RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité Mathématiques.

Option Analyse Fonctionnelle.

Thème

Sur Les Inéquations Variationnelles À Terme De Mémoire

Présenté par

Rida Feriel

Devant le jury

Président	**D.Affane**	M.C.A Université de Jijel
Encadreur	**S.Medjerab**	M.A.A Université de Jijel
Examinateur	**I.Boutana**	M.C.B Université de Jijel

Promotion **2020/2021**

Remerciement

Je remercie tout d'abord le tout puissant qui par sa grâce m'a permis d'arriver au bout de mes efforts en me donnant la santé, la force et le courage.

*Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse mademoiselle **Medjerab Samia**, qui grâce à sa disponibilité, son soutien, ses conseils et ses encouragements m'a permis de mener à bien ce travail.*

*Mes remerciements vont également à mes enseignants **Boutana Imene** et **Affane Doria** d'avoir accepter de juger mon travail.*

Mercie également à tous les enseignants qui m'ont aidé pendant mon cursus, sans oublier leurs conseils précieux.

*Je remercie mes **très chers parents** qui ont toujours été là pour moi. Je remercie **mes soeurs** et **mon frère** pour leurs encouragements.*

Enfin, je remercie mes amis et mes collègues qui m'ont apporté leur soutien moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

Dédicace

Je dédice ce travail à :

*A celle qui a attendu avec patience les fruits de sa bonne éducation et de ses dévouements à ma chère mère **Houria**.*

*A celui qui s'est changé la nuit en jour pour m'assurer les bonnes conditions à mon cher père **Mouloud**.*

*A mes soeurs **Yousra**, **Chahinez** et mon frère **Mouhcine** qui m'ont toujours soutenuent.*

♡♠*FERIEL*♠♡

Table des matières

0.1 INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les phénomènes de contact impliquant des corps déformables abondent en industrie et dans la vie de tous les jours. Le contact du piston avec la chemise, de la roue avec le rail et d'une chaussure avec le sol ne représentent que trois exemples parmi bien d'autres. Ces phénomènes jouent un rôle important dans les structures et les systèmes mécaniques, ils ont été intensivement étudiés depuis longue date et la littérature relevant des Sciences de l'Ingénieur qui leur est dédiée est assez riche.

La littérature mathématique dédiée à l'étude des phénomènes de contact est plus récente. La raison réside dans le fait que, accompagnés de phénomènes physiques et de surface complexes, les processus de contact sont modélisés par des problèmes aux limites non linéaires, très difficiles à analyser. L'une des premières publications mathématiques concernant ce sujet est celle de Signorini [19], où le problème de contact entre un corps linéairement élastique et une fondation rigide est formulé. Il s'ensuit le travail de Fichera [13] où le problème de Signorini a été résolu, en utilisant des arguments des inéquations variationnelles de type elliptique. Cependant, la théorie générale de la mécanique du contact a commencé avec la monographie de Duvaut et Lions [11], qui ont présenté des formulations variationnelles de plusieurs problèmes de contact et ont prouvé quelques résultats fondamentaux d'existence et d'unicité de la solution.

Une étude complète des phénomènes de contact comprend généralement les étapes suivantes : la modélisation, l'analyse variationnelle et numérique des modèles. L 'objectif de la modélisation est de comprendre l'ensemble des hypothèses de nature mécanique dans la description d'un phénomène de contact, et d'associer à tout processus de contact un modèle mathématique, représenté par un système d'équations aux dérivées partielles associé aux conditions aux limites et éventuellement aux conditions initiales, décrivant le processus en question. L'analyse variationnelle des modèles a pour but de préciser la consistance des modèles pour le contact ; elle comprend la dérivation de la formulation faible des modèles ainsi que des résultats d'existence et éventuellement d'unicité de la solution ; son objectif est aussi celui d'étudier des propriétés liées au comportement de la solution (régularité, stabilité, comportement assymptotique). L'analyse numérique des modèles est destinée à l'étude des schémas semi-discrétisés et totalement discrétisés associés aux formulations faibles dérivées à l'étape précédente ; on y établit des résultats d'existence et d'unicité des solutions discrètes, suivis de résultats d'estimation de l'erreur et de convergence des solutions discrètes vers la solution du problème continu.

Dans ce travail nous allons présenter quelques considérations sur les deux premières étapes ci-dessus, la modélisation et l'analyse variationnelle des modèles, que nous allons illustrer à travers un exemple concret, modélisant le contact frottant d'un corps visco-élastique avec une fondation.

