République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : EDP et Applications.

Thème

Existence et unicité de solution pour un problème de p-Laplacien

Présenté par

Fenineche Nadjat

Devant le jury composé de :

Président	:	Yakhlef Othman	Maître de Conférences B	Université de Jijel
Encadreur	:	Chikouche Wided	Professeur	Université de Jijel
Examinateur	:	Menniche Linda	Maître de Conférences B	Université de Jijel

Promotion **2020/2021**

⁂ *Dédicaces* ⁂

Je dédie ce modeste travail

A mes très chers parents.

A mes frères, mes soeurs.

A toute ma famille.

A tous mes camarades de promotion avec lesquels j'ai partagé ces années.

Sans oublier tout les professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire et tous les professeurs de l'université Mohammed Seddik Ben Yahia-Jijel surtout spécialité mathématiques.

⁂ *Nadjat* ⁂

⁕ *Remerciements* ⁕

Tout d'abord et avant tout, je remercie *ALLAH* qui m'a donné la force, la volonté, la patience et le courage pour accomplir ce modeste travail.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et gratitude à mon encadreur **Chikouche Wided**, pour avoir accepté de diriger ce travail ainsi que pour ses conseils avec beaucoup de patience et d'encouragements.

Je remercie les membres du jury qui ont accepté de juger mon travail. **Yakhlef Othman**, qui me fait l'honneur de présider ce jury. **Menniche Linda**, pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens à remercier tous ceux qui se sont impliqués dans ce travail, directement ou indirectement.

A , TOUS , UN GRAND MERCI.

Table des matières

Notations

$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^N$	espace euclidien de dimension N.
E	espace de Banach.
E'	le dual de E.
Ω	ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue.
$\overline{\Omega}$	la fermeture de Ω.
u	fonction mesurable définie de Ω dans $\mathbb{R}$.
∇u	gradient de $u, \nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N})$.
$\mathrm{div}\mathbf{v}$	divergence du vecteur $\mathbf{v}$ de composante $(v_1, ...v_2), \mathrm{div}\mathbf{v} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 v_N}{\partial x_N^2}$.
Δu	laplacien de u , $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}$.
p.p.	presque partout.
$u_n \to u$	convergence forte de u_n vers u .
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	le produit de dualité entre E et E'.
$p(\cdot)$	fonction mesurable défine de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$\rho(u)$	$:= \int_\Omega \mid u(x) \mid^{p(x)} dx :$ module convexe.
$L^{p(x)}(\Omega)$	$= \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable } : \int_\Omega \mid u(x) \mid^{p(x)} dx < \infty \right\}$.
$\|u\|_{p(x)}$	$:= \inf\{\lambda > 0, \rho(\frac{u}{\lambda}) \leq 1\}$: norme de Luxembourg.
$W^{1,p(x)}(\Omega)$	$= \{u \in L^{p(x)}(\Omega) : \nabla u \in (L^{p(x)}(\Omega))^N\}$.
$\parallel u \parallel_{1,p(x)}$	$:= \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)}$.
$L^1_{loc}(\Omega)$	$= \{u, u \in L^1(K)$ pour tout compact $K \subset \Omega\}$.
$\Delta_{p(x)} u$	$= \mathrm{div}\Big(\|\nabla u(x)\|^{p(x)-2} \nabla u(x)\Big) :$ $p(x)$-Laplacien de u.
$\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$	Eespace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact inclue dans Ω.

Introduction

Les espaces de Lebesgue à exposant variables furent introduits pour la première fois dans un article en 1931 écrit par W. Orlicz [8]. Comme leur nom l'indique, ces espaces sont une généralisation des espaces de Lebesgue classiques, en remplaçant l'exposant constant p par une fonction variable d'exposant $p(.)$. Les espaces fonctionnels résultants $L^{p(.)}$ ont plusieurs propriétés similaires aux espaces L^p, mais ils diffèrent également par de nombreuses propriétés, citons en particulier que les espaces de Lebesgue à exposant variable ne sont pas invariants par translation.

Pour cette raison les espaces variables de Lebesgue ont un intérêt intrinsèque, mais ils sont également très importants pour leurs applications aux équations aux dérivées partielles et intégrales variationnelles avec des conditions de croissance non standard. Les 20 dernières années, et surtout la dernière décennie, ont connu une croissance explosive dans l'étude de ces espaces et les espaces connexes.

Le but principal de ce travail est de détailler un article de M. Allaoui, A. Amrouss et A. Ourraoui intitulé : Existence and uniqueness of solution for $p(x)$-Laplacian problems [2].
Dans cet article, il s'agit d'étudier l'existence d'une solution faible pour le problème elliptique faisant intervenir l'opérateur dit $p(x)$-Laplacien soumis à la condition de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = f(x,u) \quad \text{dans } \Omega, \\ \qquad u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega), \end{cases} \tag{1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert lipschitzien de $\mathbb{R}^N$, p est une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ telle que $\inf\limits_{x\in\Omega} \operatorname{ess} p(x) > 1$. C'est l'objet du troisième chapitre où nous avons démontré, sous certaines hypothèses sur la fonction donnée f, un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible du problème (1). Ceci nécessite des connaissances préalables des espaces de Sobolev construits à base des espaces de Lebesgue à exposant variable.
On commence alors au chapitre 1, par étudier l'espace de Lebesgue généralisé, c'est-à-

dire l'espace suivant

$$L^{p(x)}(\Omega)=\left\{u:\Omega\to\mathbb{R} \text{ mesurable } : \int_\Omega \mid u(x)\mid^{p(x)} dx<\infty\right\},$$

où $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ est un ensemble mesurable et $p\in L^\infty(\Omega)$ telle que $\inf\limits_{x\in\Omega}\operatorname{ess} p(x)\geq 1$. Dans ce chapitre, nous abordons les principales propriétés de cet espace, telles que : complétude, séparabilité et réflexivité. Nous démontrons également les propriétés de base du module convexe.

Au chapitre 2, nous donnons la définition de l'espace de Sobolev généralisé $W^{1,p(x)}(\Omega)$, qui est défini par

$$W^{1,p(x)}(\Omega)=\left\{u\in L^{p(x)}(\Omega): \frac{\partial u}{\partial x_j}\in L^{p(x)}(\Omega)^N\ j=1,......,N\right\},$$

et nous présentons quelques unes de ses propriétés. On s'est restreint sur celles qui nous sont utiles dans le chapitre 3.

Chapitre 1

Espaces de Lebesgue $L^{p(x)}(\Omega)$

Theoreme Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et propriétés de base des espaces de Lebesgue à exposant variable, appelé aussi espaces de Lebesgue généralisés.
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Étant donné une fonction $p \in L^\infty(\Omega)$ telle que $p(x) \geq 1$ p.p. dans Ω, on pose

$$p_- = \inf_{x\in\Omega} \operatorname{ess} p(x) \quad \text{et} \quad p_+ = \sup_{x\in\Omega} \operatorname{ess} p(x),$$

alors

$$p_- \leq p(x) \leq p_+ \quad \text{p.p. dans } \Omega. \tag{1.1}$$

On définit la fonction exposante conjuguée $p'(.)$ par la formule

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1 \quad \forall\, x \in \Omega,$$

avec la convention $\frac{1}{\infty} = 0$. Puisque $p(.)$ est une fonction, la notation $p'(.)$ peut être confondue avec la dérivée de $p(.)$, mais nous n'utiliserons jamais le symbole " $'$ " dans ce sens.
La notation p' sera également utilisée pour désigner le conjugué d'un exposant constant. L'opération de prendre le supremum/infimum d'un exposant ne commute pas avec la formation de l'exposant conjugué. En fait, un calcul simple montre que

$$(p'(.))_+ = (p_-)', \quad (p'(.))_- = (p_+)'.$$

Pour plus de simplicité, nous omettrons les parenthèses du côté gauche de chaque égalité et écrivons $p'(.)_+$ et $p'(.)_-$. Nous éviterons toujours les expressions ambiguës telles que p'_+ .

Définition 1.1. *On définit l'espace de Lebesgue à exposant variable $L^{p(x)}(\Omega)$, par*

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable } : \int_\Omega | u(x) |^{p(x)} \, dx < \infty \right\}.$$

Définition 1.2. *Pour une fonction $u \in L^{p(x)}$, on définit le module convexe par*

$$\rho_{p(x)}(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} \, dx.$$

On vérifie facilement que $\rho_{p(x)}$ satisfait les propriétés suivantes :

Proposition 1.3 (Propriété du module convexe). *Pour tous $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a*

1. $\rho_{p(x)}(u) \geq 0$.
2. $\rho_{p(x)}(u) = 0$ *équivaut à* $u = 0$.
3. $\rho_{p(x)}(-u) = \rho_{p(x)}(u)$.
4. $\rho_{p(x)}(\alpha u) = \rho_{p(x)}(|\alpha| u)$.
5. *Si* $|u(x)| \leq |v(x)|$ *p.p,* $x \in \Omega$ *alors* $\rho_{p(x)}(u) \leq \rho_{p(x)}(v)$.
6. *On a*

$$|\alpha|^{p+} \rho_{p(x)}(u) \leq \rho_{p(x)}(\alpha u) \leq |\alpha|^{p-} \rho_{p(x)}(u) \leq |\alpha| \rho_{p(x)}(u) \leq \rho_{p(x)}(u) \quad \text{Si } |\alpha| \leq 1,$$

et

$$\rho_{p(x)}(u) \leq |\alpha| \rho_{p(x)}(u) \leq |\alpha|^{p-} \rho_{p(x)}(u) \leq \rho_{p(x)}(\alpha u) \leq |\alpha|^{p+} \rho_{p(x)}(u) \quad \text{Si } |\alpha| \geq 1.$$

Proposition 1.4.

