(t) - u(t) \rangle| \\ &\leq M|\theta_n(t) - t| + |\langle z, u_n(t) - u(t) \rangle| \end{aligned}$$

On fait tendre $n \rightarrow \infty$

$$u_n(\theta_n(t)) \rightarrow u(t).$$

D'autre part

$$\langle z, u_n(t) \rangle = \langle z, u_0 \rangle + \int_0^T \langle \iota_{[0,t]}(s) z, u'_n(s) \rangle ds.$$

On fait tendre $n \rightarrow \infty$

$$\langle z, u(t) \rangle = \langle z, u_0 \rangle + \int_0^T \langle \iota_{[0,t]}(s) z, \xi(s) \rangle ds = \langle z, u_0 + \int_0^T \xi(s) \rangle ds \quad (2.14)$$

Ce qui est implique que $u(t) = u_0 + \int_0^t \xi(s) ds$.

D'où $u'(t) = \xi(t)$ p.p $t \in [0, T]$, et par suite $u'_n(\cdot)$ converge faiblement vers $u'(\cdot)$ dans $L^2([0, T], H)$.

On a

$$f_n(t) = f_{i+1}^n = f(\theta_n(t)) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \rightarrow f(t)$$

3) $u'(t) \in C(t)$?

On a $u'_n(t) = z_{i+1}^n \in C(t_{i+1}^n) = C(\theta_n(t))$

pour $s = \theta_n(t)$ dans (2.6) On obtient :

$$C(\theta_n(t)) \subset C(t) + |u(t) - u(\theta_n(t))| \mathbb{B}$$

Donc,

$$u'(t) \in C(t) + |u(t) - u(\theta_n(t))| \mathbb{B} \quad (2.15)$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ on pose D_ε est un ensemble convexe et fermé, d'après la proposition 1.3.2 D_ε est faiblement fermé dans $L^2([0, T], H)$ tel que :

$$D_\varepsilon = \{\phi \in L^2([0, T], H) : \phi(t) \in C(t) + \varepsilon \mathbb{B}_H \text{ p.p } \forall t \in [0, T]\}$$

et on a $u'_n(t) \longrightarrow u'(t)$ dans $L^2([0, T], H)$

Alors,

$$u'_n(t) \in D_\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \implies u'(t) \in C(t) + \varepsilon \mathbb{B}$$

comme $\varepsilon \longrightarrow 0$ on obtient ,

$$u'(t) \in C(t) \tag{2.16}$$

4) Maintenant nous montrons que $A_1 u'(t) + A_0 u(t) - f(t) \in -N_{C(t)}(u'(t))$ p.p sur $[0, T]$

Soit $\xi_n(t) := -A_0 u_n(\theta_n(t)) - A_1(u'_n(t)) + f_n(t) \quad \forall t \in [0, T]$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \xi_n(t) &= u'_n(t) \in N_{C(\theta_n(t))}(u'_n(t)) \\ &\iff \langle \xi_n(t), u_n(t) - u'_n(t) \rangle \leq 0 \quad \forall u_n(t) \in C(\theta_n(t)) \\ &\iff \langle \xi_n(t), u_n(t) \rangle + \langle -\xi_n(t), u'_n(t) \rangle \leq 0 \end{aligned}$$

D'après la proposition (1.7.2) on obtient

$$\sigma(C(\theta_n(t)), \xi_n(t)) + \langle -\xi_n(t), u'_n(t) \rangle \leq 0 \tag{2.17}$$

En intégrant sur $[0, T]$, on obtient :

$$\int_0^T \sigma(C(\theta_n(t)), \xi_n(t)) dt + \int_0^T \langle -\xi_n(t), u'_n(t) \rangle dt \leq 0 \tag{2.18}$$

D'après la convergence de $f_n(t)$ vers $f(t)$ on a

$$\int_0^T \langle f(t), u'(t) \rangle dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \langle f_n(t), u'_n(t) \rangle dt$$

