République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exacte et Informatique

Département de Mathématiques

**Mémoire de fin d'étude**

Présenté pour l'obtention du diplôme de

**Master**

**Spécialité :** Mathématiques.

**Option :** EDP et Applications.

**Thème**

# La théorie des semi-groupes et applications

**Présenté par :**

Zaimen Nassim

**Devant le jury :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Président | Menniche Linda | M.C.B | Université de Jijel |
| Encadreur | Zerroug Hassina | M.A.A | Université de Jijel |
| Examinateur | Khellaf Wahiba | M.C.B | Université de Jijel |

Promotion **2020/2021**

# ⁕ *Remerciements* ⁕

*T*out d'abord et avant tout, je remercie *ALLAH* qui m'a donné la force, la volonté, la patience et le courage pour accomplir ce modeste travail.

*J*e tiens à exprimer ma reconnaissance et gratitude à mon encadreur **Zerroug Hassina**, pour avoir accepté de diriger ce travail ainsi que pour ses conseils avec beaucoup de patience et d'encouragements.

*J*e remercie les membres du jury qui ont accepté de juger mon travail. **Menniche Linda**, qui me fait l'honneur de présider ce jury. **Khellaf Wahiba**, pour avoir accepté d'examiner ce travail.

*J*e tiens à remercier tous ceux qui se sont impliqués dans ce travail, directement ou indirectement.

*A, TOUS, UN GRAND MERCI.*

# ⋇ *Dédicace* ⋇

***J'ai le grand plaisir de dédier ce modeste mémoire :***

♡ *A mes parents*
*mes frères*
*mes sœurs*
*mes amis* ♡

# TABLE DES MATIÈRES

# NOTATIONS

| | |
|---|---|
| $X$ | Espace de Banach. |
| $\|\cdot\|$ | Norme de $X$. |
| $\mathcal{B}(X)$ | L'algébre de Banach des opérateurs linéaire bornés (continus) de $X$ dans $X$. |
| $A$ | Un operateurs linéaire. |
| $I$ | L'opérateur identité sur $X$. |
| $(G(t))_{t\geq 0}$ | Une famille à paramétre d'opérateurs linéaires bornés de $X$ dans $X$. |
| $\mathcal{D}(A)$ | Le domaine de définition de l'opérateur linéaire. |
| $\overline{\mathcal{D}(A)}$ | La fermeture de $\mathcal{D}(A)$. |
| $\rho(A)$ | L'ensemble résolvant de $A$. |
| $R(\lambda, A)$ | La résolvante de $A$. |
| $\sigma(A)$ | Le spectre de $A$. |
| $G_r(A)$ | Le graphe de $A$. |

$\dfrac{d}{dt}$ La dérivée par rapport à $t$.

$\dfrac{d^n}{d\lambda^n}$ La dérivée partielle par rapport à $\lambda$ d'ordre $n$.

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

La théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires à un paramètre dans un espace de Banach a commencé dans la première moitié du $20^{\text{ème}}$ siècle et a trouvé sa place en 1984 avec le fameux théorème de **Hill-Yosida** qui a caractérisé les générateurs d'un semi-groupe fortement continus. Dans les années (1970 - 1980) et grâce aux efforts de plusieurs écoles, cette théorie a atteint un certain degré de perfection dans les monographies de **E.B.Danes**, **J.A.Goldstein**, **A.Pazy** [2] et d'autres.

Actuellement, on trouve plusieurs applications de cette théorie non seulement aux domaines classiques comme la théorie de EDP ou la théorie des processus stochastiques. Mais la théorie des semi-groupes aujourd'hui deviennent un outil très puissant dans la résolution des équations integro-différentielles et des équations différentielles fonctionnelles issues de la mécanique quantique.

Les méthodes des semi-groupes sont également appliquées dans la résolution des équations concrètes qui se produisent dans la dynamique de la population ou dans la théorie du transport.

Après ce bref aperçu historique, revenons à l'objectif de ce mémoire, à savoir à une présentation de la théorie des semi groupes et la résolution d'un problème abstraite de Cauchy (cf.par exemple [1], [8]).

Ce travail comporte principalement trois chapitres, dans **le premier chapitre**, on donne quelques notions de base liés à notre étude. On commence par la définition de l'espace de Banach et des opérateurs linéaires fermés puis quelques résultats fondamentaux d'opérateurs résolvants et quelques théorèmes d'analyse fonctionnelle que nous avons utilisés dans le reste du mémoire.

Dans **le deuxième chapitre**, on donne les définitions des semi-groupes uniformément et fortement continue et leurs propriétés élémentaires puis le théorème de Hill-Yosida dans deux cas : pour les $C_0$-semi-groupes de contraction et aussi pour les $C_0$-semi-groupes avec une preuve détaillée.

Enfin, **le troisième chapitre** est le résultat principal de ce mémoire. On étudie le problème abstrait de Cauchy du type : trouver $x$ tel que

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

lorsque $A$ est un opérateur fermé, de domaine $\mathcal{D}(A)$, dans un espace de Banach $X$, $f$ est une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $X$. La méthode des semi-groupes étudiée permettre de répondre à cette question.

# CHAPITRE 1

# PRÉLIMINAIRES

Ce chapitre est consacré aux rappels de quelques définitions et résultats qui seront utilisés dans la suite. On commence par la définition de l'espace de Banach puis les opérateurs linéaires, quelques propositions fondamentaux d'opérateurs résolvants. Pour plus de détails peut consulter [5].

## 1.1 Opérateurs linéaires

**Définition 1.1.1.** *Soit $X$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $X$ est dit espace vectoriel normé, s'il est muni d'une fonction $\|.\| : X \to \mathbb{R}_+$ vérifie les axiomes suivantes*

1. $\|x\| \geqslant 0$ *et* $\|x\| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in X$
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in X$

**Définition 1.1.2.** *L'espace vectoriel normé $(X, \|.\|)$ est dit complet si toute suite de cauchy dans $X$ est convergente.*

**Définition 1.1.3.** *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé et complet.*

**Définition 1.1.4.** *Un opérateur linéaire sur $X$ est une application linéaire $A$ définie sur sous-espace vectoriel $\mathcal{D}(A) \in X$ à valeur dans $X$. $\mathcal{D}(A)$ est appelé le domaine de l'opérateur $A$.*

**Notation** : On note un tel opérateur par $(A, \mathcal{D}(A))$.

**Définition 1.1.5.** *Le graphe d'un opérateur linéaire $(A, \mathcal{D}(A))$ est le sous-espace de $X \times X$ donné par*

$$G(A) = \big\{(x, Ax) : x \in \mathcal{D}(A)\big\} \subset X \times X$$

**Définition 1.1.6.** *On dit que $(A, \mathcal{D}(A))$ est fermé si son graphe $G(A)$ est un fermé de $X \times X$.*

**Définition 1.1.7.** *On dit que $(B, \mathcal{D}(B))$ est une extension de $(A, \mathcal{D}(A))$ si $G(A) \subset G(B)$, c-à-d $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ et $Ax = Bx$ pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$.*

La caractérisation des fermés par les suites donne la proposition suivante :

**Définition 1.1.8.** *Soit $A : X \supset \mathcal{D}(A) \to X$ un opérateur linéaire. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous définissions $A^n : \mathcal{D}(A^n) \to X$ par*

$$A^0 = I, \quad A^0 = A, ..., A^n = A(A^{n-1})$$

*où $\mathcal{D}(A^n) = \big\{x \in \mathcal{D}(A^{n-1}) : A^{n-1}x \in \mathcal{D}(A)\big\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$*

**Proposition 1.1.1.** *Un opérateur $(A, \mathcal{D}(A))$ est fermé, si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathcal{D}(A)$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in X$ et $Ax_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y \in X$, on a alors $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$.*

**Lemme 1.1.1.** *Soit $X$ un espace de Banach et $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ un opérateur linéaire. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$A$ est fermé.*
2. *$\mathcal{D}(A)$ muni de la norme graphe, notée $|.|_G$ définie par $|X|_G = |(x, Ax)|_G = \|x\| + \|Ax\|$, est un espace de Banach qu'on note $[\mathcal{D}(A)]$.*

**Preuve.** Le lemme découle du fait que l'application $[\mathcal{D}(A)] \ni x \to \big(x, Ax\big) \in \big(G(A), |.|_G\big)$ est un homéomorphisme, où $G(A)$ est le graphe de $A$. ⊠

**Lemme 1.1.2.** *Soit $X$ un espace de Banach. Soient $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ un opérateur linéaire fermé et $B \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur linéaire borné sur $X$. Alors $AB : \mathcal{D}(AB) \subseteq X \to X$ est un opérateur fermé.*

**Lemme 1.1.3.** *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur linéaire fermé. Alors $A$ est borné si et seulement si $\mathcal{D}(A) = X$.*

**Lemme 1.1.4.** *Soit $B : \mathcal{D}(B) \subset X \to X$ un opérateur fermé. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$B$ est continu, i.e, il existe $M \geqslant 0$ telle que $\|Bx\| \leqslant M\|x\|, \forall x \in \mathcal{D}(B)$.*
2. *$\mathcal{D}(B)$ est fermé dans $X$.*

**Définition 1.1.9.** *On dit qu'un opérateur linéaire $(A, \mathcal{D}(A))$ est fermable s'il possède une extension fermé.*

**Proposition 1.1.2.** *Tout opérateur fermable $(A, \mathcal{D}(A))$ admet une plus petite extension fermée notée $\bar{A}$ et appelée la fermeture de $A$. De plus on a*

$$G(\bar{A}) = \overline{G(A)}$$

**Théorème 1.1.1.** ***(Théorème du graphe fermé)***
*Soient $X$ et $Y$ deux espace de Banach.*
*Soit $T$ un opérateur linéaire de $X$ dans $Y$. On suppose que le graphe de $T, G(T)$ est fermé dans $X, Y$. Alors $T$ est continu.*

**Théorème 1.1.2.** ***[Banach-Steinhaus]***
*Soient $X$ et $Y$ deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires continus de $X$ dans $Y$. On suppose que :*

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty, \quad \forall x \in X.$$

*Alors*

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty.$$

## 1.2 Ensemble résolvant, spectre et résolvante

**Définition 1.2.1.** *Soit $(A, \mathcal{D}(A)) \subset X \to X$ un opérateur linéaire.*

1. *On appelle ensemble résolvant de $A$, qu'on note $\rho(A)$, l'ensemble :*
   $\rho(A) = \big\{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda I - A : \mathcal{D}(A) \to X \text{ est bijectif et } (\lambda I - A)^{-1} : X \to \mathcal{D}(A) \text{ est borné}\big\}$
   *Si $A$ est fermé alors d'après le théorème du graphe fermé on a*
   $$\rho(A) = \big\{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda I - A : \mathcal{D}(A) \to X \text{ est bijectif}\big\}.$$
2. *On appelle spectre de $A$, l'ensemble $\sigma(A) = \mathbb{C}/\rho(A)$.*

