République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Benyahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : EDP et Applications.

Thème

Sur une méthode de décomposition de domaine appliquée à un problème d'évolution

Présenté par

Abir Abdellouche

Malika Yakoubi

Devant le jury composé de :

Président	:	Hani Benhassine	Maître de Conférences B	Université de Jijel
Encadreur	:	Nadir Arada	Maître de Conférences A	Université de Jijel
Examinateur	:	Othman Yakhlef	Maître de Conférences B	Université de Jijel

Promotion **2020/2021**

Nous tenons à exprimer notre profond respect et notre reconnaissance à notre encadreur M. Arada Nadir, pour sa disponibilité, son aide ainsi que ses fructueux conseils.

Nos remerciements vont également aux membres du jury composé de Messieurs Belhassine Hani et Yakhlef Othman.

Nous voulons aussi remercier tous les enseignants qui ont contribué à notre formation, ainsi qu'à toute l'équipe du département de mathématique.

Nos remerciements à tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce travail à

À mon père,

À ma mère,

À mon fiancé,

À toute ma famille,

À mes chères amies,

Malika.

Dédicace

Je dédie ce travail à

À mon père, Mohammed, pour avoir toujours cru en moi et pour ses nombreux sacrifices

À ma mère, Naima, la femme la plus affectueuse et la plus douce au monde. Ses sacrifices, son soutien, ses encouragements et son amour ont été la raison de ma réussite

À mes soeurs, Yasmine, Soumia, Rachda,

À mes frères,Ilyes et Hamza,

À ceux qu'aime mon coeur, Anes, Iyed, Djoud,

À mes chères amies,

Abir.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, nous nous intéressons principalement à l'analyse mathématique de la méthode de décomposition de domaines sans recouvrement appliquée au problème de Poisson et à l'équation de la chaleur.

Dans le premier chapitre, nous commençons par analyser les relations existant entre les traces sur les frontières des sous-domaines et l'interface et établissons des résultats du type recollement par continuité. Nous abordons ensuite de manière formelle le problème multi-domaine associé à l'équation de Poisson, ainsi que l'équation de Steklov-Poincaré correspondante. Les mêmes aspects sont ensuite étudiés de manière plus rigoureuse avec établissement d'une formulation faible multi-domaines et établissement des liens entre le problème global et le problème posés sur les sous-domaines. Nous terminons cette partie par l'approximation de ces problèmes utilisant la méthode des éléments finis.

Le deuxième chapitre est consacré à l'équation de la chaleur. La solvabilité de cette équation est étudiée et une formulation faible multi-domaines est analysée.

Chapitre 1

Méthode de décomposition de domaines pour le problème de Poisson

1.1 Introduction

Dans toute la suite, Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne. Nous considérons le problème de Poisson donné par

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

où $f \in L^2(\Omega)$. Nous allons décomposer le domaine Ω en deux sous-domaines disjoints Ω_1 et Ω_2, de frontières lipschitziennes $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_2$, et ayant comme interface $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. Notre objectif est de ramener la résolution de (1.1) à celle de deux sous-problèmes posés sur Ω_1 et Ω_2. Plus précisément, nous associons à (1.1) les deux problèmes suivants

$$\begin{cases} -\Delta u_i = f & \text{dans } \Omega_i, \\ u_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i, \end{cases} \qquad i = 1, 2 \tag{1.2}$$

et nous nous intéressons aux conditions supplémentaires qu'il faudrait imposer sur l'interface Γ, ainsi qu'au cadre fonctionnel approprié à considérer, afin de garantir que les problèmes (1.1) et (1.2) soient équivalents.

Le plan du chapitre est le suivant : Aprés avoir étudié la solvabilité du problème de Poisson, nous considérons la formulation multi-domaines correspondante. Nous initions notre travail par l'analyse des relations existant entre les traces sur les frontières des sous-domaines et l'interface et établissons des résultats du type recollement par continuité. Après une présentation formelle de la méthode multi-domaines et de l'équation de Steklov-Poincaré, nous définissons les formulations faibles correspondantes et établissons des résultats montrant l'équivalence entre le problème global initial et le problème multi-domaines. Nous finissons le chapitre par une présentation succinte de l'approximation par éléments finis du problème multi-domaines.

1.2 Formulation faible

La formulation variationnelle associée, définie dans $H_0^1(\Omega)$, est donnée par

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } \ a(u, v) = F(v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{1.3}$$

où

$$a(u,v) = (\nabla u, \nabla v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$
$$F(v) = (f,v) = \int_\Omega f v \, dx.$$

La forme bilinéaire a satisfaisant

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &= |u|_{H_0^1(\Omega)} |v|_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

est continue sur $H_0^1(\Omega)$. De plus, vu que

$$a(v,v) = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 = |v|_{H_0^1(\Omega)}^2 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

nous déduisons que a est coercive sur $H_0^1(\Omega)$. Finalement, en utilisant l'inégalité de Poincaré, nous obtenons

$$\begin{aligned} |F(v)| = |(f,v)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_P \|f\|_{L^2(\Omega)} |v|_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

ce qui montre que l'application linéaire F est continue sur $H_0^1(\Omega)$. Le théorème de Lax-Milgram implique alors que le problème variationnel admet une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$.

1.3 Formulation multi-domaines

1.3.1 Trace de la restriction à un sous-domaine

Il est important pour la suite d'étudier les relations existant les traces sur $\partial\Omega \cap \partial\Omega_i$ et sur Γ d'une fonction de $H^1(\Omega)$ et les traces de ses restriction à Ω_i. Pour initier cette analyse, nous montrons dans le résultat suivant que la dérivation au sens faible commute avec l'opération de restriction.

Lemme 1.3.1. *Soit $v \in H^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$. Alors la restriction $v_{|\Omega_i}$ appartient à $H^m(\Omega_i)$ et sa dérivée faible satisfait*

$$D^\alpha \left(v_{|\Omega_i} \right) = (D^\alpha v)_{|\Omega_i},$$

pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ tel que $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \leq m$.

Démonstration. La preuve sera donnée pour $m = 1$. La démonstration des autres cas suivra par des arguments identiques.

Il est facile de voir que

$$\left\| v_{|\Omega_i} \right\|_{L^2(\Omega_i)} = \|v\|_{L^2(\Omega_i)} \leq \|v\|_{L^2(\Omega)} < +\infty.$$

Soit $\psi_i \in \mathcal{D}(\Omega_i)$ et notons ψ_i^0 son prolongement par 0 à Ω. Il est clair que $\psi_i^0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ et grâce à la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_i} v_{|\Omega_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}\, dx &= \int_{\Omega_i} v \frac{\partial \psi_i^0}{\partial x_j}\, dx = \sum_{k=1}^{2} \int_{\Omega_k} v \frac{\partial \psi_i^0}{\partial x_j}\, dx \\
&= \int_{\Omega} v \frac{\partial \psi_i^0}{\partial x_j}\, dx \\
&= -\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_j} \psi_i^0\, dx + \int_{\partial\Omega} v \psi_i^0\, ds \\
&= -\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_j} \psi_i^0\, dx = -\int_{\Omega_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \psi_i\, dx.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\partial v_{|\Omega_i}}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial x_j}_{|\Omega_i}.$$

Il est évident que

$$\left\| \frac{\partial v_{|\Omega_i}}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega_i)} = \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j}_{|\Omega_i} \right\|_{L^2(\Omega_i)} = \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega_i)} \leq \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} < +\infty,$$

ce qui termine la preuve. □

Le résultat de densité suivant sera utile pour la suite.

Lemme 1.3.2. *Soit $v \in H^1(\Omega)$ et soit $v_{|\Omega_i}$ sa restriction sur Ω_i. Il existe une suite $(v_n)_n \subset \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ tel que*

$$\lim_{n \to +\infty} \left\| v_{n|\overline{\Omega}_i} - v_{|\Omega_i} \right\|_{H^1(\Omega_i)} = 0 \qquad i = 1, 2.$$

Démonstration. Nous savons que $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$. Pour $v \in H^1(\Omega)$. Il existe une suite $(v_n)_n \subset \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ tel que

$$\lim_{n \to +\infty} \|v_n - v\|_{H^1(\Omega_i)} = 0.$$

Il est clair que $v_{n|\overline{\Omega}_i} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_i)$ avec

$$\nabla \left(v_{n|\overline{\Omega}_i} \right) = (\nabla v_n)_{|\overline{\Omega}_i} \qquad \text{dans } \overline{\Omega}_i.$$

De l'autre côté, grâce au lemme 1.3.1, on a $v_{|\Omega_i} \in H^1(\Omega_i)$ avec

$$\nabla \left(v_{|\Omega_i}\right) = (\nabla v)_{|\Omega_i} \qquad \text{dans } \Omega_i.$$

Il vient alors que

$$\begin{aligned}
\left\|v_{n|\overline{\Omega}_i} - v_{|\Omega_i}\right\|^2_{H^1(\Omega_i)} &= \left\|v_{n|\overline{\Omega}_i} - v_{|\Omega_i}\right\|^2_{L^2(\Omega_i)} + \left\|\nabla\left(v_{n|\overline{\Omega}_i} - v_{|\Omega_i}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega_i)} \\
&= \|v_n - v\|^2_{L^2(\Omega_i)} + \|\nabla (v_n - v)\|^2_{L^2(\Omega_i)} \\
&\leq \|v_n - v\|^2_{H^1(\Omega_i)} \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } n \to +\infty,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Le résultat suivant montre que considérée sur $\partial\Omega \cap \partial\Omega_i$, la trace sur $\partial\Omega$ d'un élément de $H^1(\Omega)$ est identique à la trace sur $\partial\Omega_i$ de sa restriction à Ω_i.

Proposition 1.3.3. *Soit $v \in H^1(\Omega)$ et soit $v_{|\Omega_i}$ sa restriction sur Ω_i, $i = 1, 2$. Soit $\gamma(v)$ la trace de v sur $\partial\Omega$ et $\gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right)$ la trace de $v_{|\Omega_i}$ sur $\partial\Omega_i$. Alors*

$$\gamma(v) = \gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right) \qquad \textit{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i.$$

Démonstration. Soit $(v_n)_n \subset \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ tel que

$$\lim_{n \to +\infty} \|v_n - v\|_{H^1(\Omega_i)} = 0.$$

Utilisant l'inégalité de trace, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\gamma(v) - v_n\|_{L^2(\partial\Omega \cap \partial\Omega_i)} &= \|\gamma(v - v_n)\|_{L^2(\partial\Omega \cap \partial\Omega_i)} \leq \|\gamma(v - v_n)\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\leq C\,\|v_n - v\|_{H^1(\Omega)} \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } n \to +\infty.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

De l'autre côté, et en utilisant des arguments similaires, on a

$$\begin{aligned}
\left\|\gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right) - v_n\right\|_{L^2(\partial\Omega \cap \partial\Omega_i)} &= \left\|\gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right) - \gamma_i\left(v_{n|\bar{\Omega}_i}\right)\right\|_{L^2(\partial\Omega \cap \partial\Omega_i)} \\
&= \left\|\gamma_i\left(v_{|\Omega_i} - v_{n|\bar{\Omega}_i}\right)\right\|_{L^2(\partial\Omega \cap \partial\Omega_i)} \\
&\leq \left\|\gamma_i\left(v_{|\Omega_i} - v_{n|\bar{\Omega}_i}\right)\right\|_{L^2(\partial\Omega_i)} \\
&\leq C\left\|v_{|\Omega_i} - v_{n|\bar{\Omega}_i}\right\|_{H^1(\Omega_i)}.
\end{aligned}$$

Prenant alors en compte le lemme 1.3.2, nous déduisons que

$$\lim_{n \to +\infty} \left\|\gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right) - v_n\right\|_{L^2(\partial\Omega \cap \partial\Omega_i)} = 0. \tag{1.5}$$

Combinant (1.4) et (1.5), il vient que

$$\left\|\gamma(v)-\gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right)\right\|_{L^2(\partial\Omega\cap\partial\Omega_i)}$$

$$\leq \|\gamma(v)-v_n\|_{L^2(\partial\Omega\cap\partial\Omega_i)}+\left\|v_n-\gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right)\right\|_{L^2(\partial\Omega\cap\partial\Omega_i)} \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } n\to+\infty,$$

ce qui donne le résultat. □

Nous montrons à présent que sur l'interface Γ, la trace de la restriction à Ω_1 d'un élément de $H^1(\Omega)$ est identique à la trace de sa restriction à Ω_2.

Proposition 1.3.4. *Soit $v\in H^1(\Omega)$ et soit $v_{|\Omega_i}$ sa restriction sur Ω_i, $i=1,2$. Soit $\gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right)$ la trace de $v_{|\Omega_i}$ sur $\partial\Omega_i$. Alors*

$$\gamma_1\left(v_{|\Omega_1}\right)=\gamma_2\left(v_{|\Omega_2}\right) \qquad \textit{sur } \Gamma.$$

Démonstration. Afin de simplifier la présentation de la preuve, pour $\psi\in H^1(\Omega)$, nous poserons $\psi_i=\psi_{|\Omega_i}$.