On note par $A_0 = \nabla \varphi_0$ où la fonction $\varphi_0(x) := \frac{1}{2} \langle A_0 x, x \rangle$ est continue . alors d'après on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle A_0 u(t), u'(t) \rangle dt &= \int_0^T \frac{d}{dt} \varphi_0(u(t)) dt \\ &= \varphi_0(u(T)) - \varphi_0(u(0)) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (\varphi_0(u_n(T)) - \varphi_0(u_n(0))) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^T \frac{d}{dt} \varphi_0(u_n(t)) dt \right) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \langle A_0 u_n(t), u'_n(t) \rangle dt \end{aligned}$$

Donc d'après la continuité de φ_0 , $u_n(t)$ converge vers $u(t)$ dans H , nous avons aussi

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \langle A_0 u_n(t), u'_n(t) \rangle dt = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \langle A_0 u_n(\theta_n(t)), u'_n(t) \rangle dt \tag{2.19}$$

Depuis ,

$$\int_0^T |\langle A_0 u_n(t) - A_0 u_n(\theta_n(t)), u'_n(t) \rangle| dt \leq M^2 \|A_0\| \int_0^T |t - \theta_n(t)| dt$$

Soit $x(\cdot) := \int_0^T \langle A_1 x(t), x(t) \rangle dt$ convexe et fortement continue sur $L^2([0, T], H)$ donc faiblement semi-continue inférieure sur $L^2([0, T], H)$ on a $u'_n(t)$ converge vers $u'(t)$ dans $L^2([0, T], H)$ et d'après le lemme (1.13.1) on obtient :

$$\int_0^T \langle A_1 u'(t), u'(t) \rangle dt \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \langle A_1 u'_n(t), u'_n(t) \rangle dt \quad (2.20)$$

Soit la fonction convexe $x(\cdot) := \int_0^T \sigma(C(t), \xi_n(t)) dt$ faiblement semi-continue inférieure sur $L^2([0, T], H)$, plus $A_i : L^2([0, T], H) L^2([0, T], H)$ ($i = 0..1$) satisfait

$$\|A_i x\|_2 \leq \|A_i\| \|x\|_2$$

Alors il sont continue et donc faiblement continue de $L^2([0, T], H)$.

Comme les suites $u_n(t)$ et $u'_n(t)$ convergent faiblement dans $L^2([0, T], H)$ vers $u(t)$ et $u'(t)$ respectivement, il en résulte que (rappelons $\xi_n(t) := -A_0 u_n(\theta_n(t)) - A_1(u'_n(t)) + f_n(t)$)

$$\int_0^T \sigma(C(t), \xi(t)) dt \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \sigma(C(t), \xi_n(t)) dt$$

Ce qui implique que

$$\int_0^T \sigma(C(t), -A_0 u(t) - A_1(u'(t)) + f(t)) dt \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \sigma(C(t), \xi_n(t)) dt \quad (2.21)$$

Comme $C(t) \subset C(\theta_n(t)) + |u(\theta_n(t)) - u(t)| \mathbb{B}_H$ (D'après l'hypothèse sur $C(\cdot)$) et D'après le lemme (1.7.1) on observe aussi que

$$\begin{aligned} \int_0^T \sigma(C(t), \xi_n(t)) dt &\leq \int_0^T \sigma(C(\theta_n(t)), \xi_n(t)) dt + \int_0^T \|\xi_n(t)\| |u(\theta_n(t)) - u(t)| dt \\ &\leq \int_0^T \sigma(C(\theta_n(t)), \xi_n(t)) dt + ((\|u_0\| + MT) \|A_0\| + M \|A_1\| + \beta) \int_0^T |u(\theta_n(t)) - u(t)| dt \end{aligned}$$

On a $\int_0^T |u(\theta_n(t)) - u(t)| dt \rightarrow 0$ comme $n \rightarrow \infty$, donc

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \sigma(C(\theta_n(t)), \xi_n(t)) dt \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \sigma(C(t), \xi_n(t)) dt$$

Alors on déduit que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \sigma(C(\theta_n(t)), \xi_n(t)) dt \geq \int_0^T \sigma(C(t), -A_0 u(t) - A_1(u'(t)) + f(t)) dt \quad (2.22)$$