1. *Pour tout $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$, on a $\rho_{p(x)}(u + v) \leq 2^{p+}(\rho_{p(x)}(u) + \rho_{p(x)}(v))$.*
2. $\rho_{p(x)}$ *est convexe.*
3. *Pour tout $u \in L^{p(x)}(\Omega) \backslash \{0\}$, la fonction $\lambda \longmapsto \rho_{p(x)}(\lambda u)$ est croissante, continue et convexe sur $[0, +\infty[$.*

Preuve.

1. De l'inégalité $|a + b|^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p)$ et de (1.1), nous avons pour presque tout $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} |u(x) + v(x)|^{p(x)} &\leq 2^{p(x)} \Big(|u(x)|^{p(x)} + |v(x)|^{p(x)} \Big) \\ &\leq 2^{p+} \Big(|u(x)|^{p(x)} + |v(x)|^{p(x)} \Big). \end{aligned}$$

Par intégration de l'inégalité ci-dessus, nous obtenons le résultat.

2. En effet, pour $p \in]1, +\infty[$, la fonction $x \longmapsto x^p$ est convexe sur $[0, +\infty[$.
   Soient $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$ et soit α un réel tel que $0 \leq \alpha \leq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\rho_{p(x)}(\alpha u + (1-\alpha)v) &= \int_\Omega \Big|\alpha u + (1-\alpha)v\Big|^{p(x)}\,dx \\
&\leq \int_\Omega \Big(\alpha|u| + (1-\alpha)|v|\Big)^{p(x)}\,dx \\
&\leq \int_\Omega \Big(\alpha|u|^{p(x)} + (1-\alpha)|v|^{p(x)}\Big)\,dx \\
&= \alpha \int_\Omega |u|^{p(x)}\,dx + (1-\alpha)\int_\Omega |v|^{p(x)}\,dx \\
&= \alpha\rho_{p(x)}(u) + (1-\alpha)\rho_{p(x)}(v).
\end{aligned}$$

3. Fixons $u \in L^{p(x)}(\Omega)\backslash\{0\}$.
   - Pour $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, \infty[$ telles que $\lambda_1 < \lambda_2$, alors

$$|\lambda_1 u(x)|^{p(x)} = |\lambda_1|^{p(x)}|u(x)|^{p(x)} < |\lambda_2|^{p(x)}|u(x)|^{p(x)} = |\lambda_2 u(x)|^{p(x)} \text{dans}\,\Omega.$$

   Par intégration de l'inégalité ci-dessus, nous obtenons

$$\rho_{p(x)}(\lambda_1 u) < \rho_{p(x)}(\lambda_2 u).$$

   Par conséquent, la fonction $\lambda \longmapsto \rho_{p(x)}(\lambda u)$ est croissante sur $[0, +\infty[$.
   - Pour la continuité, soit (λ_n) une suite de réels positifs telle que

$$\lambda_n \to \lambda \text{ dans } \mathbb{R}.$$

   Alors

$$|\lambda_n u(x)|^{p(x)} \to |\lambda u(x)|^{p(x)} \text{ dans } \mathbb{R}, \text{ p.p. dans } \Omega.$$

   D'après le Théorème de convergence Monotone (Théorème $A.12$)

$$\rho_{p(x)}(\lambda_n u) \to \rho_{p(x)}(\lambda u).$$

   - Soient $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ et soit $\alpha \in [0, 1]$, on a grâce à la convexité de la fonction $\rho_{p(x)}$ (propriété 2, Proposition 1.4)

$$\begin{aligned}
\rho_{p(x)}\Big((\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2)u\Big) &= \rho_{p(x)}\Big(\alpha(\lambda_1 u) + (1-\alpha)(\lambda_2 u)\Big) \\
&\leq \alpha\rho_{p(x)}(\lambda_1 u) + (1-\alpha)\rho_{p(x)}(\lambda_2 u),
\end{aligned}$$

   ce qui donne la convexité de la fonction $\lambda \longmapsto \rho_{p(x)}(\lambda u)$.

□

Proposition 1.5. *$L^{p(x)}(\Omega)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

Preuve.

Notons d'abord que $L^{p(x)}(\Omega)$ est non vide car $0 \in L^{p(x)}(\Omega)$.

Soient $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

D'après la propriété 6 de la Proposition 1.3, on a

$$\rho_{p(x)}(\alpha u) \leq \rho_{p(x)}(u) < +\infty \qquad \text{Si } |\alpha| \leq 1,$$

et

$$\rho_{p(x)}(\alpha u) \leq |\alpha|^{p_+} \rho_{p(x)}(u) < +\infty \qquad \text{Si } |\alpha| > 1.$$

Ainsi, $\alpha u \in L^{p(x)}(\Omega)$.

De la convexité (propriété 2, Proposition 1.4) de $\rho_{p(x)}$ et de la propriété qu'on vient de démontrer, on a

$$\rho_{p(x)}(u+v) = \rho_{p(x)}\Big(\frac{1}{2} \cdot 2u + \frac{1}{2} \cdot 2v\Big) \leq \frac{1}{2} \cdot \rho_{p(x)}(2u) + \frac{1}{2} \cdot \rho_{p(x)}(2v) < +\infty,$$

d'où $u + v \in L^{p(x)}(\Omega)$. □

Soit la quantité définie sur l'espace $L^{p(x)}(\Omega)$ par

$$|u|_{p(x)} = \inf \Big\{\lambda > 0, \rho_{p(x)}\Big(\frac{u}{\lambda}\Big) \leq 1\Big\}.$$

On définit pour tout $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, l'intervalle I_u de $\mathbb{R}$ par

$$I_u = \Big\{\lambda > 0, \rho_{p(x)}\Big(\frac{u}{\lambda}\Big) \leq 1\Big\}.$$

Lemme 1.6. *Soit $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, on a*

1. $\rho_{p(x)}\Big(\frac{u}{|u|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big) \leq 1$ *si* $|u|_{L^{p(x)}(\Omega)} \neq 0$.
2. *Si* $|u|_{p(x)} \leq 1$ *alors* $\rho_{p(x)}(u) \leq |u|_{p(x)}$.
3. (a) $\rho_{p(x)}(u) \leq 1$ *équivaut à* $|u|_{p(x)} \leq 1$.

   (b) $\rho_{p(x)}(u) < 1$ *équivaut à* $|u|_{p(x)} < 1$.

Preuve.

1. En effet, soit (λ_n) une suite décroissante de réels strictement positifs telle que $\lambda_n \to |u|_{p(x)}$.
   Appliquons le lemme de Fatou (Lemme A.11) avec $u_n(x) = \left|\frac{u(x)}{\lambda_n}\right|^{p(x)}$. Alors
$$\begin{aligned}\rho_{p(x)}\Big(\frac{u}{|u|_{p(x)}}\Big) = \int_\Omega \Big|\frac{u(x)}{|u|_{p(x)}}\Big|^{p(x)} dx &= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \inf u_n(x)\, dx \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega u_n(x)\, dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \inf \rho_{p(x)}\Big(\frac{u}{\lambda_n}\Big) \\ &\leq 1,\end{aligned}$$
   puisque $\lambda_n > |u|_{p(x)} \quad \forall\, n$.
2. En effet, d'après la propriété 6 de la Proposition 1.3 et la propriété 1, pour $|u|_{p(x)} \neq 0$, on a
$$\begin{aligned}\rho_{p(x)}(u) &= \rho_{p(x)}\Big(|u|_{p(x)} \frac{u}{|u|_{p(x)}}\Big) \\ &\leq |u|_{p(x)} \rho_{p(x)}\Big(\frac{u}{|u|_{p(x)}}\Big) \\ &\leq |u|_{p(x)}.\end{aligned}$$
3. En effet,
   (a) Si $\rho_{p(x)}(u) \leq 1$, alors $|u|_{p(x)} \leq 1$ par définition de la norme $|\cdot|_{p(x)}$.
   Réciproquement, si $|u|_{p(x)} \leq 1$, alors on a d'après la propriété 2,
$$\rho_{p(x)}(u) \leq |u|_{p(x)} \leq 1.$$
   (b) Si $\rho_{p(x)}(u) < 1$, alors il existe $\lambda_0 > 1$ tel que $\rho_{p(x)}(\lambda_0 u) < 1$.
   En effet, supposons que $\rho_{p(x)}(\lambda u) \geq 1$ pour tout $\lambda > 1$. En passant à la limite lorsque $\lambda \to 1$, on obtient $\rho_{p(x)}(u) \geq 1$, d'après la continuité de la fonction $\lambda \longmapsto \rho_{p(x)}(\lambda u)$ (Proposition 1.4, 3.) , ce qui est une contradiction.
   Puisque $\rho_{p(x)}\Big(\frac{u}{\frac{1}{\lambda_0}}\Big) = \rho_{p(x)}(\lambda_0 u) < 1$, alors $|u|_{p(x)} \leq \frac{1}{\lambda_0} < 1$ par définition de la norme $|\cdot|_{p(x)}$.
   Réciproquement, si $|u|_{p(x)} < 1$, alors $\rho_{p(x)}(u) \leq |u|_{p(x)}$ d'après la propriété 2, ce qui donne $\rho_{p(x)}(u) < 1$.

$\square$

Proposition 1.7. $|\cdot|_{p(x)}$ *est une norme sur $L^{p(x)}(\Omega)$, appelée norme de Luxembourg.*

Preuve.

Il suffit de montrer que pour tous $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

1. $|u|_{p(x)} \geq 0$.
2. $|u|_{p(x)} = 0$ si et seulement si $u = 0$.
3. pour tout $\alpha \in \mathbb{R}, |\alpha u|_{p(x)} = |\alpha||u|_{p(x)}$ (Homogénéité).
4. $|u+v|_{p(x)} \leq |u|_{p(x)} + |v|_{p(x)}$ (Inégalité triangulaire).