3. *Pour $\lambda \in \rho(A)$, l'opérateur linéaire borné $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est appelé la résolvante de $A$ au point $\lambda$.*

**Proposition 1.2.1.** ***(Équation de la résolvante)***
*Si $(A, \mathcal{D}(A)) \subset X \to X$ est un opérateur linéaire, alors pour tout $\lambda, \mu \in \rho(A)$, on a*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A)$$

**Preuve.** On sait que $(\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1} = I$. De la définition de la résolvante on a :

$$\big[(\lambda I - A)R((\lambda, A))\big]R(\mu, A) = R(\mu, A)$$

alors

$$\big[\lambda R(\lambda, A) - AR((\lambda, A))\big]R(\mu, A) = R(\mu, A)$$

De la même manière

$$\big[\mu R(\mu, A) - AR((\mu, A))\big]R(\lambda, A) = R(\lambda, A)$$

On faisant la différence des deux égalités et compte tenu du fait que $R(\lambda, A)$ et $R(\mu, A)$ commutent, on obtient :

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A)$$

⊠

**Lemme 1.2.1.** *Si $A : \mathcal{D}(A) \to X$ est un opérateur linéaire injectif et fermé alors :*

$$A^{-1} : Im(A) \to \mathcal{D}(A)$$

*est fermé.*

**Lemme 1.2.2.** *Si $A : \mathcal{D}(A) \to X$ est un opérateur linéaire tel que $\rho(A) \neq \phi$, alors $A$ est fermé.*

**Preuve.** Soit $\lambda \in \rho(A)$. On a $(\lambda I - A)^{-1}$ est borné sur $X$ et donc fermé. Par suite $\lambda I - A$ est fermé, ce qui entraîne que $A$ est fermé. ⊠

**Lemme 1.2.3.** *Soit $X$ un espace de Banach et $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ un opérateur linéaire à domaine $\mathcal{D}(A)$ dense dans $X$ tel que $\rho(A) \neq \phi$. Alors $\mathcal{D}(A^2)$ est dense dans $X$.*

**Preuve.** Soit $\lambda \in \rho(A)$. Montrons que $\mathcal{D}(A^2)$ est dense dans $ImR(\lambda, A) = \mathcal{D}(A)$. Soit $y \in X$. Comme $\mathcal{D}(A)$ dense dans $X$ il existe $(x_n) \subset \mathcal{D}(A)$ telle que $y = \lim_{n\to\infty} x_n$. Posons

$$y_n = R(\lambda, A)x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(y_n) \in \mathcal{D}(A)$ et $Ay_n = AR(\lambda, A)x_n = \lambda R(\lambda, A)x_n - x_n \in \mathcal{D}(A)$.
Donc

$$(y_n) \subset \mathcal{D}\big(A^2\big) \text{ et } R(\lambda, A)y = \lim_{n\to\infty} y_n$$

Par suite $\mathcal{D}\big(A^2\big)$ est dense dans $\mathcal{D}(A)$. Comme $\mathcal{D}(A)$ dense dans $X$, alors $\mathcal{D}\big(A^2\big)$ est dense dans $X$. ⊠

**Proposition 1.2.2.** *Soit $X$ un espace de Banach et $A \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur linéaire continu, avec $\mathcal{B}(X)$ est l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires continus sur $X$. Si $\|A\| < 1$ alors $I - A$ est inversible dans $\mathcal{B}(X)$ d'inverse $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} A^n$.*

**Lemme 1.2.4.** *Soit $A : \mathcal{D}(A) \to X$ un opérateur linéaire. Alors :*

1. *L'ensemble $\rho(A)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ de plus pour tout $\mu \in \rho(A)$, et tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que*

$$|\mu - \lambda| < \frac{1}{\|R(\mu, A)\|}$$

*on ait $\lambda \in \rho(A)$ et*

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, A)^{n+1}. \tag{1.1}$$

2. *L'application $\lambda \longmapsto R(\lambda, A)$ est localement analytique et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1} \tag{1.2}$$

**Preuve.** 1. Si $\rho(A) = \phi$, alors $\rho(A)$ est ouvert. Si $\rho(A) \neq \phi$ alors $A$ est fermé. Soient alors $\mu \in \rho(A)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que

$$|\mu - \lambda| < \frac{1}{\|R(\mu, A)\|},$$

alors :

$$\lambda I - A = \mu I - A + (\lambda - \mu)I$$

$$= [I - (\mu - \lambda)R(\mu, A)](\mu I - A).$$

Comme $|\mu - \lambda| < \frac{1}{\|R(\mu,A)\|}$, l'opérateur $[I - (\mu - \lambda)R(\mu, A)]$ est inversible d'inverse $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, A)^n$. Il en résulte alors que $\lambda I - A$ est bijectif. Donc $B\Big(\mu, \frac{1}{\|R(\mu,A)\|}\Big) \subseteq \rho(A)$, d'où $\rho(A)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

De plus pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $|\mu - \lambda| < \frac{1}{\|R(\mu,A)\|}$ on a :

$$R(\lambda, A) = [\mu I - A + (\lambda - \mu)I]^{-1}$$

$$= \big(\mu I - A\big)^{-1} \big[I - (\mu - \lambda)R(\mu, A)\big]^{-1}$$

$$= R(\mu, A) \sum_{n=0}^{+\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, A)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, A)^{n+1}$$

2. Découle immédiatement de la représentation de la résolvante dans la série de la formule (1.1).

$\boxtimes$

CHAPITRE 2

# SEMI-GROUPES LINÉAIRES

Dans ce chapitre, on donne les définitions des semi-groupes uniformément et fortement continus et leurs propriétés élémentaires, puis le théorème de Hill-Yosida qui donne une caractérisation pour les opérateurs qui sont générateurs d'un $C_0$-semi-groupe et quelques classes des semi-groupes.

## 2.1 Semi-groupes uniformément continus

**Définition 2.1.1.** *Soit $X$ est un espace de Banach. Une famille à un paramètre $(G(t))_{t\geq 0}$ d'opérateur linéaires bornés de $X$ dans $X$ est dite un semi-groupe d'opérateur linéaires bornés sur $X$ si :*

1. *$G(0) = I$ (où $I$ est l'opérateur identité de $X$).*
2. *$G(t+s) = G(t)G(s), \quad \forall t, s \geq 0$.*

**Définition 2.1.2.** *La famille $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ constitue un groupe si la condition $G(t+s) = G(t)G(s)$ a lieu avec $s$ et $t$ de signe quelconque.*

**Définition 2.1.3.** *Un semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur $X$ est dit uniformément continu sur $X$ si :*

$$\lim_{t\to 0^+} \|G(t) - I\| = 0. \tag{2.1}$$

De plus, comme $t + s = s + t$, on a

$$G(t+s) = G(s+t) = G(t)G(s) = G(s)G(t).$$

Donc, les opérateurs d'un semi-groupe commutent.

***Exemple :*** Groupe des translations dans $L^p(\mathbb{R}), 1 \leq p < +\infty$.

Pour $u \in L^p(\mathbb{R})$, on définit $G(t)u$ par

$$G(t)u(x) = u(x+t) \quad \text{p.p en } x \in \mathbb{R}$$

L'invariance de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ par le groupe des translations $x \to x+t$ montre que

$$\|G(t)u\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|u\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

les propriétés (1) et (2) sont immédiates.

En effet,

On a : $G(0)u(x) = u(x)$, alors $G(0) = I$

et

$$\begin{aligned} G(t+s)u(x) &= u(x+t+s) \\ &= u(x+s+t) \\ &= G(t)u(x+s) \\ &= G(t)G(s)u(x) \end{aligned}$$

alors

$$G(t+s) = G(t)G(s).$$

**Définition 2.1.4.** *L'opérateur linéaire $A$ défini par :*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X, \lim_{t \to 0^+} \frac{G(t)x - x}{t} \text{ existe dans } X \right\},$$

*et*

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{G(t)x - x}{t} = \left. \frac{dG(t)x}{dt} \right|_{t=0}, \forall x \in \mathcal{D}(A) \tag{2.2}$$

*est appelé le générateur infinitésimal du semi-groupe $(G(t))_{t \geq 0}$ et $\mathcal{D}(A)$ est appelé le domaine de $A$.*

**Lemme 2.1.1.** *Soit $f : [a,b] \to X$ une fonction continue, alors :*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s)ds = f(a). \tag{2.3}$$

**Preuve.** Pour tout $t \neq 0$ on a

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s) ds - f(a)\, ds \right\| &= \left\| \frac{1}{t} \int_a^{a+t} \big( f(s) - f(a) \big)\, ds \right\| \\
&\leq \frac{1}{t} \int_a^{a+t} \left\| f(s) - f(a) \right\| ds \\
&\leq \frac{1}{t} \sup_{s \in [a, a+t]} \left\| f(s) - f(a) \right\| \int_a^{a+t} ds \\
&\leq \frac{1}{t} \sup_{s \in [a, a+t]} \left\| f(s) - f(a) \right\| \times t \\
&= \sup_{s \in [a, a+t]} \left\| f(s) - f(a) \right\|.
\end{aligned}
$$

La continuité de $f$ nous permet de conclure. ⊠

**Théorème 2.1.1.** *Un opérateur linéaire $A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu sur $X$ si, et seulement si $A$ est un opérateur linéaire borné sur $X$.*

**Preuve.**

$\Longleftarrow$) Soit $A$ un opérateur linéaire borné sur $X$. Posons pour tout $t \geq 0$,

$$
G(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}
$$

Cette série, ainsi définie, converge en norme et définit un opérateur linéaire borné $G(t)$ pour tout $t \geq 0$.

Il est clair que $G(0) = I$, et par un calcul simple, on a pour tous $t, s \geq 0$,

$$
G(t+s) = e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA} = G(t) G(s).
$$

Par ailleurs, pour tout $t \geq 0$ on a

$$
\begin{aligned}
\left\| G(t) - I \right\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} - I \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{\|A\|^n}{n!} \\
&= e^{t\|A\|} - 1 \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0,
\end{aligned}
$$

d'où $\lim\limits_{t\to 0^+} \|G(t)-I\| = 0$.