D'après (2.22) et (2.18) on a

$$\int_0^T \langle A_0 u(t) + A_1 u'(t) - f(t), u'(t) \rangle dt + \int_0^T \sigma(C(t), -A_0 u(t) - A_1(u'(t)) + f(t)) dt \leq 0 \quad (2.23)$$

pour tout $t \in [0, T]$ l'inclusion $u'(t) \in C(t)$ donne

$$\sigma(C(t), -A_0u(t) - A_1(u'(t)) + f(t)) \geq \langle -A_0u(t) - A_1u'(t) + f(t), u'(t) \rangle$$

ou dit différemment

$$\sigma(C(t), -A_0u(t) - A_1(u'(t)) + f(t)) + \langle A_0u(t) + A_1u'(t) - f(t), u'(t) \rangle \geq 0$$

il résulte de (2.23) que pour tout $t \in [0, T]$,

$$\sigma(C(t), -A_0u(t) - A_1(u'(t)) + f(t)) + \langle A_0u(t) + A_1u'(t) - f(t), u'(t) \rangle = 0$$

Donc,

$$A_1u'(t) + A_0u(t) - f(t) \in -N_{C(t)}(u'(t)) \quad p.p \text{ sur } [0, T]$$

D'où $u(\cdot)$ une solution de (2.2) (i)

On va montrer l'unicité de la solution :

II- Unicité

a) Si A_0 est coercive c à d pour $\alpha_0 > 0$ et pour tout $x \in H$ on a

$$\langle A_0x, x \rangle \geq \alpha_0 \|x\|^2$$

On suppose que pour toute condition initiale u_0 le problème (2.2) admet deux solutions $u_1(\cdot)$ et $u_2(\cdot)$ i.e. pour $i = 1, 2$ et pour tout $t \in [0, T]$ on a :

$$\begin{cases} A_1u'_i(t) + A_0u_i(t) - f(t) \in -N_{C(t)}(u'_i(t)) & p.p \text{ sur } [0, T], \\ u_i(0) = u_0, \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\iff \langle A_0u_i(t) + A_1u'_i(t) - f(t), z \rangle \leq 0 \quad \forall z \in C(t)$$

Utilisant le fait que $u_i(t) \in C(t)$ p.p $t \in [0, T]$, nous obtenons

$$\begin{cases} \langle A_1u'_1(t) + A_0u_1(t) - f(t), u'_1(t) - u'_2(t) \rangle \leq 0 \\ \langle -A_1u'_2(t) - A_0u_2(t) + f(t), u'_1(t) - u'_2(t) \rangle \leq 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

En additionnant les deux dernières inégalités, nous avons

$$\langle A_0u_1(t) - A_0u_2(t) + A_1u'_1(t) - A_1u'_2(t), u'_1(t) - u'_2(t) \rangle \leq 0 \quad t \in [0, T] \quad (2.26)$$

D'après **hypothèse 1** on a A_1 est monotone donc,

$$\langle A_0u_1(t) - A_0u_2(t), u'_1(t) - u'_2(t) \rangle \leq 0 \quad t \in [0, T] \quad (2.27)$$

Alors

$$\frac{d}{dt} \langle A_0 u_1(t) - A_0 u_2(t), u_1(t) - u_2(t) \rangle = 2 \langle A_0 u_1(t) - A_0 u_2(t), u_1'(t) - u_2'(t) \rangle \leq 0.$$

Via (2.27)

$$\langle A_0 u_1(t) - A_0 u_2(t), u_1(t) - u_2(t) \leq 0 \rangle,$$

Comme A_0 est coercive, alors

$$\alpha_0 \|u_1(t) - u_2(t)\|^2 \leq \langle A_0 u_1(t) - A_0 u_2(t), u_1(t) - u_2(t) \rangle \leq 0,$$

par conséquent :

$$\begin{aligned} \|u_1(t) - u_2(t)\| \leq 0 &\iff \|u_1(t) - u_2(t)\| = 0 \\ &\iff u_1(t) = u_2(t) \end{aligned}$$

d'où l'unicité de la solution

b) Si A_1 est coercive c à d pour $\alpha_0 > 0$ et pour tout $x \in H$ on a

$$\langle A_1 x, x \rangle \geq \alpha_0 \|x\|^2$$

On suppose que pour toute condition initiale u_0 le problème (2.2) admet deux solutions $u_1(\cdot)$ et $u_2(\cdot)$ i.e. pour $i = 1, 2$ et pour tout $t \in [0, T]$ on a :

$$\begin{cases} A_1 u_i'(t) + A_0 u_i(t) - f(t) \in -N_{C(t)}(u_i'(t)) & \text{p.p sur } [0, T], \\ u_i(0) = u_0, \end{cases} \quad (2.28)$$

