

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Mohammed Seddik Ben-Yahia-Jijel



Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques

Option : EDP et applications

Thème

**Méthodes de domaines fictifs pour des problèmes
elliptiques**

Présenté par :

Mosbahi Hadjer

Boudemagh Asma

Devant le jury composé de

Président : Y. Daikh MCA Université de Jijel.

Encadreur : O. Yakhlef MCB Université de Jijel.

Examineur : L. Menniche MCB Université de Jijel.

Promotion 2020/2021

Remerciements

*Tout d'abord et avant tout, je remercie **ALLAH** qui m'a donné la force, la volonté, la patience et le courage pour accomplir ce modeste travail.*

*Je tiens à exprimer ma reconnaissance et gratitude à mon encadreur Mr **Yakhlef Othman**, pour avoir accepté de diriger ce travail ainsi que pour ses conseils avec beaucoup de patience et d'encouragements.*

Je remercie aussi en particulier tous les enseignants de la spécialité EDP.

Je remercie les membres du jury qui ont accepté de juger mon travail.

*Mme **Daikh Yasmina**, qui me fait l'honneur de présider ce jury.*

*Mme **Menniche Linda**, pour avoir accepté d'examiner ce travail.*

*Un grand merci pour mes **parents** et toute ma famille pour leur sacrifice et encouragement, pour mes amis qui nous ont supportés toutes les difficultés et soutient moral tout au long de notre travail.*

Je tiens à remercier tous ceux qui se sont impliqués dans ce travail, directement ou indirectement.

HADJER ASMA

Dédicace

Du profond du mon coeur, je dédie ce modeste travail :

*À la personne la plus précieuse et la plus chère, ma mère **"Hassina"**.*

*À ceux qui ont fait de moi une bonne personne et une femme forte dans ce monde, mon
père **"Hocine"**.*

*À Mes chers frères **"Mohamade Yazid"**, **"Lotfi"**, **"Ziad"** et **"Oussama"**.*

*À Mes chers sœurs **"Selma"**, **"Rima"**, **"Sara"** et **"Djahida"** et leur époux
Mohamade et leurs bébé **"Salahe"** .*

*À tous mes amies de promotion 2^{eme} année master **EDP et Applications**.*

À mes amies avec qui j'ai partagé des moments agréables et inoubliables .

***"chaima"**, **"Zeyneb"**, **"Bochra"**, **"Asma"**, je leur souhaite de ma part la réussite.*

À tous ceux qui ont une place dans mon coeur.

*À tout les membres de ma famille sûrtout tant **Yamina** et mon grand-père **Abdelaziz**
toute personne porte le nom **"MOSBAHI"** et **" ABDELLIOUA"**.*

*Enfinement, je dédie ce travail à tous ceux qui ont participé à **ma réussite**.*

Merci d'être toujours là pour moi.

HADJER

★ Dédicaces ★

*Du profond du mon coeur, je dédie ce modeste travail : À la personne la plus précieuse et la plus chère, ma mère **Massouda**.*

*À ceux qui ont fait de moi une bonne personne et une femme forte dans ce monde, mon père **Ammar***

*À Mes chers sœurs "**Assia**", "**Amel**", "**Houria**", "**Hayat**" et "**Amina**" et leur époux "**Djamel**" et leurs bébé "**lokman**" À tous mes amies de promotion 2^{eme} **année master***

EDP et Applications.

*À mes amies avec qui j'ai partagé des moments agréables et inoubliables "**Soumia**", "**Razika**", "**Meriem**", "**Sara**", "**Asma**", "**Hadjer**", "**Zeyneb**", "**Halima**", et mes remerciements*

*relié à au professeur "**Mohamed boubakir**", et gratitude à mon encadreur*

*Mr "**Yakhlef Othman**", je leur souhaite de ma part la réussite.*

À tous ceux qui ont une place dans mon coeur.

*toute personne porte le nom "**BOUDEMAGH**" et "**AISSANI**".*

*Finalement, je dédie ce travail à tous ceux qui ont participé à **ma réussite**.*

Merci d'être toujours là pour moi.

ASMA.

Table des matières

Notations	3
Introduction générale	6
1 Concepts de base et résultats préliminaires	9
1.1 Existence et unicité de solution	9
1.1.1 Formules de Green et formule de la divergence	11
1.1.2 Théorème de Lax-Milgram	13
2 Méthodes de domaines fictifs	14
2.1 Méthodes de pénalisation	14
2.1.1 Position du problème et conditions aux bords	15
2.1.2 Méthodes de pénalisation à interface diffuse	17
2.1.3 Méthodes de pénalisation à interface fine	20
2.1.4 Avantages et inconvénient de la méthode avec pénalisations	24
2.2 Méthode de la frontière élargie	24
2.2.1 Estimation de l'erreur	25
2.2.2 Avantages et inconvénient de la méthode de la frontière élargie	29
2.3 Méthodes de frontières immergées	30
2.3.1 Avantages de la méthodes de frontières immergées	31
3 Application de la méthode de domaine fictif	32

3.1	Problème de Dirichlet	32
3.2	Formulation variationnelle	32
3.3	Disque	35
3.4	Ellipse	38
	Conclusion Générale	40
	Bibliographie	41

Notations

d : dimension de l'espace,

$\Omega, \tilde{\Omega}$: ouvert borné de \mathbb{R} , généralement domaine physique ou domaine fictif,

Ω_e : le domaine extérieur,

$\bar{\Omega}$: l'adhérence de Ω ,

$\Omega_{e,h}$: domaine polygonal approchant Ω_e ,

Ω_h : domaine polygonal approchant Ω , $\bar{\Omega}_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$,

Γ_h : frontière ou partie de la frontière de Ω_h ,

Γ : $\partial\Omega$: frontière de Ω ,

ϵ : paramètre de pénalisation,

η : paramètre de pénalisation (tendant vers 0),

\mathcal{T}_h : maillage de Ω ,

K : élément du maillage,

h_K : diamètre de K : distance maximum entre deux points de K ,

h : pas du maillage : maximum des diamètres h_K , $K \in \mathcal{T}_h$,

σ : face d'un élément K du maillage,

n : normale extérieure unitaire (rattachée à des domaines différents selon le contexte),

dx : mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d ,

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$: espace pré-hilbertien : espace vectoriel muni d'un produit scalaire,

H : un espace de Hilbert réel séparable.

H' : l'espace dual de l'espaces H.

$$L^p(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; v \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |v(x)|^p dx < \infty\}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$L^2(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; v \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx < \infty\},$$

$L^2(\Omega)$: est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle v, w \rangle = \int_{\Omega} v(x)w(x)dx; v, w \in L^2(\Omega)$,

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

p.p. : presque partout,

$$L^\infty(\Omega) = \{v \text{ mesurable dans } \Omega / \exists c \geq 0 \text{ vérifiant } |v| \leq c \text{ p.p. sur } \Omega\},$$

$$\|v\|_\infty = \inf\{c, |v| \leq c \text{ p.p. sur } \Omega\},$$

$W^{m,p}(\Omega)$: espace de Sobolev sur Ω défini par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega), \partial^\alpha v \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq m\},$$

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha v|^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \partial^\alpha v \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq m\},$$

$|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$, utilisé pour la définition des espace de Sobolev,

$$\partial^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}},$$

$H^1(\Omega)$: espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω défini par :

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq d\},$$

muni de la norme

$$\|v\|_{1,\Omega} = (v, v)_{1,\Omega}^{\frac{1}{2}} = \left(\|v\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

du produit scalaire :

$$(u, v)_{1,\Omega} = (u, v)_{0,\Omega} + \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right),$$

$H^1(\Omega)$: est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{1,\Omega}$

$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$,

$|v|_{H^1(\Omega)}$: semi-norme sur $H^1(\Omega)$, telle que :

$$|v|_{H^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Introduction générale

Les méthodes de domaines fictifs qui sont de plus en plus utilisées, notamment pour les problèmes d'interactions fluide-structure [20] et plus généralement pour tous les problèmes à frontière libre. Le principe de ces méthodes est de prolonger un domaine réel ouvert $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$ (dans la suite $d = 2$ ou 3) de bord Γ en un domaine Ω plus grand et de géométrie simple appelé domaine fictif. Lors de la discrétisation on utilisera un maillage du domaine fictif Ω non conforme par rapport au domaine réel $\tilde{\Omega}$. Le domaine ajouté est appelé domaine extérieur Ω_e (voir la Figure 1).

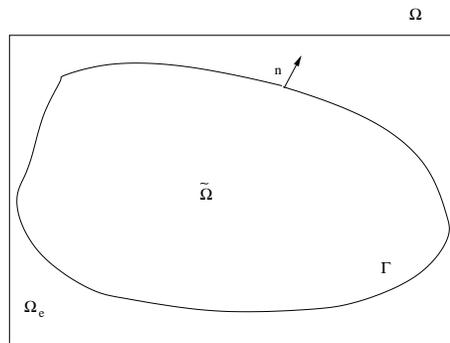


FIGURE 1 – Prolongements du domaine $\tilde{\Omega}$ dans un domaine fictif Ω .

L'intérêt principal, dans les méthodes qui vont être décrites, est d'utiliser un maillage structure sur le domaine fictif permettant une résolution rapide et simple du problème étendu sur le domaine fictif. La difficulté majeure consiste à bien prendre en compte les conditions aux limites sur la frontière du domaine réel (dite frontière immergée) afin de recouvrer la solution du problème initial. On peut diviser en deux catégories les méthodes

de domaines fictifs selon que la frontière immergée est approchée à l'aide d'une surface (quand $d = 2$)-volume (quand $d = 3$) qui l'entoure (méthodes à interface diffuse) ou bien que la frontière immergée est approchée grâce à une courbe($d = 2$)/surface($d = 3$) (méthodes à interface fine).