En effet,

1. C'est évident.
2. Si $u = 0$, alors $I_u = (0, \infty)$, donc $|u|_{p(x)} = \inf I_u = 0$.
   Supposons maintenant que $|u|_{p(x)} = 0$. Par la définition de l'inf
   $$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \lambda \in I_u \text{ telle que } 0 = \inf I_u \leq \lambda < \inf I_u + \varepsilon = \varepsilon.$$
   Par conséquent,
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists\, \lambda_n > 0, \rho_{p(x)}\Big(\frac{u}{\lambda_n}\Big) \leq 1 \text{ telle que } 0 \leq \lambda_n < \frac{1}{n} \leq 1.$$
   Il est clair que $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, on a
   $$1 \geq \rho_{p(x)}\Big(\frac{u}{\lambda_n}\Big) = \int_\Omega \Big(\frac{1}{\lambda_n}\Big)^{p(x)} |u(x)|^{p(x)}\, dx > \Big(\frac{1}{\lambda_n}\Big)^{p(x)} \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}\, dx = \frac{1}{\lambda_n}\rho_{p(x)}(u).$$
   Ceci n'est possible que si $\rho_{p(x)}(u) = 0$, car sinon
   $$\rho_{p(x)}\Big(\frac{u}{\lambda_n}\Big) \to +\infty, \text{ lorsque } n \to \infty,$$
   ce qui contredit le fait que $\rho_{p(x)}\Big(\frac{u}{\lambda_n}\Big) \leq 1$. Par conséquent $u = 0$ d'après la propriété 2 de la Proposition 1.3.
3. Le cas $\alpha = 0$ est trivial. Nous supposons donc que $\alpha \neq 0$, on a
   $$\begin{aligned} |\alpha u|_{p(x)} &= \inf\Big\{\lambda > 0 : \rho_{p(x)}\Big(\frac{\alpha u}{\lambda}\Big) \leq 1\Big\} \\ &= \inf\Big\{\lambda > 0 : \rho_{p(x)}\Big(\frac{|\alpha| u}{\lambda}\Big) \leq 1\Big\} \\ &= \inf\Bigg\{|\alpha|\frac{\lambda}{|\alpha|} > 0 : \rho_{p(x)}\Bigg(\frac{u}{\frac{\lambda}{|\alpha|}}\Bigg) \leq 1\Bigg\} \\ &= |\alpha| \inf\Big\{\lambda' > 0 : \rho_{p(x)}\Big(\frac{u}{\lambda'}\Big) \leq 1\Big\} \\ &= |\alpha||u|_{p(x)}, \end{aligned}$$
   où on a utilisé la propriété 4 de la Proposition 1.3.

4. L'inégalité est vraie lorsque l'une des deux normes $|u|_{p(x)}$ ou $|v|_{p(x)}$ est nulle. Supposons donc ces deux normes non nulles. Pour alléger les notations, prenons $|\cdot|$ pour $|\cdot|_{p(x)}$. Il suffit de montrer que

$$\rho_{p(x)}\Big(\frac{u+v}{|u|+|v|}\Big) \leq 1.$$

On a

$$\rho_{p(x)}\Big(\frac{u+v}{|u|+|v|}\Big) = \rho_{p(x)}\Big(\frac{|u|}{|u|+|v|}\cdot\frac{u}{|u|} + \frac{|v|}{|u|+|v|}\cdot\frac{v}{|v|}\Big).$$

Par la convexité (propriété 2 de la Proposition 1.4) de $\rho_{p(x)}$ et la propriété 1 du Lemme 1.6, il vient que :

$$\begin{aligned}\rho_{p(x)}\Big(\frac{u+v}{|u|+|v|}\Big) &\leq \frac{|u|}{|u|+|v|}\cdot\rho_{p(x)}\Big(\frac{u}{|u|}\Big) + \frac{|v|}{|u|+|v|}\cdot\rho_{p(x)}\Big(\frac{v}{|v|}\Big)\\ &\leq 1.\end{aligned}$$

De la propriété 3,(a) du Lemme 1.6, on obtient

$$\frac{|u+v|}{|u|+|v|} \leq 1.$$

Par conséquent,

$$|u+v| \leq |u|+|v|.$$

□

Proposition 1.8. *Si* $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, $u \neq 0$ *alors* $|u|_{p(x)} = \alpha \iff \rho_{p(x)}(\frac{u}{\alpha}) = 1.$

Preuve.

En effet, supposons que $\rho_{p(x)}\Big(\frac{u}{\alpha}\Big) = 1$, alors $\rho_{p(x)}\Big(\frac{u}{\alpha}\Big) \leq 1$ et par définition de la norme, on a $|u|_{p(x)} \leq \alpha$.

Par ailleurs, d'après la propriété 1, on a

$$\rho_{p(x)}\Big(\frac{u}{|u|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big) \leq 1 = \rho_{p(x)}\Big(\frac{u}{\alpha}\Big).$$

La croissance de la fonction $\lambda \longmapsto \rho_{p(x)}(\lambda u)$ (Proposition 1.6, 3.) conduit à $|u|_{p(x)} \geq \alpha$.

Ainsi, $|u|_{p(x)} = \alpha$.

Maintenant, si l'on suppose que $|u|_{p(x)} = \alpha$ et si l'on se réfère à l'homogénéité de la norme $|\cdot|_{p(x)}$ (voir $|\alpha u|_{p(x)} = |\alpha||u|_{p(x)}$), on a, $|\frac{u}{\alpha}|_{p(x)} = 1$ ce qui implique d'après la propriété 3, que $\rho_{p(x)}\Big(\frac{u}{\alpha}\Big) = 1$. □

Proposition 1.9. *Soit $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, on a nous avons,*

1. *Si $|u|_{p(x)} > 1$, alors $|u|_{p(x)}^{p_-} \leq \rho_{p(x)}(u) \leq |u|_{p(x)}^{p_+}$.*
2. *Si $|u|_{p(x)} < 1$, alors $|u|_{p(x)}^{p_+} \leq \rho_{p(x)}(u) \leq |u|_{p(x)}^{p_-}$.*

Preuve.

1. Si on suppose que $|u|_{p(x)} = \alpha < 1$, alors

$$\rho_{p(x)}\left(\frac{u}{\alpha}\right) = 1.$$

Puisque $\frac{1}{\alpha} < 1$, nous obtenons d'après la propriété 6. de la Proposition 1.3

$$\frac{1}{\alpha^{p_+}}\rho_{p(x)}(u) \leq \rho_{p(x)}\left(\frac{u}{\alpha}\right) = 1 < \frac{1}{\alpha^{p_-}}\rho_{p(x)}(u),$$

c'est-à-dire

$$|u|_{p(x)}^{p_-} \leq \rho_{p(x)}(u) \leq |u|_{p(x)}^{p_+}.$$

On procède de même pour montrer le point 2.

□

Proposition 1.10. (Inégalité de type Hölder) *Pour tous $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ et $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$, on a $uv \in L^1(\Omega)$ et*

$$\begin{aligned}\Big| \int_\Omega u(x)v(x)\ dx \Big| &\leq \left(\frac{1}{p_-} + \frac{1}{p'_-}\right) |\ u\ |_{p(x)}|\ v\ |_{p'(x)} \\ &\leq 2\ |\ u\ |_{p(x)}|\ v\ |_{p'(x)}\ .\end{aligned}$$

Preuve.

Nous allons utiliser l'inégalité de Young suivante :

$$ab \leq \frac{a^\alpha}{\alpha} + \frac{a^\beta}{\beta} \quad \text{avec } a, b \geq 0, \quad \alpha, \beta > 1, \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

Pour $|u|_{p(x)} = 0$ ou $|v|_{p'(x)} = 0$ l'inégalité de Hölder est évidente.
Supposons que $|u|_{p(x)} \neq 0$ et $|v|_{p'(x)} \neq 0$, puisque $1 < p(x) < \infty$, $|u(x)| < \infty$ et $|v(x)| < \infty$, on peut prendre

$$a = \frac{|u(x)|}{|u|_{p(x)}}, \quad b = \frac{|v(x)|}{|v|_{p'(x)}}, \quad \alpha = p(x), \quad \beta = p'(x).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{|u(x)v(x)|}{|u|_{p(x)}|v|_{p'(x)}}\,dx &\leq \int_\Omega \left(\frac{1}{p(x)}\left(\frac{|u(x)|}{|u|_{p(x)}}\right)^{p(x)} + \frac{1}{p'(x)}\left(\frac{|v(x)|}{|v|_{p'(x)}}\right)^{p'(x)}\right)dx \\ &\leq \frac{1}{p^-}\rho_{p(x)}\left(\frac{|u(x)|}{|u|_{p(x)}}\right) + (1-\frac{1}{p_+})\rho_{p'(x)}\left(\frac{|v(x)|}{|v|_{p'(x)}}\right).\end{aligned}$$

Grâce à la propriété 1 du Lemme 1.6, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{|u(x)v(x)|}{|u|_{p(x)}|v|_{p'(x)}}\,dx &\leq \frac{1}{p_-} + 1 - \frac{1}{p_+} \\ &\leq \frac{1}{p_-} + 1 \\ &\leq 2.\end{aligned}$$

ce qui donne l'inégalité recherchée. □

Proposition 1.11. *Soit la suite $(u_n) \subset L^{p(x)}(\Omega)$ et soit $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. $\lim_{n\to\infty} |u_n - u|_{p(x)} = 0,$
2. $\lim_{n\to\infty} \rho_{p(x)}(u_n - u) = 0.$

Proposition 1.12. *L'espace $L^{p(x)}(\Omega)$ est un espace de Banach.*

Preuve.
Soit $(u_n) \subset L^{p(x)}(\Omega)$ une suite de Cauchy i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, n, m > n_0 \implies |u_n - u_m|_{p(x)} < \varepsilon.$$

Pour conclure il suffit de montrer qu'une sous-suite extraite converge dans $L^{p(x)}(\Omega)$.
On extrait une sous-suite (u_n) telle que

$$|u_{k+1} - u_k|_{p(x)} < \frac{1}{2^k}, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