\iff

$$\langle A_0 u_i(t) + A_1 u_i'(t) - f(t), z \rangle \leq 0 \quad \forall z \in C(t)$$

Utilisant le fait que $u_i(t) \in C(t)$ p.p $t \in [0, T]$, nous obtenons

$$\begin{cases} \langle A_1 u_1'(t) + A_0 u_1(t) - f(t), u_1'(t) - u_2'(t) \rangle \leq 0 \\ \langle -A_1 u_2'(t) - A_0 u_2(t) + f(t), u_1'(t) - u_2'(t) \rangle \leq 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

En additionnant les deux dernières inégalités, nous avons

$$\langle A_0 u_1(t) - A_0 u_2(t) + A_1 u_1'(t) - A_1 u_2'(t), u_1'(t) - u_2'(t) \rangle \leq 0 \quad t \in [0, T] \quad (2.30)$$

D'après **hypothèse 1** on a A_0 est monotone donc,

$$\langle A_1 u_1'(t) - A_1 u_2'(t), u_1'(t) - u_2'(t) \rangle \leq 0 \quad t \in [0, T] \quad (2.31)$$

Comme A_1 est coercive, alors

$$\alpha_0 \|u_1'(t) - u_2'(t)\|^2 \leq \langle A_1 u_1'(t) - A_1 u_2'(t), u_1'(t) - u_2'(t) \rangle \leq 0,$$

par conséquent :

$$\begin{aligned} \|u'_1(t) - u'_2(t)\| \leq 0 &\iff \|u'_1(t) - u'_2(t)\| = 0 \\ &\iff u'_1(t) = u'_2(t) \end{aligned}$$

comme la solution est absolument continue alors :

$$u_1(t) = u_2(t)$$

□

d'où l'unicité de la solution pour A_0 ou A_1 coercive (i)

De (i) et (ii), le problème (2.2) admet une unique solution u , de plus elle est M -continument lipschitzienne et $\|u_n(t)\| \leq \|u_0\| + MT, \forall t \in [0, T]$

2.3 Exemple

Dans l'exemple ci-dessous, nous allons voir que la coercivité de A_0 est indispensable pour avoir l'unicité de solution.

Exemple 2.3.1. Soient $H = \mathbb{R}^2, T = 1, u_0 = (0, 0), A_0 = A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C(t) = [t, 1] \times [0, 1]$ pour $t \in [0, 1]$. Ici A_0 est une matrice symétrique semi-définie positive (non coercive). Considérons $f(t) = (0, 0)$ pour tout $0 \leq t \leq 1$.

La première solution est $u(t) = (\frac{1}{2}t^2, t)$ pour $0 \leq t \leq 1$, avec $\dot{u}(t) = (t, 1) \in C(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$, et donc vérifie (2.2), car

$$N([t, 1] \times [0, 1]; (t, 1)) = \begin{cases}] - \infty, 0] \times [0, +\infty[& \text{if } t \in [0, 1[, \\ \mathbb{R} \times [0, +\infty[& \text{if } t = 1. \end{cases}$$

Nous définissons la deuxième solution comme suit $u(t) = (\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{2}t)$ pour $0 \leq t \leq 1$, avec $\dot{u}(t) = (t, \frac{1}{2}) \in C(t)$ pour $t \in [0, 1]$.

Un calcul simple montre que

$$N([t, 1] \times [0, 1]; (t, \frac{1}{2})) = \begin{cases}] - \infty, 0] \times \{0\} & \text{if } t \in [0, 1[, \\ \mathbb{R} \times \{0\} & \text{if } t = 1. \end{cases}$$

Par conséquent, $u(t) = (\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{2}t)$ vérifie (2.2).