Ce mémoire se compose de trois chapitres.

Au début on commence ce mémoire par un chapitre qui contient les définitions et les résultats fondamentaux qui sont essentiels pour comprendre les chapitres suivants.

Le deuxième chapitre est consacré à présenter des généralités sur les inéquations variationnelles elliptiques du premier genre et deuxième genre et à l'étude d'existence et d'unicité de quelques classes d'inéquations variationnelles linéaires. Ce chapitre contient aussi une partie principale de ce travail, qui présente un résultat issu de la théorie des inéquations variationnelles d'évolution avec terme de mémoire.

Au troisième chapitre, nous intéressons à la modélisation des problèmes de contact ; nous présentons le cadre physique, les lois de comportement de nature visco-élastique. Nous décrivons aussi les conditions de contact et les lois de frottement que nous utilisons dans les problèmes de contact envisagés. La formulation variationnelle est obtenue sous forme d'une inéquation quasivariationnelle avec des opérateurs de mémoire (history-dependent) et nous établissons un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible.

0.2 Notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de notre travail.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$	Corps des réels.
$\mathbb{E}, \mathbb{F}$	Espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
$\Vert . \Vert_{\mathbb{E}}$	Norme sur $\mathbb{E}$.
$(E, \Vert . \Vert_E)$	Espace normé sur $\mathbb{K}$.
$< .,. >_E$	Crochet du produit scalaire dans E.
$L(E, \mathbb{R})$	Espace des formes linéaires définies sur E.
$L(E, F)$	Espace des opérateurs linéaires de E dans F.
$L(E)$	Espace des opérateurs linéaires de E dans lui même.
$\mathscr{L}(E, F)$	Espace des opérateurs linéaires continues de E dans F.
$\mathscr{L}(E)$	Espace des opérateurs linéaires continues de E dans lui même.
E'	Espace dual de E.
E''	Espace bidual de E.
$\mathbb{R}^d$	Espace euclidien de dimension d, avec $d = 2, 3$.
Ω	Ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$.
$C(\overline{\Omega})$	Espace des fonctions continues sur le fermé $\overline{\Omega}$.
$C^\infty(\overline{\Omega})$	Espace des fonctions indéfiniment différentiables.
$L^p(\Omega)$	Espace de Lebesgue ou de classe des fonctions dont la puissance d'exposant p est intégrable au sens de Lebesgue, où $1 \leq p \leq \infty$.
p.p	Presque partout.
ess	Essentiellement.
$L^\infty(\Omega)$	Espace linéaire des fonctions mesurables.
a, b	Deux formes bilinéaires.
f, j	Deux fonctions.
Λ, S	Deux opérateurs.
$H^1(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev.
γ	Opérateur de trace.

$C([a,b])$	Espace des fonctions continues à valeurs réelles définies sur l'intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$.
$[0,T]$	Intervalle de temps, avec $T > 0$.
$C([0,T];E)$	Espace des fonctions continues sur $[0,T]$ à valeurs dans E.
$C^1([0,T];E)$	Espace des fonctions continûment dérivables sur $[0,T]$ à valeurs dans E.
div	Opérateur de divergence.
∇u	Gradient de u.
$\partial\Omega$	Frontière du domaine sur Ω.
Γ_D	Une partie de Ω.
$mes(\Gamma_D)$	Mesure de Lebesgue sur Γ_D.
$\mathbf{f_0}$	Force volumique.
$\mathbf{f_2}$	Force surfacique.
$\mathbf{n}$	Vecteur unitaire normal.
$\mathbb{S}^d$	Espace des tenseurs symétriques de second ordre dans $\mathbb{R}^d$.
u	Champ de déplacements.
$u.v$	Produit scalaire entre u et v dans l'espace $\mathbb{R}^d$.
σ	Tenseur des contraintes.
$\varepsilon(u)$	Tenseur des déformation.
$\mathcal{A}$	Tenseur d'élasticité.
$\mathcal{B}$	Tenseur de viscosité.
u_n, u_τ	Composantes normale et tangentielle du vecteur de déplacement u.
σ_n, σ_τ	Composantes normale et tangentielle du vecteur de contrainte σ.
$\dot{u}_n, \dot{u}_\tau$	Composantes normale et tangentielle du vecteur de vitesse $\dot{u}$.
I	Opérateur d'identité de $\mathbb{R}^d$.
δ_{ij}	Delta Kronecker.
∂_n	Dérivée normale.