On présentera, par la suite, une liste non exhaustive de ces méthodes ainsi que leurs avantages et inconvénients. On présentera tout d'abord une méthode de pénalisation (PM), puis la méthode de frontière élargie (FBM), développée par B. Maury [21]. Ensuite, on présentera la méthode introduite et développée par C. S. Peskin [22] de frontière immergée (IBM). Enfin on présentera différentes méthodes de multiplicateur de Lagrange ainsi que les méthodes utilisant des éléments coupés avec multiplicateur de Lagrange ou une méthode de type Nitsche.

Dans ce mémoire nous nous intéressons à la méthode de domaine fictif pour les problèmes elliptiques.

Ce mémoire est composé de trois chapitres, le premier est consacré à des notations de base que nous avons utilisé tout au long de ce travail, concernant les vecteurs et la norme associée, les formules de Green et de la divergence, ainsi que le théorème de Lax-Milgram à propos d'existence et d'unicité de la solution.

Dans le deuxième chapitre, nous parlons des méthodes de domaine fictif en présentant en présentant quelques une, les méthodes de pénalisations, les méthode de la frontière élargie, les méthodes de frontières immergées, les méthodes de multiplicateur de Lagrange.

Le troisième chapitre c'est d'effectuer l'application de la méthode de domaine fictif avec pénalisation L^2 et H^1 pour le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H_0^1(\Omega)$, avec Ω le domaine réel (Disque, ellipse) afin de calculer les

estimations d'erreurs entre les solutions exactes u et les solutions approchées $u_{\epsilon,h}$ après la présentation des formulations variationnelles. De plus, pour valider nos résultats, des exemples numériques ont été donnés où les calculs numériques ont été élaborés via le logiciel "FreeFem++".

Chapitre 1

Concepts de base et résultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions de base, quelques formules de Green et de la divergence et aussi l'existence et l'unicité de la solution avec le théorème de Lax-Milgram.

1.1 Existence et unicité de solution

Dans cette section, nous rappelons des notions de base par rapport à la norme et des théorèmes principaux concernant l'existence et l'unicité de la solution.

Soit $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 1$. Dans cette section nous travaillerons avec des champs vectoriels de fonctions $\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^d$), que nous noterons

$$\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d), \text{ où } v_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ (} i = 1, \dots, d \text{),}$$

Pour un tel champ, nous écrirons les opérateurs vectoriels associés de la manière suivante :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad ,$$

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \nabla v_1 \\ \dots \\ \nabla v_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v_1}{\partial x_d} \\ \dots \\ \frac{\partial v_d}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v_d}{\partial x_d} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \dots \\ \Delta v_d \end{pmatrix} .$$

La norme d'un champ vectoriel \mathbf{u} dans un espace de Hilbert $H^1(\Omega)^d$ se note :

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^d} := \left(\sum_{j=1}^d \|u_j\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Si u_i est un champ scalaire dans l'espace $H^1(\Omega)$ alors par la définition de la norme H^1 :

$$\|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)} := \left(\sum_{j=1}^d \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|u_i\|_{H^1(\Omega)} .$$

Théorème 1.1 (Inégalité de Hölder) [11]

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d . $1 \leq r \leq \infty$, $1 \leq s \leq \infty$ et $1 \leq t \leq \infty$ tels que $(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{t})$. Alors

$$\forall f \in L^r(\Omega), \forall g \in L^s(\Omega), f.g \in L^t(\Omega),$$

et

$$\|f.g\|_{L^t(\Omega)} \leq \|f\|_{L^r(\Omega)} \|g\|_{L^s(\Omega)} .$$

Remarque 1.1 :

Cette inégalité devient l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $r = s = 2$ et $t = 1$.

Théorème 1.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) [1]

— **Dans un espace de Hilbert** :

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace pré-hilbertien. Alors, pour tous $u, v \in E$,

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|_E \|v\|_E .$$

— **Avec des sommes** :

Soient \mathbf{u} et $\mathbf{v} \in \Omega$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^d$). Alors :

$$\sum_{k=1}^d |u_k v_k| \leq \left(\sum_{k=1}^d |u_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^d |v_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

— **Avec des intégrales :**

Soient $f, g \in L^2(\Omega)$. Alors :

$$\int_{\Omega} |fg| \, dx \leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |g|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.3 (Inégalité de Poincaré) [1].

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d . Alors, il existe une constante $C > 0$ (dépende de Ω) telle que : pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega)$, nous avons :

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\Omega} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Remarque 1.2 :

Une inégalité de Poincaré est une inégalité qui permet de contrôler (estimer) la norme L^2 d'une fonction par la norme L^2 de son gradient.

Théorème 1.4 :

Soit Ω un ouvert borné régulier (i.e. admettent au plus des point anguleux) de \mathbb{R}^n . $v \in H^1(\Omega)$ n'est pas définie sur le bord, car les fonctions de $H^1(\Omega)$ ne sont pas continues si $n \geq 2$.

On introduit la fonction trace :

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) &\rightarrow L^2(\partial\Omega) \\ v &\mapsto \gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega}, \end{aligned}$$

qui est continue. Dans ces conditions,

$$\exists C > 0, \forall v \in H^1(\Omega), \|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Où

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), \gamma_0 v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

1.1.1 Formules de Green et formule de la divergence

Nous donnons quelques rappels utiles par la suite.

Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^d , soient $v, w \in H^1(\Omega)$ et soient $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in H^2(\Omega)$.

Formule de Green

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} w \, dx = \int_{\partial\Omega} v n_i w \, d\sigma - \int_{\Omega} v \frac{\partial w}{\partial x_i} \, dx.$$

a) Pour tous champs scalaires v, w réguliers, on a :

$$-\int_{\Omega} (\Delta w) v \, dx = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} v \, d\sigma, \quad (1.1)$$

où \mathbf{n} est la normale unitaire extérieure à Ω

b) Pour tous champs vectoriels \mathbf{v}, \mathbf{w} réguliers, on a :

$$-\int_{\Omega} \Delta \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} : \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma, \quad (1.2)$$

$$\text{avec } \nabla \mathbf{w} : \nabla \mathbf{v} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}.$$

c) Soit Ω un ouvert régulier de \mathbb{R}^d et $p : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $\mathbf{v} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ un champ vectoriel de classe C^2 . Alors

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} \, dx = - \int_{\Omega} p \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx + \int_{\partial\Omega} (p \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\sigma, \quad (1.3)$$

où $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$ est le vecteur normal unitaire à $\partial\Omega$.

Formule de la divergence :

Pour tout champ vectoriel \mathbf{v} régulier, nous avons

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma, \quad (1.4)$$

où \mathbf{n} est la normale unitaire extérieure à Ω

Nous notons par $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$ la norme sur \mathbb{X} .

1.1.2 Théorème de Lax-Milgram

Définition 1.1 :

Soient \mathbb{X} un espace de Hilbert, $a : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. Nous disons que

1) $a(u, v)$ est continue sur \mathbb{X} si :

$$\text{Il existe } M > 0 \quad \forall u, v \in \mathbb{X} \text{ tel que } |a(u, v)| \leq M \|u\|_{\mathbb{X}} \|v\|_{\mathbb{X}}.$$

2) $a(u, v)$ est coercive sur \mathbb{X} si :

$$\text{Il existe } \alpha > 0 \text{ tel que } \alpha \|v\|_{\mathbb{X}}^2 \leq a(v, v).$$

3) $a(u, v)$ est symétrique si :

$$\forall u, v \in \mathbb{X}, \quad a(u, v) = a(v, u).$$

Théorème 1.5 (Théorème de représentation de Lax-Milgram)[10].

Soit $a : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue et coercive sur l'espace de Hilbert \mathbb{X} et soit $L : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue sur \mathbb{X} . Alors, il existe un unique $u \in \mathbb{X}$ tel que l'équation $a(u, v) = L(v)$ soit vérifiée pour tout v de \mathbb{X} , c-à-d :

$$\exists! u \in \mathbb{X} \quad \forall v \in \mathbb{X}, \quad a(u, v) = L(v). \tag{1.5}$$

Chapitre 2

Méthodes de domaines fictifs

Dans ce chapitre, nous parlons des méthodes de domaine fictif en présentant certaines de ces méthodes, les méthodes de pénalisations, les méthodes de la frontière élargie, les méthodes de frontières immergées.

2.1 Méthodes de pénalisation

Les méthodes de pénalisation, pour les problèmes des domaines fictifs, ont été introduites dès les années 1960 par V. K. Saul'ev [30] et V. D. Kopčenov [19], où un terme de pénalisation est ajouté au coefficient de diffusion. Ces auteurs considéraient toutefois une adaptation locale du maillage du domaine fictif (déplacement de noeuds) afin de prendre en compte les conditions aux limites immergées. Ces méthodes ont été également développées par E. Acquis [5] et J. Caltagirone [12] pour les équations de Navier Stokes et par P. Angot en 1989 [2], où un terme de pénalisation est utilisé dans l'équation de Poisson. L'idée des méthodes de pénalisation est d'utiliser une unique équation sur le domaine fictif Ω en perturbant le moins possible l'équation sur le domaine réel. Pour cela on introduit un terme de pénalisation. Ce terme est divisé par un paramètre de pénalisation que l'on note η , avec $0 < \eta \ll 1$ de telle sorte que le terme de pénalisation soit nul sur le domaine réel (ou une approximation) et qu'il tende vers l'infini sur le domaine extérieur (ou une

approximation).