Application

Maintenant, nous étudions l'inégalité variationnelle d'évolution suivante :
 Trouver $u : [0, T] \rightarrow H$ tel que $u'(t) \in C(t)$ p.p. $t \in [0, T]$ on à

$$\begin{cases} a_0(u(t), v - u'(t)) + a_1(u'(t), v - u'(t)) \geq \langle l(t), v - u'(t) \rangle, \forall v \in C(t) \\ u(0) = u_0 \in H \end{cases} \quad (3.1)$$

$a_0(\cdot, \cdot), a_1(\cdot, \cdot)$ deux formes bilinéaires continues et symétriques et $l \in W^{1,2}([0, T], H)$ et $u'(t) = \frac{du}{dt}(t)$,

nous obtenons un résultat d'existence et d'unicité pour l'inégalité variationnelle d'évolution donnée en (3.1). sous les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1 : $a_i(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ sont des opérateurs linéaires bornés, symétriques satisfait $\forall u \in H \exists \alpha_0$ telle que :

$$a_1\langle u, u \rangle \geq 0, \quad \text{et } a_0\langle u, u \rangle \geq \alpha_0 \|u\|^2 \quad .$$

Hypothèse 2 : $l \in W^{1,2}([0, T], H)$ est uniformément borné, $\exists \beta$ telle que :

$$\|l(t)\| \leq \beta; \forall t \in [0, T].$$

Hypothèse 3 : Supposons que $C(0) \subset R\mathbb{B}_H$ et les ensembles fermé non vide $C(t)$ de H ont une variation en ce sens qu'il existe une fonction continue $v(\cdot)$ non décroissante $:[0, T] \rightarrow H$ avec $v(0) = 0$ et tel que

$$|d(y, C(t)) - d(y, C(s))| \leq |v(s) - v(t)| \text{ pour tout } y \in H \text{ et } s, t \in [0, T].$$

Proposition 3.0.1. *Sous les hypothèses (H1)-(H3), le problème (3.1) admet une solution unique continûment Lipschitzienne pour toute condition initiale $u_0 \in H$.*

Preuve : L'idée de la preuve est basée sur le lemme(2.1.1) c'est à dire, on va écrire le problème (3.1) comme (2.3), ensuite on va vérifier les hypothèses **1,2,3** .

Donc la preuve se fait en 2 étapes :

1^{er}étape : écrivons (3.1) sous forme du problème (2.3) :

Pour $i = 0, 1$ on note par A_i les opérateurs linéaires, bornés et symétriques associés respectivement à $a_i(\cdot, \cdot)$, c'est-à-dire $a_i(u, v) = \langle A_i u; v \rangle$ pour tout $u, v \in H$ On a (3.1) équivalent à

$$\begin{cases} A_1 u'(t) + A_0 u(t) - l(t) \in -N_{C(t)}(u'(t)) & p.p \text{ sur } [0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (3.2)$$

2^{ème} étape : vérifions les hypothèses 1,2 et 3 :

D'après le théorème de prolongement de Sobolev On remarque que :

l'ensemble $W^{1,2}([0, T], H) \subset C([0, T], H)$, et D'après l'hypothèses **(H2)**, nous concluons que l est une fonction continue.

Alors toutes les hypothèses que ce précède sont satisfaites et donc le problème (3.1) admet une solution unique continûment Lipschitzienne. \square

3.1 Circuits électriques non réguliers

Le but de cette section est d'illustrer le processus de raffé dans la théorie des circuits électriques non réguliers. Citons quelques éléments de circuit :

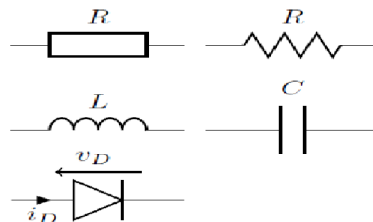


FIGURE 3.1 – élément de circuit.