Soit $v\in H^1(\Omega)$. Appliquant la formule de Green, et prenant en compte le lemme 1.3.1, pour $j=1,2$ et tout $\phi\in H^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega v\,\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\,dx &= -\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_j}\,\phi\,dx+\int_{\partial\Omega}\gamma(v)\gamma(\phi)n^j\,ds\\
&=\sum_{i=1}^{2}\left(-\int_{\Omega_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}_{|\Omega_i}\phi_{|\Omega_i}\,dx+\int_{\partial\Omega\cap\partial\Omega_i}\gamma(v)\gamma(\phi)n_i^j\,ds\right)\\
&=\sum_{i=1}^{2}\left(-\int_{\Omega_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,\phi_i\,dx+\int_{\partial\Omega\cap\partial\Omega_i}\gamma(v)\gamma(\phi)n_i^j\,ds\right),
\end{aligned}$$

ce qui, grâce au proposition 1.3.3, donne

$$\int_\Omega v\,\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\,dx=\sum_{i=1}^{2}\left(-\int_{\Omega_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,\phi_i\,dx+\int_{\partial\Omega\cap\partial\Omega_i}\gamma_i\left(v_i\right)\gamma_i\left(\phi_i\right)n_i^j\,ds\right). \tag{1.6}$$

De la même manière, utilisant la formule de Green pour $v_i\in H^1(\Omega_i)$, nous déduisons que pour $j=1,2$, $i=1,2$ et tout $\phi\in H^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_i} v_i\,\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}\,dx &= -\int_{\Omega_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,\phi_i\,dx+\int_{\partial\Omega_i}\gamma_i\left(v_i\right)\gamma_i\left(\phi_i\right)n_i^j\,ds\\
&= -\int_{\Omega_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,\phi_i\,dx+\int_{\partial\Omega\cap\partial\Omega_i}\gamma_i\left(v_i\right)\gamma_i\left(\phi_i\right)n_i^j\,ds\\
&\quad+\int_\Gamma\gamma_i\left(v_i\right)\gamma_i\left(\phi_i\right)n_i^j\,ds \qquad \forall\phi\in H^1(\Omega),
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega v\,\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\,dx &= \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i} v_i\,\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}\,dx\\ &= \sum_{i=1}^{2}\left(-\int_{\Omega_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,\phi_i\,dx + \int_{\partial\Omega\cap\partial\Omega_i}\gamma_i\left(v_i\right)\gamma_i\left(\phi_i\right)n_i^j\,ds\right)\\ &\quad+\sum_{i=1}^{2}\int_\Gamma \gamma_i\left(v_i\right)\gamma_i\left(\phi_i\right)n_i^j\,ds \qquad \forall\phi\in H^1(\Omega)\end{aligned} \tag{1.7}$$

Combinant (1.6) et (1.7), on obtient

$$\sum_{i=1}^{2}\int_\Gamma \gamma_i\left(v_i\right)\gamma_i\left(\phi_i\right)n_i^j\,ds = 0.$$

Observant que $n_1^j = -n_2^j$, on a alors

$$\int_\Gamma \left(\gamma_1\left(v_1\right)\gamma_1\left(\phi_1\right) - \gamma_2\left(v_2\right)\gamma_2\left(\phi_2\right)\right)n_1^j\,ds = 0 \qquad \forall\phi\in H^1(\Omega),$$

ce qui implique que

$$\int_\Gamma \left(\gamma_1\left(v_1\right) - \gamma_2\left(v_2\right)\right)\phi\, n_1^j\,ds = 0 \qquad \forall\phi\in \mathcal{D}(\overline{\Omega}),$$

où on a utilisé le fait que pour ce choix $\gamma_1\left(\phi_1\right) = \gamma_2\left(\phi_2\right) = \phi_{|\Gamma}$. De cette dernière identité, et vu que ϕ est arbitraire, nous déduisons que pour $j = 1, 2$

$$\left(\gamma_1\left(v_1\right) - \gamma_2\left(v_2\right)\right)n_1^j = 0 \qquad \text{sur } \Gamma.$$

Multipliant alors par n_1^j et sommant par rapport à j, il vient que

$$\gamma_1\left(v_1\right) - \gamma_2\left(v_2\right) = 0 \qquad \text{sur } \Gamma,$$

ce qui termine la preuve. □

1.3.2 Recollement de fonctions

Nous avons vu que la restriction à un sous-domaine Ω_i d'un élément de $H^m(\Omega)$ est un élément de $H^m(\Omega_i)$. Nous nous intéressons à présent à une forme d'analyse réciproque. Plus précisément, nous considérerons des éléments de la forme

$$v = v_1\chi_{\Omega_1} + v_2\chi_{\Omega_2} \qquad \left(v_1\in H^1(\Omega_1),\ v_2\in H^1(\Omega_2)\right),$$

et énoncerons des conditions, posées sur l'interface Γ, et garantissant leur appartenance à $H^1(\Omega)$.

Lemme 1.3.5. *Soient $v_1 \in H^1(\Omega_1)$, $v_2 \in H^1(\Omega_2)$ et $v = v_1\chi_{\Omega_1} + v_2\chi_{\Omega_2}$. Alors pour tout $j = 1, 2$, on a*

$$\begin{aligned}\int_\Omega v\, \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\, dx \;\; &= -\sum_{i=1}^{2} \left(\int_{\Omega_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, \phi_{|\Omega_i}\, dx + \int_{\partial\Omega\cap\partial\Omega_i} \gamma_i\left(v_i\right) \gamma\left(\phi_{|\Omega_i}\right) n_i^j\, ds \right) \\ &+ \int_\Gamma \left(\gamma_1\left(v_1\right) - \gamma_2\left(v_2\right)\right) \gamma_1\left(\phi_{|\Omega_1}\right) n_1^j\, ds \qquad \forall \phi \in H^1(\Omega).\end{aligned}$$

Démonstration. Afin de simplifier la présentation de la preuve, pour $\phi \in H^1(\Omega)$, nous poserons $\phi_i = \phi_{|\Omega_i}$.

Prenant en compte la définition de v et le fait que $v_i \in H^1(\Omega_i)$, et utilisant la formule de Green sur Ω_i, nous obtenons pour tout $j = 1, 2$

$$\begin{aligned}\int_\Omega v\, \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\, dx \;\; &= \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} v_i\, \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\, dx = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} v_i\, \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}\, dx \\ &= -\sum_{i=1}^{2} \left(\int_{\Omega_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, \phi_{|\Omega_i}\, dx + \int_{\partial\Omega_i} \gamma_i\left(v_i\right) \gamma_i\left(\phi_i\right) n_i^j\, ds \right) \\ &= -\sum_{i=1}^{2} \left(\int_{\Omega_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, \phi_i\, dx + \int_{\partial\Omega\cap\partial\Omega_i} \gamma_i\left(v_i\right) \gamma_i\left(\phi_i\right) n_i^j\, ds \right) \\ &+ \sum_{i=1}^{2} \int_\Gamma \gamma_i\left(v_i\right) \gamma_i\left(\phi_i\right) n_i^j\, ds \qquad \forall \phi \in H^1(\Omega).\end{aligned}$$

Grâce à la proposition 1.3.3 et à la proposition 1.3.4, nous déduisons que

$$\begin{aligned}\int_\Omega v\, \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\, dx \;\; &= -\sum_{i=1}^{2} \left(\int_{\Omega_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, \phi_i\, dx + \int_{\partial\Omega\cap\partial\Omega_i} \gamma_i\left(v_i\right) \gamma\left(\phi_i\right) n_i^j\, ds \right) \\ &+ \int_\Gamma \left(\gamma_1\left(v_1\right) - \gamma_2\left(v_2\right)\right) \gamma_1\left(\phi_{|\Omega_1}\right) n_1^j\, ds \qquad \forall \phi \in H^1(\Omega),\end{aligned}$$

ce qui complète la preuve. □

Proposition 1.3.6. *Soient $v_1 \in H^1(\Omega_1)$, $v_2 \in H^1(\Omega_2)$ et $v = v_1\chi_{\Omega_1} + v_2\chi_{\Omega_2}$. Si*

$$\gamma_1\left(v_1\right) = \gamma_2\left(v_2\right) \quad \textit{sur } \Gamma,$$

alors $v \in H^1(\Omega)$. De plus,

$$\gamma(v) = \gamma_i\left(v_i\right) \qquad \textit{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i.$$

Démonstration. Il est facile de voir que $v \in L^2(\Omega)$. En effet

$$\|v\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |v|^2\,dx = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} |v|^2\,dx = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} |v_i|^2\,dx < +\infty.$$

D'autre part, prenant en compte le lemme 1.3.5 et le fait que $\gamma_1(v_1) = \gamma_2(v_2)$ sur Γ, on obtient

$$\int_\Omega v\,\tfrac{\partial \phi}{\partial x_j}\,dx = -\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} \tfrac{\partial v_i}{\partial x_j}\,\phi_{|\Omega_i}\,dx = -\int_\Omega g_j\,\phi\,dx \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

où

$$g_j = \tfrac{\partial v_1}{\partial x_j}\,\chi_{\Omega_1} + \tfrac{\partial v_2}{\partial x_j}\,\chi_{\Omega_2}.$$

Des arguments similaires à ceux précédemment utilisés, montrent que $g_j \in L^2(\Omega)$. Par conséquent, g_j est la dérivée faible de v et elle appartient à $L^2(\Omega)$, autrement dit $v \in H^1(\Omega)$. Grâce à la proposition 1.3.3, nous déduisons alors que

$$\gamma(v) = \gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right) = \gamma_i(v_i) \qquad \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i,$$

ce qui termine la preuve. □

Finalement, nous nous intéressons au cas où v_1 et v_2 sont plus réguliers.

Lemme 1.3.7. *Soient $v_1 \in H^2(\Omega_1)$, $v_2 \in H^2(\Omega_2)$ et $v = v_1\chi_{\Omega_1} + v_2\chi_{\Omega_2}$. Alors,*

$$\begin{aligned}
\int_\Omega v\,\Delta\phi\,dx \;&= \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} \Delta v_i\,\phi_{|\Omega_i}\,dx \\
&+ \sum_{i=1}^{2} \int_{\partial\Omega\cap\partial\Omega_i} \left(\gamma_i(v_i)\,\gamma_i\left(\nabla\phi_{|\Omega_i}\right)\cdot n_i - \gamma_i\left(\phi_{|\Omega_i}\right)\gamma_i(\nabla v_i)\cdot n_i\right) ds \\
&+ \int_\Gamma (\gamma_1(v_1) - \gamma_2(v_2))\,\gamma_1\left(\nabla\phi_{|\Omega_1}\right)\cdot n_1\,ds \\
&+ \int_\Gamma \gamma_1\left(\phi_{|\Omega_1}\right)(\gamma_2(\nabla v_2) - \gamma_1(\nabla v_1))\cdot n_1\,ds \qquad \forall \phi \in H^2(\Omega).
\end{aligned}$$

Démonstration. Afin de simplifier la présentation de la preuve, pour $\phi \in H^1(\Omega)$, nous poserons $\phi_i = \phi_{|\Omega_i}$.

Prenant en compte la définition de v et le fait que $v_i \in H^1(\Omega_i)$, et utilisant la formule de Green, nous obtenons

$$\int_\Omega v\,\Delta\phi\,dx = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} v\,(\Delta\phi)_{|\Omega_i}\,dx = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega v\,\Delta\phi_i\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \left(\int_{\Omega_i} \Delta v_i \, \phi_i \, dx + \int_{\partial\Omega_i} \left(\gamma_i\left(v_i\right) \gamma_i\left(\nabla \phi_i\right) \cdot n_i - \gamma_i\left(\phi_i\right) \gamma_i\left(\nabla v_i\right) \cdot n_i \right) ds \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \left(\int_{\Omega_i} \Delta v_i \, \phi_i \, dx + \int_{\partial\Omega\cap\partial\Omega_i} \left(\gamma_i\left(v_i\right) \gamma_i\left(\nabla \phi_i\right) \cdot n_i - \gamma_i\left(\phi_i\right) \gamma_i\left(\nabla v_i\right) \cdot n_i \right) ds \right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \int_{\Gamma} \left(\gamma_i\left(v_i\right) \gamma_i\left(\nabla \phi_i\right) \cdot n_i - \gamma_i\left(\phi_i\right) \gamma_i\left(\nabla v_i\right) \cdot n_i \right) ds \qquad \forall \phi \in H^2(\Omega).$$

Grâce à la proposition 1.3.3, nous avons

$$\gamma_1\left(\phi_1\right) = \gamma_2\left(\phi_2\right) \quad \text{et} \quad \gamma_1\left(\nabla\phi_1\right) = \gamma_2\left(\nabla\phi_2\right),$$

prenant alors en compte la proposition 1.3.4 et le fait que $n_1 = -n_2$, nous déduisons que

$$\sum_{i=1}^{2} \int_{\Gamma} \left(\gamma_i\left(v_i\right) \gamma_i\left(\nabla \phi_i\right) \cdot n_i - \gamma_i\left(\phi_i\right) \gamma_i\left(\nabla v_i\right) \cdot n_i \right) ds$$

$$= \int_{\Gamma} \left(\gamma_1\left(v_1\right) - \gamma_2\left(v_2\right) \right) \gamma_1\left(\nabla\phi_1\right) \cdot n_1 \, ds + \int_{\Gamma} \gamma_1\left(\phi_1\right) \left(\gamma_2\left(\nabla v_2\right) - \gamma_1\left(\nabla v_1\right) \right) \cdot n_1 \, ds$$

ce qui donne le résultat énoncé. □

Proposition 1.3.8. *Soient $v_1 \in H^2(\Omega_1)$, $v_2 \in H^2(\Omega_2)$ et $v = v_1\chi_{\Omega_1} + v_2\chi_{\Omega_2}$. Si*

$$\gamma_1\left(v_1\right) = \gamma_2\left(v_2\right) \quad \textit{et} \quad \gamma_1\left(\nabla v_1\right) \cdot n_1 = \gamma_2\left(\nabla v_2\right) \cdot n_1 \ \textit{sur}\ \Gamma.$$

Alors $v \in \{v \in H^1(\Omega) \mid \Delta v \in L^2(\Omega)\}$, avec $\Delta v = \Delta v_1\chi_{\Omega_1} + \Delta v_2\chi_{\Omega_2}$.