D'autre part, pour tout $t>0$ on a

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{G(t)-I}{t} - A\right\| &= \left\|\frac{e^{tA}-I}{t} - A\right\| \\
&= \left\|\frac{e^{tA}-I-t\,A}{t}\right\| \\
&= \left\|\frac{1}{t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nA^n}{n!} - I - t\,A\right)\right\| \\
&= \left\|\frac{1}{t}\left(I+tA+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^nA^n}{n!} - I - t\,A\right)\right\| \\
&= \left\|\frac{1}{t}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{t^nA^n}{n!}\right\| \\
&\leq \frac{1}{t}\sum_{n=2}^{+\infty} t^n\frac{\|A\|^n}{n!} \\
&= \frac{1}{t}\left(1+t\|A\|+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^n\|A\|^n}{n!} - 1 - t\|A\|\right) \\
&= \frac{1}{t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\|A\|^n}{n!} - 1 - t\|A\|\right) \\
&= \frac{1}{t}\left(e^{t\|A\|} - 1 - t\|A\|\right) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0 \\
&= \frac{e^{t\|A\|}-1}{t\|A\|}\|A\| - \|A\| \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0.
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{G(t)-I}{t} = A$$

Ainsi, $(G(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu d'opérateur linéaires bornés sur $X$ de générateur infinitésimal $A$

Réciproquement, soit $(G(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur $X$, de générateur infinitésimal $A$.

L'application

$$\begin{aligned}
G : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathcal{B}(X) \\
t &\longmapsto G(t)
\end{aligned}$$

est continue, donc

$$\int_0^t G(s)ds \in \mathcal{B}(X), \forall t\geq 0.$$

D'après lemme 2.1.1 on a

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\int_0^t G(s)ds = G(0) = I.$$

Il existe alors $\rho > 0$ tel que $\left\| \frac{1}{\rho} \int_0^\rho G(s)ds - I \right\| < 1$, ce qui implique que $\frac{1}{\rho} \int_0^\rho G(s)ds$ est inversible, et donc $\int_0^\rho G(s)ds$ est aussi inversible. Pour tout $h > 0$ on a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{G(h)-I}{h}\right)\left(\int_0^\rho G(s)ds\right) &= \frac{1}{h}\left(\int_0^\rho \big(G(h+s)ds - G(s)\big)ds\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_h^{\rho+h} G(s)ds - \int_0^\rho G(s)ds\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_h^\rho G(s)ds + \int_\rho^{\rho+h} G(s)ds - \int_0^\rho G(s)ds\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_\rho^{\rho+h} G(s)ds - \left(\int_0^\rho G(s)ds + \int_\rho^h G(s)ds\right)\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_\rho^{\rho+h} G(s)ds - \int_0^h G(s)ds\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{G(h)-I}{h} = \left(\frac{1}{h}\int_\rho^{\rho+h} G(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^h G(s)ds\right)\left(\int_0^\rho G(s)ds\right)^{-1}$$

Compte tenu du lemme 2.1.1, on obtient $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{G(h)-I}{h} = \big(G(\rho)-I\big)\left(\int_0^\rho G(s)ds\right)^{-1}$.
Ainsi, le générateur infinitésimal du semi-groupe $(G(t))_{t>0}$ est l'opérateur linéaire borné

$$A = \big(G(\rho)-I\big)\left(\int_0^\rho G(s)ds\right)^{-1}.$$

⊠

**Remarque :** De la définition 2.1.3, on voit bien q'un semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ admet un unique générateur infinitésimal. Si $(G(t))_{t\geq 0}$ est uniformément continu alors son générateur infinitésimal est un opérateur linéaire borné. D'autre part, tout opérateur linéaire borné est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu. Ce semi-groupe est t-il unique ? La réponse affirmative est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 2.1.2.** *Soient $(G(t))_{t\geq 0}$ et $(S(t))_{t\geq 0}$ deux semi-groupes uniformément continus. Si :*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{G(t)-I}{t} = A = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)-I}{t}, \tag{2.4}$$

*alors*

$$G(t) = S(t),\ \forall t \geq 0.$$

**Preuve.**

Montrons que pour tout $a > 0$, $G(t) = S(t)$ pour tout $t \in [0, a]$.

Soit $a > 0$ fixé. Comme $(G(t))_{t\geq 0}$ et $(S(t))_{t\geq 0}$ sont des semi-groupes uniformément continu, alors les applications $t \longmapsto \|G(t)\|$ e t $t \longmapsto \|S(t)\|$ sont continues. Il existe alors une constante $C_a > 0$ telle que $\|G(t)\|\|S(t)\| \leq C_a$, $\forall t, s \in [0, a]$

Pour tout $h > 0$, on a

$$\left\|\frac{G(h) - S(h)}{h}\right\| = \left\|\left(\frac{G(h) - I}{h} - A\right) - \left(\frac{S(h) - I}{h} - A\right)\right\|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. l'égalité (2.4) implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour $0 < h \leqslant \delta$, on ait

$$\left\|\frac{G(h) - I}{h} - A\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2a\, C_a} \quad \text{et} \quad \left\|\frac{S(h) - I}{h} - A\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2a\, C_a}.$$

Ce qui entraîne alors que pour $0 < h \leq \delta$, on a

$$\left\|\frac{G(h) - S(h)}{h}\right\| \leqslant \left\|\frac{G(h) - I}{h} - A\right\| + \left\|\frac{S(h) - I}{h} - A\right\| \leq \frac{\varepsilon}{a\, C_a}.$$

Soient $t \in [0, a]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tells que $\dfrac{t}{n} < \delta$. De la définition 2.1.1 et de l'inégalité précédente, il vient que :

$$\begin{aligned}
\|G(t) - S(t)\| &= \left\|\sum_{k=0}^{n-1}\left[G\left((n-k)\frac{t}{n}\right)S\left(k\frac{t}{n}\right) - G\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right)S(k+1)\frac{t}{n}\right]\right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left\|G\left((n-k)\frac{t}{n}\right)S\left(k\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right)S(k+1)\frac{t}{n}\right\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left\|G\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right)G\left(\frac{t}{n}\right)S\left(k\frac{t}{n}\right) - G\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right)S\left(k\frac{t}{n}\right)S\left(\frac{t}{n}\right)\right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left\|G\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right)\right\|\left\|S\left(k\frac{t}{n}\right)\right\|\left\|G\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right)\right\| \\
&\leq C_a\frac{t}{n}\,\frac{\varepsilon}{aC_a}\sum_{k=0}^{n-1}1 \\
&= \varepsilon\frac{t}{a} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, alors $G(t) = S(t)$, $\forall t \in [0, a]$. Mais puisque $a > 0$ est aussi arbitraire, il s'ensuite que $G(t) = S(t)$, $\forall t \geq 0$. ⊠

**Corollaire 2.1.1.** *Soit $(G(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaire bornés. Alors :*

1. *Il existe une constante $\omega \geq 0$ telle que*
$$\|G(t)\| \leqslant e^{\omega t},\ \forall t \geqslant 0.$$
2. *Il existe un opérateur linéaire borné $A$ tel que $G(t) = e^{tA}$, $\forall t \geqslant 0$.*
3. *L'opérateur $A$ de l'assertion 2) est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(G(t))_{t\geqslant 0}$.*
4. *L'application $t \longmapsto G(t)$ est différentiable et on a*
$$\frac{dG(t)}{dt} = AG(t) = G(t)A. \tag{2.5}$$

**Preuve.** Toute les assertions ci-dessus découlent de l'assertion (2). Pour montrer (2) notons que puisque $(G(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu son générateur infinitésimal $A$ est un opérateur linéaire borné et est aussi le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu $\left(e^{tA}\right)_{t\geq 0}$, et par le théorème 2.1.2 on obtient
$$G(t) = e^{tA}, \forall t \geq 0.$$

$\boxtimes$

## 2.2 $C_0$-semi-groupes linéaires

Dans le cadre de ce paragraphe, nous introduisons une classe plus générale que la classe des semi-groupes uniformément continus et nous étudions leur propriété élémentaire.

**Définition 2.2.1.** *Un semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur $X$ est dit fortement continu si :*
$$\lim_{t\to 0^+} \|G(t)x - x\| = 0,\ \forall x \in X. \tag{2.6}$$
*Un semi-groupe fortement continu sur $X$ est aussi appelé $C_0$-semi-groupe sur $X$.*

***Exemple :***
Soit $X = l^2 = \left\{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty\right\}$ l'espace des suites de carré sommable à valeurs complexes ; $l^2$ est un espace de Hilbert pour la norme : $x \to \|x\|_{l^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, associée au produit scalaire
$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n.$$

On définit $G(t)$ par

$$G(t)x = \{e^{-n^2t}x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^2, \quad \textit{pour tout } t \geqslant 0.$$

On vérifie immédiatement que $G(0) = I$ et $G(t+s) = G(t)G(s)$.

Pour vérifier (1.2) iii), on considère :

$$\|G(t)x - x\|_{l^2}^2 = \sum_{n=1}^{N-1}(1-e^{-n^2t})^2|x_n|^2 + \sum_{n=N}^{+\infty}(1-e^{-n^2t})^2|x_n|^2.$$

Comme $\sum\limits_{n=N}^{+\infty}(1-e^{-n^2t})^2|x_n|^2 \leqslant \sum\limits_{n\geqslant N}|x_n|^2$ et que $x \in l^2$, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir $N$ de telle sort que $\sum\limits_{n\geqslant N}(1-e^{-n^2t})^2|x_n|^2 < \varepsilon$. Comme la fonction $n \to 1 - e^{-n^2t}$ est croissante pour $n \geqslant 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{N}\left(1-e^{-n^2t}\right)^2|x_n|^2 \leqslant \left(1-e^{-N^2t}\right)^2\|x_n\|_{l^2}^2,$$

quantité qui tend vers zéro lorsque $t \to 0$, $N$ étant fixé, d'où (1.2)iii).

On a ainsi un exemple de semi-groupe qui n'est pas prolongeable à un groupe.

En effet, si c'était le cas, on aurait $G(t)^{-1} = G(-t)$, or

$$G(-t)x = \{e^{n^2t}x_n\}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

suite qui n'est pas élément de $l^2$ pour $t \neq 0$ pour tout $x \in l^2$.

Considérons la suite $\dfrac{G(h)x - x}{h} = \left\{\frac{e^{-n^2h}-1}{h}\,x_n\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{e^{-n^2h}-1}{h}\,x_n = -n^2x_ne^{-\theta_n n^2h}$, $0 < \theta_n < 1$.

Il en résulte que $\dfrac{G(h)x - x}{h}$ a une limite dans $l^2$, si et seulement si, la suite de terme général $\{-n^2x_n\}$ est dans $l^2$.

Alors : $\lim\limits_{h\to+0}\dfrac{G(h)x-x}{h} = \{-n^2x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Donc $Ax = \{-n^2x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, n'est pas défini pour tout $x \in l^2$, mais seulement pour les $x$ tels que $\{-n^2x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^2$.

On désigne par $\mathcal{D}(A) = \Big\{x \in l^2, \{n^2x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^2\Big\}$ ; $\mathcal{D}(A)$ est le domaine de l'opérateur non borné $A$.