En fait, étant donné $\varepsilon = \frac{1}{2}$ il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $m, n \geq n_1$ implique

$$|u_m - u_n|_{p(x)} < \frac{1}{2}.$$

Étant donné $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$ il existe $n_2 \geq n_1$ tel que $m, n \geq n_2$ implique

$$|u_m - u_n|_{p(x)} < \frac{1}{2^2}.$$

En particulier,

$$|u_{n_2} - u_{n_1}|_{p(x)} < \frac{1}{2^2}.$$

Étant donné $\varepsilon = \frac{1}{2^3}$ il existe $n_3 \geq n_2$ tel que $m, n \geq n_3$ implique

$$|u_m - u_n|_{p(x)} < \frac{1}{2^3}.$$

En particulier,

$$|u_{n_3} - u_{n_2}|_{p(x)} < \frac{1}{2^3}.$$

De manière générale, étant donné $\varepsilon = \frac{1}{2^{k+1}}$, il existe $n_{k+1} \geq n_k$ tel que $m, n \geq n_{k+1}$ implique

$$|u_{n_{k+1}} - u_{n_k}|_{p(x)} < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

On va montrer que u_{n_k} converge dans $L^{p(x)}(\Omega)$. Pour simplifier les notations on écrit u_k au lieu de u_{n_k}, de sorte que l'on a

$$|u_{k+1} - u_k|_{p(x)} < \frac{1}{2^{k+1}}, \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Sous

$$v_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |u_{k+1}(x) - u_k(x)| \quad x \in \Omega.$$

Donc, $(v_n) \subset L^{p(x)}(\Omega)$ et, par (1.2), on a

$$|v_n|_{p(x)} \leq 1, \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
|v_n|_{p(x)} &= |\sum_{k=1}^{n} |(u_{k+1} - u_k)|_{p(x)} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |u_{k+1} - u_k|_{p(x)} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \\
&= \frac{1}{4}\Big(\frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(1 - \Big(\frac{1}{2}\Big)^n\Big) \\
&\leq \frac{1}{2} < 1.
\end{aligned}$$

Par conséquent, par le Lemme 1.6

$$\rho_{p(x)}(v_n) = \int_{\Omega} |v_n(x)|^{p(x)} \, dx \leq 1, \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

En utilisant (1.3) et le théorème de convergence monotone (voir Théorème A.12), il existe $v \in L^{p(x)}(\Omega)$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} v_n(x) = v(x), \text{p.p. dans } \Omega. \tag{1.4}$$

Par contre, pour $m > n \geq 2$ et $x \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned}|u_m(x) - u_n(x)| &\leq |u_m(x) - u_{m-1}(x)| + |u_{m-1}(x) - u_{m-2}(x)| + ... + |u_{n+1}(x) - u_n(x)| \\ &= v_{m-1}(x) - v_{n-1}(x) \\ &\leq v(x) - v_{n-1}(x). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Par (1.4) et (1.5), il s'ensuit que pour presque tout $x \in \Omega$, $u_k(x) \subset \mathbb{R}$ est une suite de Cauchy, donc convergente, disons

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x), \text{p.p. dans } \Omega. \tag{1.6}$$

Or de (1.5), et du fait que $v_{n-1} \geq 0$, on obtient

$$|u_k(x) - u_n(x)| \leq v(x). \tag{1.7}$$

En passant à la limite lorsque $k \to \infty$, on trouve grâce à (1.6)

$$|u_k(x) - u(x)| \leq v(x), \text{ pour } k \geq 2 \text{ et p.p. dans } \Omega. \tag{1.8}$$

Comme $v \in L^{p(x)}(\Omega)$, on a

$$u \in L^{p(x)}(\Omega).$$

En effet, par (1.6) et (1.8),

$$|u_k(x) - u(x)|^{p(x)} \to 0 \text{ et } |u_k(x) - u(x)|^{p(x)} \leq v(x)^{p(x)}, \text{p.p. dans } \Omega,$$

puis par le théorème de convergence dominée (voir Théorème A.13)

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |u_k(x) - u(x)|^{p(x)}\, dx = 0,$$

c'est à dire,

$$\lim_{k\to\infty} \rho_{p(x)}(u_k - u) = 0.$$

Par conséquent, par la Proposition 1.11

$$\lim_{k\to\infty} |u_k - u|_{p(x)} = 0.$$

$\square$

Théorème 1.13. *Si* $p_- > 1$ *alors* $L^{p(x)}(\Omega)$ *est un espace réflexif.*

Preuve.
On définit les ensembles

$$\Omega_- = \{x \in \Omega : 1 < p(x) < 2\} \text{ et } \Omega_+ = \{x \in \Omega : p(x) \geq 2\}.$$

Notons que

$$L^{p(x)}(\Omega) = L^{p(x)}(\Omega_+) \oplus L^{p(x)}(\Omega_-).$$

Nous allons montrer que :

1. $L^{p(x)}(\Omega_+)$ est réflexif,
2. $L^{p(x)}(\Omega_-)$ est réflexif,

et de là, on conclut que $L^{p(x)}(\Omega)$ est réflexif, puisque la somme directe de deux espaces de Banach réflexif est un espace réflexif.

1. $L^{p(x)}(\Omega_+)$ est uniformément convexe. En fait, soit $\varepsilon > 0$ et soit $u, v \in L^{p(x)}(\Omega_+)$ tels que

$$|u|_{L^{p(x)}(\Omega_+)} \leq 1, |v|_{L^{p(x)}(\Omega_+)} \leq 1 \,\text{et}\, |u - v|_{L^{p(x)}(\Omega_+)} > \varepsilon. \tag{1.9}$$

Puisque $p(x) \leq 2$ dans Ω_+, alors par la 1ère inégalité de Clarkson (voir [3], p. 59), on a

$$\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p(x)} + \left|\frac{u-v}{2}\right|^{p(x)} \leq \frac{1}{2}\Big(|u|^{p(x)} + |v|^{p(x)}\Big), \,\text{pour}\, x \in \Omega_+. \tag{1.10}$$

En intégrant (1.10) dans Ω_+ et en utilisant (1.9), on obtient

$$\int_{\Omega_+} \left|\frac{u+v}{2}\right|^{p(x)} dx + \int_{\Omega_+} \left|\frac{u-v}{2}\right|^{p(x)} dx \leq \int_{\Omega_+} \frac{1}{2}|u|^{p(x)}\, dx + \int_{\Omega_+} \frac{1}{2}|v|^{p(x)}\, dx \leq 1,$$

donc

$$\rho_{p(x)}\Big(\frac{u+v}{2}\Big) + \rho_{p(x)}\Big(\frac{u-v}{2}\Big) \leq 1. \tag{1.11}$$

Il résulte de cette inégalité que

$$\rho_{p(x)}\Big(\frac{u+v}{2}\Big) \leq 1 \quad \text{et} \quad \rho_{p(x)}\Big(\frac{u-v}{2}\Big) \leq 1. \tag{1.12}$$

Vérifions qu'on a nécessairement $\rho_{p(x)}\left(\frac{u+v}{2}\right) < 1$.
En effet, supposons que $\rho_{p(x)}\left(\frac{u+v}{2}\right) = 1$, de l'inégalité (1.11), on trouve

$$1 + \rho_{p(x)}\Big(\frac{u-v}{2}\Big) \leq 1,$$

ce qui donne $\rho_{p(x)}\left(\frac{u-v}{2}\right) = 0$. D'après la Propriété 2. de la Proposition 1.3, on a $u = v$, ce qui contredit le fait que $|u - v|_{L^{p(x)}(\Omega_+)} > \varepsilon$.
Donc $\rho_{p(x)}\left(\frac{u+v}{2}\right) < 1$.
On distingue deux cas :

(a) Si $\rho_{p(x)}\left(\frac{u-v}{2}\right) = 1$. Ceci est équivalent à $|\frac{u-v}{2})|_{p(x)} = 1$ grâce à la Proposition 1.8. De plus, $\rho_{p(x)}\left(\frac{u+v}{2}\right) = 0$ de (1.11). D'où $v = -u$.
Alors
$$\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p_+}_{L^{p(x)}(\Omega_+)} + \left|\frac{u-v}{2}\right|^{p_+}_{L^{p(x)}(\Omega_+)} = 0 + 1 \leq 1.$$

(b) Si $\rho_{p(x)}\left(\frac{u-v}{2}\right) < 1$. Il résulte de la Proposition 1.9 que
$$\left|\frac{u+v}{2}\right|_{p(x)} < 1 \quad \text{et} \quad \left|\frac{u-v}{2}\right|_{p(x)} < 1.$$
En appliquant la Proposition 1.9, en tenant compte de (1.12), on obtient
$$\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p_+}_{L^{p(x)}(\Omega_+)} + \left|\frac{u-v}{2}\right|^{p_+}_{L^{p(x)}(\Omega_+)} \leq \rho_{p(x)}\left(\frac{u+v}{2}\right) + \rho_{p(x)}\left(\frac{u-v}{2}\right) \leq 1. \quad (1.13)$$
Comme $|u - v|_{L^{p(x)}\Omega_+} > \varepsilon$, on a par (1.13)
$$\left|\frac{u+v}{2}\right|_{L^{p(x)}(\Omega_+)} < 1 - \delta,$$
où
$$\delta = 1 - \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p_+}\right]^{\frac{1}{p_+}} > 0.$$
Par conséquent, $L^{p(x)}(\Omega_+)$ est uniformément convexe, et est donc réflexif par le Théorème $A.7$.