Démonstration. L'appartenance de v à l'espace $H^1(\Omega)$ est une conséquence directe de la proposition 1.3.6. Reste à prouver que $\Delta v \in L^2(\Omega)$. Grâce au lemme 1.3.7 et au fait que

$$\gamma_1\left(v_1\right) = \gamma_2\left(v_2\right) \quad \text{et} \quad \gamma_1\left(\nabla v_1\right) \cdot n_1 = \gamma_2\left(\nabla v_2\right) \cdot n_1 \ \text{sur}\ \Gamma,$$

nous déduisons que

$$\int_{\Omega} v \, \Delta\phi \, dx = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} \Delta v_i \, \phi_{|\Omega_i} \, dx = \int_{\Omega} g \, \phi \, dx \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

où $g = \Delta v_1\chi_{\Omega_1} + \Delta v_2\chi_{\Omega_2}$. Des arguments similaires à ceux précédemment utilisés, montrent que $g \in L^2(\Omega)$. Par conséquent, g est la dérivée faible de v et elle appartient à $L^2(\Omega)$. □

1.3.3 Approche formelle de la méthode multi-domaines

Notre objectif est de trouver un problème *équivalent* au problème de Poisson, mais posé sur les sous-domaines. Pour bien mettre en évidence les difficultés, nous allons commencer par supposer que la solution faible u du problème de Poisson 1.1 est assez régulière, i.e. $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

• D'après le lemme 1.3.1, sa restriction à Ω_i appartient à $H^2(\Omega_i)$ avec

$$\Delta\left(u_{|\Omega_i}\right) = (\Delta u)_{|\Omega_i},$$

et donc

$$-\Delta\left(u_{|\Omega_i}\right) = f \qquad \text{p.p. dans } \Omega_i. \tag{1.8}$$

De l'autre côté, grâce à la proposition 1.3.3, on a

$$\gamma_i\left(u_{|\Omega_i}\right) = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i,\ i = 1, 2. \tag{1.9}$$

Finalement, la proposition 1.3.4 garantit que

$$\gamma_1\left(u_{|\Omega_1}\right) = \gamma_2\left(u_{|\Omega_2}\right) \quad \text{et} \quad \gamma_1\left(\nabla u_{|\Omega_1}\right) \cdot n_1 = \gamma_2\left(\nabla u_{|\Omega_2}\right) \cdot n_1 \text{ sur } \Gamma. \tag{1.10}$$

Combinant (1.8)-(1.10), nous voyons que si $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ est solution faible de (1.1), alors $(u_{|\Omega_1}, u_{|\Omega_2}) \in H^2(\Omega_1) \times H^2(\Omega_2)$ satisfait le système suivant

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = f & \text{dans } \Omega_1, \\ -\Delta u_2 = f & \text{dans } \Omega_2, \\ \gamma_1(u_1) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_1, \\ \gamma_2(u_2) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_2, \\ \gamma_1(u_1) = \gamma_2(u_2) & \text{sur } \Gamma, \\ \gamma_1(\nabla u_1) \cdot n_1 = \gamma_2(\nabla u_2) \cdot n_1 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{1.11}$$

• Réciproquement, supposons que $u_1 \in H^2(\Omega_1)$, $u_2 \in H^2(\Omega_2)$ sont solutions de (1.11). Prenant en compte $(1.11)_{5,6}$ et appliquant la proposition 1.3.8, il vient que la fonction $u = u_1\chi_{\Omega_1} + u_2\chi_{\Omega_2}$ appartient à $H^1(\Omega)$ et que son laplacien est dans $L^2(\Omega)$ et est donné par

$$\Delta u = \Delta u_1 \chi_{\Omega_1} + \Delta u_2 \chi_{\Omega_2}.$$

Avec $(1.11)_{1,2}$, ceci implique que

$$-\Delta u = f \qquad \text{p.p. dans } \Omega. \tag{1.12}$$

Finalement, grâce à $(1.11)_{3,4}$ et à la proposition 1.3.3, nous avons que

$$\gamma(u) = \gamma_i(u_i) = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i, i = 1, 2.$$

Autrement dit,

$$\gamma(u) = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega. \tag{1.13}$$

Combinant (1.12)-(1.13), nous voyons que u est solution du problème de Poisson.

En résumé, nous avons montré le résultat suivant :

Théorème 1.3.9. *Supposons que la solution faible u du problème de Poisson* (1.1) *appartienne à $H^2(\Omega)$. Alors $(u_{|\Omega_1}, u_{|\Omega_2})$ appartient à $H^2(\Omega_1) \times H^2(\Omega_2)$ et est solution du problème* (1.11)*.*

Réciproquement, soit $(u_1, u_2) \in H^2(\Omega_1) \times H^2(\Omega_2)$ une solution de (1.11)*. Alors la fonction u définie par*

$$u = u_1 \chi_{\Omega_1} + u_2 \chi_{\Omega_2},$$

appartient à $H^1(\Omega)$, Δu appartient à $L^2(\Omega)$ et u est solution de (1.1)*.*

Les conditions $(1.11)_{5,6}$ sont les conditions de transmission. Ces conditions assurent la continuité sur l'interface de la solution globale u, ainsi que la continuité du flux.

1.3.4 Définition formelle de l'équation d'interface de Steklov-Poincaré

Les méthodes de décomposition de domaines se ramènent généralement à des procédures pour une équation associée au problème différentiel considéré et posée sur l'interface Γ. Ce problème d'interface peut-être défini en fonction de l'opérateur de Steklov-Poincaré.

Notons λ la valeur de l'inconnue u sur l'interface. Soit $\mathcal{H}_i\lambda$ l'extension harmonique de λ à Ω_i, i.e. la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta v_i = 0 & \text{dans } \Omega_i, \\ \gamma_i\,(v_i) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i, \\ \gamma_i\,(v_i) = \lambda & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{1.14}$$

et $\mathcal{G}if$ la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta w_i = f & \text{dans } \Omega_i, \\ \gamma_i\left(w_i\right) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i, \\ \gamma_i\left(w_i\right) = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Prenant en compte $(1.11)_{1,2,3,4,5}$, et grâce à la linéarité du problème, il est facile de voir que

$$u_i = \mathcal{H}_i\lambda + \mathcal{G}if.$$

Substituant alors dans $(1.11)_6$, nous obtenons

$$\gamma_1\left(\nabla\left(\mathcal{H}_1\lambda\right) + \nabla\left(\mathcal{G}_1 f\right)\right)\cdot n_1 = \gamma_2\left(\nabla\left(\mathcal{H}_2\lambda\right) + \nabla\left(\mathcal{G}_2 f\right)\right)\cdot n_1,$$

qui peut-être réécrite sous la forme

$$S\lambda = \psi, \tag{1.15}$$

où

$$S\lambda = \gamma_1\left(\nabla\left(\mathcal{H}_1\lambda\right)\right)\cdot n_1 - \gamma_1\left(\nabla\left(\mathcal{H}_2\lambda\right)\right)\cdot n_1 = \sum_{i=1}^{2}\gamma_i\left(\nabla\left(\mathcal{H}_i\lambda\right)\right)\cdot n_i,$$

et

$$\psi = \gamma_1\left(\nabla\left(\mathcal{G}_1 f\right)\right)\cdot n_1 - \gamma_2\left(\nabla\left(\mathcal{G}_2 f\right)\right)\cdot n_1 = \sum_{i=1}^{2}\gamma_i\left(\nabla\left(\mathcal{G}_i f\right)\right)\cdot n_i.$$

L'opérateur S s'appelle opérateur de Steklov-Poincaré, l'équation (1.15) étant l'équation d'interface de Steklov-Poincaré. Remarquons que $\mathcal{G}if$ ne dépend que de f et peut-être obtenue indépendamment, tandis que $\mathcal{H}_i\lambda$ ne dépend que de λ. Si on pouvait résoudre l'équation d'interface, alors nous pourrions obtenir la solution globale par résolution de deux problèmes indépendants associés à l'extension harmonique, posés chacun sur un sous-domaine.

1.3.5 Formulation faible multi-domaines

Introduisons les formes bilinéaires a_i, $i = 1, 2$, définies par

$$a_i(u_i, v_i) = \left(\nabla u_i, \nabla v_i\right)_{\Omega_i} = \int_{\Omega_i} \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx \qquad u_i, v_i \in H^1(\Omega_i),$$

et les espaces

$$V_i = \left\{v_i \in H^1(\Omega_i) \mid \gamma\left(v_i\right) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i\right\},$$

$$V_i^0 = H_0^1(\Omega_i).$$

Finalement, rappelons qu'il existe un opérateur trace de V_i dans $L^2(\Gamma)$. L'image de V_i par cet opérateur est caractérisé de la manière suivante

$$\Lambda = \left\{\mu \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \mid \mu = v_{|\Gamma} \text{ pour un certain } v \in H_0^1(\Omega)\right\}.$$

Cet ensemble est particulièrement intéressant car il existe des opérateur d'extension $\mathbb{E}_i : \Lambda \longrightarrow V_i$ satisfaisant $(\mathbb{E}_i\mu)_{|\Gamma} = \mu$.

Théorème 1.3.10. *Soit u la solution du problème de Poisson* (1.3)*. Alors $(u_{|\Omega_1}, u_{|\Omega_2})$ est solution du problème suivant*

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_1, u_2) \in V_1 \times V_2 \text{ tel que} & \\ a_1(u_1, v_1) = (f, v_1)_{\Omega_1} & \forall v_1 \in V_1^0, \\ a_2(u_2, v_2) = (f, v_2)_{\Omega_2} & \forall v_2 \in V_2^0, \\ \gamma_1(u_1) = \gamma_2(u_2) & \text{sur } \Gamma, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{2} a_i(u_i, \mathbb{E}_i\mu) = \sum_{i=1}^{2} (f, \mathbb{E}_i\mu)_{\Omega_i} & \forall \mu \in \Lambda, \end{cases} \tag{1.16}$$

où $\mathbb{E}_i$ désigne un opérateur d'extension quelconque de Λ à V_i.

Réciproquement, soit (u_1, u_2) la solution de (1.16)*. Alors la fonction u définie par*

$$u = u_1\chi_{\Omega_1} + u_2\chi_{\Omega_2} \tag{1.17}$$

est la solution de (1.3)*.*

Démonstration. La démonstration est divisée en deux parties.

Partie I. Soit u la solution du problème de Poisson (1.3). Grâce au lemme 1.3.1, nous avons que $u_{|\Omega_i} \in H^1(\Omega_i)$ pour $i = 1, 2$. Prenant en compte la proposition 1.3.3 et le fait que $\gamma(u) = 0$ sur $\partial\Omega$, on obtient

$$\gamma_i\left(u_{|\Omega_i}\right) = \gamma(u) = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i,$$

ce qui montre que $u_{|\Omega_i} \in V_i$. De plus, d'après la proposition 1.3.4 on a

$$\gamma_1\left(u_{|\Omega_1}\right) = \gamma_2\left(u_{|\Omega_2}\right) \quad \text{sur } \Gamma,$$

ce qui donne $(1.16)_3$.

• Afin de montrer $(1.16)_1$, considérons $v_1 \in V_1^0$ et posons

$$w_1 = \begin{cases} v_1 & \text{dans } \Omega_1, \\ 0 & \text{dans } \Omega_2. \end{cases}$$

Prenant en compte la proposition 1.3.6 et le lemme 1.3.1, nous déduisons que $w_1 \in H^1(\Omega)$. et que

$$\gamma(w_1) = \gamma_1(v_1) = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_1,$$

et

$$\gamma(w_1) = \gamma_2(v_2) = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_2.$$

Ceci implique que

$$\gamma(w_1) = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega,$$

et par conséquent que $w_1 \in H_0^1(\Omega)$. De plus, grâce au lemme 1.3.1, on a

$$\nabla w_1 = \begin{cases} \nabla v_1 & \text{dans } \Omega_1, \\ 0 & \text{dans } \Omega_2. \end{cases}$$

Ces considérations montrent que

$$a(u, w_1) = (\nabla u, \nabla w_1) = \left(\nabla u_{|\Omega_1}, \nabla v_1\right)_{\Omega_1} = a_1(u_{|\Omega_1}, v_1),$$

et

$$(f, w_1) = (f, v_1)_{\Omega_1}.$$

Prenant alors $w_1 \in H_0^1(\Omega)$ comme fonction test dans (1.3), nous obtenons

$$a_1(u_{|\Omega_1}, v_1) = (f, v_1)_{\Omega_1},$$

ce qui donne le résultat. La formulation $(1.16)_2$ est obtenue en utilisant les mêmes arguments.