Chapitre 1

PRÉLIMINAIRES D'ANALYSE FONCTIONNELLE

Dans ce chapitre nous rappelons quelques éléments d'analyse fonctionnelle qui seront utilisés partout dans ce travail. Quelques résultats sont donnés sans démonstrations car ils sont standard et peuvent être trouvés dans beaucoup de références de mathématiques [4], [5], [8], [9] et [10]. Nous commençons par donner quelques rappels sur les espaces normés, les espaces fonctionnels, le théorème de point fixe de Banach qui s'adapte aux inéquations variationnelles à terme de mémoire.

1.1 Définitions et propriétés élémentaires

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1.1.1 Norme et notion d'espace de Banach

Définition 1.1. *[9] Une norme sur E est une application* $\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *vérifiant*

1. *La séparation :* $\forall x \in E, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
2. *L'homogénéité :* $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$
3. *L'inégalité triangulaire :* $\forall x, y \in E, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Définition 1.2. *[9] Un espace vectoriel E muni d'une norme* $\|.\|$ *est appelé espace normé, noté* $(E, \|.\|)$.

Définition 1.3. *[9] Un espace normé $(E, \|.\|)$ est dit complet si toute suite de Cauchy de E est convergente dans l'espace.*

Définition 1.4. *[9] Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.*

1.1.2 Produit scalaire et notion d'espace de Hilbert

Nous présentons dans cette partie un type particulier d'espace normé, dans lequel la norme est définie d'une manière spéciale.

Définition 1.5. *[5] Un produit scalaire est une application $< .,. >_E$: $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant*

1. $\forall y \in E : x \mapsto < x, y >_E$ *est linéaire pour tout* $x \in E$ *fixé.*
2. $\forall x, y \in E,\ < x, y >_E = < y, x >_E$.
3. $\forall x \in E,\ < x, x >_E \geq 0$ *et si* $< x, x >_E = 0$ *alors* $x = 0$.

Définition 1.6. *[5] On appelle espace préhilbertien réel un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $< .,. >_E$, noté $\left(E, < .,. >_E\right)$.*

Rappelons que le produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad |< x, y >_E| \leq \sqrt{< x, x >_E}\ \sqrt{< y, y >_E}.$$

La norme associée au produit scalaire est définie par la relation

$$\|x\|_E = \sqrt{< x, x >_E}, \quad \forall x \in E.$$

Définition 1.7. *[5] Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la norme associé à son produit scalaire.*

1.2 Éléments d'analyse linéaire

Pour la réalisation de ce travail nous allons avoir besoin de rappeler quelques notions d'analyse linéaire qui seront d'une grande utilité, en particulier des résultats sur les fonctions convexes et semicontinues inférieurement.

1.2.1 Opérateurs linéaires

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces normés et soit $L : E \longrightarrow F$ un opérateur. L'opérateur L est dit linéaire si

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y), \quad \forall (x, y) \in E^2, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Notation 1.8. *On note par $\mathbf{L}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires de E dans F et par $\mathbf{L}(E)$ l'ensemble des opérateurs linéaires de E dans lui même. Notant aussi $\mathbf{L}(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des formes (ou des fonctionnelles) linéaires définies sur E.*

L'opérateur linéaire L est dit k-Lipschitzienne (Lipschitzienne de rapport k) sur E, s'il existe $k > 0$ tel que

$$\|L(x) - L(y)\|_F \leq k \, \|x - y\|_E, \quad \forall x, y \in E.$$

Si $k \in]0, 1[$, on dit que L est un opérateur contractant.

Théorème 1.9. *[10] Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces normés et $L : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *L est continue sur E.*
2. *L est continue en* 0.
3. *Il existe $k > 0$ tel que*

$$\|L(x)\|_F \leq k \|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

Notation 1.10. *On note par $\mathscr{L}(E, F)$ l'espace des opérateurs linéaires continues de E dans F et par $\mathscr{L}(E)$ l'espace des opérateurs linéaires continues de E dans lui même.*

La proposition suivante décrit une norme d'un opérateur linéaire continue.

Proposition 1.11. *[7] Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces normés et soit $L : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. Alors*

1. *$\mathscr{L}(E, F)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbf{L}(E, F)$.*
2. *Pour tout $L \in \mathscr{L}(E, F)$, on a*

$$\sup_{x \in E \setminus \{0_E\}} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|L(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|L(x)\|_F < +\infty.$$

Cette quantité est notée $\|L\|_{\mathscr{L}(E,F)}$.
L'application $\|.\|_{\mathscr{L}(E,F)}$ ainsi définie est une norme sur $\mathscr{L}(E,F)$ qui lui confère donc une structure naturelle d'espace vectoriel normé, et il est complet si F l'est.