2. Soit $p'(\cdot)$ la fonction conjuguée de $p(\cdot)$. On définit l'opérateur linéaire
$$\begin{aligned} T : L^{p(x)}(\Omega_-) &\longrightarrow (L^{p'(x)}(\Omega_-))' \\ u &\longmapsto \langle Tu, v\rangle = \int_{\Omega_-} u(x)v(x)\,dx, v \in L^{p'(x)}(\Omega_-). \end{aligned}$$
Par l'inégalité de Hölder (voir Proposition 1.10), on a
$$\begin{aligned} |\langle Tu, v\rangle| &= \sup_{\substack{v\in L^{p(x)} \\ v\neq 0}} \frac{|\langle Tu, v\rangle|}{|v|_{L^{p'(x)}(\Omega)}} \\ &\leq 2|u|_{L^{p(x)}(\Omega_-)}|v|_{L^{p'(x)}(\Omega_-)}, \end{aligned} \quad (1.14)$$
Ainsi
$$|Tu|_{(L^{p'(x)}(\Omega_-))'} \leq 2|u|_{L^{p(x)}(\Omega_-)} \quad (1.15)$$

i.e. T est continu.

Soit $|u|_{L^{p(x)}(\Omega_-)} = \alpha$ et considérons la fonction

$$v_0 = \left|\frac{u(x)}{a}\right|^{p(x)-1} \operatorname{sgn} u(x) \quad x \in \Omega_-,$$

où sgn est la fonction signe, c'est-à-dire

$$\operatorname{sgn} t = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -1 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Notons que

$$v_0 \in L^{p'(x)}(\Omega_-) \quad \text{et} \quad |v_0|_{L^{p'(x)}(\Omega_-)} = 1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \langle Tu, v_0\rangle &= \int_{\Omega_-} u(x) v_0(x)\, dx \\ &= \int_{\Omega_-} \left|\frac{u(x)}{\alpha}\right|^{p(x)-1} |u(x)|\, dx \\ &= \int_{\Omega_-} \alpha \left|\frac{u(x)}{\alpha}\right|^{p}(x)\, dx \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} |Tu|_{(L^{p'(x)}(\Omega_-))'} &= \sup_{\substack{v \in L^{p(x)} \\ v \neq 0}} \frac{|\langle Tu, v\rangle|}{|v|_{L^{p'(x)}(\Omega)}} \\ &\geq \frac{|\langle Tu, v_0\rangle|}{|v_0|_{L^{p'(x)}(\Omega)}} \\ &= \alpha \\ &= |u|_{L^{p(x)}(\Omega_-)}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

De (1.15) et (1.16), on obtient

$$|u|_{L^{p(x)}(\Omega_-)} \leq |Tu|_{(L^{p'(x)}(\Omega_-))'} \leq 2|u|_{L^{p(x)}(\Omega_-)} \text{ pour tout } u \in L^{p(x)}(\Omega),$$

il résulte que T est injectif. Par conséquent, T est un isomorphisme de $L^{p(x)}(\Omega_-)$ sur $E = T(L^{p(x)}(\Omega_-))$. Ceci entraine que E est un sous-espace vectoriel fermé de $(L^{p'(x)}(\Omega_-))'$. Comme $L^{p'(x)}(\Omega_-)$ est réflexif d'après la partie 1 de la preuve, par le Corollaire $A.3$ $L^{p'(x)}(\Omega_-)'$ est réflexif. Ainsi, selon la Proposition $A.2$, E est réflexif. D'où $L^{p'(x)}(\Omega_-)$ est réflexif.

$\square$

Théorème 1.14. (cf.[4]) *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné, alors $L^{p(x)}(\Omega)$ est un espace séparable.*

Remarque 1.15. *Pour $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, posons*

$$|u|_{\sup -L^{p(x)}(\Omega)} = \sup_{\rho_{p'(x)}(v)\leq 1} \int_\Omega u(x)v(x)\,dx.$$

$|\cdot|_{\sup -L^{p(x)}(\Omega)}$ est une norme sur $L^{p(x)}(\Omega)$, équivalente à la norme de Luxembourg (voir [5, Théorème 2.3]*).*

Théorème 1.16. *Supposons que Ω est de mes $< \infty$. Soient $p(\cdot)$ et $q(\cdot)$ des fonctions de $L^\infty(\Omega)$ telles que $p(x), q(x) \geq 1$ et $p(x) \leq q(x)$ p.p. dans Ω. Alors*

$$L^{q(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega).$$

Preuve.

Supposons que $p(x) \leq q(x)$ p.p. dans Ω et que $\text{mes}(\Omega) < +\infty$ et montrons que $L^{q(x)}(\Omega) \subset L^{p(x)}(\Omega)$.

Soit $u \in L^{q(x)}(\Omega)$. Alors, on a $\rho_{q(x)}(u) < +\infty$.

Lorsque $|u| > 1$, on a

$$|u|^{p(x)} \leq |u|^{q(x)} \text{ p.p. } x \in \Omega, \tag{1.17}$$

et donc, $\rho_{p(x)}(u) \leq \rho_{q(x)}(u) < +\infty$.

Mais, si $|u| \leq 1$, on a $|u|^{p(x)} \leq 1$ p.p. $x \in \Omega$ et

$$\int_\Omega |u|^{p(x)}\,dx \leq \int_\Omega dx = \text{mes}(\Omega) < +\infty. \tag{1.18}$$

Donc $\rho_{p(x)}(u) < +\infty$.

Par conséquent, $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ et on conclut que $L^{q(x)}(\Omega) \subset L^{p(x)}(\Omega)$.

Montrons maintenant que cette injection est continue. C'est à dire, nous devons montrer que l'opérateur identité $Id : L^{q(x)}(\Omega) \to L^{p(x)}(\Omega)$ est continu. Cet opérateur étant linéaire, il suffit de trouver une constante $C > 0$ de sorte que $|u|_{p(x)} \leq C|u|_{q(x)}$ pour tout $u \in L^{q(x)}(\Omega)$, ou de manière équivalente, une constante $C > 0$ vérifiant

$$|u|_{p(x)} \leq C \text{ pour tout } u \in L^{q(x)}(\Omega) \text{ tel que } |u|_{q(x)} \leq 1.$$

Soit donc $u \in L^{q(x)}(\Omega)$ tel que $|u|_{q(x)} \leq 1$. Alors, on a $\rho_{q(x)}(u) \leq 1$ d'après la propriété 3 de la Proposition 1.6.

Par suite, on obtient grâce à (1.17) et (1.18)

$$\begin{aligned}
\rho_{p(x)}(u) &= \int_\Omega |u|^{p(x)}\,dx \\
&= \int_{|u|\le 1} |u|^{p(x)}\,dx + \int_{|u|>1} |u|^{p(x)}\,dx \\
&\le \int_{|u|\le 1} |u|^{p(x)}\,dx + \int_{|u|>1} |u|^{q(x)}\,dx \\
&\le \mathrm{mes}(\Omega) + \rho_{q(x)}(u) \\
&\le \mathrm{mes}(\Omega) + 1.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après la propriété 6 de la Proposition 1.3, on a

$$\rho_{p(x)}\Big(\frac{u}{\mathrm{mes}(\Omega)+1}\Big) \le \frac{1}{\mathrm{mes}(\Omega)+1}\rho_{p(x)}(u),$$

ce qui implique d'après l'inégalité précédente

$$\rho_{p(x)}\Big(\frac{u}{\mathrm{mes}(\Omega)+1}\Big) \le 1.$$

La définition de la norme $|\cdot|_{p(x)}$ entraine que $|u|_{p(x)} \le \mathrm{mes}(\Omega)+1$. D'où, la continuité de l'injection de $L^{q(x)}(\Omega)$ dans $L^{p(x)}(\Omega)$. $\square$

Chapitre 2

Espaces de Sobolev $W^{1,p(x)}(\Omega)$

Dans ce chapitre, nous étudierons l'espace de Sobolev généralisé $W^{1,p(x)}(\Omega)$, c'est-à-dire l'espace suivant

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \Big\{u \in L^{p(x)}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^{p(x)}(\Omega)^N \quad j = 1, ..., N\Big\},$$

où $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ est un ouvert. Notons que pour $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$, $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ désigne la j-ième dérivée faible de u, c'est-à-dire

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\varphi\, dx, \text{ pour } \varphi \in D(\Omega). \tag{2.1}$$

On définit dans $W^{1,p(x)}(\Omega)$ la norme standard suivante

$$\| u \|_{1,p(x)} = |u|_{p(x)} + \sum_{j=1}^{N} \Big|\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|_{p(x)}.$$

Avec l'introduction de l'opérateur gradient

$$\nabla u = \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\Big),$$

nous pouvons écrire l'espace $W^{1,p(x)}(\Omega)$ comme suit

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \Big\{u \in L^{p(x)}(\Omega) : \nabla u \in L^{p(x)}(\Omega)^N\Big\},$$

Dans ce cas, il est plus pratique d'utiliser la norme équivalente

$$\| u \|_{1,p(x)} = |u|_{p(x)} + |\nabla u|_{p(x)}.$$

Proposition 2.1. *$W^{1,p(x)}(\Omega)$ est un espace de Banach.*

Preuve.

Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $W^{1,p(x)}(\Omega)$, alors u_n, $\frac{\partial u_n}{\partial x_j}, j = 1, ..., N$, sont des suites de Cauchy dans $L^{p(x)}(\Omega)$ par définition de la norme $\| \cdot \|_{1,p(x)}$.

Comme $L^{p(x)}(\Omega)$ est un espace de Banach, il existe $u, w_j \in L^{p(x)}(\Omega)$ tels que

$$u_n \to u \text{ et } \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \to w_j \text{ dans} L^{p(x)}(\Omega) \text{ quand } n \to \infty, \tag{2.2}$$

pour tout $j = 1, ..., N$.

Par application de l'inégalité de Hölder, on a pour tout $\varphi \in D(\Omega)$

$$\int_\Omega (u_n - u)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx \leq C|u_n - u|_{p(x)}\Big|\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\Big|_{p'(x)}, \tag{2.3}$$

et

$$\int_\Omega \Big(\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - w_j\Big)\varphi\, dx \leq C\Big|\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - w_j\Big|_{p(x)}|\varphi|_{p(x)'}, \tag{2.4}$$

où $C = \frac{1}{p_-} + \frac{1}{p_+}$.