Nous allons décrire ces méthodes sur un cas simple, celui des équations elliptiques scalaires avec des conditions aux bords de type Dirichlet, Neumann ou Robin, pour un maillage structuré de taille de maille h pour le domaine fictif et pour une approximation par une méthode d'éléments finis de Lagrange $Q1$ pour $d = 2$. Les résultats présentés proviennent principalement des travaux de I. Ramière [25], [26], [27] et [28].

2.1.1 Position du problème et conditions aux bords

Soient \tilde{a} un champs de matrices de dimension $d \times d$ dont les coefficients sont dans $L^\infty(\tilde{\Omega})$, et qui sont uniformément symétriques définies positives sur $\tilde{\Omega}$, \tilde{b} un scalaire de $L^\infty(\tilde{\Omega})$, strictement positif et \tilde{f} un second membre dans $L^2(\tilde{\Omega})$. Nous considérons le problème de l'équation elliptique suivante :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\tilde{a}\nabla\tilde{u}) + \tilde{b}\tilde{u} = \tilde{f} & \text{dans } \tilde{\Omega}, \\ C.B. & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (2.1)$$

où C.B. représente les conditions au bord sur Γ , qui peuvent être :

- Soit de Dirichlet : $\tilde{u} = u_D$ avec $u_D \in H^{1/2}(\Gamma)$.
- Soit de Robin : $-(\tilde{a}.\nabla\tilde{u}).n = \alpha_R\tilde{u} + g_R$ avec $\alpha_R \in L^\infty(\Gamma)$, $\alpha_R \geq 0$, $g_R \in L^2(\Gamma)$ et n le vecteur normal unitaire sortant,
- Soit de Neumann : cas Robin : $\alpha_R = 0$.

L'idée des méthodes de pénalisation est de résoudre le système suivant sur le domaine fictif :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a\nabla u) + bu = f & \text{dans } \Omega, \\ C.B. \text{ originale de (2.1)} & \text{sur } \partial\Omega \cap \Gamma, \\ C.B. \text{ nécessaire} & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma, \end{cases} \quad (2.2)$$

Afin d'assurer l'existence et l'unicité de u , les coefficients a , b , et f doivent vérifier les hypothèses similaires à \tilde{a} , \tilde{b} et \tilde{f} suivantes :

a est un champ de matrices de dimension $d \times d$ dont les coefficients sont dans $L^\infty(\Omega)$ et sont uniformément symétriques définies positives sur Ω , b est un scalaire de $L^\infty(\Omega)$, strictement positif, f est dans $L^2(\Omega)$. Les conditions aux limites (celles sur Ω et celle sur $\partial\Omega$ le bord du domaine fictif) dépendent des méthodes et des conditions au bord choisies. Dans la suite, on note n la normale unitaire sortante sur le bord de $\tilde{\Omega}$ et $\psi \in H^1(\tilde{\Omega} \cup \Omega_e)$. On note ψ^- (resp. ψ^+) sur Γ la trace $\psi|_{\tilde{\Omega}}$ (resp. $\psi|_{\Omega_e}$). On définit $[\psi] = \psi^+ - \psi^-$ le saut de la trace par rapport à la normale n orientée et $\bar{\psi} = \frac{1}{2}(\psi^+ + \psi^-)$ la moyenne arithmétique. Dans les méthodes que l'on va regarder, on va dans un premier temps approcher la frontière immergée à l'aide d'une union de maille qui la traverse (méthode à interface diffuse). On considérera ensuite la frontière immergée comme étant approchée par des faces de mailles (méthode à interface fine). Une approximation par une méthode d'éléments finis de Lagrange Q_1 est effectuée. On considère par la suite, une triangulation T_h du domaine fictif qui est composée de quadrangles et qui est de plus structurée. On introduit les notations suivantes : $h_K = \text{diam}(K)$ distance euclidienne maximale entre deux points de K , $h = \max(h_K, K \in T_h)$ la taille de maille, $\rho_K = \min_{1 \leq i \leq 2^d} \rho_i$, ρ_i étant le minimum des diamètres du cercle inscrit aux triangles obtenus en joignant les 3 sommets $(a_j)_{j \neq i}$.

Définition 2.1 (*Famille Régulière*) :

Une famille T_h d'éléments finis est régulière s'il existe une constante σ tel que

$$\forall h, \forall K \in T_h, \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma.$$

On définit

$$V_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) \mid \forall K \in T_h, v|_K \in Q_1(K)\} \text{ et } V_h^0 = \{v \in V_h \mid v|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

2.1.2 Méthodes de pénalisation à interface diffuse

Ces méthodes sont décrites dans [26]. Elles consistent à approcher l'interface Γ par une interface épaisse $\omega_{h,\Gamma}$. On considère les domaines discrets suivants :

$$\tilde{\Omega}_h = \bigcup_{K \in T_h, K \subset \tilde{\Omega}} K, \quad \omega_{h,\Gamma} = \bigcup_{K \in T_h, K \cap \Gamma \neq \emptyset} K \quad \text{et} \quad \Omega_{e,h} = \bigcup_{K \in T_h, K \notin \tilde{\Omega}_h \cup \omega_{h,\Gamma}} K$$

qui sont respectivement une discrétisation du domaine réel $\tilde{\Omega}$, celle de Γ (**l'interface diffuse**) et celle du domaine extérieur Ω_e (voir Figure 2.1). On impose naturellement, sur l'approximation du domaine réel :

$$a|_{\tilde{\Omega}_h} = \tilde{a}|_{\tilde{\Omega}_h}, \quad b|_{\tilde{\Omega}_h} = \tilde{b}|_{\tilde{\Omega}_h}, \quad f|_{\tilde{\Omega}_h} = \tilde{f}|_{\tilde{\Omega}_h}.$$

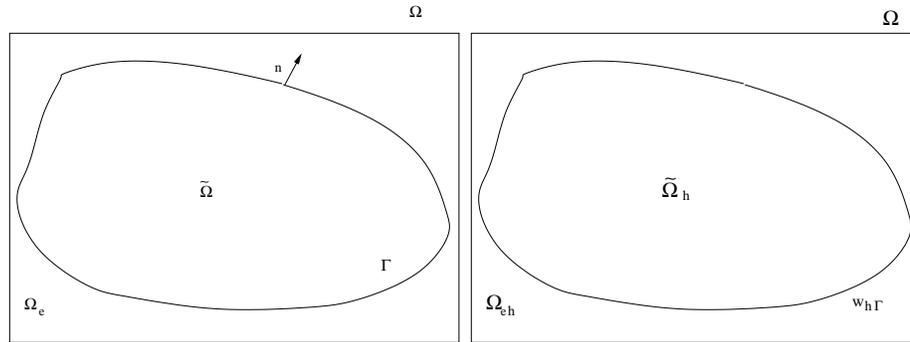


FIGURE 2.1 – Définition des domaines pour la méthode d'interface diffuse.

Cas de condition au bord de Dirichlet

Si on prend comme condition au bord $\tilde{u} = u_D$ avec $u_D \in H^{1/2}(\Gamma)$, alors en dehors du domaine réel $\tilde{\Omega}$, on doit inclure un terme de pénalisation qui tend vers l'infini. On peut le faire de deux manières différentes : pénaliser sur $\omega_{h,\Gamma}$ ou sur $\Omega_{e,h}$.

Pour pénaliser sur $\omega_{h,\Gamma}$, on choisit un relèvement $u_{D,r}$ de u_D dans $H^1(\Omega)$ et on pose

$$a = \frac{1}{\eta} Id, \quad b = \frac{1}{\eta}, \quad f = \frac{1}{\eta} u_{D,r} \quad \text{sur } \omega_{h,\Gamma},$$

et

$$a = Id, \quad b = 0, \quad f = 0 \quad \text{sur } \Omega_{e,h}.$$

Concernant les conditions au bord sur $\partial\Omega$, on doit seulement imposer la condition de Dirichlet $u = u_D$ sur $\partial\Omega \cap \partial\omega_{h,\Gamma}$. En effet, seule la condition au bord sur les noeuds liés à $\partial\Omega \cap \partial\omega_{h,\Gamma}$ concerne la solution dans le domaine réel. La condition au bord sur le reste $\partial\Omega$ peut être choisie arbitrairement. L'autre possibilité est la pénalisation sur $\Omega_{e,h}$, qui consiste à prendre le choix des coefficients suivants :

$$\begin{aligned} a &= \tilde{a}, \quad b = \tilde{b}, \quad f = \tilde{f} && \text{sur } \omega_{h,\Gamma}, \\ a &= \frac{1}{\eta} Id, \quad b = \frac{1}{\eta}, \quad f = \frac{1}{\eta} u_{D,r} && \text{sur } \Omega_{e,h}. \end{aligned}$$

Le système initial est préservé sur $\omega_{h,\Gamma}$ et il devient négligeable sur $\Omega_{e,h}$. La condition au bord sur $\partial\Omega$ doit être $u|_{\partial\Omega} = u_{D,r}$.

En considérant des conditions de Dirichlet sur $\partial\Omega$ et $0 < \eta \ll 1$, la formulation variationnelle sur le domaine fictif consiste à chercher $\phi \in H_0^1(\Omega)$ avec $\phi = u_\eta - u_{D,r}$ tel que

$$\int_{\Omega} a \nabla \phi \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} b \phi v dx = \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Omega} a \nabla u_{D,r} \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} b u_{D,r} v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Le problème discret revient à chercher $\phi^h \in V_h^0$ tel que

$$\int_{\Omega} a \nabla \phi^h \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} b \phi^h v dx = \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Omega} a \nabla u_{D,r} \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} b u_{D,r} v dx, \quad \forall v \in V_h^0.$$

Condition au bord de Robin ou de Neumann

Dans ce cas, on considère la condition au bord $-(a \cdot \nabla u) \cdot n = \alpha_R u + g_R$ ($\alpha_R = 0$ dans le cas Neumann).