**Théorème 2.2.1.** *Soit $(G(t))_{t\geqslant 0}$ un $C_0$-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés. Alors :*

1. *Il existe $\tau > 0$ et $M \geqslant 1$ tel que $\|G(t)\| \leqslant M, \forall t \in [0,\tau]$ ;*
2. *Il existe $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geqslant 1$ tel que $\|G(t)\| \leqslant Me^{wt}, \forall t \geqslant 0$.*

**Preuve. (Par l'absurde)**

1. Supposons que pour tout $\tau > 0$ et $M \geqslant 1$, il existe $t \in [0,\tau]$ tel que $\|G(t)\| > M$, donc pour

tout $\tau = \dfrac{1}{n}$ et $M = n \in \mathbb{N}^*$, il existe $t_n \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right]$ tel que $\|G(t_n)\| > n$.
D'où, la suite $(\|G(t_n)\|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est non bornée.
Mais cela est contradiction avec l'affirmation précédente. Donc il existe $x_0 \in E$ tel que $(\|G(t_n)(x_0)\|)_{n>0}$ soit non bornée.
D'autre part on a d'après la définition de $C_0$-semi-groupe $\lim\limits_{t_n\to 0} G(t_n)x_0 = x_0$, alors il y a une contradiction, i.e, il existe $\tau > 0$ et $M \geqslant 1$ tel que $\|G(t)\| \leqslant M,\ \forall t \in [0, \tau]$.
2. On montre qu'il existe $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $\|G(t)\| \leq Me^{wt}$, pour tout $t \geq 0$.

$*$ Pour $t \leq \tau$ l'énoncé vérifié d'après (1) avec $\omega = 0 \in \mathbb{R}$ .

$*$ Pour $t > \tau$, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\delta \in [0, \tau]$ tels que $t = n\tau + \delta$. On a

$$\begin{aligned} G(t) &= G(n\tau + \delta) \\ &= G(n\tau) \times G(\delta) \\ &= G(\tau + \tau + \tau + \cdots + \tau)G(\delta) \\ &= [G(\tau)]^n G(\delta), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \|G(t)\| &= \|[G(\tau)]^n G(\delta)\| \\ &\leq \|G(\tau)\|^n \|G(\delta)\| \\ &\leq M^n M \\ &= Me^{n \ln M} \\ &\leq Me^{\frac{t}{\tau} \ln M} \\ &= Me^{t\omega}, \end{aligned}$$

tel que $\omega = \dfrac{\ln(M)}{\tau}$. Donc, il existe $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tel que

$$\|G(t)\| \leq Me^{t\omega},\ \forall t \geq 0.$$

⊠

**Définition 2.2.2.** ***(Type d'un semi-groupe)***
*Soit $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ un $C_0$-semi-groupe sur $X$. La borne inférieure $\bar{\omega}$ de l'ensemble des $\omega$ tels qu'il existe un nombre $M_\omega$ vérifiant :*

$$\|G(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}, \quad t \geq 0$$

*est appelé le type du semi-groupe $\{G(t)\}$.*

***Remarque :*** La borne inférieure n'est pas nécessairement atteinte. Autrement dit, il n'existe pas nécessairement de nombre $M$ fini tel que

$$\|G(t)\| \leq M\, e^{\bar{\omega}t}$$

Ainsi si $G(t) = e^{At}$ où $A$ est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où : $\bar{\omega} = 0$. Pour tout $\|G(t)\| \to \infty$ si $t \to \infty$, mais au moins vite qu'une exponentielle.

**Corollaire 2.2.1.** *Soit $(G(t))_{t\geqslant 0}$ un $C_0$-semi-groupe sur $X$. Alors pour tout $x \in X$, la fonction $t \longrightarrow G(t)x$ est continue de $\mathbb{R}^+$ dans $X$.*

**Preuve.** Soit $x \in X$ et soient $t, h > 0$ la continuité de $t \longrightarrow G(t)x$ découle des égalités

$$\begin{aligned} \|G(t+h)x - G(t)x\| &= \|G(t)(G(h)x - x)\| \\ &\leqslant \|G(t)\|\|G(h)x - x\| \\ &\leqslant Me^{\omega t}\|G(h)x - x\| \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0, \end{aligned}$$

et pour $t \geqslant h \geqslant 0$ on a

$$\begin{aligned} \|G(t-h)x - G(t)x\| &= \|G(t-h)(x - G(h)x)\| \\ &\leqslant \|G(t-h)\|\|x - G(h)x\| \\ &\leqslant Me^{w(t-h)}\|x - G(h)x\| \\ &\leqslant Me^{wt}\|x - G(h)x\| \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0. \end{aligned}$$

⊠

**Théorème 2.2.2.** *Soit $(G(t))_{t\geq 0}$ un $C_0$-semi-groupe sur $X$ de générateur infinitésimal $A$. Alors :*

1. *On a*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} G(s)xds = G(t)x, \ \forall t \geqslant 0, \forall x \in X. \tag{2.7}$$

2. *Pour tout $t \geqslant 0$ et tout $x \in X$,*

$$\int_0^t G(s)xds \in \mathcal{D}(A).$$

*et on a*

$$A\Big(\int_0^t G(s)xds\Big) = G(t)x - x. \tag{2.8}$$

3. *Pour tout $t \geqslant 0$ et tout $x \in \mathcal{D}(A)$, $G(t)x \in \mathcal{D}(A)$, et on a*

$$\frac{dG(t)x}{dt} = AG(t)x = G(t)Ax. \tag{2.9}$$

**Preuve.**

1. On a

$$\Big\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} G(s)xds - G(t)x\Big\| = \Big\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} G(s)x - G(t)xds\Big\| \leqslant \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\Big\|G(t)x - G(s)x\Big\|ds.$$

On sait que l'application $t \longmapsto G(t)x$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, d'où pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\|G(t) - G(s)\| < \varepsilon, \ \textit{pour} \ |s-t| < \eta.$$

$$\Big\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} G(s)xds - G(t)x\Big\| \leq \varepsilon$$

ce qui achève la démonstration.

2. Pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, on a

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{G(h)-I}{h}\Big)\Big(\int_0^t G(s)xds\Big) &= \frac{1}{h}\Big(\int_0^t (G(h+s)x - G(s)x)ds\Big) \\
&= \frac{1}{h}\Big(\int_h^{t+h} G(s)xds - \int_0^t G(s)xds\Big) \\
&= \frac{1}{h}\Big(\int_t^{t+h} G(s)xds - \int_0^h G(s)xds\Big) \\
&\xrightarrow[h\to 0^+]{} G(t)x - x.
\end{aligned}$$

3. Pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{G(h)-I}{h} G(t)x &= \lim_{h\to 0^+} \frac{G(h+t)x - G(t)x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} G(t)\left(\frac{G(h)-I}{h}\right)x \\
&= \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{G(h)-I}{h}\right)G(t)x \\
&= G(t)Ax = AG(t)x.
\end{aligned}$$

Ce qui implique aussi que $\dfrac{dG(t)x}{dt} = AG(t)x = G(t)Ax.$ ⊠

**Remarque :** En intégrant la formule (2.9) entre 0 et $t$, on obtient pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ :

$$G(t)x - x = \int_0^t G(s)Axds = \int_0^t AG(s)xds. \tag{2.10}$$

**Corollaire 2.2.2.** *Si $A$ est le générateur infinitésimal d'un $C_0$-semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ sur $X$, alors*

1. *Le domaine $\mathcal{D}(A)$ est dense dans $X$, c'est-à-dire $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.*
2. *$A$ est un opérateur linéaire fermé.*

**Preuve.**
1. Soit $x \in X$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$x_n = \frac{1}{\frac{1}{n}} \int_0^{\frac{1}{n}} G(s)xds.$$

D'après les assertions (1) et (2) du théorème 2.2.2 on a $x_n \in \mathcal{D}(A)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} \int_0^{\frac{1}{n}} G(s)xds = x.$$

Ainsi, $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.
2. D'abord $A$ est un opérateur linéaire. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}(A)$ telle que $x_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} x$ et $Ax_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} y$. Montrons que $x \in \mathcal{D}(A)$ et que $Ax = y$.
Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathcal{D}(A)$, alors de la formule (2.10) on a

$$G(t)x_n - x_n = \int_0^t G(s)Ax_nds,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \geq 0. \tag{2.11}$$

Soit $t > 0$. Alors pour tout $s \in [0, t]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} ||G(s)Ax_n - G(s)y|| &= ||G(s)(Ax_n - y)|| \\ &\leq ||G(s)||||Ax_n - y|| \\ &\leq Me^{wt}||Ax_n - y||. \end{aligned}$$

Donc $(G(s)Ax_n)_{n\geq 0}$ converge quand $n \longrightarrow +\infty$ vers $G(s)y$ uniformément en $s$ sur $[0, t]$.
Il vient, alors de l'égalité (2.11) et du théorème d'interversion de la limite et l'intégrale que :

$$G(t)x - x = \int_0^t G(s)yds.$$

Donc

$$\frac{G(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t G(s)yds \xrightarrow[t \longrightarrow 0^+]{} y.$$

Ainsi $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$. ⊠

**Théorème 2.2.3.** *Soient $(G(t))_{t\geq 0}$ et $(S(t))_{t\geq 0}$ deux $C_0$-semi-groupe sur $X$, de générateurs infinitésimaux, respectivement $A$ et $B$. Si $A = B$, alors $G(t) = S(t), \forall t \geq 0$.*

**Preuve.**
Soit $t > 0$ et soit $x \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$.
Il vient de l'assertion 3) du théorème 2.2.2 que la fonction

$$[0, t] \ni s \longmapsto U(s)x := G(t - s)S(s)x \in \mathcal{D}(A)$$

est différentiable et que :

$$\begin{aligned} \frac{dU(s)}{ds} &= -AG(t - s)S(s)x + G(t - s)BS(s)x \\ &= -G(t - s)AS(s)x + G(t - s)AS(s)x, \ (A = B) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui entraîne alors que pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, la fonctions $s \longmapsto U(s)x := G(t - s)S(s)x$ est constante, et en particulier ses valeurs aux points $s = 0$ et $s = t$ coïcident.
D'où :

$$G(t)x = S(t)x, \ \forall t \geq 0, \ \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Comme $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ et $G(t), S(t)$ sont des opérateurs bornés sur $X$, pour tout $t \geq 0$, alors $G(t) = S(t), \ \forall t \geq 0$. ⊠

**Théorème 2.2.4.** *Soit* $(G(t))_{t\geq 0}$ *un* $C_0$*-semi-groupe sur* $X$ *de générateur infinitésimal* $A$. *Alors :*

1. $\overline{\mathcal{D}(A^n)} = X$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. $\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} \mathcal{D}(A^n) = X$.