• Finalement, soit $\mu \in \Lambda$ et soit $\mathbb{E}_i\mu$, $i = 1, 2$, une extension de μ en une fonction de V_i. Posons

$$\mathbb{E}\mu = \mathbb{E}_1\mu\,\chi_{\Omega_1} + \mathbb{E}_2\mu\,\chi_{\Omega_2}.$$

Il est clair que par définition, $\gamma_1(\mathbb{E}_1\mu) = \gamma_2(\mathbb{E}_2\mu) = \mu$ sur Γ et donc d'après la proposition 1.3.6, il vient que

$$\gamma(\mathbb{E}\mu) = \gamma_i(\mathbb{E}_i\mu) = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i,\ i = 1, 2.$$

Par conséquent,

$$\gamma(\mathbb{E}\mu) = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega,$$

prouvant ainsi que $\mathbb{E}\mu$ appartient à $H_0^1(\Omega)$. Choisissant alors $\mathbb{E}\mu$ comme fonction test dans (1.3), et observant que

$$a(u, \mathbb{E}\mu) = a_1(u_1, \mathbb{E}_1\mu) + a_2(u_2, \mathbb{E}_2\mu),$$

et

$$(f, \mathbb{E}\mu)_{\Omega_1} = (f, \mathbb{E}_1\mu)_{\Omega_1} + (f, \mathbb{E}_2\mu)_{\Omega_2},$$

nous obtenons $(1.16)_4$.

Partie II. Considérons la réciproque.

• Soit $(u_1, u_2) \in V_1 \times V_2$ la solution de (1.16). Prenant en compte $(1.16)_3$ et la proposition 1.3.6, il vient que $u \in H^1(\Omega)$ et que

$$\gamma(u) = \gamma_i(u_i) = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i.$$

Autrement dit, $u \in H_0^1(\Omega)$.

• Montrons à présent que u satisfait la formulation faible (1.3). D'après la proposition 1.3.3, pour $v \in H_0^1(\Omega)$ nous avons

$$\gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right) = \gamma\left(v\right) = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i,\ i = 1, 2,$$

et donc $v_{|\Omega_i} \in V_i$. De plus, $v_{|\Omega_i} - \mathbb{E}_i\left(\gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right)\right) \in V_i$ et

$$\begin{aligned} \gamma_i\left(v_{|\Omega_i} - \mathbb{E}_i\left(\gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right)\right)\right) &= \gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right) - \gamma_i\left(\mathbb{E}_i\left(\gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right)\right)\right) \\ &= \gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right) - \gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right) = 0 \qquad \text{sur } \Gamma. \end{aligned}$$

Il vient que $v_{|\Omega_i} - \mathbb{E}_i\left(\gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right)\right) \in V_i^0$. Prenant en compte (1.17), nous avons

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \sum_{i=1}^{2} a_i\left(u_{|\Omega_i}, v_{|\Omega_i}\right)_{\Omega_i} = \sum_{i=1}^{2} a_i\left(u_i, v_{|\Omega_i}\right)_{\Omega_i} \\ &= \sum_{i=1}^{2} a_i\left(u_i, v_{|\Omega_i} - \mathbb{E}_i\left(\gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right)\right)\right)_{\Omega_i} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2} a_i\left(u_i, \mathbb{E}_i\left(\gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right)\right)\right)_{\Omega_i}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Les identités $(1.16)_{1,2}$ impliquent que

$$\sum_{i=1}^{2} a_i\left(u_i, v_{|\Omega_i} - \mathbb{E}_i\left(\gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right)\right)\right)_{\Omega_i} = \sum_{i=1}^{2}\left(f, v_{|\Omega_i} - \mathbb{E}_i\left(\gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right)\right)\right)_{\Omega_i}. \tag{1.19}$$

De plus, l'identité $(1.16)_4$ implique que

$$\sum_{i=1}^{2} a_i\left(u_i, \mathbb{E}_i\left(\gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right)\right)\right)_{\Omega_i} = \sum_{i=1}^{2}\left(f, \mathbb{E}_i\left(\gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right)\right)\right)_{\Omega_i}. \tag{1.20}$$

Combinant (1.18)-(1.20), nous déduisons que

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \sum_{i=1}^{2}\Big(\left(f, v_{|\Omega_i} - \mathbb{E}_i\left(\gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right)\right)\right)_{\Omega_i} + \left(f, \mathbb{E}_i\left(\gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right)\right)\right)_{\Omega_i}\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{2}\left(f, v_{|\Omega_i}\right)_{\Omega_i} = (f,v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

ce qui prouve notre assertion et termine la preuve. □

1.3.6 Formulation faible de l'équation de Steklov-Poincaré

Soit $\mathbb{G}_i f \in V_i^0$ la solution de

$$a_i\left(\mathbb{G}_i f, v_i\right) = (f, v_i) \qquad \forall v_i \in V_i^0, \tag{1.21}$$

et pour $\eta \in \Lambda$, soit $\mathbb{H}_i\eta \in V_i$ son extension harmonique à Ω_i, i.e. la solution du problème suivant

$$\begin{cases} a_i\left(\mathbb{H}_i\eta, v_i\right) = 0 & \forall v_i \in V_i^0, \\ \gamma_i\left(\mathbb{H}_i\eta\right) = \eta & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{1.22}$$

De simples calculs montrent que $\mathbb{H}_i\gamma_i(u_i) + \mathbb{G}_i f$ satisfait

$$\begin{cases} a_i\left(\mathbb{H}_i\lambda + \mathbb{G}_i f, v_i\right) = (f, v_i) & \forall v_i \in V_i^0, \\ \gamma_i\left(\mathbb{H}_i\lambda + \mathbb{G}_i f\right) = \gamma_i(u_i) & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

et grâce à l'unicité de la solution, nous déduisons que

$$u_i = \mathbb{H}_i\gamma_i(u_i) + \mathbb{G}_i f. \tag{1.23}$$

• Supposons que l'on a résolu le problème (1.16) et posons $\lambda = \gamma_i(u_i)$. Prenant en compte (1.23) et remplaçant dans $(1.16)_4$, il vient que

$$\sum_{i=1}^{2} a_i \left(\mathbb{H}_i\lambda, \mathbb{E}_i\mu\right) = \sum_{i=1}^{2} \left((f, \mathbb{E}_i\mu) - a_i \left(\mathbb{G}if, \mathbb{E}_i\mu\right)\right) \qquad \forall\mu \in \Lambda.$$

• Réciproquement, supposons que $\lambda \in \Lambda$ est solution de la formulation précédente et posons

$$u = \begin{cases} \mathbb{G}_1 f + \mathbb{H}_1\lambda & \text{dans } \Omega_1, \\ \mathbb{G}_2 f + \mathbb{H}_2\lambda & \text{dans } \Omega_2. \end{cases}$$

Alors pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} a\left(u, v\right) &= \sum_{i=1}^{2} a_i \left(u_{|\Omega_i}, v_{|\Omega_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{2} a_i \left(u_{|\Omega_i}, v_{|\Omega_i} - \mathbb{E}_i \left(\gamma_i \left(v_{|\Omega_i}\right)\right)\right) \\ &= \ + \sum_{i=1}^{2} a_i \left(u_{|\Omega_i}, \mathbb{E}_i \left(\gamma_i \left(v_{|\Omega_i}\right)\right)\right). \end{aligned} \tag{1.24}$$

Observant que $v_{|\Omega_i} - \mathbb{E}_i \left(\gamma_i \left(v_{|\Omega_i}\right)\right) \in V_i^0$ et prenant en compte (1.21) et (1.22), nous déduisons que

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{2} a_i \left(u_{|\Omega_i}, v_{|\Omega_i} - \mathbb{E}_i \left(\gamma_i \left(v_{|\Omega_i}\right)\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{2} a_i \left(\mathbb{G}_i f + \mathbb{H}_i\lambda, v_{|\Omega_i} - \mathbb{E}_i \left(\gamma_i \left(v_{|\Omega_i}\right)\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{2} \left(f, v_{|\Omega_i} - \mathbb{E}_i \left(\gamma_i \left(v_{|\Omega_i}\right)\right)\right)_{\Omega_i}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

D'autre part, λ étant une solution de (1.14), on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} a_i \left(u_{|\Omega_i}, \mathbb{E}_i \left(\gamma_i \left(v_{|\Omega_i}\right)\right)\right) &= \sum_{i=1}^{2} a_i \left(\mathbb{G}_i f + \mathbb{H}_i\lambda, \mathbb{E}_i \left(\gamma_i \left(v_{|\Omega_i}\right)\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{2} \left(f, \mathbb{E}_i \left(\gamma_i \left(v_{|\Omega_i}\right)\right)\right)_{\Omega_i}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Combinant (1.24)-(1.26), nous déduisons enfin que

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \sum_{i=1}^{2} \left(f, v_{|\Omega_i} - \mathbb{E}_i\left(\gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right)\right)\right)_{\Omega_i} + \sum_{i=1}^{2} \left(f, \mathbb{E}_i\left(\gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right)\right)\right)_{\Omega_i} \\ &= \sum_{i=1}^{2} \left(f, v_{|\Omega_i}\right)_{\Omega_i} = (f,v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Nous avons ainsi montré le résultat suivant.

Théorème 1.3.11. *Si u_1 et u_2 satisfont* (1.16), *alors $\lambda = \gamma_i(u_i)$ est solution du problème*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \lambda \in \Lambda \text{ tel que} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{2} a_i\left(\mathbb{H}_i\lambda, \mathbb{E}_i\mu\right) = \sum_{i=1}^{2} \left((f, \mathbb{E}_i\mu)_{\Omega_i} - a_i\left(\mathbb{G}_i f, \mathbb{E}_i\mu\right)\right) \qquad \forall \mu \in \Lambda. \end{array} \right. \tag{1.27}$$

Réciproquement, si λ est solution de (1.27), *alors $u_1 = \mathbb{G}_1 f + \mathbb{H}_1\lambda$ et $u_2 = \mathbb{G}_2 f + \mathbb{H}_2\lambda$ sont solutions de* (1.16).

L'opérateur de Steklov-Poincaré S peut-être défini de la manière suivante : pour tout $\lambda \in \Lambda$, $S\lambda \in \Lambda'$ est tel que

$$\langle S\lambda, \mu \rangle = \sum_{i=1}^{2} a_i\left(\mathbb{H}_i\lambda, \mathbb{E}_i\mu\right) \qquad \forall \mu \in \Lambda.$$

De plus, $\psi \in \Lambda'$ est donné par

$$\langle \psi, \mu \rangle = \sum_{i=1}^{2} \left((f, \mathbb{E}_i\mu)_{\Omega_i} - a_i\left(\mathbb{G}_i f, \mathbb{E}_i\mu\right)\right) \qquad \forall \mu \in \Lambda.$$

L'équation d'interface 1.27 peut-être alors formulée comme

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \lambda \in \Lambda \text{ tel que} \\ \langle S\lambda, \mu \rangle = \langle \psi, \mu \rangle \qquad \forall \mu \in \Lambda. \end{array} \right.$$

1.4 Approximation par éléments finis de la formulation multi-domaines

Dans toute la suite, on supposera que Ω est polygonal et considérons un maillage de $\overline{\Omega}$ formé par des triangles K vérifiant les critères suivants :

1. Les éléments $K \subset \overline{\Omega}$ du maillage doivent recouvrir le domaine, i.e. leur union est égale à $\overline{\Omega}$.