On suppose dans la suite que g_R est défini dans un voisinage du bord Γ . La formulation variationnelle du problème 2.2 sur $\tilde{\Omega}$ et Ω_e sont : $\forall v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_{\tilde{\Omega}} a \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\tilde{\Omega}} b u v dx - \int_{\Gamma} (a \nabla u)^- \cdot n v ds - \int_{\partial \Omega \cap \Gamma} (a \nabla u) \cdot n v ds = \int_{\tilde{\Omega}} f v dx \quad \text{dans } \tilde{\Omega},$$

$$\int_{\Omega_e} a \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega_e} b u v dx + \int_{\Gamma} (a \nabla u)^+ \cdot n v ds - \int_{\partial \Omega / \Gamma} (a \nabla u) \cdot n v ds = \int_{\Omega_e} f v dx \quad \text{dans } \Omega_e.$$

Donc la somme des deux formulations variationnelles s'écrit dans Ω :

$$\int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} b u v dx + \int_{\Gamma} ((a \nabla u)^+ \cdot n - (a \nabla u)^- \cdot n) v ds - \int_{\partial \Omega} (a \nabla u) \cdot n v ds = \int_{\Omega} f v dx,$$

$$\int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} b u v dx - \int_{\partial \Omega} (a \nabla u) \cdot n v ds = \int_{\Omega} f v dx - \langle ((a \nabla u)^+ \cdot n - (a \nabla u)^- \cdot n) \delta_{\Gamma}, v \rangle.$$

Au sens des distributions, le problème sur le domaine fictif devient :

$$-\operatorname{div}(a \nabla u) + b u = f - ((a \nabla u)^+ \cdot n - (a \nabla u)^- \cdot n) \delta_{\Gamma}.$$

On a :

$$-(a \nabla u)^- \cdot n = \alpha_R \tilde{u} + g_R.$$

On va choisir $a|_{\Omega_e}$ assez petit pour que

$$(a \nabla u)^+ \cdot n \simeq 0.$$

On obtient donc

$$-\operatorname{div}(a \nabla u_{\eta}) + b u_{\eta} = f - (\alpha_R \tilde{u}_{\eta} + g_R) \delta_{\Gamma}.$$

Le domaine fictif est discrétisé grâce à un maillage structuré. Or la condition de Robin est définie sur le bord du domaine réel Γ .

En général, le bord du domaine réel n'étant pas défini exactement, on considère une approximation de la fonction Dirac de celui-ci. Pour cela, on définit $\epsilon > 0$ de telle manière à ce que l'on ait

$$\int_{\Gamma} \alpha_R u + g_R ds \simeq \int_{\omega_{h,\Gamma}} \frac{\alpha_R u + g_R}{\epsilon} dx.$$

On prend :

$$a = \tilde{a}, \quad b = \tilde{b} + \frac{\alpha_R}{\epsilon}, \quad f = \tilde{f} - \frac{g_R}{\epsilon} \quad \text{sur } \omega_{h,\Gamma},$$

$$a = \eta Id, \quad b = 0, \quad f = 0 \quad \text{sur } \Omega_{e,h}.$$

Comme dans le cas de la condition du type Dirichlet, les conditions au bord sur la partie $\partial\Omega \cap \partial\omega_{h,\Gamma}$ s'intègrent de manière standard. On se place dans la suite dans le cas de condition au bord de type Neumann homogène. La formulation variationnelle sur le domaine fictif consiste à chercher :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\eta \in H^1(\Omega) \quad \text{tel que} \\ \int_{\Omega} a \nabla u_\eta \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} b u_\eta v dx = \int_{\Omega} f v dx - \int_{\omega_{h,\Gamma}} \frac{\alpha_R u_\eta + g_R}{\epsilon} v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{array} \right.$$

Le problème discret revient quant à lui à chercher :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\eta^h \in V_h \quad \text{tel que} \\ \int_{\Omega} a \nabla u_\eta^h \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} b u_\eta^h v dx = \int_{\Omega} f v dx - \int_{\omega_{h,\Gamma}} \frac{\alpha_R u_\eta^h + g_R}{\epsilon} v dx, \quad \forall v \in V_h. \end{array} \right.$$

Sous les hypothèses qui ont été considérées sur \tilde{a} , \tilde{b} et sur les données \tilde{f} et u_D le théorème de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de la solution de ces deux problèmes.

2.1.3 Méthodes de pénalisation à interface fine

Les méthodes de pénalisation à interface fine sont en particulier étudiées dans [27] qui présente le cas de conditions aux bord mixtes de plus une stratégie de raffinement local multi-niveaux du maillage. A chaque niveau raffinement, un ensemble de patches de forme simple (rectangulaire en $2D$) est généré. Ces patches sont des sous-grilles emboîtées centrées autour d'un volume de contrôle du niveau grossier, situé autour de l'interface fine à approcher, Γ .

Soient $\tilde{\Omega}_h = \bigcup_{K \in T_h, K \subset \tilde{\Omega}, K \cap \Gamma \neq \emptyset} K$, $\Gamma_h = \partial\tilde{\Omega}_h$ et $\Omega_{e,h} = \bigcup_{K \in T_h, K \notin \tilde{\Omega}_h \cup \omega_{h,\Gamma}} K$ qui sont

respectivement une discrétisation du domaine réel, une de l'interface fine et une de Ω_e (voir Figure 2.2).

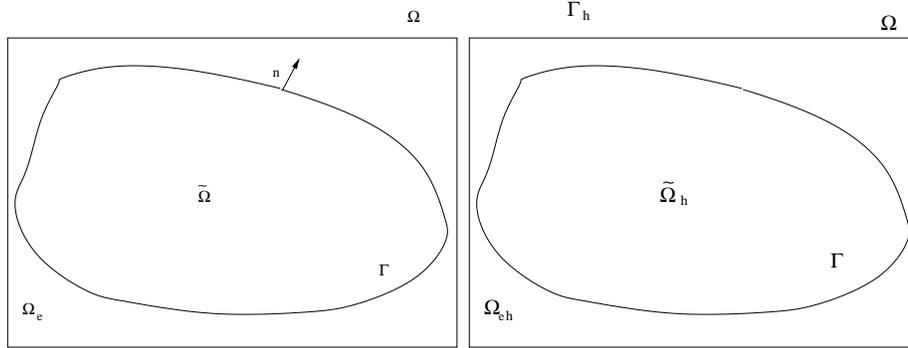


FIGURE 2.2 – Définition des domaines pour la méthode d'interface fine.

On procède de la même manière que précédemment. On ajoute de plus, des conditions sur Γ_h , qui sont des conditions de transmissions liant les sauts de flux et de solution sur l'approximation de la frontière immergée (voir [3]) :

$$[(a \cdot \nabla u) \cdot n]_{\Gamma_h} = \alpha \bar{u}|_{\Gamma_h} - q \quad \text{sur } \Gamma_h,$$

et

$$\overline{(a \cdot \nabla u) \cdot n}|_{\Gamma_h} = \beta [u]_{\Gamma_h} - g \quad \text{sur } \Gamma_h,$$

avec $q, g \in L^2(\Omega)$, α, β que l'ont déterminera ensuite. Ces conditions plus générales sont inspirées du cas modèle de fractures. Elles vont servir et seront choisies afin d'isoler la solution du domaine physique approché du domaine fictif extérieur. Le problème que l'on souhaite donc résoudre est :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(a \nabla u) + bu = f & \text{dans } \Omega, \\ C.B. \text{ originale de (2.1)} & \text{sur } \partial\Omega \cap \Gamma, \\ C.B. \text{ nécessaire} & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma, \\ [(a \nabla u) \cdot n]_{\Gamma_h} = \alpha \bar{u}|_{\Gamma_h} - q & \text{sur } \Gamma_h, \\ \overline{(a \nabla u) \cdot n}|_{\Gamma_h} = \beta [u]_{\Gamma_h} - g & \text{sur } \Gamma_h. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

On pose naturellement sur $\tilde{\Omega}$:

$$a|_{\tilde{\Omega}} = \tilde{a}|_{\tilde{\Omega}}, \quad b|_{\tilde{\Omega}} = \tilde{b}|_{\tilde{\Omega}}, \quad f|_{\tilde{\Omega}} = \tilde{f}|_{\tilde{\Omega}}.$$

Conditions au bord de type Dirichlet

On se retrouve dans la même situation que celle décrite dans le problème à interface diffuse. Pour une condition de bord $\tilde{u} = u_D$ avec $u_D \in H^{1/2}(\Gamma)$, il existe un relèvement $u_{D,r}$ de u_D dans $H^1(\Omega)$. En dehors du domaine réel $\tilde{\Omega}$, on inclut un terme de pénalisation qui tend vers l'infini. Deux pénalisations sont possibles : pénaliser sur Γ_h ou sur Ω_e . Si on adopte la pénalisation sur Γ_h , on pose $\eta \ll 1$ et on prend :

$$a|_{\Omega_e} = Id, \quad b|_{\Omega_e} = f|_{\Omega_e} = 0 \quad \text{dans } \Omega_e,$$

$$\alpha = 4\beta = \frac{2}{\eta}, \quad \frac{q}{2} - g = \frac{1}{\eta}u_D \quad \text{sur } \Gamma_h.$$