1– la Résistance :

. Elle a deux bornes à travers lesquelles l'électricité doit passer, et elle est conçu pour faire chuter la tension du courant lorsqu'elle circule d'une borne à l'autre. Les résistances sont principalement utilisées pour créer et maintenir des courants de sécurité connus au sein des composants électriques. Dans ce cas, la loi d'Ohm dit que :

$$v_R(t) = R i_R(t)$$

où $R \geq 0$ est une résistance donnée. En général, on peut avoir

$$v_R = \phi(iR)$$

avec un fonction (non linéaire) $\phi : R \rightarrow R$. Le graphique de ϕ est appelé (Ampère-Volt) caractéristique de la résistance.

2– l'inductance :

la caractéristique ampère volt est donnée par la relation :

$$v_L(t) = L \frac{dl}{dt}(t)$$

où $L > 0$ est une inductance donnée.

3– le Condensateur :

la caractéristique ampère volt est donnée par

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(s) ds,$$

où $C > 0$ est une capacité donnée. .

4– la diode :

la diode est un dipôle non linéaire et polarisé (ou non symétrique). Le sens de branchement d'une diode a donc une importance sur le fonctionnement du circuit électronique dans lequel elle est placée. La diode se bloque dans le sens opposé. En pratique, le modèle ci-dessus n'est pas approprié car la diode se bloque à moins que la tension ne dépasse une valeur appelée tension de claquage $V_b > 0$. Cette valeur dépend de la diode. Diode idéale peut être décrit par :

$$\begin{aligned} v_D &\in N_{R_+}(i_D) \\ \iff 0 &\leq -v_D \perp i_D \geq 0 \end{aligned}$$

Exmple1 : Circuit RLD en 1D

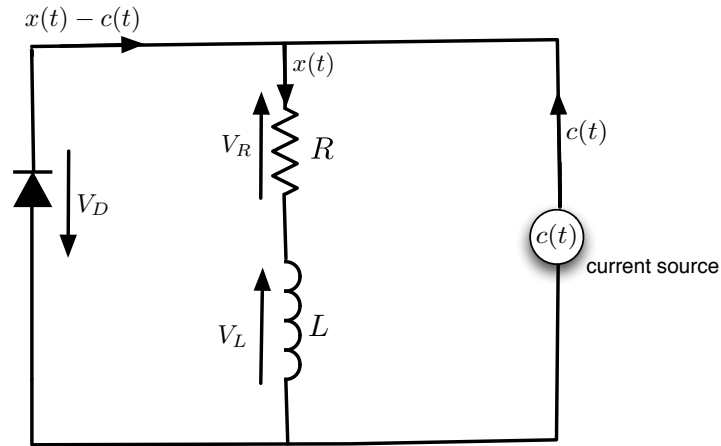


FIGURE 3.2 – Electrical circuit with resistor, inductor and ideal diode (RLD).

Considérons le circuit représenté dans (3.2) impliquant une résistance de charge $R > 0$, une inductance $L > 0$, une diode (supposée idéale) et une source de courant $c(t)$. Utilisant les lois de Kirchoff, on a :

$$V_R + V_L + V_D = 0$$

En compensant chacune de ses relations, on retrouve :

$$L\dot{x}(t) + Rx(t) \in -N(\mathbb{R}_+; x(t) - c(t)) \quad (3.3)$$

et comme

$$\begin{aligned} N(R_+; x(t) - c(t)) &= N(R_+ - c(t) + c(t); x(t) - c(t)). \\ &= N(C(t); x(t)) \end{aligned}$$