**Preuve.**

1. Compte tenu du corollaire 2.2.3, le résultat est vrai pour n = 1.

Posons

$$\mathcal{D} = \Big\{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \varphi \,\text{support compacte inclus dans}\, [0,\infty[\Big\}.$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$ et tout $x \in X$, on pose

$$x_\varphi = \int_0^\infty \varphi(s)G(s)xds.$$

Considérons l'ensemble $Y = \{x_\varphi, \varphi \in \mathcal{D} \; et \; x \in X\}$ qui est un sous espace vectoriel de $X$.

Pour tout $x \in X, \varphi \in \mathcal{D}$ et $h > 0$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{G(h)-I}{h}x_\varphi &= \frac{1}{h}\int_0^\infty \varphi(s)G(h+s)xds - \frac{1}{h}\int_0^\infty \varphi(s)G(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_h^\infty \varphi(s-h)G(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^\infty \varphi(s)G(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_h^\infty (\varphi(s-h)-\varphi(s))G(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^h \varphi(s)G(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_h^\infty (\varphi(s-h)-\varphi(s))G(s)xds + \frac{1}{h}\int_0^h (\varphi(s-h)-\varphi(s))G(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_h^\infty (\varphi(s-h)-\varphi(s))G(s)xds, \quad \big(\text{car supp}(\varphi) \subset [0,\infty[\big).
\end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{h}(\varphi(s-h)-\varphi(s))G(s)x$ converge uniformément vers $-\varphi'(s)G(s)x$ sur $[0,\infty[$ quand $h \longrightarrow 0^+$, alors en faisant tendre $h \longrightarrow 0^+$ dans la dernière formule, il vient que $x_\varphi \in \mathcal{D}(A)$ et que

$$Ax_\varphi = -\int_0^\infty \varphi'(s)G(s)xds.$$

Il en résulte que $Y \subset \mathcal{D}(A)$, et par récurrence on montre que $Y \subset \mathcal{D}(A^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que :

$$A^n x_\varphi = (-1)^n \int_0^\infty \varphi^{(n)}(s)G(s)xds, \; \forall x_\varphi \in Y.$$

Maintenant, montrons que $Y$ est dense dans $X$.
Supposons par l'absurde que $\overline{Y} \neq X$, alors d'après lemme 1.1.2, il existe $f \in X', f \neq 0$ telle que $< x_\varphi, f >= 0, \ \forall x_\varphi \in Y$.
Donc

$$\int_0^\infty \varphi(s) < G(s)x, f > ds = \left\langle \int_0^\infty \varphi(s)G(s)xds, f \right\rangle = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \, \forall x \in X.$$

Par conséquent, pour tout $x \in X$ on a $< G(s)x, f >= 0, \forall s \in [0, +\infty[$.
En particulier pour $s = 0$ on obtient $< x, f >= 0, \forall x \in X$, ce qui contredit le fait que $f \neq 0$.
Comme $Y \in \mathcal{D}(A^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\overline{Y} = X$, il en résulte que $\overline{\mathcal{D}(A^n)} = X, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$. ⊠

## 2.3 Théorème de Hill-Yosida

Dans cette section, nous présentons l'un des résultats les plus importants concernant les $C_0$-semi-groupe. II s'agit du théorème de Hill-Yosida qui permet de la caractérisation les opérateurs qui sont générateur de $C_0$-semi-groupes. Nous allons commencer tout d'abord par introduire quelques notions et résultats intermédiaires qui seront utilisées pour démontrer le théorème de Hill-Yosida pour $C_0$-semi-groupe de contraction.

**Lemme 2.3.1.** *Soit $(G(t))_{t\geq 0}$ un $C_0$-semi-groupe sur $X$ de générateur infinitésimal $A$ et soit $B$ un opérateur linéaire borné sur $X$, i.e., $B \in \mathcal{B}(X)$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
*1. $G(t)B = BG(t), \ \forall t \geq 0$.*
*2. $B\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A)$ et $ABx = BAx, \ \forall x \in \mathcal{D}(A)$.*

**Preuve.**
1)$\Longrightarrow$ 2). Soit $B \in \mathcal{B}(X)$ tel que $G(t)B = BG(t), \ \forall t \geq 0$.
Soit $x \in \mathcal{D}(A)$, alors on a

$$\begin{aligned}\lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{G(t)B - Bx}{t} &= \lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{BG(t)x - Bx}{t} \\ &= \lim_{t\longrightarrow 0^+} B\left(\frac{G(t)x - x}{t}\right) = BAx.\end{aligned}$$

Donc $Bx \in \mathcal{D}(A)$ et $ABx = BAx$.
2)$\Longrightarrow$ 1). Soit $B \in \mathcal{B}(X)$ tel que $B\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A)$ et $ABx = BAx, \ \forall \, x \in \mathcal{D}(A)$.
Pour tout $t \geq 0$ et $x \in \mathcal{D}(A)$ définissons la fonction $s \ni [0, t] \longmapsto W(s) = G(t - s)BG(s)x \in$

$\mathcal{D}(A)$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{dW(s)}{ds} &= -AG(t-s)BG(s)x + G(t-s)BAG(s)x \\ &= -G(t-s)ABG(s)x + G(t-s)BAG(s)x \\ &= -G(t-s)BAG(s)x + G(t-s)BAG(s)x = 0.\end{aligned}$$

Donc $W$ est constante, et par conséquent $W(0) = W(t)$.
D'où $G(t)Bx = BG(t)x, \ \forall x \in \mathcal{D}(A)$.
Comme $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ et $G(t)B$ et $BG(t)$ sont continues alors

$$G(t)B = BG(t), \ \forall t \geq 0.$$

$\boxtimes$

**Théorème 2.3.1.** *Soit $(G(t))_{t\geq 0}$ un $C_0$-semi-groupe sur $X$ de générateur infinitésimal $A$, et soient $w \geq 0$ et $M \geq 1$ tels que $||G(t)|| \leq Me^{\omega t}, \ \forall t \geq 0$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $Re\lambda > \omega$, alors :*
*1. L'application*

$$\begin{aligned} R_\lambda : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} G(s)x ds,\end{aligned}$$

*définit un opérateur linéaire borné sur $X$ et on a*

$$||R_\lambda|| \leq \frac{M}{Re\lambda - \omega} < \infty$$

*2. $\lambda \in \rho(A)$ et $R(\lambda, A)x = R_\lambda x, \ \forall x \in X$.*

**Preuve.**
1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $Re\lambda > \omega$. $R_\lambda$ est un opérateur linéaire. De plus, pour tout $s \geq 0$ et tout $x \in X$, on a

$$\begin{aligned} ||e^{-\lambda s}G(s)x|| &\leq e^{-Re\lambda s}||G(s)||||x|| \\ &\leq e^{-Re\lambda s}Me^{\omega s}||x|| \\ &= Me^{(-Re\lambda - \omega)s}||x||.\end{aligned}$$

Ce qui entraîne alors que :

$$\begin{aligned} ||R_\lambda x|| &\leq \int_0^\infty \left\| e^{-\lambda s}G(s)x \right\| ds \\ &\leq M||x|| \int_0^\infty e^{(-Re\lambda - \omega)s} ds \\ &\leq \frac{M}{Re\lambda - \omega}||x||.\end{aligned}$$

Il s'ensuite alors que $R_\lambda$ est un opérateur linéaire borné sur $X$ et que $||R_\lambda|| \leq \dfrac{M}{Re\lambda - \omega}$.
2.

$$\begin{aligned}
\frac{G(h)R_\lambda x - R_\lambda x}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}G(h+s)xds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}G(s)xds \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda s}G(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}G(s)xds \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h}\Big(\int_0^\infty e^{-\lambda s}G(s)xds - \int_0^h e^{-\lambda s}G(s)xds\Big) - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}G(s)xds \\
&= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}G(s)xds - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda s}G(s)xds \\
&\xrightarrow[h\to 0^+]{} \lambda R_\lambda x - x.
\end{aligned}$$

Donc $R_\lambda x \in \mathcal{D}(A)$ et que $AR_\lambda x = \lambda R_\lambda x - x$, $\forall x \in X$, c-à-d $(\lambda I - A)R_\lambda x = x$, $\forall x \in X$. Comme $R_\lambda$ commute avec $G(t)$, il vient du lemme (2.3.1) que $R_\lambda$ commute avec $A$ sur $\mathcal{D}(A)$.
D'où

$$R_\lambda(\lambda I - A)x = x, \ \ \forall x \in \mathcal{D}(A),$$

et $R(\lambda, A) = R_\lambda$. ⊠

**Corollaire 2.3.1.** *Soit $(G(t))_{t\geq 0}$ est un $C_0$-semi-groupe sur $X$ de générateur infinitésimal $A$, et soit $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que $||G(t)|| \leq Me^{\omega t}$, $\forall t \geq 0$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re\lambda > \omega$ et pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ on a*

$$AR(\lambda, A)x = R(\lambda, A)Ax.$$

**Preuve.**
Il résulte du lemme 2.3.1 et du fait que $R(\lambda, A) = R_\lambda$. ⊠

**Définition 2.3.1.** *Soit $(G(t))_{t\geq 0}$ un $C_0$-semi-groupe sur $X$.*
*1. $(G(t))_{t\geq 0}$ est dit uniformément borné sur $X$ s'il existe $M \geq 1$ tell que $||G(t)|| \leq M$, $\forall t \geq 0$.*
*2. $(G(t))_{t\geq 0}$ est dit un $C_0$-semi-groupe de contraction si $||G(t)|| \leq 1$, $\forall t \geq 0$.*

**Lemme 2.3.2.** *Soit $A$ un opérateur linéaire sur $X$ vérifiant :*
*1) $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ et $A$ est un opérateur fermé.*
*2) $]0, +\infty[ \subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda > 0$ on a $||R(\lambda, A)|| \leq \frac{1}{\lambda}$.*
*Alors :*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \ \forall x \in X.$$

**Preuve.** Soit $x \in \mathcal{D}(A)$. Alors pour tout $\lambda > 0$ :

$$\begin{aligned} ||\lambda R(\lambda, A)x - x|| &= ||AR(\lambda, A)x|| \\ &= ||R(\lambda, A)Ax|| \\ &\leq ||R(\lambda, A)||||Ax|| \\ &\leq \frac{||Ax||}{\lambda} \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \ \forall x \in \mathcal{D}(A)$.
Comme $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ et $(\lambda R(\lambda, A))_{\lambda > 0}$ est uniformément bornée car $||\lambda R(\lambda, A)|| \leq 1$, alors :

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \ \forall x \in X.$$

⊠

**Définition 2.3.2.** *Pour $\lambda > 0$, on appelle approximation de Yosida de l'opérateur linéaire $A$, l'opérateur*

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I.$$

**Lemme 2.3.3.** *Soit $A$ un opérateur linéaire satisfaisant les conditions 1) et 2) du lemme 2.3.2 Alors :*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} A_\lambda x = Ax, \ \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