2. L'intersection de deux éléments distincts doit satisfaire :

$$K \cap K' = \begin{cases} \emptyset, \\ \text{un sommet}, \\ \text{un côté}. \end{cases}$$

et considérons une triangulation régulière $\mathcal{T}_h$ de $\bar{\Omega}$. Nous noterons N_h le nombre total de sommets et $(x_i)_{1 \le i \le N_h}$ l'ensemble des sommets des triangles (encore appelés *les noeuds* du maillage). Nous noterons

$$h_K = \operatorname{diam}(K) = \sup_{x,y \in K} \|x - y\|$$

et définissons le *pas du maillage* par

$$h = \max_K h_K$$

Nous désignons par $\mathcal{T}_h$ l'ensemble de tous ces éléments. Soit $\mathbb{P}_r$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à r et soit

$$X_h^1 = \left\{ v_h \in C(\bar{\Omega}) \mid v_{h|K} \in \mathbb{P}_r, \ \forall K \in \mathcal{T}_h \right\},$$

$$V_h = X_h^r \cap H_0^1(\Omega).$$

V_h est un espace vectoriel de dimension N_h dont une base est donnée par les fonctions $\phi_i \in V_h$, $i = 1, \cdots, N_h$ telles que

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij} \qquad \forall 1 \le i, j \le N_h.$$

Le problème approché associé à (1.3) est donné par

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } \ a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \tag{1.28}$$

où

$$F(v) = (f, v).$$

Nous supposerons aussi que l'interface Γ est une réunion de côtés de la triangulation. On peut alors partitionner les noeuds de la triangulation comme suit : $\left(x_j^i\right)_{1 \le j \le N_i}$ correspond aux noeuds appartenant au sous-domaine Ω_i et $\left(x_j^\Gamma\right)_{1 \le j \le N_\Gamma}$ correspond aux noeuds appartenant à l'interface Γ. Les fonctions de base seront divisées en conséquence, ϕ_j^i étant la fonction de base associée à x_j^i et ϕ_j^Γ étant la fonction de base associée à x_j^Γ. Afin de considérer la version discrète du problème (1.16), et en s'inspirant de la définition de V_i, V_i^0 et Λ, introduisons les espaces suivants

$$V_{i,h} = \left\{ v_{h|\Omega_i} \mid v_h \in V_h \right\},$$

$$V_{i,h}^0 = \left\{ v_h \in V_{i,h} \mid v_{h|\Gamma} = 0 \right\},$$

$$\Lambda_h = \left\{ v_{h|\Gamma} \mid v_h \in V_h \right\}.$$

En répétant les lignes de la preuve du théorème 1.3.10, nous pouvons montrer que $u_{h|\Omega_1}$ et $u_{h|\Omega_2}$, nous pouvons montrer que le problème (1.28) est équivalent au problème multi-domaines suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_{h|\Omega_1}, u_{h|\Omega_2}) \in V_{1,h} \times V_{2,h} \text{ tel que} & \\ a_1\left(u_{h|\Omega_1}, v_{1,h}\right) = (f, v_{1,h})_{\Omega_1} & \forall v_{1,h} \in V_{1,h}^0, \\ a_2\left(u_{h|\Omega_2}, v_{2,h}\right) = (f, v_{2,h})_{\Omega_2} & \forall v_{2,h} \in V_{2,h}^0, \\ u_{h|\Omega_1} = u_{h|\Omega_2} & \text{sur } \Gamma, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{2} a_i\left(u_{h\Omega_i}, \mathbb{E}_{i,h}\mu_h\right) = \sum_{i=1}^{2} (f, \mathbb{E}_{i,h}\mu_h)_{\Omega_i} & \forall \mu_h \in \Lambda_h, \end{cases}$$

où $\mathbb{E}_{i,h}$, $i = 1, 2$, est n'importe quel opérateur de Λ_h dans $V_{i,h}$. Dans la pratique, on choisit $\mathbb{E}_{i,h}\mu_h$ comme l'interpolant $\pi_{i,h}\mu_h$, appartenant à $V_{i,h}$, égal à μ_h sur les noeuds de l'interface et s'annulant dans les noeuds intérieurs de Ω_i. Ceci nous amène au système suivant

$$\begin{cases} a_1\left(u_{h|\Omega_1}, \phi_i^1\right) = F_1\left(\phi_i^1\right) & \forall i = 1, \cdots, N_1, \\ a_2\left(u_{h|\Omega_2}, \phi_j^2\right) = F_2\left(\phi_j^2\right) & \forall j = 1, \cdots, N_2, \\ a_1\left(u_{h|\Omega_1}, \phi^\Gamma_{k\,|\Omega_1}\right) + a_2\left(u_{h|\Omega_2}, \phi^\Gamma_{k\,|\Omega_2}\right) & \\ \quad = F_1\left(\phi^\Gamma_{k\,|\Omega_1}\right) + F_2\left(\phi^\Gamma_{k\,|\Omega_2}\right) & \forall k = 1, \cdots, N_\Gamma. \end{cases} \tag{1.29}$$

Observant que

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N_1} u_j^1 \phi_j^1(x) + \sum_{j=1}^{N_2} u_j^2 \phi_j^2(x) + \sum_{j=1}^{N_\Gamma} u_j^\Gamma \phi_j^\Gamma(x), \qquad \text{avec } u_j^i = u_h(x_j^i),$$

et que

$$u_{h|\Omega_i}(x) = \sum_{j=1}^{N_i} u_j^1 \phi_j^1(x) + \sum_{j=1}^{N_\Gamma} u_j^\Gamma \phi^\Gamma_{j\,|\Omega_i}(x),$$

il vient que (1.29) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{11}\mathbf{u}_1 + \mathbf{A}_{1\Gamma}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{f}_1, \\ \mathbf{A}_{22}\mathbf{u}_2 + \mathbf{A}_{2\Gamma}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{f}_2, \\ \mathbf{A}_{\Gamma 1}\mathbf{u}_1 + \mathbf{A}_{\Gamma 2}\mathbf{u}_2 + \left(\mathbf{A}^1_{\Gamma\Gamma} + \mathbf{A}^2_{\Gamma\Gamma}\right)\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{f}^\Gamma_1 + \mathbf{f}^\Gamma_2, \end{cases}$$

où $\mathbf{u}_1 = \left(u^1_1, \cdots, u^1_{N_1}\right)$, $\mathbf{u}_2 = \left(u^1_2, \cdots, u^2_{N_2}\right)$ et $\lambda = \left(u^\Gamma_1, \cdots, u^\Gamma_{N_\Gamma}\right)$ et où

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_{\ell\ell})_{ij} &= a_\ell\left(\phi^\ell_j, \phi^\ell_i\right) && \ell = 1,2, \\ (\mathbf{A}_{\Gamma\ell})_{ij} &= a_\ell\left(\phi^\ell_j, \phi^\Gamma_i\right) && \ell = 1,2, \\ (\mathbf{A}_{\ell\Gamma})_{ij} &= a_\ell\left(\phi^\Gamma_j, \phi^\ell_i\right) && \ell = 1,2 \\ (\mathbf{A}_{\Gamma\Gamma})_{ij} &= a_\ell\left(\phi^\Gamma_j, \phi^\Gamma_i\right) && \ell = 1,2, \\ (\mathbf{f}_\ell)_i &= F_\ell\left(\phi^\ell_i\right) && \ell = 1,2, \\ (\mathbf{f}_\Gamma)_i &= F_\ell\left(\phi^\Gamma_i\right) && \ell = 1,2. \end{aligned}$$

Le système précédent peut s'écrire sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 & \mathbf{A}_{1\Gamma} \\ 0 & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{2\Gamma} \\ \mathbf{A}_{\Gamma 1} & \mathbf{A}_{\Gamma 2} & \mathbf{A}_{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_\Gamma \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{A}_{\Gamma\Gamma} = \mathbf{A}^1_{\Gamma\Gamma} + \mathbf{A}^2_{\Gamma\Gamma}$ et $\mathbf{f}_\Gamma = \mathbf{f}^\Gamma_1 + \mathbf{f}^\Gamma_2$.

Les matrices $\mathbf{A}_{11}$ et $\mathbf{A}_{22}$ sont inversibles puisqu'elles sont définies positives. Après avoir éliminé $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$, nous obtenons la forme réduite

$$\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\chi}_\Gamma,$$

où

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sum_{i=1}^{2} \left(\mathbf{A}^i_{\Gamma\Gamma} - \mathbf{A}_{\Gamma i}\mathbf{A}^{-1}_{ii}\mathbf{A}_{i\Gamma}\right),$$

et

$$\boldsymbol{\chi}_\Gamma = \mathbf{f}_\Gamma - \mathbf{A}_{\Gamma 1}\mathbf{A}^{-1}_{11}\mathbf{f} - \mathbf{A}_{\Gamma 2}\mathbf{A}^{-1}_{22}\mathbf{f}_2.$$

La matrice $\boldsymbol{\Sigma}$ est appelée matrice du complément de Schur. Elle correspond à la version algébrique de l'opérateur de Steklov-Poincaré discret.

Chapitre 2

Méthode de décomposition de domaines pour le problème de la chaleur

2.1 Introduction

Nous considérons l'équation de la chaleur donnée par

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans } \; Q = \Omega \times]0, T[, \\ u = 0 & \text{sur } \; \Sigma = \partial\Omega \times]0, T[, \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $f \in L^2(Q)$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$. Nous étudions principalement la solvabilité de cette équation et analysons le problème multi-domaines qui lui est associé.

2.2 Formulation faible de l'équation de la chaleur

Une étape importante pour la résolution d'une équation aux dérivées partielles est liée à la définition précise à donner à la solution et au cadre fonctionnel approprié dans lequel il faudrait établir son existence. Les variables espace x et la variable temps t jouant des rôles distincts, la solution u est regardée comme une fonction du temps à valeurs dans un espace de fonctions V définies sur Ω, i.e.

$$\begin{aligned} u : \; & I \longrightarrow V \\ & t \longmapsto u(t). \end{aligned}$$

L'espace V est généralement choisi comme étant l'espace approprié à la formulation variationnelle du problème stationnaire associé (donc $V = H_0^1(\Omega)$ dans notre cas).

Comme d'habitude, afin de déterminer une formulation variationnelle adéquate, nous supposerons dans un premier temps que le problème (2.1) admet une solution régulière. Une simple intégration par parties montre que pour $\varphi \in C^1(\bar{Q})$ telle que $\varphi = 0$ sur Σ, on a

$$\int_Q \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\, \varphi(x,t)\, dxdt$$

$$= - \int_Q u(x,t)\, \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t)\, dxdt + \int_\Omega u(x,T)\, \varphi(x,T)\, dx - \int_\Omega u(x,0)\, \varphi(x,0)\, dx,$$

et

$$\int_Q -\Delta u(x,t)\, \varphi(x,t)\, dxdt$$

$$= \int_Q \nabla u(x,t) \cdot \nabla \varphi(x,t)\, dxdt - \int_\Sigma \tfrac{\partial u}{\partial n}(s,t)\, \varphi(s,t)\, dsdt$$
$$= \int_Q \nabla u(x,t) \cdot \nabla \varphi(x,t)\, dxdt.$$

Multipliant alors $(2.1)_1$ par une fonction test φ, intégrant et prenant en compte les deux identités précédentes ainsi que la condition initiale $(2.1)_3$, nous obtenons

$$- \int_Q u(x,t)\, \tfrac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t)\, dxdt + \int_Q \nabla u(x,t) \cdot \nabla \varphi(x,t)\, dxdt$$
$$= \int_Q f(x,t)\, \varphi(x,t)\, dxdt + \int_\Omega u_0(x)\, \varphi(x,0)\, dx - \int_\Omega u(x,T)\, \varphi(x,T)\, dx.$$

Contrairement au terme de gauche qui possède de bonnes propriétés de continuité et de coercivité, le dernier terme dans la partie de droite est difficile à gérer et afin de le controller, nous choisirons une fonction test qui s'annule sur $\Omega \times \{T\}$. Nous avons ainsi montré que si le problème (2.1) admet une solution classique u, alors cette solution satisfait la formulation variationnelle suivante

$$\int_I \left(u(t), \tfrac{\partial \varphi}{\partial t}(t)\right) dt + \int_I a\,(u(t), \varphi(t))\, dt = \int_I (f(t), \varphi(t))\, dt + (u_0, \varphi(0)) \quad (2.2)$$

pour tout $\varphi \in C^1(\bar{Q})$ tel que $\varphi = 0$ sur Σ et $\varphi(T) = 0$ dans Ω, où la forme bilinéaire a est définie par

$$a(u,v) = (\nabla u, \nabla v)\,.$$

Remarquons finalement que si l'on choisit φ de la forme

$$\varphi = \psi \otimes \phi \qquad \text{avec } \psi \in \mathcal{D}\,(]-\infty, T[) \text{ et } \phi \in C^1(\bar{\Omega}) \text{ telle que } \phi_{|\partial\Omega} = 0$$

nous obtenons

$$- \int_I (u(t), \phi)\, \psi'(t)\, dt + \int_I a\,(u(t), \phi)\, \psi(t)\, dt$$
$$= \int_I (f(t), \phi)\, \psi(t)\, dt + (u_0, \phi)\, \psi(0).$$

Nous allons analyser chaque terme pour déterminer l'espace correspondant et donner un sens rigoureux à nos calculs.

• Le premier point concerne la régularité de u par rapport à t et plus particulièrement le sens à donner à la dérivée en temps dans le premier terme.

Choisissant $V = H_0^1(\Omega)$ et supposant que $u \in L^2(I; H_0^1(\Omega))$ et $\phi \in H_0^1(\Omega)$, nous avons

$$|(u(t), \phi)| \leq \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P^2 \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} .$$

La fonction $t \longmapsto (u(t), \phi)\, \psi'(t)$ appartient donc à $L^2(I) \subset L^1(I)$.

• De même, des arguments classiques montrent que pour presque tout $t \in I$ et pour tout $\phi \in H^1(\Omega)$, on a

$$|a(u(t), \phi)| \leq \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)} = \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} . \tag{2.3}$$

Il vient que la fonction $t \longmapsto a\,(u(t), \phi)$ appartient à $L^2(I)$. Finalement, une fois que $f \in L^2(Q)$ et que

$$|(f(t), \phi)| \leq \|f(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|f(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} ,$$

nous concluons que $t \longmapsto (f(t), \phi)$ appartient à $L^2(I)$. En résumé, si $u \in L^2(I; H_0^1(\Omega))$ et $\phi \in H_0^1(\Omega)$, alors la formule variationnelle obtenue plus haut a un sens.