D'après $(2.2), (2.3)$ et (2.4), on a pour tout $\varphi \in D(\Omega)$

$$\int_\Omega u_n\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx \to \int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx, \text{ quand } n \to \infty, \tag{2.5}$$

et

$$\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_j}\varphi\, dx \to \int_\Omega w_j\varphi\, dx, \text{ quand } n \to \infty, \tag{2.6}$$

or

$$\int_\Omega u_n\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_j}\varphi\, dx. \tag{2.7}$$

Par passage à la limite, nous obtenons en tenant compte de (2.5) et (2.6)

$$\int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx = -\int_\Omega w_j\varphi\, dx, \text{ pour tout } \varphi \in D(\Omega). \tag{2.8}$$

En utilisant les règles de dérivation au sens des distributions, on trouve

$$\begin{aligned}\langle w_j, \varphi\rangle = \int_\Omega w_j\varphi\, dx &= -\int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx \\ &= -\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\rangle \\ &= \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi\rangle \text{ pour tout } \varphi \in D(\Omega), 1 \leq j \leq N.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = w_j \in L^{p(x)}(\Omega), \quad 1 \leq j \leq N, \tag{2.9}$$

ce qui montre que $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$.

De plus, on en déduit grâce à (2.2) et (2.9) que

$$\| u_n - u \|_{1,p(x)} = |u_n - u|_{p(x)} + \sum_{j=1}^{N} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|_{p(x)} \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

Finalement, $W^{1,p(x)}(\Omega)$ est un espace de Banach. □

Théorème 2.2. *L'espace $W^{1,p(x)}(\Omega)$ est séparable et réflexif, si $p_- > 1$.*

Preuve.

Rappelons que l'espace $L^{p(x)}(\Omega)$ est réflexif et séparable. Ceci implique que l'espace $E = (L^{p(x)})^{N+1}$ muni de la norme produit est réflexif et séparable.

On définit l'opérateur linéaire T par

$$\begin{aligned} T : W^{1,p(x)}(\Omega) &\longrightarrow E \\ u &\longmapsto (u, \nabla u). \end{aligned}$$

On a

$$\| T(u) \|_{(L^{p(x)}(\Omega))^{N+1}} = \| (u, \nabla u) \|_{1,p(x)} = |u|_{L^{p(x)}(\Omega)} + |\nabla u|_{L^{p(x)}(\Omega)^N}.$$

Donc T est une isométrie linéaire et par conséquent T est injective, ce qui implique que T est une isométrie bijective de $W^{1,p(x)}(\Omega)$ dans $T(W^{1,p(x)}(\Omega))$.

On conclut que $T(W^{1,p(x)}(\Omega))$ est un sous-espace fermé de E. Par la Proposition $A.2$ et la Proposition $A.5$, on a que $T(W^{1,p(x)}(\Omega))$ est réflexif et séparable.

Par conséquent, $W^{1,p(x)}(\Omega)$ est réflexif et séparable. □

Définition 2.3. *On définit $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ par l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p(x)}(\Omega)$,* $\left(W_0^{1,p(x)}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{W^{1,p(x)}(\Omega)} \right)$.

Corollaire 2.4. $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ *est un espace de Banach pour la norme* $\| \cdot \|_{1,p(x)}$.

Preuve.

Conséquence directe puisque $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ est par définition un sous espace vectoriel fermé de $W^{1,p(x)}(\Omega)$. □

Corollaire 2.5. $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ *est un espace réflexif et séparable.*

Preuve.

Conséquence directe des Propositions $A.2$ et $A.5$. □

Proposition 2.6. (Inégalité de type Poincaré) *Supposons que* Ω *est borné alors il existe une constante* $C_P > 0$, *telle que :*

$$|u|_{p(x)} \leq C_P |\nabla u|_{p(x)} \quad \forall u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Corollaire 2.7. *Les normes* $|\nabla u|_{p(x)}$ *et* $\| u \|_{1,p(x)}$ *sont équivalentes sur* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. *Plus précisément, on a*

$$\alpha \| u \|_{1,p(x)} \leq |\nabla u|_{p(x)} \leq \| u \|_{1,p(x)} \quad \forall\, u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega),$$

où

$$\alpha = \frac{1}{1 + C_P}.$$

Lemme 2.8. *Supposons que la frontière de* Ω *est lipschitzienne. Soit* $p \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ *telle que* $p(x) \geq 1$ *pour* $x \in \overline{\Omega}$. *Alors l'injection*

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega),$$

est compacte pour toute fonction $q \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ *vérifiant* $1 \leq q(x) < p^*(x)$, *où* p^* *est l'exposant critique de Sobolev associé à* p, *d'expression*

$$p^*(x) = \begin{cases} \frac{Np(x)}{N-p(x)}, & si\ p(x) < N, \\ +\infty, & si\ p(x) \geq N. \end{cases}$$

Chapitre 3

Problème du $p(x)$-Laplacien

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = f(x,u) \quad \text{dans } \Omega, \\ \qquad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où Ω est un ouvert lipschitzien de $\mathbb{R}^N$, $\Delta_{p(x)} = \operatorname{div}(|\nabla u(x)|^{p(x)-2} \cdot \nabla u(x))$ est l'opérateur $p(x)$-laplacien, p une fonction de $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ avec

$$1 < p_- = \inf_{x \in \overline{\Omega}} p(x) \leq p(x) \leq \sup_{x \in \overline{\Omega}} p(x) = p_+ < \infty. \tag{3.2}$$

L'opérateur $p(x)$-laplacien apparaît dans certains problèmes physiques, par exemple, dans la théorie de l'élasticité et la mécanique des fluides.

Supposons que

(H_1) f est une fonction de Carathéodory décroissante par rapport à la deuxième variable i.e.

$$f(x,t_1) \leq f(x,t_2), \text{ pour tout } x \in \Omega \text{ et } t_1, t_2 \in \mathbb{R}, t_1 \geq t_2.$$

(H_2) Il existe $b > 0$, $c > 0$ et $q \in \mathcal{C}(\Omega)$ tels que

$$1 < q(x) \leq \sup_{\Omega} q(x) = q_+ < p_-, \text{ pour tout } x \in \Omega,$$

et

$$|f(x,t)| \leq b(1 + |t|^{q(x)-1}), \text{ pour tous } x \in \Omega, t \in \mathbb{R}.$$

(H_3) $f(x,0) \neq 0$, pour tout $x \in \Omega$.

Définissons les opérateurs $I, L : E \to E'$ par

$$\langle I(u), v\rangle = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^{p(x)-2} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx, \tag{3.3}$$

$$\langle L(u), v\rangle = \int_{\Omega} f(x,u) v\, dx, \tag{3.4}$$

pour tous $u, v \in E$.

Définition 3.1. *Soit* $E = W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ *et soit* $u \in E$. *On dit que* u *est une solution faible de (3.1) si*

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p(x)-2}\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x,u)v\,dx \quad \textit{pour tout } v \in E.$$

Théorème 3.2. (cf.[6]) *Soit* E *un espace de Banach réel réflexif, et soit* $T : E \to E'$ *un opérateur borné, demi-continu, coercif, et monotone sur l'espace* E. *Alors, l'équation* $T(u) = g$ *a au moins une solution* $u \in E$ *pour chaque* $g \in E'$.

Nous allons applique ce théorème pour montrer que le problème (3.1) admet une solution faible unique.
L'opérateur $T : E \to E'$ sera défini par

$$T = I - L. \tag{3.5}$$

Vérifions à présent les hypothèses du Théorème 3.2.

Lemme 3.3. *L'opérateur* I *défini par* (3.3) *est borné et continu.*

Preuve.
L'opérateur I est borné et continu puisque c'est la dérivée de Fréchet de la fonctionnelle

$$\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\ \nabla u\ |^{p(x)} + |\ u\ |^{p(x)})\,dx.$$

□

Lemme 3.4. *L'opérateur* L *défini par* (3.4) *est borné et continu.*

Preuve.

1. On montre d'abord que L est borné. Grâce à l'inégalité de Hölder,
   A partir de la Proposition 1.10,

$$\begin{aligned}\|\ L(u)\ \|_{E'} &= \sup_{\|v\|_{1,p(x)}=1} |\ \langle L(u),v\rangle\ | \\ &= \sup_{\|v\|_{1,p(x)}=1} \left|\int_\Omega f(x,u)\cdot v\,dx\right| \\ &\le 2 \sup_{\|v\|_{1,p(x)}=1} |\ f\ |_{p'(x)}\cdot|\ v\ |_{p(x)} \\ &\le 2|f|_{p'(x)} \sup_{\|v\|_{1,p(x)}=1} \|\ v\ \|_{1,p(x)} \\ &\le 2\ |\ f\ |_{p'(x)},\end{aligned}$$

   d'où L est borné.

2. Montrons maintenant que L est continu.

   Soit $(u_n)_n \subset E$ une suite telle que $u_n \longrightarrow u$. Puisque l'injection de E dans $L^{q(x)}(\Omega)$ est compacte, on peut extraire une sous-suite, notée aussi par $(u_n)_n$, telle que $u_n \to u$ dans $L^{q(x)}(\Omega)$.

   Selon le Théorème $B.3$, l'opérateur de Nemytskii défini par

$$N_f : \begin{array}{rcl} L^{q(x)}(\Omega) & \to & L^{\frac{q(x)}{q(x)-1}}(\Omega) \\ u & \mapsto & f(\cdot,\ u) \end{array},$$

   est continue.