Donc, on a la propriété suivante, pour $L \in \mathscr{L}(E,F)$

$$\|L(x)\|_F \leq \|L\|_{\mathscr{L}(E,F)} \; \|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

Rappelons aussi l'espace dual d'un espace vectoriel normé par la définition suivante.

Définition 1.12. *[7] Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé. On munit $\mathbb{R}$ de sa norme canonique qu'est la valeur absolue. L'ensemble des formes linéaires continues sur E, c'est-à-dire $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ est un espace vectoriel normé appelé dual topologique de E et noté E'.*

Remarque 1.13. *Le dual E' d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|_E)$ est un espace de Banach.*

Définition 1.14. *[7] Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé.*
Le bidual de E est par définition le dual de E', i.e.

$$E'' = (E')' = \mathscr{L}(E', \mathbb{R}).$$

Proposition 1.15. *[8] L'application*

$$J : \begin{cases} E \longrightarrow E'' \\ x \mapsto J(x) : \begin{cases} E' \longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi \mapsto \varphi(x) \end{cases} \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
J identifie E à son bidual E'' et on écrit $E \simeq E''$.

Remarque 1.16. *L'espace E est alors dit réflexif si J est surjective.*

L'isomorphisme entre E et E'' étant maintenant établi, on voit que l'écriture

$$\varphi(x) = J(x)(\varphi), \quad \forall \varphi \in E', x \in E$$

comporte une dualité. Par conséquent, on introduit le crochet de dualité

$$< \varphi, x >_{E' \times E} = < J(x), \varphi >_{E'' \times E'} .$$

L'isomorphisme J peut maintenant se réécrire de manière beaucoup plus concise :

$$J : \begin{cases} E \longrightarrow E'' \\ x \mapsto < ., x >_{E' \times E} \end{cases}$$

donc, J envoie x vers une forme linéaire continue sur E' donnée par l'évaluation en x.

L'espace vectoriel des formes linéaires continues $\mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ muni de cette norme

$$\|\varphi\|_{E'} = \sup_{\|x\|_E \neq 0E} \frac{|< \varphi, x >_{E' \times E}|}{\|x\|_E}$$

est un espace normé et l'action de $\varphi \in E'$ sur un élément $x \in E$ est notée à l'aide du crochet de dualité $< ., . >_{E' \times E}$ de sorte que

$$< \varphi, x >_{E' \times E} \stackrel{déf}{=} \varphi(x).$$

Les formes linéaires continues sur un espace de Hilbert sont obtenues sous cette forme :

Théorème 1.17. *[19] (Théorème de représentation de Riesz)*
Soit φ une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert $\left(E, < ., . >_E\right)$. Alors il existe un unique vecteur $y \in E$ tel que, pour tout $x \in E$

$$\varphi(x) = < x, y >_E .$$

De plus, on a $\|\varphi\|_{E'} = \|x\|_E$.

Le Théorème de représentation de Riesz permet également d'identifier un espace de Hilbert à son dual et, avec son bidual qui montre que tout espace de Hilbert est réflexif.

1.2.2 Généralités sur les formes bilinéaires

Définition 1.18. *[24]Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.*
Une forme bilinéaire sur $E \times F$ est une application $a : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

1. *Pour tout $x \in E$ fixé, l'application $y \mapsto a(x,y)$ est une forme linéaire sur F, c'est-à-dire une application linéaire de F dans $\mathbb{R}$.*
2. *Pour tout $y \in F$ fixé, l'application $x \mapsto a(x,y)$ est une forme linéaire sur E, c'est-à-dire une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.*

Définition 1.19. *[24] Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*
Une forme bilinéaire $a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite symétrique si

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad a(x,y) = a(y,x).$$

Définition 1.20. *[24]Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire.*

1. *On dit que a est positive, si*

$$\forall x \in E, \quad a(x,x) \geq 0.$$

2. *On dit que a est définie positive, si*

$$\forall x \in E \backslash \{0\}, \quad a(x,x) > 0.$$

Remarque 1.21. *Un produit scalaire est une forme bilinéaire, symétrique et définie positive.*