**Preuve.** Soit $x \in \mathcal{D}(A)$. D'après le lemme 2.3.2, on a $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow +\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax = Ax$, et du corollaire (2.3.1) on déduit que

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax = Ax.$$

⊠

**Lemme 2.3.4.** *Soit $A$ un opérateur linéaire sur $X$ satisfaisant :*
*1) $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ et $A$ est un opérateur fermé.*
*2) $]0, +\infty[ \subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda > 0$ on a $||R(\lambda, A)|| \leq \frac{1}{\lambda}$.*
*Alors $A_\lambda$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu de contraction $(e^{tA\lambda})_{t \geq 0}$, alors*

$$||e^{tA\lambda}x - e^{tA\mu}x|| \leq t||A_\lambda x - A_\mu x||.$$

**Preuve.** Puisque $A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I$ et $R(\lambda, A)$ est borné alors $A_\lambda$ est un opérateur linéaire borné sur $X$, donc d'après le théorème 2.1.1, $A_\lambda$ est le générateur infinitésimal du semi- groupe

uniformément continu $(e^{tA\lambda})_{t\geq 0}$.
De plus pour tout $t \geq 0$ on a

$$\begin{aligned}||e^{tA\lambda}|| &= ||e^{t\lambda^2 R(\lambda,A)}e^{-t\lambda I}|| \\ &\leq e^{-t\lambda}||e^{t\lambda^2 R(\lambda,A)}|| \\ &\leq e^{-t\lambda}e^{t\lambda^2}||R(\lambda,A)|| \\ &\leq e^{-t\lambda}e^{t\lambda} = 1, \quad car\ ||R(\lambda,A)|| \leq \frac{1}{\lambda}.\end{aligned}$$

Il en résulte que $(e^{tA\lambda})_{t\geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu de contractions sur $X$.
Il est facile de voir à partir de la définition que pour tout $\lambda, \mu > 0, A_\lambda, A_\mu, e^{tA_\lambda}$ et $e^{tA_\mu}$ commutent entre eux. Il en résulte alors que pour tout $x \in X$ :

$$\begin{aligned}\left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\right\| &= \left\|\int_0^1 \frac{d}{ds}\Big(e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}\Big)xds\right\| \\ &\leq \int_0^1 \left\|\frac{d}{ds}\Big(e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}\Big)x\right\|ds \\ &\leq \int_0^1 t\big\|e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A\mu}(A_\lambda x - A_\mu x)\big\|ds \\ &\leq t\big\|(A_\lambda x - A_\mu x)||, \quad car\ ||e^{tsA_\lambda}|| \leq 1\ et\ ||e^{t(1-s)A_\mu}\big\| \leq 1.\end{aligned}$$

⊠

**Théorème 2.3.2.** ***(Hille-Yosida)***. *Un opérateur linéaire $A$ est le générateur infinitésimal d'un $C_0$-semi-groupe de contractions $(G(t))_{t\geq 0}$ sur $X$ si et seulement si*
*1) $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ et $A$ est un opérateur fermé.*
*2) $]0, +\infty[\subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda > 0$ on a $||R(\lambda, A)|| \leq \frac{1}{\lambda}$.*

**Preuve.** La condition nécessaire résulte de corollaire 2.2.3 et de théorème 2.3.1 pour $\omega = 0$. Pour montrer que les conditions 1) et 2) du théorème 2.3.2 sont suffisantes pour que $A$ soit le générateur d'un $C_0$-semi-groupe de contractions $(G(t))_{t\geq 0}$ on utilise les lemmes précédentes.
Pour la condition suffisante, soit $x \in \mathcal{D}(A)$. Pour tout $\lambda, \mu > 0$, on a

$$\begin{aligned}||e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x|| &\leq t||(A_\lambda x - A_\mu x)|| \\ &\leq t||A_\lambda x - Ax|| + t||A_\mu x - Ax||.\end{aligned}$$

Il vient du lemme 2.3.3 que pour tout $x \in \mathcal{D}(A), e^{tA_\lambda}x$ converge quand $\lambda \longrightarrow +\infty$, et la convergence est uniforme sur les intervalles bornés. Posons alors

$$G(t)x = \lim_{\lambda\longrightarrow+\infty} e^{tA_\lambda}x,\ \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Comme $\mathcal{D}(A)$ est dense dans $X$ et $(e^{tA_\lambda})_{t\geq 0}$ est uniformément borné, alors :

$$G(t)x = \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} e^{tA_\lambda}x, \ \forall x \in X.$$

et la limite est uniforme sur les intervalles bornés.
De la formule 2.3.1 on voit que

$$G(0) = I, G(t+s) = G(t)G(s), \ \forall t, s \geq 0, \ et \ ||G(t)|| \leq 1, \forall t \geq 0.$$

De plus $t \longmapsto G(t)x$ est continue pour tout $x \in X$ comme limite uniforme d'une famille de fonctions continues. Ainsi $(G(t))_{t\geq 0}$ est un $C_0$-semi-groupe de contractions sur $X$.
Pour conclure, il reste à montre que $A$ est le générateur infinitésimal de $(G(t))_{t\geq 0}$.
Soit $B$ le générateur infinitésimal de $(G(t))_{t\geq 0}$.
Soit $x \in \mathcal{D}(A)$, en utilisant la formule 2.3.1 et le théorème 2.2.2 et compte tenu de la convergence uniforme de $e^{tA_\lambda}A_\lambda x$ vers $G(t)Ax$ sur les intervalles bornés, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{G(t)x - x}{t} &= \frac{1}{t} \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \left(e^{tA_\lambda}x - x\right) \\
&= \frac{1}{t} \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \int_0^t \frac{d}{ds}\left(e^{sA_\lambda}x\right) ds \\
&= \frac{1}{t} \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x ds \\
&= \frac{1}{t} \int_0^t \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} e^{sA_\lambda} A_\lambda x ds \\
&= \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Axds \xrightarrow[t \to 0^+]{} Ax.
\end{aligned}$$

Donc $x \in \mathcal{D}(B)$ et $Bx = Ax$, ce qui entraîne que $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$ et $Ax = Bx$, $\forall x \in \mathcal{D}(A)$.
Comme $B$ le générateur infinitésimal de $(G(t))_{t\geq 0}$ qui est de contractions, alors d'après la condition 2) du théorème 2.3.2 on a $1 \in \rho(B)$. D'autre part, puisque $A$ vérifie la condition 2) du théorème 2.3.2 alors $1 \in \rho(A)$. Mais puisque $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$ et $Ax = Bx$, $\forall x \in \mathcal{D}(A)$, on a $(I - B)\mathcal{D}(A) = (I - A)\mathcal{D}(A) = X$, ce qui entraîne alors que $\mathcal{D}(B) = (I - B)^{-1}X = \mathcal{D}(A)$.
D'où A = B. ⊠

Comme conséquence du théorème 2.3.2 de Hill-Yosida, on obtient :

**Corollaire 2.3.2.** *Soit $A$ le générateur infinitésimal d'un $C_0$-semi-groupe de contraction $(G(t))_{t\geq 0}$. Alors :*

$$G(t)x = \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} e^{tA_\lambda}x, \ \forall x \in X.$$

**Corollaire 2.3.3.** *Soit $\omega \geq 0$. Un opérateur $A$ est le générateur infinitésimal d'un $C_0$-semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ vérifiant $||G(t)|| \leq e^{\omega t}$, $\forall t \geq 0$, si et seulement si :*
*1. $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ et $A$ un opérateur fermé.*
*2. $]\omega, +\infty[\subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda > \omega$ on a $||R(\lambda, A)|| \leq \dfrac{1}{\lambda - \omega}$.*

**Preuve.**
$\Longrightarrow$) Découle du corollaire 2.2.2 et du théorème 2.3.1
$\Longleftarrow$) Le théorème 2.3.2 de Hill-Yosida appliqué à l'opérateur $B = A - \omega I$ pour $\lambda - \omega > 0$ implique qu'il génère un $C_0$-semi-groupe de contractions $(S(t))_{t\geq 0}$. Le $C_0$-semi-groupe défini par

$$G(t) = e^{\omega t} S(t),\ \forall t \geq 0,$$

donne le résultat. ⊠

**Théorème 2.3.3.** *Si $A$ est le générateur infinitésimal d'un $C_0$-semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ sur $X$ vérifiant :*

$$||G(t)|| \leq M e^{\omega t},\ \forall t \geq 0,\ \textit{avec}\ \omega \geq 0, M \geq 1$$

*Alors :*
*1. $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ et $A$ un opérateur fermé.*
*2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re\lambda > \omega$ on a $\lambda \in \rho(A)$ et*

$$||R(\lambda, A^n)|| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Preuve.**
1) Déjà vu dans le corollaire 2.2.2.
2) D'après le théorème 2.3.1, comme $Re\lambda > \omega$, alors $\lambda \in \rho(A)$ et pour tout $x \in X$, on a

$$R(\lambda, A)x = R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} G(s) x ds,\ et\ ||R(\lambda, A)|| \leq \frac{M}{Re\lambda - \omega}.$$

Il est facile de voir que

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A)x = -\int_0^\infty s e^{-\lambda s} G(s) x ds,\ \forall x \in X,$$

et par récurrence on obtient pour tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbb{N}$, que :

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A)x = (-1)^n \int_0^\infty s^n e^{-\lambda s} G(s) x ds.$$

Par ailleurs, par le lemme 1.2.8, on a $\dfrac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1}$.
Il en résulte alors que :

$$R(\lambda, A^{n+1})x = \frac{1}{n!}\int_0^\infty s^n e^{-\lambda s} G(s)x ds, \ \forall x \in X,$$

D'où

$$R(\lambda, A^n)x = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty s^{n-1} e^{-\lambda s} G(s)x ds, \ \forall x \in X, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Il vient alors que pour tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
||R(\lambda, A^n)x|| &= \frac{1}{(n-1)!}\left\| \int_0^\infty s^{n-1} e^{-\lambda s} G(s)x ds \right\| \\
&\leq \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty s^{n-1} \left\| e^{-\lambda s} G(s)x \right\| ds \\
&\leq \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty s^{n-1} e^{-Re\lambda s} M e^{\omega s} ||x|| ds \\
&\leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n}||x|| \quad \big(\text{Intégration par parties (n - 1) fois}\big).
\end{aligned}$$

D'où $||R(\lambda, A^n)|| \leq \dfrac{M}{(Re\lambda - \omega)^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$. ⊠

Maintenant, on va démontrer le théorème de Hill-Yosida dans le cas général d'un $C_0$-semi-groupe sur $X$. Tout d'abord on va commencer par démontrer le lemme suivant :