   Par conséquent, $N_f(u_n) \to N_f(u)$ dans $L^{\frac{q(x)}{q(x)-1}}(\Omega)$. En utilisant l'inégalité de Hölder et l'injection continue de E dans $L^{q(x)}(\Omega)$, on obtient,

$$\begin{aligned} | \langle L(u_n) - L(u), v\rangle | &= \left| \int_\Omega (f(x,u_n) - f(x,u)) \cdot v(x)dx \right| \\ &= \left| \int_\Omega (N_f(u_n)(x) - N_f(u)(x)) \cdot v(x)dx \right| \\ &\leq 2|N_f(u_n) - N_f(u)|_{\frac{q(x)}{q(x)-1}} \cdot |\ v\ |_{q(x)} \\ &\leq C \mid N_f(u_n) - N_f(u) \mid_{\frac{q(x)}{q(x)-1}} \cdot \|\ v\ \|_{1p(x)}, \end{aligned}$$

   tel que $C = 2C_1$, C_1 étant la constante d'injection compacte de $W^{1,p(x)}(\Omega)$ dans $L^{q(x)}(\Omega)$ (voir le Lemme 2.8).

   Ainsi, $L(u_n) \to L(u)$ dans E'. On en déduit alors que L est continu.

□

Corollaire 3.5. *L'opérateur T défini par* (3.5) *est borné et continu.*

Lemme 3.6. *L'opérateur T défini par* (3.5) *est fortement monotone.*

Preuve.

1. Commençons par montrer que I est fortement monotone.

   Soient $u, v \in E$, on a

   $\langle Iu - Iv, u - v\rangle$

$$\begin{aligned} &= \int_\Omega \Big(\mid \nabla u(x) \mid^{p(x)-2} \nabla u(x) - \mid \nabla v(x) \mid^{p(x)-2} \nabla v(x)\Big)(\nabla u(x) - \nabla v)(x)\,dx \\ &= \int_{\Omega_+} \Big(\mid \nabla u(x) \mid^{p(x)-2} \nabla u(x) - \mid \nabla v(x) \mid^{p(x)-2} \nabla v(x)\Big)\nabla(u - v)(x)\,dx \\ &+ \int_{\Omega_-} \Big(\mid \nabla u(x) \mid^{p(x)-2} \nabla u(x) - \mid \nabla v(x) \mid^{p(x)-2} \nabla v(x)\Big)\nabla(u - v)(x)\,dx, \end{aligned}$$

où

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega : p(x) \geq 2\},$$

et

$$\Omega_- = \{x \in \Omega : 1 < p(x) < 2\}.$$

On a besoin des inégalités élémentaires suivantes (cf. [7]), valables pour tous $x, y \in \mathbb{R}^N$

$$| x_1 - x_2 |^\gamma \leq 2^\gamma (| x_1 |^{\gamma-2} x_1 - | x_2 |^{\gamma-2} x_2) \cdot (x_1 - x_2) \text{ si } \gamma \geq 2, \tag{3.6}$$

et

si $1 < \gamma < 2$,

$$| x_1 - x_2 |^2 \leq \frac{1}{\gamma - 1}(| x_1 | + | x_2 |)^{2-\gamma} \cdot (| x |^{\gamma-2} x_1 - | x_2 |^{\gamma-2} x_2) \cdot (x_1 - x_2), \tag{3.7}$$

où $x.y = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$ désigne le produit scalaire habituel des vecteurs $x = (x_1, ..., x_N)$ et $y = (y_1, ..., y_N)$ dans $\mathbb{R}^N$, et $| \cdot |$ est la norme associée.

- Pour $\int_{\Omega_+}$ on applique pour tout $x \in \Omega_+$ l'inégalité (3.6) avec

$$x_1 = \nabla u(x), x_2 = \nabla v(x), \gamma = p(x),$$

on obtient

$$|\nabla(u-v)(x)|^{p(x)} \leq 2^{p(x)} \Big(|\nabla u(x)|^{p(x)-2} \nabla u(x) - |\nabla v(x)|^{p(x)-2} \nabla v(x) \Big) \cdot \nabla(u-v)(x) \tag{3.8}$$

- Pour $\int_{\Omega_-}$ on applique pour tout $x \in \Omega_-$ l'inégalité (3.7) avec

$$x_1 = \nabla u(x), x_2 = \nabla v(x), \gamma = p(x),$$

on obtient

$$\begin{aligned} |\nabla(u-v)(x)|^2 \leq \frac{1}{p(x)-1} (|\nabla u(x)| + \nabla v(x)|)^{2-p(x)} \Big(&|\nabla u(x)|^{p(x)-2} \nabla u(x) \\ &- |\nabla v(x)|^{p(x)-2} \nabla v(x) \Big) \nabla(u-v)(x) \end{aligned} \tag{3.9}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} |\nabla(u-v)(x)|^{p(x)} &= |\nabla(u-v)(x)|^{p(x)-2} |\nabla(u-v)(x)|^2 \\ &= |\nabla u(x) - \nabla v(x)|^{p(x)-2} |\nabla(u-v)(x)|^2 \\ &\leq (|\nabla u(x)| + |\nabla v(x|)^{p(x)-2} |\nabla(u-v)(x)|^2. \end{aligned}$$

Ceci implique grâce à (3.9)

$$|\nabla(u-v)(x)|^{p(x)}(p(x)-1) \leq (|\nabla u(x)|^{p(x)-2}\nabla u(x)-|\nabla v(x)|^{p(x)-2}\nabla v(x))\nabla(u-v)(x) \tag{3.10}$$

A partir des inégalités (3.8), (3.9) et (3.10), on obtient,

$$\begin{aligned}
\langle Iu - Iv, u-v\rangle &\geq \int_{\Omega_+} \frac{1}{2^{p(x)}} \mid \nabla(u-v)(x) \mid^{p(x)} \, dx + \int_{\Omega_-} (p(x)-1) \mid \nabla(u-v)(x) \mid^{p(x)} \, dx \\
&\geq \frac{1}{2^{p_+}} \int_{\Omega_+} \mid \nabla(u-v)(x) \mid^{p(x)} \, dx + (p_- - 1) \int_{\Omega_-} \mid \nabla(u-v)(x) \mid^{p(x)} \, dx \\
&\geq c_0 \int_{\Omega} \mid \nabla(u-v)(x) \mid^{p(x)} \, dx \\
&= c_0 \rho_{p(x)}(\nabla(u-v)),
\end{aligned}$$

où $c_0 = \min\{\frac{1}{2^{p_+}}, p_- - 1\}$.

- Si $\| u-v \|_{1,p(x)} \leq 1$, on a par définition de la norme $\| \cdot \|_{1,p(x)}$

$$|\nabla(u-v)|_{p(x)} \leq \| u-v \|_{1,p(x)} \leq 1.$$

Il découle de la Proposition 1.9 que

$$\begin{aligned}
\langle Iu - Iv, u-v\rangle &\geq c_0 |\nabla(u-v)|_{p(x)}^{p_+} \\
&\geq c_0 \, \alpha^{p_+} \, \| u-v \|_{1,p(x)}^{p_+},
\end{aligned}$$

grâce à l'inégalité de Poincaré (voir Corollaire 2.7).

- Si $\| u-v \|_{1,p(x)} \geq 1$, on a par l'inégalité de Poincaré

$$\frac{1}{\alpha}|\nabla(u-v)|_{p(x)} \geq \| u-v \|_{1,p(x)} \geq 1,$$

d'où

$$|\nabla(\frac{u-v}{\alpha})|_{p(x)} \geq 1.$$

Ceci implique, grâce à la Proposition 1.9, que

$$\begin{aligned}
\langle Iu - Iv, u-v\rangle &\geq c_0 \int_{\Omega} |\alpha \nabla(\frac{u-v}{\alpha})|^{p(x)} \, dx \\
&= c_0 \int_{\Omega} \alpha^{p(x)} |\nabla(\frac{u-v}{\alpha})|^{p(x)} \, dx \\
&\geq c_0 \alpha^{max(p_+,p_-)} \rho_{p(x)}(\nabla(\frac{u-v}{\alpha})) \\
&\geq c_0 \alpha^{max(p_+,p_-)} |\nabla(\frac{u-v}{\alpha})|_{p(x)}^{p_-} \\
&\geq c_0 \alpha^{max(p_+,p_-)} \alpha^{p_-} \, \| \frac{u-v}{\alpha} \|_{1,p(x)}^{p_-} \\
&= c_0 \alpha^{max(p_+,p_-)} \, \| u-v \|_{1,p(x)}^{p_-},
\end{aligned}$$

où on a utilisé encore une fois l'inégalité de Poincaré dans la dernière étape. Donc I est fortement monotone (cf. [9]).

2. En ce qui concerne la forte monotonie de l'opérateur $-L$, elle découle du fait que f décroît par rapport à la deuxième variable, en effet

$$\langle L(u) - L(v), u - v\rangle = \int_\Omega (f(x,u) - f(x,v))(u-v)dx \leq 0.$$

Par conséquent, T est fortement monotone.

$\square$

Lemme 3.7. *L'opérateur T est coercif .*

Preuve.

Par les Propositions 1.10 et 1.9, on a pour $u \in E$ avec $\| u \|_{1,p(x)} > 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\| u \|_{1,p(x)}}\langle Tu, u\rangle &= \frac{1}{\| u \|_{1,p(x)}}\left(\int_\Omega \mid \nabla u(x) \mid^{p(x)-2} \nabla u(x)\cdot \nabla u(x)\, dx - \int_\Omega f(x,u)u\, dx\right)\\
&= \frac{1}{\| u \|_{1,p(x)}}\left(\int_\Omega \mid \nabla u(x) \mid^{p(x)}\, dx - \int_\Omega f(x,u)\cdot u\, dx\right)\\
&\geq \frac{1}{\| u \|_{1,p(x)}}\left(\| u \|_{1,p(x)}^{p_-} - 2 \mid f \mid_{p'(x)} \mid u \mid_{p(x)} \right)\\
&\geq \frac{1}{\| u \|_{1,p(x)}}\left(\| u \|_{1,p(x)}^{p_-} - C \| u \|_{1,p(x)} \right),
\end{aligned}$$

tel que $C = 2 \mid f \mid_{p'(x)}$. Ceci implique que

$$\begin{aligned}
\lim_{\|u\|_{1,p(x)}\to\infty} \frac{1}{\| u \|_{1,p(x)}}\langle Tu, u\rangle &\geq \lim_{\|u\|_{1,p(x)}\to\infty} \frac{1}{\| u \|_{1,p(x)}}\left(\| u \|_{1,p(x)}^{p_-} - C \| u \|_{1,p(x)} \right)\\
&= \lim_{\|u\|_{1,p(x)}\to\infty}\left(\| u \|_{1,p(x)}^{p_- - 1} - C\right) = +\infty.
\end{aligned}$$

Cela signifie que la coercivité de T a bien lieu. $\square$

On est maintenant en mesure d'assurer l'existence et l'unicité d'une solution du problème (3.1).