avec $C(t) = [c(t), \infty[$

Par conséquent, l'inclusion (3.3) est équivalente à

$$L\dot{x}(t) + Rx(t) \in -N(C(t); x(t)); C(t) = [c(t), \infty[\quad (3.4)$$

Exemple2 :Circuit RCD en 1D

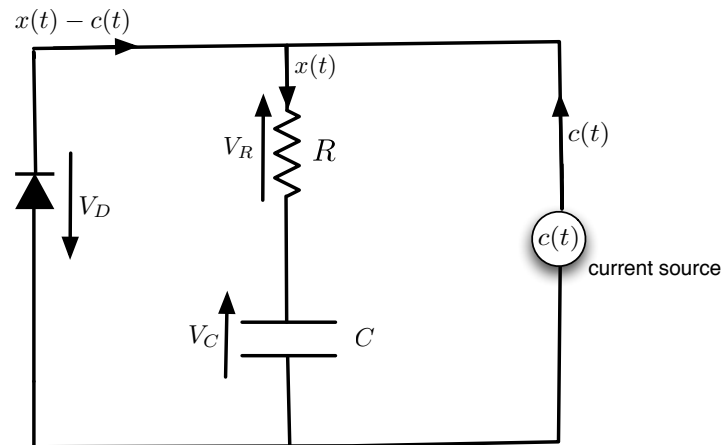


FIGURE 3.3 – Electrical circuit with resistor, capacitor and ideal diode (RCD)

Le circuit représenté sur (3.3) implique une résistance de charge $R > 0$, un condensateur $C > 0$, une diode (supposée idéale) et une source de courant $c(t)$. Utilisation de lois de Kirchoff donne :

$$V_R + V_C = -V_D$$

Par conséquent,

$$Rx(t) + \frac{1}{c} \int x(t) dt \in -N(\mathbb{R}_+; x(t) - c(t)). \quad (3.5)$$

Si la charge sur le condensateur est q et le courant circulant dans le circuit est x alors : $x(t) = \frac{dq}{dt(t)} = \dot{q}(t)$. par conséquent(3.6) est équivalente à :

$$R\dot{q}(t) + \frac{1}{c}q(t) \in -N(C(t); \dot{q}(t)). \quad (3.6)$$

Exemple3 : Circuit RCD en 2D

Considérons maintenant le circuit électrique donné par la(3.4) qui est composé de deux résistances $R_1 \geq 0$, $R_2 \geq 0$ avec lois tension/courant $V_{R_k} = R_k x_k$ et deux

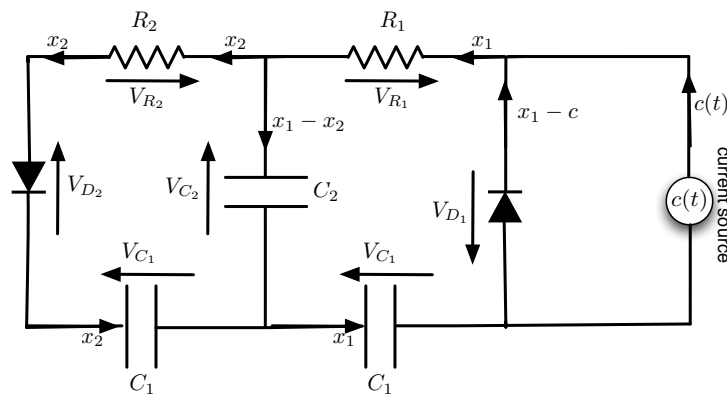


FIGURE 3.4 – Electrical circuit with resistors, capacitors and ideal diodes (RCD)

condensateurs $C_1 > 0, C_2 > 0$ avec lois tension/courant $v_{c_k} = \frac{1}{c_k} \int x_k(t) dt; k = 1, 2$ et deux diodes idéales avec les caractéristiques Ampère/Volt

$$0 \leq -v_{D_k} \perp i_k \geq 0$$

En utilisant la loi de Kirchhoff, nous avons :

$$\begin{cases} V_{R_1} + V_{c_1} + V_{c_2} = -V_{D_1} \in -N(\mathbb{R}_+; x_1(t) - c(t)) \\ V_{R_2} + V_{c_1} - V_{c_2} = -V_{D_2} \in -N(\mathbb{R}_+; x_2(t)) \end{cases}$$