**Lemme 2.3.5.** *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire tel que $]0, \infty[ \subset \rho(A)$ et vérifiant :*

$$||\lambda^n R(\lambda, A^n)|| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall \lambda > 0.$$

*Alors il existe une norme $||.||_1$ sur $X$ équivalente à la norme d'origine $||.||$ vérifiant :*
*1. $||x|| \leq ||x||_1 \leq M||x||, \ \forall x \in X$.*
*2. $||\lambda R(\lambda, A)x||_1 \leq ||x||_1, \ \forall x \in X$.*

**Preuve.** Soit $\mu > 0$. Posons :

$$||x||_\mu = \sup_{n \geq 0} ||\mu^n R(\mu, A^n)||, \ \forall x \in X,$$

Il est facile de voir que $||.||_\mu$ définit une norme sur $X$ vérifiant :

$$||x|| \leq ||x||_\mu \leq M||x||, \ \forall x \in X,$$

et

$$||\mu R(\mu, A)||_\mu \leq 1,$$

Montrons alors que :

$$||\lambda R(\lambda, A)||_\mu \leq 1, \; pour \; 0 < \lambda \leq \mu.$$

Soit $x \in X$. Posons $y = R(\lambda, A)x$. Il vient alors de l'équation de la résolvante que :

$$y = R(\lambda, A)x = R(\mu, A)(x + (\mu - \lambda)y).$$

Et par l'inégalité triangulaire et l'inégalité 2.14 on obtient :

$$\begin{aligned} ||y||_\mu &= ||R(\mu, A)x + (\mu - \lambda)R(\mu, A)y||_\mu \\ &\leq ||R(\mu, A)x||_\mu + (\mu - \lambda)||R(\mu, A)y||_\mu \\ &\leq \frac{1}{\mu}||x||_\mu + \frac{\mu - \lambda}{\mu}||y||_\mu. \end{aligned}$$

Ce qui entraîne $||y||_\mu\left(1 - \frac{\mu-\lambda}{\mu}\right) \leq \frac{1}{\mu}||x||_\mu$, et par suite $\lambda||y||_\mu \leq ||x||_\mu$, $\forall x \in X$.
D'où $||\lambda R(\lambda, A)||_\mu \leq 1$ pour $0 < \lambda \leq \mu$.
Des inégalités 2.13 et 2.15, on voit facilement que :

$$||\lambda^n R(\lambda, A^n)x|| \leq ||\lambda^n R(\lambda, A^n)x||_\mu \leq ||x||_\mu, \; pour \; 0 < \lambda \leq \mu.$$

D'où $||x||_\lambda < ||x||_\mu$ pour $0 < \lambda \leq \mu$. Posons alors

$$||x||_1 = \lim_{\mu \longrightarrow +\infty} ||x||_\mu, \; \forall x \in X.$$

En faisant tendre $\mu \to +\infty$ dans l'inégalité 2.13 on obtient :

$$||x|| \leq ||x||_1 \leq M||x||, \; \forall x \in X.$$

En prenant $n = 1$ dans l'inégalité 2.16, il vient que :

$$||\lambda R(\lambda, A)x||_\mu \leq ||x||_\mu, \; \forall x \in X.$$

En faisant tendre $\mu \to +\infty$ on obtient $||\lambda R(\lambda, A)x||_1 \leq ||x||_1$, $\forall x \in X$.
D'où $||\lambda R(\lambda, A)x||_1 \leq 1$. ⊠

**Théorème 2.3.4.** ***(Théorème de Hill-Yosida généralisé)***
*Un opérateur linéaire $A$ est le générateur infinitésimal d'un $C_0$-semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ sur $X$ vérifiant $||G(t)|| \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$, avec $\omega \geq 0, M \geq 1$, si et seulement si :*
*1. $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ et $A$ un opérateur fermé.*
*2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re\lambda > \omega$ on a $\lambda \in \rho(A)$ et*

$$||R(\lambda, A^n)|| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n}, \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Preuve.**

$\Longrightarrow$) Découle du théorème 2.3.3.

$\Longleftarrow$) Supposons que $A$ vérifie les assertions 1) et 2) du théorème 2.3.4, alors sans perte de généralité et quitte à considérer le $C_0$-semi-groupe $S(t) = e^{-\omega t}G(t), \ \forall t \geq 0$, on peut supposer que $\omega = 0$.

L'assertion 2) implique dans ce cas que $||\lambda^n R(\lambda, A^n)|| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall \lambda > 0$. Soit $||.||_1$ la norme équivalente à $||.||$, définie dans le lemme 2.3.5 et vérifiant :

$$||x|| \leq ||x||_1 \leq M||x||, \ \forall x \in X, \ et \ ||\lambda R(\lambda, A)||_1 \leq 1, \ \forall \lambda > 0.$$

Il vient alors du théorème 2.3.2 de Hil-Yosida pour les $C_0$-semi-groupes de contractions que $A$ est le générateur infinitésimal d'un $C_0$-semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ de $||.||_1$ contractions sur $X$, et en utilisant l'inégalité 2.17, on obtient pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in X$,

$$\begin{aligned} ||G(t)x|| &\leq ||G(t)x||_1 \\ &\leq ||G(t)||_1 ||x||_1 \\ &\leq ||x||_1 \\ &\leq M||x||. \end{aligned}$$

D'où $||G(t)|| \leq M, \ \forall t \geq 0.$ ⊠

## 2.4 Quelques classes spéciales de $C_0$-semi groupes

Nous donnons ici deux classes de $C_0$-semi-groupes : $C_0$-semi-groupes différentiables et analytiques.

**Définition 2.4.1.**

*Un semi-groupe $\{G(t)\}$ de classe $\mathcal{C}^0$ dans $X$ est dit différentiable pour $t > t_0$. Si pour tout $x \in X$, la fonction $t \longmapsto G(t)x$ est différentiable pour $t > t_0$. Le semi-groupe $G(t)$ est dit différentiable si $t_0 = 0$.*

**Remarque :**

Notons que si $G(t)x$ est différentiable pour tout $x \in X$ et $t \geq 0$, alors $\mathcal{D}(A) = X$ et $A$ est nécessairement un opérateur borné d'après le théorème du graphe fermé.

Remarquons qu'un semi-groupe nul pour $t > t_0$ est évidement différentiable pour $t > t_0$, ce qui montre que cette notion de différentiabilité n'est pas fondamentale. Elle est utile simplement pour préparer l'étude des semi-groupes différentiables pour $t > 0$ qui eux sont fondamentaux.

**Proposition 2.4.1.**

*Soit $\{G(t)\}$ un semi-groupe de classe $\mathcal{C}^0$ différentiable pour $t > t_0$ et $A$ son générateur infinitésimal dans $X$. Alors :*

*i) Pour $t > t_0$, $G(t) : X \longrightarrow \mathcal{D}(A)$ et $G'(t) = AG(t) : X \longrightarrow X$ sont des opérateurs bornés.*

*ii) Pour $t > t_0$, $t \longrightarrow G(t)$ est continu dans $\mathcal{L}(X)$.*

*iii) Pour $t > nt_0$, $t \longrightarrow G(t)x$ est $n$ fois différentiable pour chaque $x \in X$ et*

$$G^{(n)}(t) = A^n G(t).$$

*De plus, pour $t > (n+1)t_0$, $t \longrightarrow G^{(n)}(t)$ est continu dans $\mathcal{L}(X)$.*

**Preuve.**

i) L'application $t \to G(t)x$ est différentiable pour $t > t_0$ par hypothèse, pour tout $x \in X$.
Alors $G(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et $G'(t)x = AG(t)x$ pour $t > t_0$.
Comme $AG(t)$ est fermé pour $t > t_0$, et est défini sur $X$, alors par le théorème du graphe fermé, $AG(t)$ est borné pour $t > t_0$.
ii) Si $t_2 \geq t_1 > t_0$, nous avons :

$$G(t_2)x - G(t_1)x = \int_{t_1}^{t_2} AG(s)x\,ds \quad \text{pour tout}\, x \in X.$$

Comme $t_1 > t_0$, $G(t_1)x \in \mathcal{D}(A)$ et pour $s \geq t_1$ la propriété de semi-groupe implique

$$AG(s)x = G(s-t_1)AG(t_1)x \quad et \quad \|G(s)\| \leq M \quad \text{si}\ s \in [t_1, t_2]$$

D'où

$$\begin{aligned}\|G(t_2)x - G(t_1)x\|_X &\leq \int_{t_1}^{t_2} \|G(s-t_1)\| \|AG(t_1)x\|_X\,ds \\ &\leq M(t_2 - t_1)\|x\|_X,\end{aligned}$$

ce qui implique la continuité de $t \to G(t)$ dans $\mathcal{L}(X)$.
iii) On procède par récurrence sur l'entier n.
Le cas n = 1 résulte de i) et ii).
Supposons la propriété vraie pour n, alors pour tout $x \in X$

$$G^n(t)x = A^n G(t)x \quad \text{pour}\ \ t > nt_0.$$

Supposons $t > (n+1)t_0$ et choisissons $s > n\,t_0$ tel que $t - s > t_0$, alors

$$G^n(t)x = G(t-s)A^n G(s)x.$$

Le membre de droite est différentiable car $t - s > t_0$, donc

$$G^{(n+1)}(t)x = AG(t-s)A^nG(s)x = A^{n+1}G(t)x$$

On montre la continuité de $G^{(n)}$ pour $t > (n+1)t_0$ de la même manière que dans (ii). $\boxtimes$

**Définition 2.4.2.**

*Soit $X$ un espace de Banach complexe.*

*Soit $\Delta = \Big\{Z \in \mathbb{C};\ \phi_1 < argZ < \phi_2 \text{ tel que } \phi_1 < 0 < \phi_2\Big\}$.*

*Une famille $\big\{G(Z)\big\}_{Z\in\Delta}$ d'éléments $G(Z) \in \mathcal{L}(X)$ forme un semi-groupe de $X$ holomorphe dans $\Delta$, si elle vérifie les conditions suivantes :*

*i) $G(0) = I \qquad (\text{Identité dans } \Delta)$ ;*

*ii) $G(Z_1 + Z_2) = G(Z_1)\,G(Z_2), \quad \forall Z_1, Z_2 \in \Delta$ ;*

*iii) $\lim\limits_{\substack{Z\to 0\\ Z\in\Delta}} G(Z)x = x, \quad \forall x \in X, \forall Z \in \Delta$ ;*

*iv) L'application $Z \in \Delta^* = \Delta\backslash\{0\} \longmapsto G(Z)x \in X$ est holomorphe $\forall x \in X$.*

CHAPITRE 3

# PROBLÈME DE CAUCHY

Dans ce chapitre, nous étudions le problème de Cauchy. En utilisant la méthode des semi-groupes qui nous permet de trouver la solution classique et la solution faible de ce problème.