Théorème 3.8. *Sous les hypothèses (H_1) et (H_2) sur la fonction f, l' équation $Tu = g$ admet une unique solution $u \in E$ pour tout $g \in E'$.*

Preuve.

Grâce au Corollaire 3.5 et aux Lemmes 3.3 et 3.7, le Théorème 3.2 assure l'existence d'une solution $u \in E$ de l'équation $Tu = g$ pour tout $g \in E'$.

Pour l'unicité de la solution du problème étudié, supposons que u et v sont deux solutions telles que $u \neq v$. Par la forte monotonie de T, il suit

$$0 = \langle Tu - Tv, u - v \rangle \geq C \parallel u - v \parallel^2 \geq 0.$$

Alors $u = v$. La solution est donc unique. $\square$

Corollaire 3.9. *Sous les hypothèses* $(H_1) - (H_3)$*, le problème* (3.1) *admet une solution faible unique.*

Preuve.
D'après le théorème précédent, il existe $u \in E$ unique solution de

$$Tu = 0. \tag{3.11}$$

Cette solution ne peut être triviale puisque $T0 \neq 0$ grâce à l'hypothèse (f_3).
L'équation (3.11) veut dire :

$$\langle Tu, v \rangle = 0 \;\; \forall \; v \in E,$$

ce qui s'écrit par définition de T :

$$\langle Iu, v \rangle - \langle Lu, v \rangle = 0 \;\; \forall \; v \in E,$$

i.e.

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p(x)-2} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx - \int_\Omega f(x, u) v \, dx = 0 \;\; \forall \; v \in E.$$

Donc u est solution faible du problème (3.1). $\square$

Annexe A

Espaces réflexifs - Espaces séparables

Définition A.1. *Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E"* (voir [3] III.4. p 39). *On dit que E est réflexif si $J(E) = E$".*
Lorsque E est réflexif on identifie implicitement E et E"(à l'aide de l'isomorphisme J).

Proposition A.2. [3, Proposition III.17] *Soit E un espace de Banach réflexif et soit $M \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé. Alors M -muni de la norme induite par $E-$est réflexif.*

Corollaire A.3. [3, Corollaire III.18] *Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si E' est réflexif.*

Définition A.4. *On dit qu'un espace métrique est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense.*

Proposition A.5. [3, Proposition III.22] *Soit E un espace mètrique séparable et soit F sous-ensemble de E. Alors F est séparable.*

Définition A.6. *On dit qu'un espace de Banach E de norme $\| \cdot \|$ est uniformément convexe si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que*

$$\Big(x, y \in E, \| x \| \leq 1, \| y \| \leq 1 \; et \; \| x - y \| \geq \varepsilon\Big) \implies \left(\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta\right).$$

Théorème A.7. (Milman-Pettis)[3, Théorème III.29] *Tous espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

Opérateurs monotones

Dans cette section, $(E, \| \cdot \|)$ est un espace de Banach réflexif et séparable et T un opérateur de E dans E'. On désignera par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ les crochets de dualité entre E' et E.

Définition A.8. *On dit que*

(i) T est monotone si

$$\forall u, v \in E, \langle Tu - Tv, u - v \rangle \geq 0.$$

(ii) On dit que T est fortement monotone s'il existe $C > 0$ tel que

$$\langle Tu - Tv, u - v \rangle \geq C \parallel u - v \parallel^2 \ \textit{pour tous}\ u, v \in E.$$

Définition A.9. *On dit que T est coercif si*

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{\langle Tu, u \rangle}{\parallel u \parallel} = +\infty.$$

Les espaces $L^p(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

• On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$L^1(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \text{ mesurable et } \int_\Omega \left| f(x) \right| dx < \infty \right\}.$$

• Soit $p \in \mathbb{R}$, avec $1 < p < \infty$, on définit :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \text{ mesurable et } \left| f \right|^p \in L^1(\Omega) \right\}.$$

Pour tout $1 \leq p < \infty$, On note :

$$\left\| f \right\|_{0,p,\Omega} = \left(\int_\Omega \left| f(x) \right|^p dx \right)^{1/p},$$

la norme de f dans $L^p(\Omega)$. Muni de cette norme, les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces de Banach séparables. Ils sont aussi réflexifs pour $1 < p < \infty$.

Soit $1 < p < \infty$, on désigne par p' l'exposant conjugué de p c'est-à-dire le nombre réel vérifiant $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Théorème A.10 (Inégalité de Hölder). *Soient* $u \in L^p(\Omega)$ *et* $v \in L^{p'}(\Omega)$ *avec* $1 < p < \infty$. *Alors* $u.v \in L^1(\Omega)$ *et on a :*

$$\int_\Omega |u\,v|dx \leq \|u\|_{0,p,\Omega}\|v\|_{0,p',\Omega}.$$

Quelques résultats de mesure et intégration

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

Lemme A.11. (Lemme de Fatou) *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables positives sur* Ω, *alors*

$$\int_\Omega \Big(\lim_{n\to\infty} \inf u_n\Big)\,dx \leq \lim_{n\to\infty} \inf \Big(\int_\Omega u_n\,dx\Big).$$

Théorème A.12. (de convergence monotone de Beppo Levi) *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante de fonctions de* $L^1(\Omega)$ *telle que* $\sup_{\mathbb{N}}\Big(\int_\Omega u_n(x)\,dx\Big) < +\infty$.
Alors, u_n *converge p.p. sur* Ω *vers une limite finie notée* u.
De plus,

$$u \in L^1(\Omega) \;\; et \;\; |u_n - u|_{L^1(\Omega)} \to 0.$$

Théorème A.13. (de convergence dominée de Lebesgue) *Soit* (u_n) *une suite de fonctions de* $L^1(\Omega)$. *On suppose que :*

1. $u_n \to u$ *p.p. sur* Ω,
2. *il existe une fonction* $v \in L^1(\Omega)$ *telle que, pour chaque* n, $|u_n| \leq v(x)$ *p.p. sur* Ω.
   Alors

$$u \in L^1(\Omega) \;\; et \;\; |u_n - u|_{L^1(\Omega)} \to 0.$$

Annexe B

Opérateurs de Nemytskii

Les opérateurs de Nemytskii sont une classe d'opérateurs non linéaires continus bornés dans les espaces L^p, ils prennent leurs nom du mathématicien Viktor Vladimirovich Nemytskii.

Définition B.1. (Fonction de Carathéodory)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite de Carathéodory si elle vérifie :

(i) L'application : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \to f(x,t)$ est continue pour presque tout $x \in \Omega$.

(ii) L'application : $\Omega \to \mathbb{R}, x \to f(x,t)$ est mesurable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Définition B.2. *On dit que N_f est un opérateur de Nemytskii (ou aussi opérateur de superposition), associé à une fonction de Carathéodory $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'il est défini par*

$$(N_f u)(x) = f(x, u(x)),$$

où $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable.

Théorème B.3. *Si $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction Carathéodory vérifiant*

$$|f(x,t)| \leq a(x) + b|t|^{\frac{p_1(x)}{p_2(x)}}, \quad \text{pour p.p. } x \in \Omega \text{ et } \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

où $p_1, p_2 \in C(\Omega)$ tels que $p_1(x) > 1$, $p_2(x) > 1$ $\forall\, x \in \Omega$, et $a \in L^{p_2(x)}(\Omega)$ avec $a(x) \geq 0$ et $b \geq 0$ est une constante, alors l'opérateur de Nemytskii de $L^{p_1(x)}(\Omega)$ à $L^{p_2(x)}(\Omega)$ défini par : $N_f(u)(x) = f(x, u(x))$ est un opérateur continu et borné.

Bibliographie

[1] **B. Abdelmalek**, *Etude des problèmes elliptiques non-linéaires dans des ouverts non bornés* , Thèse de Doctorat, Université Badji Mokhtar-Annaba, 2017.

[2] **M.Allaoui, A. El Amrouss, A. Ourraoui**, *Existence and uniqueness of solution for p(x)-Laplacian problems*, Bol. Soc. Paran. Mat. (3s.) v. 33 1 (2015), 225-232.

[3] **H. Brezis**, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, 1983.

[4] **Ccero Januário Guimarães**, *Sobre os espae de Lebesgue e Sobolev generalizados e aplioes envolvendo o $p(x)$-Laplaciano, Document présenté du programme détudes supérieures en Mathématiques - CCT - UFCG. Université fédrale de Campina Grande*, Brézil, 2006.

[5] **O. Kovliëik and J. Mkosnik,** *On spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{k,p(x)}(\Omega)$*. Czechoslovak Math. J. 41 (116) (1991), no. 4, 592-618.

[6] **J. Leray, J.L. Lions** : *Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty Browder*. Bull. Soc. Math. France. (1965) 97-107.

[7] **P, Lindqvist**, *On the equation $div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+\lambda|u|^{p-2}u = 0$*, Proc. Amer. Math. Soc. 109, (1990), 157-164.

[8] **W. Orlicz**, *Uber konjugierte Exponentenfolgen.* Stud. Math., 3, (1931), 200–211.

[9] **E. Zeidler** : *Nonlinear Functional Analysis and its Applications.* Vol. I, II/A, II/B, III and IV, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York. (1986).