Définition 1.22. *[24] Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces normés.*
Une forme bilinéaire $a : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite continue sur $E \times F$, s'il existe une constante $M > 0$, telle que

$$\forall (x,y) \in E \times F, \quad | \, a(x,y) \, | \leq M \, \|x\|_E \, \|y\|_F.$$

Définition 1.23. *[24]Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace normé.*
On dit qu'une forme bilinéaire $a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est coercive (ou E-elliptique), s'il existe une constante $m > 0$, telle que

$$\forall x \in E, \quad a(x,x) \geq m \, \|x\|_E^2.$$

1.2.3 Fonctions convexes et semi-continues inférieurement

Définition 1.24. *[9] Soient E un espace vectoriel réel et $f : E \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ une fonction. Le domaine effectif de la fonction f est l'ensemble des points ou elle ne prend pas la valeur*

$+\infty$, on le note

$$D(f) = \{x \in E, f(x) < +\infty\}.$$

On dit que f est propre si $f(x) > -\infty$ pour tout $x \in E$ et son domaine effectif est non vide.

Définition 1.25. *[9] Soit E un espace vectoriel réel.*
La fonction propre $f : E \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ est dite convexe si

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \tag{1.2.1}$$

pour tout $x, y \in E$ et $t \in [0,1]$.La fonction f est strictement convexe si l'inégalité (1.2.1) *est stricte pour $x \neq y$ et $t \in [0,1]$.*

Notons que si $f, g : E \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ sont des fonctions convexes et $\lambda \geq 0$, alors les fonctions $f+g$ et λf sont aussi convexes.

Définition 1.26. *[9] Soit E un espace vectoriel réel.*
Une fonction $f : E \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i.) en $x \in E$ si

$$\inf \lim_{n \to +\infty} f(x_n) \geq f(x), \tag{1.2.2}$$

pour chaque suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers x dans E. La fonction f est s.c.i si elle est s.c.i.en chaque point $x \in E$.

Notons que si $f, g : E \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ sont des fonctions s.c.i et $\lambda \geq 0$, alors les fonctions $f+g$ et λf sont aussi s.c.i.De plus, si f est une fonction continue, alors elle est aussi s.c.i. Cependant, l'inverse n'est pas vrai.

1.3 Espaces fonctionnels

Dans cette section nous donnons quelques rappels sur les espaces fonctionnels à valeurs réelles et nous allons aborder les espaces des fonctions continues, continûment différentiables, les espaces de Lebesgue et les espaces de Sobolev.

Étant donné un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$. Soit $x = (x_1, ..., x_d)$ un élément de $\mathbb{R}^d$ et soit $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ un multi-indice telque $|\alpha| = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i$, nous posons

$$D^\alpha v(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} v(x)}{\partial {x_1}^{\alpha_1} ... \partial {x_d}^{\alpha_d}}.$$

1.3.1 Espaces des fonctions continûment différentiables

On note par $C(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$. $C(\overline{\Omega})$ est un espace de Banach muni de la norme suivante

$$\|v\|_{C(\overline{\Omega})} = \max\{|v(x)|, \quad x \in \overline{\Omega}\}.$$

Pour $m \geq 0$, l'espace $C^m(\overline{\Omega})$ défini par

$$C^m(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}), \quad D^\alpha v \in C(\overline{\Omega}) \quad \text{pour tout } \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leq m\}.$$

L'espace $C^m(\overline{\Omega})$ est un espace de Banach muni de la norme suivante

$$\|v\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Par ailleurs, $C^\infty(\overline{\Omega})$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\overline{\Omega}).$$

1.3.2 Espaces de Lebesgue L^P

Pour $p \in [1, +\infty[$, $L^p(\Omega)$ désigne l'espace linéaire des (classes d'équivalence de) fonctions mesurables au sens de Lebesgue définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega | \, v(x) \, |^P \, dx \right)^{\frac{1}{P}} < \infty.$$

L'application $v \mapsto \|v\|_{L^p(\Omega)}$ est une norme sur $L^p(\Omega)$ et v représente une classe d'équivalence de fonctions; deux fonctions étant équivalentes si elles sont égales presque partout (p.p.), c'est-à-dire égales sauf sur un sous ensemble de Ω.

1.3.3 La mésurabilité et les éspaces séparables

Pour $p = +\infty$ et $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable, noté par

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|v(x)| = \inf\{M \in [0,+\infty], \quad |v(x)| \leq M \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega\}.$$

On dit que v est essentiellement borné si $\|v\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$.
On note $L^\infty(\Omega)$ l'espace linéaire des (classes d'équivalence de) fonctions mesurables $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont essentiellement bornées. L'application $v \mapsto \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$ est une norme sur l'espace $L^\infty(\Omega)$.