Si on adopte la pénalisation sur Ω_e , on pose $\eta \ll 1$ et on prend :

$$a|_{\Omega_e} = \frac{1}{\eta}Id, \quad b|_{\Omega_e} = \frac{1}{\eta}, \quad f|_{\Omega_e} = \frac{1}{\eta}u_D \quad \text{dans } \Omega_e,$$

$$\beta = \frac{1}{\eta}, \quad \alpha = q = g = 0 \quad \text{sur } \Gamma_h.$$

La formulation variationnelle sur le domaine fictif consiste à chercher $\phi \in H_0^1(\Omega)$ avec $\phi = u_\eta - u_{D,r}$ tel que :

$$\int_{\Omega} a \nabla \phi \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} b \phi v dx + \int_{\Gamma_h} (\alpha \bar{\phi}|_{\Gamma_h} + \beta [\phi]_{\Gamma_h}) v ds = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_h} (q + g) v ds$$

$$- \int_{\Omega} a \nabla u_{D,r} \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} b u_{D,r} v dx - \int_{\Gamma_h} (\alpha \bar{u}_{D,r}|_{\Gamma_h} + \beta [u_{D,r}]_{\Gamma_h}) v ds, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

le problème approché par éléments finis consiste à chercher $\phi_\eta^h \in V_h^0$ tel que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a \nabla \phi^h \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} b \phi^h v dx + \int_{\Gamma_h} (\alpha \bar{\phi}^h |_{\Gamma_h} + \beta [\phi^h]_{\Gamma_h}) v ds &= \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_h} (q + g) v ds \\ - \int_{\Omega} a \nabla u_{D,r} \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} b u_{D,r} v dx - \int_{\Gamma_h} (\alpha \bar{u}_{D,r} |_{\Gamma_h} + \beta [u_{D,r}]_{\Gamma_h}) v ds, &\quad \forall v \in V_h^0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

Conditions au bord de type Robin

On a aussi la même situation qui pour le problème à interface diffus, c'est à dire l'on considère la condition au bord $-(a \cdot \nabla u) \cdot n = \alpha_R u + g_R$ ($\alpha_R = 0$ dans le cas Neumann).

On prend :

$$\begin{aligned} a|_{\Omega_e} &= Id, \quad b|_{\Omega_e} = f|_{\Omega_e} = 0 \quad \text{dans } \Omega_e, \\ \alpha &= 4\beta = 2\alpha_R, \quad \frac{q}{2} - g = g_R \quad \text{sur } \Gamma_h. \end{aligned}$$

La condition au bord de Ω est la même, on prend un condition du type Neumann homogène. La formulation variationnelle sur le domine fictif consiste à chercher

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\eta \in H^1(\Omega) \quad \text{tel que} \\ \int_{\Omega} a \nabla u_\eta \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} b u_\eta v dx + \int_{\Gamma} (a \bar{u}_\eta |_{\Gamma} - q + \beta [u_\eta]_{\Gamma} - g) v ds \\ = \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Gamma} (\alpha_R u + g_R) v ds, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{array} \right.$$

Le problème discret consiste à chercher

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\eta^h \in V_h \quad \text{tel que} \\ \int_{\Omega} a \nabla u_\eta^h \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} b u_\eta^h v dx + \int_{\Gamma_h} (\alpha \bar{u}_\eta^h |_{\Gamma_h} + \beta [u_\eta^h]_{\Gamma_h} + \alpha_R u_\eta^h) v ds \\ = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_h} (q + g - g_R) v ds, \quad \forall v \in V_h. \end{array} \right. \quad (2.5)$$

2.1.4 Avantages et inconvénient de la méthode avec pénalisations

Les avantages de la méthode de domaine fictif avec pénalisation peuvent être résumés comme suit :

1. La méthode nécessite l'utilisation d'un unique maillage cartésien pour les deux approches (interface finie ou diffuse).
2. Les conditions limites sont simulées avec une seule formulation générique.
3. La méthode est facile et rapide à implémenter.

Un taux de convergence en $o(\eta^{\frac{1}{2}})$ en norme L^2 pour une pénalisation surfacique et en $o(\eta^{\frac{3}{2}})$ en norme H^1 pour une pénalisation volumique a été obtenue numériquement dans [27]. Dans [4], une étude théorique a été faite sur une équation de Darcy pour une pénalisation L^2 et une équation de Brinkmann pour une pénalisation H^1 .

Les inconvénients sont la perte de consistance et l'ordre de convergence lent en $o(h^{\frac{1}{2}})$ qui peut être considéré comme réhibitoire pour certaines applications.

2.2 Méthode de la frontière élargie

La méthode de frontière élargie est une méthode de domaine fictif initialement développée par Bertrand Maury dans [21], [6] pour des équations de Poisson dans un domaine contenant des trous et avec des conditions aux bords de type Dirichlet. Elle a été ensuite étendue à d'autres équations et largement utilisée (on citera par exemple [7, 13, 16]).

Cette méthode consiste à tirer profit de l'approche de domaine fictif en utilisant un maillage structuré sur le domaine fictif Ω et un maillage volumique ω localisé autour de la frontière immergée afin d'obtenir une précision suffisante autour de la frontière immergée Ω_e (voir Figure 2.3). Le problème à résoudre est remplacé par deux problèmes : un premier défini localement sur ω et un second défini globalement sur le domaine fictif Ω étendu par

Ω_e . Le problème est ensuite relaxé et un procédé itératif de point fixe est utilisé afin de résoudre les deux problèmes. On définit n_i la normale intérieure à Ω_e et n_e la normale extérieure à Ω_e . Le taux de convergence théorique en norme $H_0^1(\Omega)$ est d'ordre $\frac{1}{2}$, en effet u n'est en général pas régulier sur Ω_e . Dans l'article [7], il a été constaté toutefois sur des tests numériques un ordre de convergence optimal en norme $H^1(\omega)$ et $H^1(\Omega \setminus (\overline{\Omega}_e \cup \overline{\omega}))$ pour l'élément fini utilisé, dans des exemples de dimension 1 et 2.

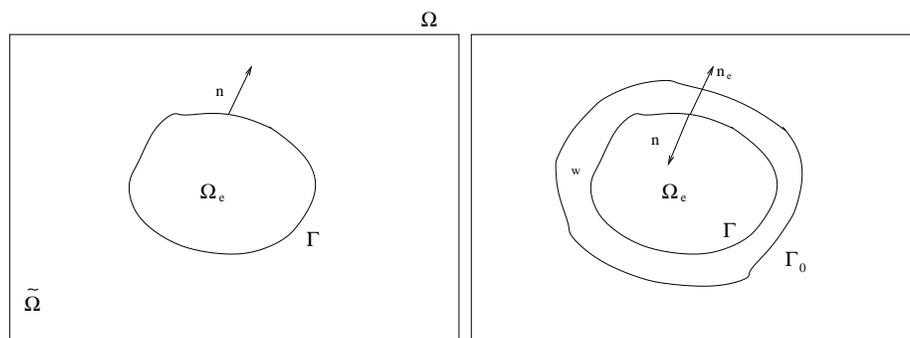


FIGURE 2.3 – Exemple de méthodes à frontière élargie.

2.2.1 Estimation de l'erreur

Soit $\tilde{f} \in L^2(\tilde{\Omega})$, on doit trouver $\tilde{u} \in V$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u} = \tilde{f} & \text{dans } \tilde{\Omega}, \\ \tilde{u}|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

On souhaite résoudre un problème fictif défini sur Ω , pour cela, on définit f l'extension de \tilde{f} défini sur $\tilde{\Omega}$ par 0 sur Ω_e :

$$f|_{\tilde{\Omega}} = \tilde{f}|_{\tilde{\Omega}}, \quad f|_{\Omega_e} = 0.$$

on a l'ensemble U_h défini par : $U_h = \{u \in \varphi^0(\overline{\Omega}) \mid u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \forall K \in m_{\Omega}, u|_K \in P_1(K)\}$.

Propriétés 2.1 (*Hypothèses sur U_h*). Soit G_0, G des sphères concentriques fixées et données tel que $G_0 \subset\subset G \subset\subset \Omega$, il existe h_0 tel que pour tout $h \leq h_0$, on a pour $R \geq 1, M > 1$

fixés

A.1. $\forall u \in H^1(G)$ (resp. $H_0^1(G_0)$), $\exists g \in U_h$ (resp. $H_0^1(G)$) tel que $\forall 0 \leq s \leq R$,
 $s \leq l \leq M$

$$\|u - g\|_{s,G} \lesssim h_\Omega^{l-s} \|u\|_{l,G}.$$

A.2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(G_0)$ et $u_h \in U_h$, alors $\exists g \in U_h \cap H_0^1(G)$ tel que

$$\|\varphi u_h - g\|_{1,G} \leq C(\varphi, G, G_0) h_\Omega \|u_h\|_{1,G}.$$

A.3. $\forall h \leq h_0$, $\exists G_h$ avec $G_0 \subset\subset G_h \subset\subset G$ tel que si $0 \leq t \leq s \leq R$ alors $\forall u_h \in U_h$,
on a

$$\|u_h\|_{s,G_h} \lesssim h_\Omega \|u_h\|_{t,G_h}.$$

Ces hypothèses standards sont vérifiées par les espaces d'éléments finis définis sur un maillage quasi-uniforme. Les paramètres R et M jouent respectivement le rôle de la régularité et l'ordre de l'approximation de l'espace d'approximation U_h .

Propriétés 2.2 (Hypothèses sur ∂_n^h). Pour $S \geq 2$ fixé

B.1. Si $v \in W$ est tel que $\Delta v \in L^2(\omega)$ alors

$$\|\partial_n^h v\|_{-1/2,\Gamma} \lesssim \|\Delta v\|_{0,\omega} + \|v\|_{1/2,\Gamma_0}.$$

B.2. Si $v \in H^s(\omega)$, $2 \leq s \leq S$ alors

$$\|\partial_n v - \partial_n^h v\|_{-1/2,\Gamma} \lesssim h_\omega^{s-1} \|v\|_{s,\omega}.$$

On ne choisit pas une méthode particulière ici, on admet juste que l'on peut calculer une approximation de ∂_n sur Γ . De plus, afin de démontrer la convergence de problème discret, on a besoin que ∂_n^h soit linéaire, stable et soit une bonne approximation de la dérivée normale extérieur en norme $H^{-1/2}(\Gamma)$.