Toutes ces considérations nous amènent à la définition suivante.

Définition 2.2.1. *Soient $f \in L^2(Q)$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$. Une fonction $u \in L^2(I; H_0^1(\Omega))$ est une solution faible de* (2.1) *si*

$$\begin{aligned} - \int_I (u(t), \phi)\, \psi'(t)\, dt &+ \int_I a\,(u(t), \phi)\, \psi(t)\, dt \\ &= \int_I (f(t), \phi)\, \psi(t)\, dt + (u_0, \phi)\, \psi(0), \end{aligned} \tag{2.4}$$

pour tout $\psi \in \mathcal{D}\,(]-\infty, T[)$ et tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$.

Remarque 2.2.2. *De ce qui précède, nous savons que $t \mapsto (u(t), \phi) \in L^2(I)$, $t \mapsto a\,(u(t), \phi) \in L^2(I)$ et $t \mapsto (f(t), \phi) \in L^2(I)$. Ce sont donc des éléments de $\mathcal{D}'(I)$, avec*

$$\begin{aligned} - \int_I (u(t), \phi)\, \psi'(t)\, dt &= - \langle (u(\cdot), \phi)\, , \psi' \rangle_{\mathcal{D}'(I), \mathcal{D}(I)} \\ &= \left\langle \tfrac{d}{dt} (u(\cdot), \phi)\, , \psi \right\rangle_{\mathcal{D}'(I), \mathcal{D}(I)} \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}(I), \end{aligned}$$

$$\int_I a\,(u(t), \phi)\, \psi(t)\, dt = \langle a\,(u(\cdot), \phi)\, , \psi \rangle_{\mathcal{D}'(I), \mathcal{D}(I)} \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}(I),$$

et

$$\int_I (f(t), \phi)\, \psi(t)\, dt = \langle (f(\cdot), \phi)\, , \psi \rangle_{\mathcal{D}'(I), \mathcal{D}(I)} \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}(I).$$

Ces arguments montrent que si $u \in L^2(I; H_0^1(\Omega))$ est une solution faible de (2.1)*, alors*

$$\tfrac{d}{dt}\, (u(\cdot), \phi) + a\, (u(\cdot), \phi) = (f(\cdot), \phi) \qquad \textit{dans } \mathcal{D}'(I),$$

pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$. Cette formulation inspirera la définition du problème approché dans la méthode de Galerkin.

Remarque 2.2.3. *La condition initiale* $(2.1)_3$ *apparaît de manière faible dans la formulation* (2.4) *car le fait que u appartienne à $L^2(I; H_0^1(\Omega))$ n'est pas suffisant pour donner un sens à $u(0)$. Mais nous montrerons plus loin que $u \in L^2(I; H_0^1(\Omega)) \cap C(\bar{I}; L^2(\Omega))$, impliquant ainsi que $u(0)$ existe et donnant un sens à la condition initiale $u(0) = u_0$.*

La solution de (2.4) est construite grâce à la méthode de Faedo-Galerkin en utilisant un développement dans une base appropriée.

Lemme 2.2.4. *Il existe une base $(\omega_k)_k \subset H_0^1(\Omega)$ orthogonale dans $H_0^1(\Omega)$ et orthonormale dans $L^2(\Omega)$.*

Démonstration. Voir la section 6.5.1 dans [3]. □

Le résultat d'existence et d'unicité d'une solution au problème (2.4) est énoncé dans la proposition suivante.

Proposition 2.2.5. *Soient $f \in L^2(Q)$ et $u \in L^2(\Omega)$. Alors le problème* (2.4) *admet une unique solution $u \in L^\infty(I; L^2(\Omega)) \cap L^2(I; H^1(\Omega))$. Cette solution satisfait les estimations suivantes*

$$\|u\|^2_{L^\infty(I;L^2(\Omega))} \leq \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + C_P^2 \|f\|^2_{L^2(Q)}, \tag{2.5}$$

$$\|u\|^2_{L^2(I;H_0^1(\Omega))} \leq \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + C_P^2 \|f\|^2_{L^2(Q)}, \tag{2.6}$$

où C_P est la constante de Poincaré. De plus, $u \in W(I; H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ et satisfait la formulation équivalente suivante

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial u(t)}{\partial t}, \phi \right\rangle + a\,(u(t), \phi) = (f(t), \phi) \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Démonstration. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, nous notons V_m l'espace vectoriel engendré par les m premiers éléments de la base $(\omega_j)_{1,\cdots,m}$ et P_m l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\Omega)$ sur V_m. Le problème approché est défini par

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_m(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\omega_i \text{ solution, pour } 1 \leq j \leq m, \text{ de} \\ (u_m'(t), \omega_j) + a\,(u_m(t), \omega_j) = (f(t), \omega_j)\,, \\ u_m(0) = u_{0m} \end{cases} \tag{2.7}$$

où $u_{0m} = P_m u_0$. Vu que

$$(u_0 - u_{0m}, \phi) = 0 \qquad \forall \phi \in V_m, \tag{2.8}$$

il vient que

$$u_{0m} = \sum_{i=1}^{m} \rho_i \omega_i,$$

où le vecteur ρ est la solution du système

$$(M\rho)_j = (u_0, \omega_j)\,,$$

et où

$$M_{ij} = (\omega_i, \omega_j) \qquad 1 \leq i, j \leq m \tag{2.9}$$

est la matrice de masse. De plus, prenant en compte (2.8) et le fait que $u_{0m} \in V_m$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|u_{0m}\|^2_{L^2(\Omega)} &= (u_{0m}, u_{0m}) \\ &= \underbrace{(u_{0m}, u_{0m} - u_0)}_{=0} + (u_{0m}, u_0) = (u_{0m}, u_0) \\ &\leq \|u_{0m}\|_{L^2(\Omega)} \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

impliquant que

$$\|u_{0m}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

Finalement, nous savons que $(u_{0m})_m$ converge vers u_0 dans $L^2(\Omega)$.

Les fonctions g_{jm} sont des fonctions scalaires définies sur $\bar{I}$ et (2.7) est, relativement à ces fonctions, un système différentiel linéaire avec des coefficients non constants et avec une condition initiale en $t = 0$. En effet, pour tout $j = 1, \cdots, m$

$$\sum_{i=1}^{m} \left((\omega_i, \omega_j)\, g_{im}'(t) + a\,(\omega_i, \omega_j)\, g_{im}(t)\right) = (f(t), \omega_j)$$

ce qui donne le système linéaire suivant

$$\begin{cases} Mg'_m(t) + N(t)g_m(t) = F(t) \\ Mg_m(0) = g_0 \end{cases}$$

où, pour tout $1 \leq i, j \leq m$

$$N_{ij}(t) = a\left(\omega_i, \omega_j\right), \quad F_j(t) = \left(f(t), \omega_j\right) \quad \left(g_0\right)_i = \left(u_0, \omega_i\right). \tag{2.10}$$

Comme les éléments $\omega_1, \cdots, \omega_m$ sont linéairement indépendants, la matrice M est inversible et le système précédent est réduit à

$$\begin{cases} g'_m(t) + M^{-1}N(t)g_m(t) = M^{-1}F(t), \\ g_m(0) = M^{-1}g_0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Le système différentiel (2.11) admet une solution unique $g_m \in C(\bar{I})$ et donc $g'_m \in L^2(I)$. Par conséquent, le problème approché (2.7) admet une solution unique u_m satisfaisant

$$u_m \in C(\bar{I}; V_m) \quad \text{et} \quad u'_m \in L^2(I; V_m).$$

Le reste de la preuve sera divisé en cinq parties. En premier lieu, nous établissons des estimations H_0^1 par rapport à la variable espace. Nous passons ensuite à la limite, et établissons les estimations a priori. Finalement, nous établissons le résultat de régularité, la formulation équivalente et terminons par le résultat d'unicité.

Étape 1. Estimation a priori dans $L^\infty(I; L^2(\Omega)) \cap L^2(I; H_0^1(\Omega))$. Multipliant (2.7) par g_{jm} et sommant, nous obtenons

$$\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left(\left\|u_m(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right) + a(u_m(t), u_m(t)) = \left(f(t), u_m(t)\right).$$

Prenant en compte la coercivité de a, il vient que

$$a(\phi, \phi) \geq \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad \text{pour p. t. } t \in I \text{ et tout } \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.12}$$

De l'autre côté, utilisant l'inégalité de Young, on a

$$\begin{aligned} \left(f(t), u_m(t)\right) &\leq \|f(t)\|_{(L^2(\Omega)} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_P \|f(t)\|_{L^2(\Omega)} \|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq \tfrac{1}{2} \|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \tfrac{C_P^2}{2} \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Combinant ces inégalités, il vient que

$$\tfrac{d}{dt}\left(\|u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \|u_m(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq C_P^2 \|f(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et s ($0 < s < T$), on obtient

$$\begin{aligned}\|u_m(s)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \|u_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + C_P^2 \int_0^s \|f(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt \\ &\leq \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + C_P^2 \|f\|^2_{L^2(Q)}\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\sup_{s\in\bar{I}} \|u_m(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + C_P^2 \|f\|^2_{L^2(Q)}. \tag{2.13}$$

De manière similaire, en intégrant entre 0 et T, on obtient

$$\|u_m(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_m\|^2_{L^2(I;H^1_0(\Omega))} \leq \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + C_P^2 \|f\|^2_{L^2(Q)}. \tag{2.14}$$

La suite $(u_m)_m$ est, par conséquent, uniformément bornée dans l'espace $L^\infty(I; L^2(\Omega)) \cap L^2(I; H^1_0(\Omega))$.

Étape 2. Passage à la limite. D'après les étapes précédentes, la suite $(u_m)_m$ est bornée dans $L^\infty(I; L^2(\Omega)) \cap L^2(I; H^1_0(\Omega))$. Il existe alors une sous-suite, encore indexée par m, une fonction $u \in L^\infty(I; L^2(\Omega))$ et une fonction $u^* \in L^2(I; H^1(\Omega))$ tel que

$$\lim_{m\to\infty} u_m = u \qquad \text{faible}^* \text{ dans } L^\infty(I; L^2(\Omega)), \tag{2.15}$$

$$\lim_{m\to\infty} u_m = u^* \qquad \text{faiblement dans } L^2(I; H^1_0(\Omega)). \tag{2.16}$$

De (2.15) et (2.16), nous déduisons en particulier que

$$\lim_{m\to+\infty} \int_I (u_m(t), \varphi(t))\, dt = \int_I (u(t), \varphi(t))\, dt$$

et

$$\lim_{m\to+\infty} \int_I (u_m(t), \varphi(t))\, dt = \int_I (u^*(t), \varphi(t))\, dt$$

pour tout $\varphi \in L^2(I; L^2(\Omega))$ et donc $u \equiv u^* \in L^\infty(I; L^2(\Omega)) \cap L^2(I; H^1_0(\Omega))$.

Des arguments classiques montrent alors que pour tout $\phi \in H^1_0(\Omega)$ et tout $\psi \in \mathcal{D}\left(]-\infty, T[\right)$, nous avons

$$\lim_{m\to+\infty} \int_I \left(a\left(u_m(t), \phi\right) - a\left(u(t), \phi\right)\right) \psi(t)\, dt$$

$$= \lim_{m\to+\infty} \int_I (\nabla u_m(t) - \nabla u(t), \nabla\phi)\, \psi(t)\, dt = 0.$$

Remarquant que (2.7) implique que

$$-\int_I (u_m(t), \omega_j)\, \psi'(t)\, dt + \int_I a(u_m(t), \omega_j)\psi(t)\, dt$$
$$= \int_I (f(t), \omega_j)\, \psi(t)\, dt + (u_{0m}, \omega_j)\, \psi(0) \qquad \forall\psi \in \mathcal{D}\left(]-\infty, T[\right),$$

et prenant en compte les résultats de convergence précédents, nous obtenons par passage à la limite

$$-\int_I (u(t), \omega_j)\, \psi'(t)\, dt + \int_I a(u(t), \omega_j)\psi(t)\, dt$$
$$= \int_I (f(t), \omega_j)\, \psi(t)\, dt + (u_0, \omega_j)\, \psi(0) \qquad \forall\psi \in \mathcal{D}\left(]-\infty, T[\right).$$

Arguant par densité, il vient que

$$-\int_I (u(t), \phi)\, \psi'(t)\, dt + \int_I a(u(t), \phi)\psi(t)\, dt$$
$$= \int_I (f(t), \phi)\, \psi(t)\, dt + (u_0, \phi)\, \psi(0) \qquad \forall\psi \in \mathcal{D}\left(]-\infty, T[\right) \tag{2.17}$$

pour tout $\psi \in \mathcal{D}\left(]-\infty, T[\right)$ et tout $H_0^1(\Omega)$. Autrement dit, u satisfait la formulation variationnelle (2.4).