## 3.1 Problème de Cauchy homogène

Soit $X$ un espace de Banach et $A$ un opérateur linéaire non borné, fermé dans $X$, de domaine $\mathcal{D}(A)$ dense dans $X$.
On considère le problème $(P)$ : Trouver x, avec :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t); \quad t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

$x_0$ est donnés.
**Remarque :**
Classiquement la terminologie « problème de Cauchy » réfère à un problème du type $(P)$ où $A$ est un opérateur différentiel dans $\mathbb{R}^n$.
On étend ici cette notion dans deux directions puisque $(P)$ couvre en particulier les cas suivants :
**1^er^cas** : L'opérateur $A$ peut être un opérateur différentiel **sur un ouvert** $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ (avec des conditions aux limites appropriées).

**2ème cas** : L'opérateur $A$ peut être un opérateur « abstrait » dans un espace de Banach « abstrait ».
À cause de ce 2ème cas, on dit parfois que $(P)$ est un « problème de Cauchy abstrait »

**Définition 3.1.1.** *Le problème a valeurs initiale* (3.1)

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t); \quad t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

*est dite le problème homogène abstrait de Cauchy associé à* $(A, \mathcal{D}(A))$ *et de valeur initiale* $x_0 \in X$.

**Définition 3.1.2.** *une fonction* $x : \mathbb{R}_+ \to X$ *est dit solution (classique) Si :*

1. $x$ *est continu pour* $t \geq 0$.
2. $x(t)$ *est continument différentiables pour* $t \geq 0$.
3. $x(t) \in \mathcal{D}(A)$ *pour* $t \geq 0$ *et* $x$ *vérifie* (3.1).

**Remarque :**
Notons que quand $x(t) \in \mathcal{D}(A)$ pour $t > 0$ et $x$ est continue en $t = 0$, (3.1) ne peut pas avoir une solution pour $x_0 \notin \mathcal{D}(A)$.

**Théorème 3.1.1.** *Soit* $(G(t))_{t\geq 0}$ *un* $C_0$*-semi-groupe dans* $X$, *de générateur infinitésimal* $A$. *Alors pour chacun* $x_0 \in \mathcal{D}(A)$. *Le système* (3.1) *a une solution unique* $x(t)$ *dans* $C^1([0, \infty[; X) \cap C([0, \infty[; \mathcal{D}(A)))$ *et*

$$x(t) = G(t)x_0, \quad \forall\, t \geq 0.$$

**Preuve.** Soit $x_0 \in \mathcal{D}(A)$, alors il vient de l'assertion 3 du théorème 2.2.2 que $x(t) = G(t)x_0$ est une solution classique du problème (3.1).
Pour prouver l'unicité soit $v$ une autre solution dans $C^1([0, \infty[; X) \cap C([0, \infty[; \mathcal{D}(A))$.
Fixons $t > 0$ et posons $z(s) = G(t-s)v(s); s \in [0, t]$. d'après la proposition 2.1.1 et les propriétés de $v$ et $z \in C^1([0, \infty[; X) \cap C([0, \infty[; \mathcal{D}(A))$, on a pour tous $s \in [0, t]$,

$$\begin{aligned} \frac{dz(s)}{ds} &= -AG(t-s)v(s) + G(t-s)v'(s) \\ &= G(t-s)Av(s) - AG(t-s)v(s) \\ &= 0 \end{aligned}$$

par suit $z \in C^1([0, \infty[; X)$ et $z(s) = z(0)$ pour tout $s \in [0, t]$, ceci implique $v(t) = G(t)v(0) = G(t)x_0$ pour tout $t \geq 0$. ⊠

**Définition 3.1.3.** *Soit $G(t)$ un $C_0$-semi-groupe sur un espace de Banach $X$. Le semi-groupe $G(t)$ est dit différentiables pour $t > t_0$ si pour tout $x_0 \in X$, $t \to G(t)x_0$ est différentiables pour $t > t_0$ ; $G(t)$ est dit différentiable s'il est différentiable pour $t > 0$.*

## 3.2 Problème de Cauchy non-homogène

Soit

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t); \quad t \geq 0 \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{3.2}$$

où $f : \mathbb{R}^+ \to X$ est continue. Nous supposons dans cette section que $A$ est le générateur infinitésimal d'un $C_0$-semi-groupe $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ de sorte que l'équation homogène correspondante, c-à-d $f \equiv 0$, a une solution unique pour chaque valeur initiale $x_0 \in \mathcal{D}(A)$.

**Définition 3.2.1.** *une fonction $x : [0, +\infty[\to X$ est une solution (classique) de (3.2) sur $[0, +\infty[$ si et seulement si :*

1. *$x$ est continue dans $[0, +\infty[$.*
2. *$x(t)$ est continument différentiables sur $]0, +\infty[$.*
3. *$x(t) \in \mathcal{D}(A)$, pour $t \geq 0$ et (3.2) est satisfaite sur $[0, +\infty[$.*

**Proposition 3.2.1.** *Si $f \in L^1([0, +\infty[, X)$ alors pour chaque $x \in X$ le problème de valeur initiale (3.2) a une solution, cette solution est donnée par :*

$$x(t) = G(t)x_0 + \int_0^t G(t-s)f(s)ds.$$

**Preuve.** Soit $G(t)$ un $C_0$-semi-groupe engendré par $A$ et soit $x$ une solution de (3.2). Alors la fonction $g(s) = G(t-s)x(s)$ est différentiable pour $0 < s < t$ et :

$$\begin{aligned} \frac{dg(s)}{ds} &= -AG(t-s)x(s) + G(t-s)x'(s) \\ &= G(t-s)(Ax(s) + f(s)) - AG(t-s)x(s) \\ &= -AG(t-s)x(s) + G(t-s)x'(s) + G(t-s)Ax(s) + G(t-s)f(s) \\ &= G(t-s)f(s). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Si $f \in L^1([0, +\infty[, X)$ alors $G(t-s)f(s)$ est intégrables et en intégrant de 0 à $t$ on a

$$g(t) = g(0) + \int_0^t G(t-s)f(s)ds,$$

donc

$$x(t) = G(t)x_0 + \int_0^t G(t-s)f(s)ds.$$

$\boxtimes$

**Remarque :**

En particulier si $A \in \mathcal{B}(X)$, alors $\forall\, x_0 \in X$, l'équation (3.2) a une solution unique $x$ sur $\mathbb{R}^+$ donnée par

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)\, ds.$$

**Définition 3.2.2.** *On dit que $x$ est solution faible du problème* (3.2) *si :*

1. *$x$ est une fonction continue de $[0, +\infty[$ à valeur dans $X$*
2. *il existe une suite de fonctions $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que*
   (a) $x_n \in C([0, +\infty[, \mathcal{D}(A))$
   (b) $x_n \in C^1([0, +\infty[, X)$ *et* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$, $(x_n' - Ax_n)_{n\in\mathbb{N}} \to f$ *et* $x_n(0) \to x_0$ *sont les convergences uniformes sur chaque intervalle* $[0, T]$, $\forall\, T > 0$.

**Théorème 3.2.1.** *La solution faible si elle existe est unique.*

**Preuve.** Supposons que $x$ soit solution faible de (3.2). Alors $\exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in C([0, +\infty), \mathcal{D}(A)) \cap C^1([0, +\infty), X)\, \forall\, n \in \mathbb{N}$ et $x_n \to x$, $x_n' - Ax_n \to f$ uniformément pour tout compact de $[0, +\infty[$ et $x_n(0) \to u_0$ d'après la proposition (3.2.1)

$$x_n(t) = G(t)x_n(0) + \int_0^t G(t-s)f_n(s)ds$$

Ce qui nous donne

$$x(t) = \lim_{n\to+\infty} x_n(t) = G(t)x_0 + \int_0^t G(t-s)f(s)ds$$

et

$$x(t) = G(t)x_0 + \int_0^t G(t-s)f(s)\, ds$$

d'où l'unicité. $\boxtimes$

**Théorème 3.2.2.** *Soit $x_0 \in X$ et $f \in C([0, +\infty[, X)$ alors $x(t) = G(t)x_0 + \int\limits_0^t G(t-s)f(s)\, ds$ est solution faible du problème* (3.2).

**Preuve.** Comme $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, alors $\exists\, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}(A)$ et $v_n \to x_0$ et nous construisons une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continument dérivable de $[0, +\infty[$ à valeur dans $X$ c-à-d $f \in C^1([0, +\infty[, X)$

tq $f_n \to f$.
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(A)$, $supp\,\varphi \subset [-\infty, a[, \varphi \geq 0$ et $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1$. On définit $\varphi_n$ par $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$ et soit $F$ le prolongement de $f$ par 0 à $\mathbb{R}$

$$f_n(t) = F * \varphi_n(t) = \int \varphi_n(s)F(t-s)\,ds$$

par conséquent :

$$f_n(t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, X).$$

et $f_n(t)$ converge uniformément vers $f$ sur tout chaque compact. D'où d'après le théorème précédent, $\exists\, x_n \in C([0, +\infty[, \mathcal{D}(A)) \cap C^1([0, +\infty[, F)$ tel que

$$\begin{cases} x_n' - Ax_n = f_n, \\ x_n(0) = v_n. \end{cases}$$

ce qui nous donne

$$x_n(t) = G(t)v_n + \int\limits_0^t G(t-s)f_n(s)\,ds$$

D'où $\forall\, T > 0, (x_n)$ converge uniformément vers $x(t)$ sur $[0, T]$ avec

$$x(t) = G(t)x_0 + \int\limits_0^t G(t-s)f(s)\,ds.$$

⊠

# BIBLIOGRAPHIE


[1] **A. Aibeche**, *Introduction aux semi-groupes linéaires*, Janvier 2004.

[2] **J. Bernard Baillon**, *Générateurs et semi-groupes dans les espaces de Banach uniformément lisses*, New-York, 1979.

[3] **H. Brizes**, *Analyse fonctionnelle théorie et application*, C.R.ACAQ Paris, 1999.

[4] **S. Chorfi**, *Théorie des semi-groupes : Problème abstraite de Cauchy et équation d'évolution*, 2017.

[5] **E. Hille**, *Functional analysis and semi-groupes*, Colloq. Publ. Amer.Math.Soc, 1948.

[6] **R.J.L. Lions**, *Analyse mathématique et calcul numérique, évolution : semi-groupes, variationnel*, volume 8, Paris, 1984.

[7] **A. Pazy**, *Semi-groupes of linear operators and applications to partial equations springer verlag*, New-York, Berlin, 1983.

[8] **K. Yosida**, *On the differentiability and the representation of one-parameter semi-groupes of linear operators*, I.Math.Soc.Japan 1 (1948), 14-21.