On définit l'opérateur

$$\begin{aligned} T_f^* : H_0^1(\Omega) &\rightarrow H_0^1(\Omega) \quad \text{tel que} \\ -\Delta T_f^* u &= f + \partial_n^h v^* \delta_\Gamma. \end{aligned}$$

Où v^* l'unique solution de

$$-\Delta v^* = f \quad \text{dans } \omega, \quad v^*|_{\Gamma} = 0 \quad \text{et} \quad v^*|_{\Gamma_0} = \Pi_h u|_{\Gamma_0}.$$

Soit on définit

$$u^{n+1} = \theta u^n + (1 - \theta)\bar{u}^{n+1}, \quad (2.7)$$

et on a $\theta \in]1 - 2/(1 + C)^2, 1[$, (C constant).

Lemme 2.1 :

Soit u^* un point fixe de l'opérateur T_f^* , alors $u_h = \Pi_h u^*$ est un point fixe de T_f^h . Inversement, soit u_h un point fixe de T_f^h , alors posons $u^* \in H_0^1(\Omega)$ défini par $u^* = T_f^* u_h$, u^* est un point fixe de T_f^* . De plus, soit $u_h^0 = \Pi_h u^0$ alors si l'itération (2.7) converge alors l'itération discrétisé de (2.7) aussi.

On peut maintenant étudier la convergence de la procédure itérative. On se place dans le cas où $f = 0$ et on note $T^* = T_{f=0}^*$.

Théorème 2.1 :

On se place dans le cas des hypothèses (A.1..3) et (B.1..2). Soit h_Ω suffisamment petit, il existe $h_0 \in]0, h_1[$ (h_0 suffisamment petit) et $\theta_0 \in]0, 1[$ tel que si on a $\theta_0 < \theta < 1$ et $h_\Omega + h_\omega \leq h_0$ alors la procédure itérative (2.7) converge vers une limite u^* , si le terme initial u^0 vérifie $-\Delta u^0 = f$ dans $\Omega \setminus \bar{\Omega}_e$ et dans Ω_e . De plus, u^* le point fixe de T_f^* vérifie

$$\|u^*\|_{1,\Omega} \lesssim \|f\|_{-1,\Omega} + \|f\|_{0,\omega}.$$

Erreur en norme $H_0^1(\Omega)$

Puisque u n'est pas régulier au delà de Γ en générale, alors la meilleure approximation est d'ordre $h_\Omega^{1/2-\epsilon}$. On a :

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \lesssim \|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega} + \|u - u^*\|_{1,\Omega}.$$

tel que $\Pi_h : H_0^1(\Omega) \rightarrow U_h$, la projection de Galerkin, définie par :

$$\int_{\Omega} \nabla \Pi_h u \cdot \nabla w_h dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w_h dx \quad \forall w_h \in U_h.$$

tell que :

$$U_h = \{u \in \varphi^0(\bar{\Omega}) \mid u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \forall K \in m_{\Omega}, u|_K \in P_1(K)\}$$

L'estimation suivante provient du lemme de Céa :

$$\|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega} \lesssim \inf_{v_h \in U_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega}.$$

Lemme 2.2 :

On se place sous les hypothèses (A.1..3) et (B.1..2), soit $h_{\Omega} + h_{\omega}$ suffisamment petit, si u satisfait $\Delta u = 0$ dans $\Omega \setminus \bar{\Omega}_e$ et dans Ω_e . Soit u^* le point fixe de la procédure itérative (2.7), alors on a :

$$\|u - u^*\|_{1,\Omega} \lesssim \|\partial_n u - \partial_n^h u\|_{-1/2,\Gamma} + \|u - \Pi_h u\|_{1/2,\Gamma_0}.$$

Corollaire 2.1 :

Sous les hypothèses du lemme précédent, si u la solution de (2.6) vérifie $u \in H^s(\Omega \setminus \bar{\Omega}_e) \cup H^2(\omega)$, $s < 3/2$, alors on a l'estimation d'erreur suivante :

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \lesssim \|\partial_n u - \partial_n^h u\|_{-1/2,\Gamma} + \|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega} \lesssim h_{\omega} \|u\|_{2,\omega} + h_{\Omega}^{s-1} \|u\|_{s,\Omega}.$$

Sous les hypothèses du lemme précédent, si u la solution de (2.6) vérifie $u|_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_e} \in H^s(\Omega \setminus \bar{\Omega}_e)$, $s \geq 3/2$ et $u|_{\omega} \in H^2(\omega)$ alors on a l'estimation d'erreur suivante :

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \lesssim h_{\omega} \|u\|_{2,\omega} + h_{\Omega}^{1/2} \log h_{\Omega} \|u\|_{s,\Omega}.$$

Erreur en norme $H^1(\Omega \setminus (\bar{\Omega}_e \cup \bar{\omega}))$

Puisque u est régulier sur $\Omega \setminus \bar{\Omega}_e$, on espère obtenir une meilleure approximation sur un sous domaine de ce domaine.

Proposition 2.1 :

Si on se place sous les hypothèses du théorème 2.1, si $u|_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_e} \in H^s(\Omega \setminus \bar{\Omega}_e)$ pour $s \leq M$, on a :

$$\|u - u_h\|_{1, \Omega \setminus (\bar{\Omega}_e \cup \bar{\omega})} \lesssim h_\Omega^{s-1} (|u|_{s, \Omega \setminus \bar{\Omega}_e} + \|u\|_{1, \Omega}) + \|\partial_n u - \partial_n^h u\|_{-1/2, \Gamma}.$$

Corollaire 2.2 :

Sous les hypothèses de la proposition précédente, si $u \in H^s(\Omega \setminus \bar{\Omega}_e)$ pour $1 < s \leq \min(M, S)$, on a :

$$\|u - u_h\|_{1, \Omega \setminus (\bar{\Omega}_e \cup \bar{\omega})} \lesssim (h_\Omega^{s-1} + h_\omega^{s-1}) |u|_{s, \Omega \setminus \bar{\Omega}_e}.$$

Erreur en norme $H^1(\omega)$

Pour les mêmes raisons que précédemment, on ne peut pas obtenir une approximation optimale de u par u_h dans un voisinage de Γ . Mais on peut, après avoir calculé un u_h , obtenir une meilleure approximation de u dans ω en trouvant la solution v^* de l'équation

$$-\Delta v^* = f \text{ dans } \omega, \quad v^* = u_h \text{ sur } \Gamma_0, \quad v = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

On observe que

$$\|u - u^*\|_{1, \omega} \lesssim \|u - u_h\|_{1/2, \Gamma_0} \lesssim \|u - u_h\|_{1, \Omega \setminus (\bar{\Omega}_e \cup \bar{\omega})}.$$

On n'a aucun résultat de régularité sur v^* , on ne peut donc pas borner directement l'erreur d'approximation. Cependant, si on choisit une méthode stable et linéaire par rapport à H^1 , on peut obtenir une estimation de l'erreur optimale, grâce à

$$\|u - \Pi_h v^*\|_{1, \omega} \lesssim \|u - \Pi_h u\|_{1, \omega} + \|u - v^*\|_{1, \omega}.$$

2.2.2 Avantages et inconvénient de la méthode de la frontière élargie

La méthode à frontière élargie est une méthode qui à l'avantage d'avoir un ordre élevé d'approximation. Cet ordre élevé a été illustré numériquement dans [7].

L'inconvénient de cette méthode est d'utiliser un processus itératif de résolution d'un problème sur le domaine fictif et d'un autre problème à l'intérieur de la frontière élargie.

2.3 Méthodes de frontières immergées

Le terme de méthodes de frontières immergées désigne des Méthodes qui traitent des problèmes d'obstacles immergés dans un domaine. Elles ont été introduites et développées par Charles S. Peskin dans [22]. L'application visée à l'origine est la modélisation des écoulements sanguins dans le cœur humain. Depuis, elles ont été utilisées pour résoudre des problèmes d'interaction fluide-structure plus généraux.

On peut voir une synthèse de ces méthodes dans [23]. Dans [18], la méthode à frontières immergées est une méthode de lagrangien augmenté. Ces méthodes consistent à utiliser un terme de forçage et un maillage structuré. Nous décrivons dans la suite la méthode de frontière immergée de C.S. Peskin réécrite de manière à être plus conforme au cadre introduit dans les sections précédentes, en particulier avec l'utilisation d'une méthode d'éléments finis. Cette méthode consiste à utiliser deux maillages : un maillage structuré régulier de taille h pour le domaine fictif Ω et un maillage Lagrangien pour décrire la frontière immergée Ω_t . La prise en compte du domaine immergé se fait à l'aide d'une fonction δ de Dirac lissée qui permet de distribuer le domaine immergé sur les points voisins du maillage structuré. C'est cette fonction de Dirac lissée qui permet de lier les deux maillages (voir Figure 2.4). Cette frontière immergée sera notée Ω_0 quand on se place dans la configuration de référence et Ω_t quand on se place dans la configuration réelle au temps t . La discrétisation en espace des équations se fait à l'aide d'une méthode d'éléments finis par exemple de type Q_1 . La discrétisation en temps est effectuée à l'aide d'une méthode de Runge-Kutta d'ordre 2.