Étape 3. Estimations a priori. Les estimations (2.5) et (2.6) sont une conséquence directe de (2.13) et (2.14) et de la semi-continuité inférieure de la norme par rapport à la topologie faible et à la topologie faible-étoile.

Étape 4. Régularité et formulation équivalente. Prouvons maintenant que $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(I; H^{-1}(\Omega))$. Soit $\mathcal{A}(\cdot)$ la forme linéaire définie par

$$\langle \mathcal{A}(t)u(t), \phi\rangle = a(u(t), \phi) \qquad \forall\phi \in H_0^1(\Omega).$$

Des arguments similaires à ceux utilisés pour établir (2.3) montrent que

$$|a\,(u(t), \phi)| \leq \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}\, \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}$$

pour presque tout $t \in I$ et pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$. Donc, pour tout $\varphi \in L^2(I; H_0^1(\Omega))$ on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_I \langle \mathcal{A}u(t), \varphi(t)\rangle\, dt\right| &= \left|\int_I a\,(u(t), \varphi(t))\right| \\
&\leq \int_I \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}\, \|\varphi(t)\|_{H_0^1(\Omega)}\, dt \\
&\leq \|u\|_{L^2(I;H_0^1(\Omega))}\, \|\varphi\|_{L^2(I;H_0^1(\Omega))}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}(\cdot)u\|_{L^2(I;H^{-1}(\Omega)} &= \sup_{\substack{\varphi\in L^2(I;H_0^1(\Omega))\\ \|\varphi\|_{L^2(I;H_0^1(\Omega))}\le 1}} \left|\int_I \langle \mathcal{A}u(t),\varphi(t)\rangle\,dt\right| \\ &\le \|u\|_{L^2(I;H_0^1(\Omega))}\end{aligned}$$

montrant ainsi que $\mathcal{A}u \in L^2(I;H^{-1}(\Omega))$. De l'autre côté, prenant en compte la Remarque 2.2.2, nous savons que u satisfait

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\,(u(t),\phi) &= (f,\phi) - a\,(u(\cdot),\phi) \\ &= \langle f - \mathcal{A}(\cdot)u,\phi\rangle \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(I), \qquad \forall\phi\in H_0^1(\Omega).\end{aligned}$$

Utilisant (A-1), on obtient $\langle u,\phi\rangle = (u,\phi)$ et donc

$$\tfrac{d}{dt}\,\langle u,\phi\rangle = \langle f - \mathcal{A}(\cdot)u,\phi\rangle \qquad \forall\phi\in H_0^1(\Omega), \tag{2.18}$$

et comme $f - \mathcal{A}(\cdot)u \in L^2(I;H^{-1}(\Omega))$, d'après le Lemme A-4.4, on déduit que $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(I;H^{-1}(\Omega))$.

• Reste à prouver que $u(0) = u_0$. D'après ce qui précède, $u \in W(I;H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow C(\bar{I};L^2(\Omega))$. Multipliant l'identité (2.18) par $\psi \in \mathcal{D}\,(]-\infty,T[)$ et utilisant la formule d'intégration par parties (A-2), on obtient

$$\begin{aligned}-\int_I (u(t),\phi)\,\psi'(t)\,dt + \int_I a(u(t),\phi)\psi(t)\,dt \\ = \int_I (f(t),\phi)\,\psi(t)\,dt + (u(0),\phi)\,.\end{aligned}$$

Comparant avec (2.17), on obtient

$$(u(0)-u_0,\phi)\,\psi(0) = 0.$$

Choisissant ψ telle que $\psi(0)=1$, il vient que $u(0)=u_0$. Ainsi, et prenant en compte la Remarque 2.2.2, nous concluons que u satisfait

$$\begin{cases}\left\langle \frac{\partial u(t)}{\partial t},\phi\right\rangle + a\,(u(t),\phi) = (f(t),\phi) \qquad \forall\phi\in H_0^1(\Omega),\\ u(0)=u_0.\end{cases}$$

Étape 5. Unicité. Soient u_1 et u_2 deux solutions de (2.4). Utilisant la formulation précédente, nous pouvons facilement voir que $\chi = u_1 - u_2$ satisfait

$$\begin{cases}\left\langle \frac{\partial \chi(t)}{\partial t},\phi\right\rangle + a\,(\chi(t),\phi) = 0 \qquad \forall\phi\in H_0^1(\Omega),\\ \chi(0)=0.\end{cases}$$

En posant $\phi = \chi(t)$ et prenant en compte (A-3), on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\chi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + a\left(\chi(t), \chi(t)\right) = 0.$$

Intégrant alors entre 0 et t, nous déduisons que

$$\|\chi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t a\left(\chi(s), \chi(s)\right)\, ds = 0$$

et grâce à (2.12), il vient que

$$\|\chi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|\chi(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)}\, ds \leq 0.$$

Ainsi

$$\|\chi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 0 \quad \text{pour tout } t \in \bar{I}$$

autrement dit

$$\chi(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in \bar{I}.$$

Ceci montre l'unicité de la solution et termine la preuve. □

2.3 Formulation faible multi-domaines

Théorème 2.3.1. *Soit u la solution du problème de Poisson* (2.4)*. Alors* $(u_{|\Omega_1}, u_{|\Omega_2})$ *est solution du problème suivant*

$$\begin{cases} \textit{Trouver } u_i \in L^2(I; V_i) \cap C(\bar{I}; L^2(\Omega_i)) \textit{ tel que} & \\ \frac{d}{dt}\left(u_i, v_i\right)_{\Omega_i} + a_i(u_i, v_i) = (f, v_i)_{\Omega_i} & \forall v_i \in V_i^0, \\ \gamma_1\left(u_1\right) = \gamma_2\left(u_2\right) & \textit{sur } \Gamma, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{d}{dt}\left(u_i, \mathbb{E}_i\mu\right)_{\Omega_i} + a_i(u_i, \mathbb{E}_i\mu)\right) = \sum_{i=1}^{2}\left(f, \mathbb{E}_i\mu\right)_{\Omega_i} & \forall \mu \in \Lambda, \\ u_i(0) = (u_0)_{|\Omega_i}, & \end{cases} \tag{2.19}$$

où $\mathbb{E}_i$ désigne un opérateur d'extension quelconque de Λ à V_i.

Réciproquement, soit (u_1, u_2) la solution de (1.16)*. Alors la fonction u définie par*

$$u = u_1\chi_{\Omega_1} + u_2\chi_{\Omega_2}$$

est la solution de (2.4)*.*

Démonstration. La démonstration est divisée en deux parties.

Partie I. Soit u la solution du problème de la chaleur (2.4). Arguant comme dans la preuve du théorème 1.3.10, nous concluons que $u_{\Omega_i}(t) \in V_i$ pour presque tout $t \in I$. De plus, vu que

$$\|u_{\Omega_i}\|_{L^2(I;V_i)} + \|u_{\Omega_i}\|_{C(\bar{I};L^2(\Omega_i))} \, \|u\|_{L^2(I;H^1(\Omega)} + \|u\|_{C(\bar{I};L^2(\Omega))} < +\infty,$$

nous déduisons que

$$u_{\Omega_i} \in L^2(I;V_i) \cap C(\bar{I};L^2(\Omega_i)).$$

• Soit alors $v_i \in V_i^0$ et posons

$$w_i = \begin{cases} v_i & \text{dans } \Omega_i, \\ 0 & \text{dans } \Omega_j, j \neq i. \end{cases}$$

Toujours d'après la preuve du théorème 1.3.10, $w_i \in H_0^1(\Omega)$ satisfait

$$a(u(t), w_i) = a_i(u_{|\Omega_i}(t), v_i) \qquad \text{p.p. dans } I,$$

et

$$(f(t), w_i) = (f(t), v_i)_{\Omega_i} \qquad \text{p.p. dans } I.$$

De même ; il est clair que

$$(u(t), w_i) = \left(u_{|\Omega_i}(t), v_i\right)_{\Omega_i} \qquad \text{p.p. dans } I.$$

Choisissant alors w_i comme fonction test dans (2.4), nous obtenons

$$-\int_I \left(u_{|\Omega_i}(t), v_i\right)_{\Omega_i} \psi'(t)\, dt + \int_I a_i\left(u_{|\Omega_i}(t), v_i\right) \psi(t)\, dt = \int_I (f(t), v_i)_{\Omega_i} \psi(t)\, dt,$$

pour tout $\psi \in \mathcal{D}(I)$ et tout $v_i \in V_i^0$. Prenant en compte la remarque 2.2.2, nous déduisons que

$$\tfrac{d}{dt}\left(u_{|\Omega_i}, v_i\right)_{\Omega_i} + a_i(u_{|\Omega_i}, v_i) = (f, v_i)_{\Omega_i} \qquad \forall v_i \in V_i^0.$$

• Soit $\mu \in \Lambda$ et soit $\mathbb{E}_i\mu$, $i = 1, 2$, une extension de μ en une fonction de V_i. D'après la preuve du théorème 1.3.10,

$$\mathbb{E}\mu = \mathbb{E}_1\mu\, \chi_{\Omega_1} + \mathbb{E}_2\mu\, \chi_{\Omega_2} \in H_0^1(\Omega),$$

avec

$$a(u(t), \mathbb{E}\mu) = a_1(u_{|\Omega_1}(t), \mathbb{E}_1\mu) + a_2(u_{|\Omega_2}(t), \mathbb{E}_2\mu),$$

$$(u(t), \mathbb{E}\mu) = \left(u_{|\Omega_1}(t), \mathbb{E}_1\mu\right)_{\Omega_1} + \left(u_{|\Omega_1}(t), \mathbb{E}_2\mu\right)_{\Omega_2}$$

et

$$(f(t), \mathbb{E}\mu) = (f(t), \mathbb{E}_1\mu)_{\Omega_1} + (f(t), \mathbb{E}_2\mu)_{\Omega_2},$$

pour presque tout $t \in I$. Choisissant alors $\mathbb{E}\mu$ comme fonction test dans (2.4), nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{2} \left(\tfrac{d}{dt} \left(u_{|\Omega_i}, \mathbb{E}_i\mu\right)_{\Omega_i} + a_i(u_{|\Omega_i}, \mathbb{E}_i\mu) \right) = \sum_{i=1}^{2} (f, \mathbb{E}_i\mu)_{\Omega_i} \qquad \forall \mu \in \Lambda.$$

Finalement, observons que vu que $u \in C(\bar{I}; L^2(\Omega))$ satisfait $u(0) = u_0$ dans Ω, il vient que $u_{|\Omega_i} \in C(\bar{I}; L^2(\Omega_{|\Omega_i}))$ satisfait

$$u_{|\Omega_i}(0) = (u_0)_{|\Omega_i},$$

ce qui achève de montrer la première implication.

Partie II. Considérons la réciproque.

• Soit $(u_1, u_2) \in V_1 \times V_2$ la solution de (2.19). Raisonnant comme dans la preuve du théorème 1.3.10, nous déduisons que $u \in H_0^1(\Omega)$ et que si $v \in H_0^1(\Omega)$, alors

$$v_{|\Omega_i} \in V_i \quad \text{et} \quad v_{|\Omega_i} - \mathbb{E}_i\left(\gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right)\right) \in V_i^0.$$

Montrons à présent que u satisfait la formulation faible (2.4). Nous avons

$$\begin{aligned} & - \int_I (u(t), v)\, \psi'(t)\, dt + \int_I a(u(t), v)\, \psi(t)\, dt \\ = & \sum_{i=1}^{2} \left(- \int_I (u_i(t), v)\, \psi'(t)\, dt + \int_I a_i(u_i(t), v_i)\, \psi(t)\, dt \right) \\ & = - \sum_{i=1}^{2} \int_I \left(u_i(t), v_i - \mathbb{E}_i\left(\gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right)\right)\right)_{\Omega_i} \psi'(t) dt \\ & + \sum_{i=1}^{2} \int_I a_i\left(u_i(t), v_i - \mathbb{E}_i\left(\gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right)\right)\right) \psi(t)\, dt \\ & - \sum_{i=1}^{2} \int_I \left(u_i(t), \mathbb{E}_i\left(\gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right)\right)\right)_{\Omega_i} \psi'(t)\, dt \end{aligned}$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_I a_i\left(u_i(t),\mathbb{E}_i\left(\gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right)\right)\right)\ \psi(t)\ dt$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\int_I (f(t),v_i-\mathbb{E}_i\left(\gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right)\right))_{\Omega_i}\ \psi(t)\ dt$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_I (f(t),\mathbb{E}_i\left(\gamma_i\left(v_{|\Omega_i}\right)\right))_{\Omega_i}\ \psi(t)\ dt$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\int_I \left(f(t),v_{|\Omega_i}\right)_{\Omega_i}\ \psi(t)\ dt=\sum_{i=1}^{2}\int_I (f(t),v)\ \psi(t)\ dt$$

pour tout $\psi\in\mathcal{D}(I)$ et tout $v\in H_0^1(\Omega)$. Autrement dit

$$\tfrac{d}{dt}(u,v)+a(u,v)=(f,v)\qquad\forall v\in H_0^1(\Omega).$$

ce qui prouve notre assertion et termine la preuve. □

Appendice : Notations et résultats auxiliaires

A-1 Cadre classique

A-1.1 Espaces de fonctions régulières

Soit $n \geq 2$ et soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ et notons $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ l'adhérence de Ω dans $\mathbb{R}^n$. Rappelons qu'un n-uplet de la forme $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ est appelé multi-indice d'ordre $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Si α est un multi-indice, on note D^α l'opérateur différentiel défini par

$$D^\alpha z(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} z(x)}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