Par conséquent, la dynamique de ce circuit est :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}}^{A_1} \overbrace{\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}}^{\dot{q}} + \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} & -\frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \end{pmatrix}}^{A_0} \overbrace{\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}}^q \in -N(C(t); \dot{q}(t)) \quad (3.7)$$

avec $C(t) = [c(t), \infty[\times]0, \infty[$ et $\dot{q}_i(t) = x_i(t), i = 1, 2$ On observe que si $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$, alors (3.7) équivalent à :

$$\dot{q}(t) = \text{proj}_{C(t)} (A_1^{-1} A_0 q(t)).$$

qui est une équation différentielle ordinaire (voir Remarque 1, Section 5 pour plus de détails). Si $R_1 = 0$ ou $R_2 = 0$, puis l'opérateur $[A_1 + N(C(t); \cdot)]^{-1}$ peut être défini (voir l'exemple (2.3.1) et (3.7) est de la forme (2.1). La même analyse vaut pour la dynamique (3.6) alors que $R > 0$.

Exemple 4 : Circuit RLD en 2D

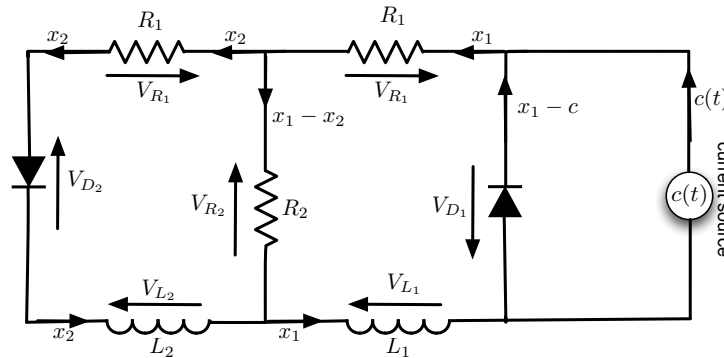


FIGURE 3.5 – Electrical circuit with resistors, inductors and ideal diodes (RLD)

De la même manière, nous pouvons montrer que le comportement dynamique du circuit représenté dans (3.5) est donné par le processus de rafle suivant :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix}}^{A_1} \overbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}}^{\dot{x}} + \overbrace{\begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_1 + R_2 \end{pmatrix}}^{A_0} \overbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}^x \in -N(C(t); \dot{x}(t)) \quad (3.8)$$

avec $C(t) = [c(t), \infty[\times]0, \infty[$ Il est clair que (3.8) est de la forme du processus de rafle (2.2)

Conclusion

L'algorithme de projection (rattrapage) est un outil puissant pour résoudre les Problèmes d'évolution non linéaires gouvernés par le cône normal. Dans le cas implicite i.e., la dérivé de l'inconnue apparaît à la fois à l'intérieur et à l'extérieur du cône normal ; cet algorithme est inapplicable ce qui a conduit à l'utilisation d'un autre algorithme qui se base sur la surjectivité de la somme de deux opérateurs maximaux monotones

Bibliographie

- [1] **Adly, S., Haddad, T., Thibault, L.** : *Convex sweeping process in the framework of measure differential inclusions and evolution variational inequalities*. Math. Program. Ser. B 148(1), 5–47 (2014)
- [2] **Adly, S., Le, B.K.** : *On semicoercive sweeping process with velocity constraint*. Optim. Lett. 12(4), 831–843 (2018)
- [3] **AZE.D** : *Eléments d'analyse convexe et variationnelle*, ellipses, édition marketing S.A.,
- [4] **Barbu, V.** : *Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces*. Springer, Berlin (2010) Paris, 1997
- [5] **Brezis.H** : *Analyse fonctionnelle*, MASSON, Paris, 1983
- [6] **Brezis.H,** : *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, 1973
- [7] **Heinz H. Bauschke, Patrick L. Combettes auth** : *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces* .
- [8] **Kunze,M.,Marques,M.D.P.M.** : *An introduction to Moreau's sweeping process*.In :Brogliato,B.(ed.) *Impacts in Mechanical Systems. Analysis and Modelling*, pp. 1–60. Springer, Berlin (2000)
- [9] **Moreau,J.J.** : *Rafle par un convexe variable I, Sémin. Anal. Convexe Montpellier Exposé 15* (1971)
- [10] **Rockafellar.R.T** : *Convex Integral Functionals and Duality*. In : E.H. Zarantonello (Ed.) *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*. Academic Press, New York, 215–236,1971