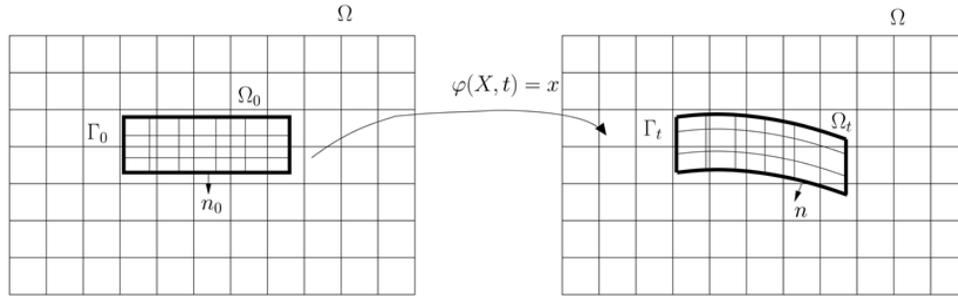


FIGURE 2.4 – Exemple de maillages sur un domaine fictif et sur le domaine immergé au cours du temps.

2.3.1 Avantages de la méthodes de frontières immergées

Cette méthode est utilisée dans de nombreux exemples d'interaction fluide-structure dans le cas incompressible (manche à air, valve dans le coeur ...). Elle a l'avantage d'utiliser deux maillages simples structurés et utilise une fonction de Dirac régularisée afin de lier ces deux maillages en "**projetant**" les noeuds du maillage de la frontière sur les noeuds du maillage du domaine fictif.

Des cas particuliers de la méthode à frontière immergée, pour des densités de force simple (dans une direction, par exemple) avec l'approche des éléments finis, sont présentés dans des articles de D. Boffi et L. Gastaldi [8] et [9]. Une méthode d'interface immergée a été développée pour améliorer la méthode de frontière immergée, en n'utilisant pas une interface diffuse afin de prendre en compte le bord du domaine réel. Cette méthode utilise des noeuds irréguliers près de la frontière du domaine réel, en ajoutant par exemple un noeud au centre des mailles. Dans l'article de 2008 de Charles Peskin et Yoichiro Mori [24], une convergence numérique d'ordre optimal, c'est à dire d'ordre 2, a été prouvée.

Chapitre 3

Application de la méthode de domaine fictif

3.1 Problème de Dirichlet

Nous nous proposons dans cette partie d'appliquer la méthode de domaine fictif pour le problème de Dirichlet qui nous permet de simplifier la prise en compte de domaine de géométrie complexe.

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 . Nous considérons le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

où f une fonction de $L^2(\Omega)$ et $u \in H_0^1(\Omega)$.

3.2 Formulation variationnelle

Nous supposons que $u \in H^2(\Omega)$. En multipliant l'équation de Laplace (3.1) par une fonction test v qui s'annule sur le bord $\partial\Omega$ et en intégrant sur Ω et après nous utilisons

la formule de Green, nous obtenons le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.2)$$

Nous définissons la forme bilinéaire $a : H_0^1 \times H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}$ et la forme linéaire continue

$F : H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

$$F(v) = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Théorème 3.1 :

Il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$.

Preuve.

1) Continuité de $a(.,.)$:

Soient $u, v \in H_0^1(\Omega)$, nous avons :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla u \cdot \nabla v| \, dx \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$$\begin{aligned} &\leq \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)} \| \nabla v \|_{L^2(\Omega)} \\ &= |u|_{H^1(\Omega)} |v|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Donc la forme bilinéaire a est continue avec $M = 1$ comme constante de continuité.

2) Coercivité de $a(.,.)$:

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, nous avons :

$$\begin{aligned}
a(v, v) &= \int_{\Omega} (\nabla v)^2 dx \\
&= \| \nabla v \|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= |v|_{H^1(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Donc la forme bilinéaire a est coercive avec $\alpha = 1$ la constante de coercivité.

3) Continuité de $F(., .)$:

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, nous avons :

$$\begin{aligned}
|F(v)| &= \left| \int_{\Omega} f v dx \right| \\
&\leq \int_{\Omega} |f v| dx
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$$\leq \| f \|_{L^2(\Omega)} \| v \|_{L^2(\Omega)}$$

pour l'inégalité de Poincaré on a :

$$\leq C_{\Omega} \| f \|_{L^2(\Omega)} |v|_{H^1(\Omega)}.$$

De plus, $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert. Alors, le théorème de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de u (solution de problème (3.2)).

■

Soit D un ouvert de \mathbb{R}^2 tel que $\Omega \subset D$, $\Omega_2 = D \setminus \bar{\Omega}$, $\Gamma = \partial\Omega$, soit f une fonction définie de D à valeur dans \mathbb{R} , maintenant nous allons résoudre un problème de pénalisation L^2 [31] avec un coefficient de pénalité $0 < \epsilon < 1$, qui est équivalent à la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u_\epsilon \in H_0^1(D) \text{ tel que} \\ \int_D \nabla u_\epsilon \cdot \nabla v \, dx + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega_2} u_\epsilon v \, dx = \int_D f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(D). \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Un autre exemple d'application de la méthode de domaine fictif avec pénalisation H^1 de (3.2) est de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u_\epsilon \in H_0^1(D) \text{ tel que} \\ \int_D \nabla u_\epsilon \cdot \nabla v \, dx + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega_2} \left(u_\epsilon v + \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx = \int_D f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(D). \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Théorème 3.2 (Theorem 2.1 dans [31]).

Soit D un domaine rectangulaire et Ω un domaine régulier. Il existe des solutions uniques u et u_ϵ pour (3.2) et (3.4), respectivement, et nous avons les estimations suivantes :

$$\|u_\epsilon - u\|_{1,\Omega} \leq C\epsilon, \quad (3.5)$$

$$\|u_\epsilon\|_{1,\Omega_2} \leq C\epsilon. \quad (3.6)$$

Nous donnons aussi un théorème concernant la régularité des solutions pour les problèmes de pénalisation H^1

Théorème 3.3 (Theorem 3.1 dans [31]).

Soit D un domaine rectangulaire et Ω un domaine régulier. Soit $u_\epsilon \in H_0^1(D)$ la solution du problème de pénalisation H^1 (3.4) pour $f \in L^2(\Omega)$. Alors nous avons

$$\begin{aligned} u_\epsilon|_\Omega &\in H^2(\Omega), & u_\epsilon|_{\Omega_2} &\in H^2(\Omega_2), \\ \|u_\epsilon - u\|_{1,\Omega} &\leq C\epsilon, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\|u_\epsilon\|_{1,\Omega_2} \leq C\epsilon. \quad (3.8)$$

3.3 Disque

Dans cette partie nous considérons Ω un disque inclus dans le domaine D , tel que $\Omega = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2 \right\}$, et D c'est le carré qui est défini par

$D = \{(x_1, x_2) \mid -3 < x_1 < 3, -3 < x_2 < 3\}$. Nous mettons $f = 4$ dans (3.1) nous obtenons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = 4 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.9)$$

La solution exacte de (3.9) est $u = 4 - x_1^2 - x_2^2$.

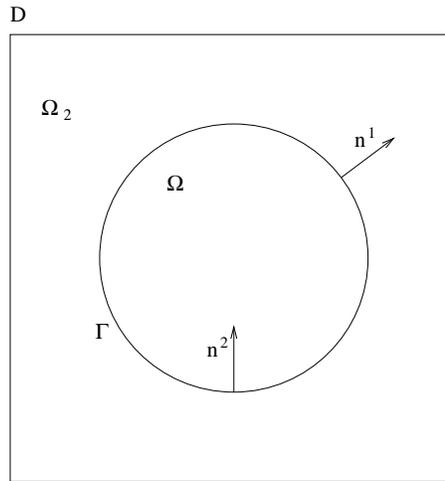


FIGURE 3.1 – Domaine de calcul

Nous avons calculé les erreurs relatives avec la norme $L^2(D)$ par la pénalisation L^2 et nous avons utilisé la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 , avec plusieurs valeurs de ϵ et de h , (où $h = \sqrt{2}/k$ ($k = N/6$), pour $N = 30, 60, 120, 300, 600$, et de générer une grille $N \times N$ dans le carré D) nous obtenons les résultats qui sont représentées par la Figure 3.2. Ensuite, nous avons utilisé la pénalisation H^1 et nous avons calculé l'erreur relative avec la norme $H^1(D)$, la Figure 3.3 représente ces résultats.

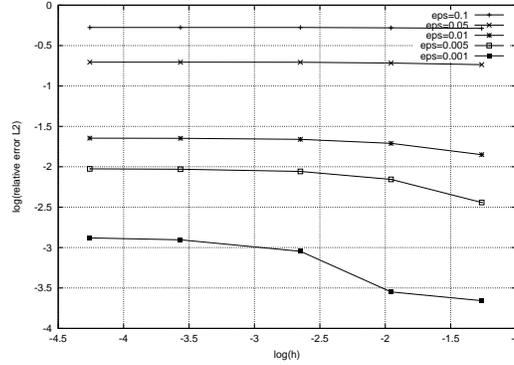


FIGURE 3.2 – Disque : pénalisation L^2 et l'erreur relative avec la norme $L^2(D)$ $\left(\frac{\|u_{\epsilon,h}-u\|_{0,D}}{\|u\|_{0,D}}\right)$ avec échelle logarithmique

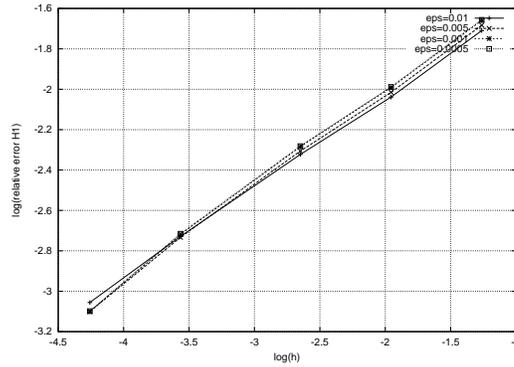


FIGURE 3.3 – Disque : pénalisation H^1 et l'erreur relative avec la norme $H^1(D)$ $\left(\frac{\|u_{\epsilon,h}-u\|_{1,D}}{\|u\|_{1,D}}\right)$ avec échelle logarithmique

Remarque 3.1 :

Nous pouvons voir à travers la Figure 3.2, si nous diminuons le terme de discrétisation h nous remarquons que l'erreur ne diminue pas et parfois elle augmente. Ce phénomène, nous pouvons l'expliquer par le fait que l'erreur avec la pénalisation L^2 dépend de h , mais aussi de ϵ (voir Théorème 3.3 dans [29]).