• Nous désignerons par $C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω. L'ensemble de toutes les fonctions m fois continûment différentiables sur Ω (i.e. l'espace de toutes les fonctions $z \in C(\Omega)$ dont toutes les dérivées partielles $D^\alpha z$, $|\alpha| \leqslant m$, sont continues dans Ω) sera noté $C^m(\Omega)$. Nous définissons alors

$$C^\infty(\Omega) = \cap_{m \geq 0} C^m(\Omega).$$

• Pour $z \in C(\Omega)$, le support de z est l'adhérence dans $\mathbb{R}^n$ de l'ensemble $\{x \in \Omega \mid z(x) \neq 0\}$. Nous désignerons par $C_c(\Omega)$ l'espace des fonctions continues à support compact dans Ω et posons

$$\mathcal{D}(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega).$$

• De la même manière, nous désignerons par $C(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$ et par $C^m(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions $z \in C^m(\Omega)$ tel que pour chaque multi-indice α, $|\alpha| \leqslant m$, l'application $x \in \Omega \mapsto D^\alpha z(x)$ se prolonge continûment sur $\bar{\Omega}$. Nous définissons alors

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = \cap_{m \geq 0} C^m(\bar{\Omega}).$$

• Nous considérons l'espace

$$C^{0,\mu}(\bar{\Omega}) = \left\{ z \in C(\bar{\Omega}) \mid \sup_{x,y\in\bar{\Omega}} \tfrac{|z(x)-z(y)|}{|x-y|^{\mu}} < +\infty \right\} \text{ avec } 0 < \mu \leq 1$$

et posons

$$C^{m,\mu}(\bar{\Omega}) = \left\{ z \in C^m(\bar{\Omega}) \mid D^{\alpha} z \in C^{0,\mu}(\bar{\Omega}) \quad \forall \alpha,\ |\alpha| \leqslant m \right\}.$$

• Finalement, soit $Q = \Omega \times]0,T[$. Nous définissons l'espace

$$C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar{Q}) = \left\{ z \in C(\bar{Q}) \mid \sup_{(x,t),(y,\tau)\in\bar{Q}} \tfrac{|z(x,t)-z(y,\tau)|}{|x-y|^{\mu}+|t-\tau|^{\frac{\mu}{2}}} < +\infty \right\}.$$

A-1.2 Caractérisation de la géométrie du domaine

On dira que Ω est de classe $C^{0,\alpha}$ si pour tout point x de la frontière Γ, il existe un système de coordonnées orthogonales $(y_1, \cdots, y_n)$, un hypercube $U^x = \Pi_{i=1}^{n}] - a_i, a_i[$ et une application

$$\Phi^x : \prod_{i=1}^{n-1}] - a_i, a_i[\quad \longrightarrow \quad \left] -\tfrac{a_n}{2}, \tfrac{a_n}{2} \right[$$

de classe $C^{0,\alpha}$ tel que

$$\begin{aligned} \Omega \cap U^x &= \{(y_1, \cdots, y_n) \in U^x \mid y_n > \Phi^x(y_1, \cdots, y_{n-1})\}, \\ \Gamma \cap U^x &= \{(y_1, \cdots, y_n) \in U^x \mid y_n = \Phi^x(y_1, \cdots, y_{n-1})\}. \end{aligned}$$

A-2 Espaces de Lebesgue

La plupart des résultats énoncés dans cette section sont classiques et peuvent-être trouvés dans n'importe quel bon livre d'analyse fonctionnel (voir par exemple [1]) ; Nous les rappelons pour le confort du lecteur.

Soit $1 \leq p < \infty$. Une fonction mesurable (au sens de Lebesgue) $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dans $L^p(\Omega)$ si

$$\int_{\Omega} |v(x)|^p \, dx < \infty.$$

Muni de la norme

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

Une fonction mesurable (au sens de Lebesgue) $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dans $L^\infty(\Omega)$ si

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |v(x)| = \inf \{M \in \mathbb{R} \mid \; |v(x)| \leqslant M \text{ p.p. dans } \Omega\} < \infty.$$

Muni de la norme

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess sup}_{x\in\Omega} |v(x)|,$$

l'espace $L^\infty(\Omega)$ est aussi un espace de Banach.

La plupart des quantités qu'on utilise étant des fonctions vectorielles, la notation sera simplifiée et on omettra la dimension n dans la notation de l'espace (le sens sera clair d'après le contexte). En particulier, nous utiliserons la notation suivante

$$\begin{aligned}
(z,\phi) &= \int_\Omega z(x)\,\phi(x)\,dx, \qquad z \in L^p(\Omega),\ \phi \in L^{p'}(\Omega),\\
(z,\phi) &= \int_\Omega z(x)\cdot\phi(x)\,dx\\
&= \sum_{j=1}^n \int_\Omega z_j(x)\,\phi_j(x)\,dx, \qquad z \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^n),\ \phi \in L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

A-3 Espaces de Sobolev

A-3.1 Définitions

Commençons par rappeler qu'un n-uplet de la forme $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ est appelé multi-indice d'ordre $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Si α est un multi-indice, on note D^α l'opérateur différentiel défini par

$$D^\alpha z(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} z(x)}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

Soit $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω. Pour $m \in \mathbb{N}$, on définit l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ de la manière suivante

$$H^m(\Omega) = \left\{ z \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha z \in L^2(\Omega)\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \leq m \right\},$$

muni de la norme

$$\|z\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha z\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous noterons aussi par $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. Nous savons que $H_0^1(\Omega)$ est caractérisé de la manière suivante

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ z \in H^1(\Omega) \mid z_{|\Gamma} = 0 \right\}.$$

Nous désignerons par $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$ et on le munit de la norme duale

$$\|f\|_{H^{-1}} = \sup_{|z|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} \langle f, z \rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

A-3.2 Inégalité de Poincaré

Nous commençons par rappeler l'inégalité de Poincaré qui affirme qu'il existe une constante positive C_P, dépendant de Ω et de n, tel que

$$\|z\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall z \in H_0^1(\Omega).$$

Une conséquence directe de l'inégalité de Poincaré est que la semi-norme

$$|z|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

A-3.3 Trace

Théorème A-3.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert de frontière $\partial\Omega$. L'application*

$$\gamma : \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \mapsto \gamma(u) = u_{|\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$$

se prolonge de manière unique, et de façon continue à l'espace $H^1(\Omega)$.

L'opérateur ainsi obtenu n'est pas surjectif sur $L^2(\partial\Omega)$. L'image de $\partial\Omega$ est l'espace de Sobolev $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$.

A-3.4 Formules de Green

Nous commençons par la formule de Stokes.

Théorème A-3.2. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne. Il existe une unique extension continue Si $u, v \in H^1(\Omega)$ alors*

$$\forall i = 1, \cdots, n \qquad \int_\Omega \left(u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial x_i} u \right) dx = \int_{\partial\Omega} \gamma(u)\gamma(v) n_i \, ds$$

Suit alors la formule de Green pour le Laplacien.

Théorème A-3.3. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne. Si $u, v \in H^2(\Omega)$ alors*

$$\int_\Omega (u\,\Delta v - \Delta u\, v)\, dx = \int_{\partial\Omega} (\gamma(u)\gamma(\nabla v)\cdot n - \gamma(v)\gamma(\nabla u)\cdot n)\, ds.$$

A-4 Espaces de Bochner

Nous considérons maintenant des espaces de fonctions définies sur un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace de Banach X (pour plus de détails sur ces espaces voir par exemple [5] ou [2]).

Définition A-4.1. *a) On notera $L^p(]a, b[; X)$, $1 \leq p < +\infty$, l'espace des fonctions f définies de $]a, b[$ dans X telles que*

i) f est mesurable pour la mesure de Lebesgue dt sur $]a, b[$,

ii) $\|f\|_{L^p(]a,b[;X)} = \left(\int_a^b \|f(t)\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$

b) On notera $L^\infty(I; X)$, l'espace des fonctions f définies de $]a, b[$ dans X satisfaisant i) et essentiellement bornée sur $]a, b[$; i.e.

$$\|f\|_{L^\infty(]a,b[;X)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in]a,b[} \|f(t)\|_X < +\infty.$$

c) On notera $C([a, b]; X)$, l'espace des fonctions continues de $[a, b]$ dans X muni de la norme

$$\|f\|_{C([a,b];X)} = \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|_X\,.$$

Muni de ces normes, ces espaces sont des espaces de Banach.

Nous finissons cette section par des espaces de type Bochner-Sobolev et présentons certaines de leurs propriétés les plus utiles. Soient H et V deux espaces de Hilbert séparables tels que H, V et V' forment un triplet de Gelfand

$$V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V',$$

i.e. l'espace de Hilbert H est identifié avec son dual H', V étant dense dans H avec injection continue. Une conséquence des identifications précédentes est que

$$\langle z, \phi\rangle = (z, \phi)\,, \qquad z \in H, \phi \in V. \tag{A-1}$$

L'espace que l'on va considérer à présent est d'une importance fondamentale dans le traitement des EDP instationnaires.

Définition A-4.2. *Soient a, $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On note $W(]a,b[;V,V')$ l'espace*

$$W(]a,b[;V,V') = \left\{ z \in L^2(]a,b[;V) \mid \tfrac{\partial z}{\partial t} \in L^2(]a,b[;V') \right\}.$$

Muni de la norme

$$\|z\|_{W(]a,b[)} = \left(\|z\|_{L^2(]a,b[;V)} + \left\| \tfrac{\partial z}{\partial t} \right\|_{L^2(]a,b[;V')} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$W((]a,b[;V,V')$ est un espace de Hilbert. De plus, il possède des propriétés de régularité qui nous seront très utiles pour la suite.

Lemme A-4.3. *L'espace $W(]a,b[;V,V')$ s'injecte continûment dans $C([a,b];H)$ et on a la formule d'intégration par parties suivante*

$$\int_a^t \left\langle \tfrac{\partial z(s)}{\partial t}, \phi(s) \right\rangle ds + \int_0^t \left\langle \tfrac{\partial \phi(s)}{\partial t}, z(s) \right\rangle ds = (z(t), \phi(t)) - (z(a), \phi(a)) \quad \text{(A-2)}$$

pour tout $z, \phi \in W(]a,b[;V,V')$, $t \in [a,b]$. En particulier, on a

$$\int_a^t \left\langle \tfrac{\partial z(s)}{\partial t}, z(s) \right\rangle ds = \tfrac{1}{2} \left(\|z(t)\|_H^2 - \|z(a)\|_H^2 \right) = \tfrac{1}{2} \int_a^t \tfrac{d}{dt} \|z(s)\|_H^2 \, ds \quad \text{(A-3)}$$

pour tout $z \in W(]a,b[;V,V')$ et $t \in [a,b]$.

Démonstration. Voir le lemme 1.2, p. 261 dans [5]. □

De plus, nous avons le résultat suivant.

Lemme A-4.4. *Soient u et g sont deux fonctions dans $L^1(]a,b[;V)$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes*

- *Pour toute fonction $\psi \in \mathcal{D}(]a,b[)$, on a*

$$\int_a^b u(t)\psi'(t)\,dt = -\int_a^b g(t)\psi(t)\,dt.$$

- *Pour tout $w \in V'$, on a*

$$\tfrac{d}{dt} \langle u, w \rangle = \langle g, w \rangle$$

dans le sens des distributions.

Démonstration. Voir le lemme 1.1, p. 250 dans [5]. □

A-5 Théorème de Lax-Milgram

Théorème A-5.1. *Soit H un espace de Hilbert réel de norme $\|\cdot\|_H$. On considère une forme bilinéaire continue sur $H \times H$, i.e.*

$$\exists M > 0,\ \forall y, z \in H, \quad |a(y,z)| \leq M \|y\|_H \|z\|_H ,$$

et on suppose qu'elle est elliptique (ou coercive) sur H, i.e.

$$\exists \alpha > 0,\ \forall z \in H, \quad a(z,z) \geq \alpha \|z\|_H^2 .$$

On considère aussi une forme linéaire F sur H. Alors le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } y \in H \text{ tel que} \\ \forall z \in H, \quad a(y,z) = F(z), \end{cases}$$

admet une solution unique $z \in H$. De plus, cette solution vérifie

$$\|y\|_H \leq \tfrac{1}{\alpha} \|F\|_{H'}.$$

Démonstration. Voir [1]. □

Bibliographie

[1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, Paris, 1987.

[2] R. Dautrey, J.-L. Lions, *Mathematical analysis and numerical methods for Science and Technology*, Vol. 5, Springer, 2000.

[3] L. C. Evans, Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 1998.

[4] A. Quarteroni, A. Valli, Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations Oxford Science Publications, Oxford, 1999.

[5] R. Temam, *Navier-Stokes equations* , North-Holland, Amsterdam, 1977.