3.4 Ellipse

Dans cette partie nous considérons Ω une ellipse dans le domaine D qui à la même définition comme dans la section du cercle, tel que $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x_1^2/4 + x_2^2} \leq 1\}$. Nous mettons $f = 2.5$ dans (3.1) nous obtenons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = 2.5 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.10)$$

La solution exacte de (3.10) est $u = 1 - x_1^2/4 - x_2^2$.

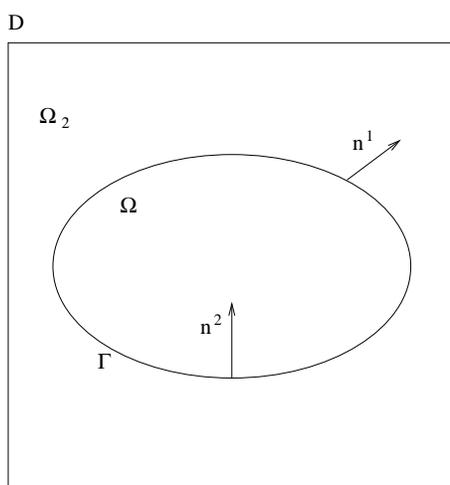


FIGURE 3.4 – Domaine de calcul

Nous avons fait les calculs identiques à la section précédente du disque mais au lieu de prendre un disque nous avons pris une ellipse, les résultats sont dans les figures suivantes :

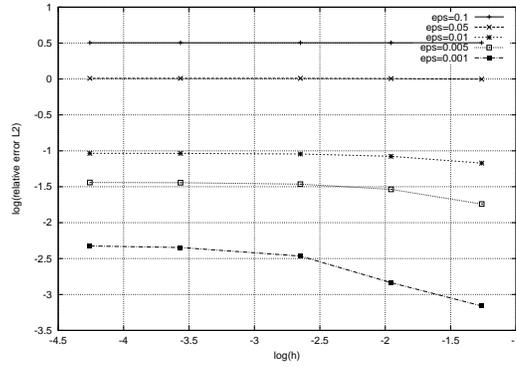


FIGURE 3.5 – Ellipse : pénalisation L^2 et l'erreur relative avec la norme $L^2(D)$ $\left(\frac{\|u_{\epsilon,h} - u\|_{0,D}}{\|u\|_{0,D}}\right)$ avec échelle logarithmique

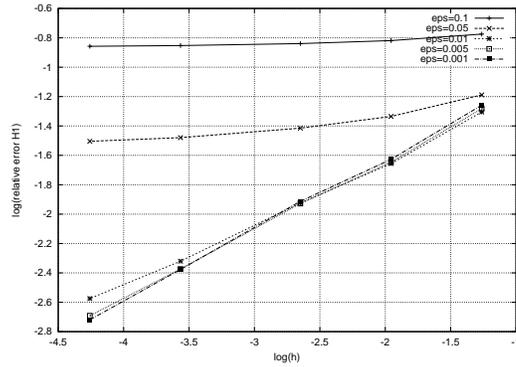


FIGURE 3.6 – Ellipse : pénalisation H^1 et l'erreur relative avec la norme $H^1(D)$ $\left(\frac{\|u_{\epsilon,h} - u\|_{1,D}}{\|u\|_{1,D}}\right)$ avec échelle logarithmique

Nous observons pour l'ellipse (Figure 3.5 et 3.6) le même phénomène que dans l'exemple précédent pour le disque, voir la remarque 3.1.

Conclusion Générale

La méthode de domaine fictif est une méthode permettant une résolution rapide et simple du problème étendu sur le domaine fictif, dans ce travail cette méthode a été testée avec succès, nous essaierons dans le futur d'appliquer cette méthode pour résoudre des problèmes plus compliqués d'un certain phénomène physique (en mécanique des fluides, électromagnétisme, biologie...).

Bibliographie

- [1] R.A.Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, San Francisco, London, 1975.
- [2] P. Angot. Contribution à l'étude des transferts thermiques dans des systèmes complexes ; Application aux composants électroniques. PhD thesis, Université de Bordeaux I, 1989.
- [3] P. Angot. A unified fictitious domain model for general embedded boundary conditions. *Comptes Rendus Mathématique*, 341(11) :683–688, december 2005.
- [4] P. Angot, Charles-Henri Bruneau, and Pierre Fabrie. A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. *Numerische Mathematik*, 1999.
- [5] E.P. Arquis. Convection mixte dans une couche poreuse verticale non confinée. Application à l'isolation perméodynamique. PhD thesis, Université de Bordeaux I, 1984.
- [6] S. Bertoluzza, M. Ismail, and B. Maury. Domain decomposition methods in science and engineering. *Journal of scientific computing*, 40 :513–520, 2005.
- [7] S. Bertoluzza, M. Ismail, and B. Maury. Analysis of the fully discrete fat boundary method. *Numerische Mathematik*, 118 :49–77, 2011.
- [8] D. Boffi, L. Gastaldi, and L. Heltai. A finite element approach to the immersed boundary method. *Comput. and Structures*, 81 :491–501, 2003.
- [9] D. Boffi, L. Gastaldi, and L. Heltai. The finite element immersed boundary method : Model, stability, and numerical results. *Int. Conf. on Computational Methods for*

- Coupled Problems in Science and Engineering, 2005.
- [10] H.Brézis. Analyse fonctionnelle, théorie et applications, dunod, Paris, 1999. Nouvelle présentation, 2005.
- [11] H.Brézis. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, New York, Heidelberg, London, 2010.
- [12] J. Caltagirone and E. Arquis. Recirculating flow in porous media. Comptes Rendus - Academie des Sciences, 302(14) :843–846, 1986.
- [13] S. Del Pino and Olivier Pironneau. A fictitious domain based general pde solver. Numerical methods for scientific computing variational problems and Applications, 2003.
- [14] M. Discacciati, Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Cour Master MA, EPFL, Lausanne, 2010.
- [15] M. Fabre. Méthodes de domaines fictifs pour les éléments finis, application à la mécanique des structures. PhD thesis, Lyon, INSA, 2015.
- [16] M. Ismail. Méthode de la frontière élargie pour la résolution de problèmes elliptiques dans des domaines perforés. Application aux écoulements fluides tridimensionnels. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2004.
- [17] P. Girault, P.A. Raviart, Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Springer, New York, 1986.
- [18] R. Glowinski, T. W. Pan, T. I. Hesla, D. D. Joseph, and J. Period. A distributed lagrange multiplier / fictitious domain method for particulate flows. International Journal of Multiphase Flow, 25(5) :755–794, 1999.
- [19] V.D. Kopčenov. Approximate solutions of the dirichlet problem by the method of fictive domains. Differential Equations, 4(1), 1968.

- [20] P. Le Tallec, J. Mouro. Fluid structure interaction with large structural displacements. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190(24-25), 3039-3067, 2001.
- [21] B. Maury. A fat boundary method for the poisson problem in a domain with holes. *Journal of scientific computing*, 16(3) :319–339, 2001.
- [22] C. S. Peskin. Flow patterns around heart valves : A numerical method. *Journal of Computational Physics*, 10(2) :252–271, 1972.
- [23] C. S. Peskin. The immersed boundary method. *Acta Numerica*, 11 :479–517, 2002.
- [24] C. S. Peskin and Y. Mori. implicit second-order immersed boundary methods with boundary mass. *Comput. Methods Appl. Mech. Engorge*, 197 :2049–2067, 2008.
- [25] I. Ramière. Convergence analysis of the Q1-finite element method for elliptic problems with non-boundary-fitted meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75 :1007–1052, 2007.
- [26] I. Ramière, P. Angot, and M. Belliard. A fictitious domain approach with spread interface for elliptic problems with general boundary conditions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196 :766–781, 2007.
- [27] I. Ramière, P. Angot, and M. Belliard. A general fictitious domain method with immersed jumps and multilevel nested structured meshes. *Journal of Computational Physics*, 225 :1347–1387, 2007.
- [28] I. Ramière. Méthodes de domaine fictif pour des problèmes elliptiques avec conditions aux limites générales en vue de la simulation numérique d'écoulements diphasiques. PhD thesis, Université d'Aix-Marseille I, 2006.
- [29] N. Saito and G. Zhou. Analysis of the fictitious domain method with an l_2 -penalty for elliptic problem. *Numerical functional analysis and optimization*, 36(4) : 501-527,

2015.

[30] V.K. Saul'ev. On the solution of some boundary value problems on high performance computers by fictitious domain method. *Siberian Math. Journal*, 4(4) :912–925, 1963.

[31] G. Zhou and N. Saito. Analysis of the fictitious domain method with penalty for elliptic problem. *Japan journal of industrial and applied mathematics*, 31(1) :57-85, 2014.