Le cas particulier $p = 2$.L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni de produit scalaire

$$< u, v >_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\ v(x)dx, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

De plus, $L^2(\Omega)$ est séparable et l'inégalité de Cauchy-Schwarz ci-dessous est vérifiée

$$\Big|\int_\Omega u(x)\ v(x)dx\Big| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

1.3.4 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des outils indispensables dans l'étude des problèmes aux limites. Pour plus de détails voir [8].

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$. Nous définissons les espaces de Sobolev par

$$W^{k,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) \text{ tel que } D^\alpha v \in L^p(\Omega) \text{ avec } |\alpha| \leq k\}.$$

La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est définie par

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \Big(\sum\limits_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 1 \leq p < +\infty. \\ \max\limits_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}, & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

L'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ muni de cette norme est un espace de Banach.
On note que $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$, et lorsque $p = 2$, on écrit $W^{k,2}(\Omega) \equiv H^k(\Omega)$.

L'espace de Sobolev $H^k(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable muni du produit scalaire

$$< u, v >_{H^k(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha u(x)\ D^\alpha v(x) dx, \quad \forall u, v \in H^k(\Omega).$$

L'opérateur de Trace. Les espaces de Sobolev sont définis par les espaces $L^p(\Omega)$. Par conséquent, les fonctions de Sobolev sont définies de manière uniquement p.p. dans Ω. Puisque la frontière Γ de Ω a une mesure zéro dans $\mathbb{R}^d$, les valeurs limites d'une fonction de Sobolev ne sont pas bien définies. Mais, il est possible de définir la trace d'une fonction de Sobolev sur le bord de telle sorte que pour une fonction de Sobolev continue jusqu'au bord, sa trace coïncide avec sa valeur au bord.

Théorème 1.27. *[9] Supposons Ω un domaine de Lipschitz dans $\mathbb{R}^d$ avec bord Γ et $1 \leq p < +\infty$. Alors il existe un opérateur linéaire continu $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Gamma)$ tel que $\gamma v = v\ |_\Gamma$ si $v \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.*

L'opérateur γ est appelé l'opérateur de trace, et γv peut être appelé l'opérateur trace de $v \in W^{1,p}(\Omega)$.
Notons que la continuité de γ implique qu'il existe une constante $C_\Omega > 0$, qui dépend de Ω, telle que

$$\|\gamma u\|_{L^p(\Gamma)} \leq C_\Omega\ \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega). \tag{1.3.1}$$

1.3.5 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Nous aurons besoin des espaces des fonctions vectorielles pour étudier les problèmes variationnels dépendant du temps. Dans la suite, $(E, \|.\|_E)$ désignera un espace de Banach réel et $[0, T]$ désignera l'intervalle de temps, pour $T > 0$.

Espaces $\mathbf{C^m([0, T]; E)}$. Nous définissons $C([0, T]; E)$ l'espace des fonctions $v : [0, T] \longrightarrow E$ qui sont continues sur l'intervalle $[0, T]$. L'espace $C([0, T]; E)$ muni de cette norme

$$\|v\|_{C([0,T];E)} = \max_{t \in [0,T]} \|v(t)\|_E,$$

est un espace de Banach.

Pour $m \geq 0$, nous définissons l'espace

$$C^m([0,T];E) = \{v \in C([0,T];E), \quad v^{(j)} \in C([0,T];E),\ j = 1,2,...,m\}.$$

Il s'agit d'un espace Banach avec la norme

$$\|v\|_{C^m(0,T;E)} = \sum_{j=0}^{m} \max_{t\in[0,T]} \|v^{(j)}(t)\|_E.$$

En particulier, $\mathbf{C^1([0,T];E)}$ désigne l'espace des fonctions continûment différentiables sur $[0,T]$ à valeurs dans E. C'est un espace de Banach muni de la norme

$$\|v\|_{C^1([0,T];E)} = \max_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_E + \max_{t\in[0,T]} \|\dot{v}(t)\|_E.$$

Soit aussi

$$C^\infty([0,T];E) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m([0,T];E),$$

l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $[0,T]$ à valeurs dans E.

Espaces $\mathbf{L^p([0,T];E)}$. Pour $p \in [1,+\infty[$, $L^p([0,T];E)$ est l'espace des fonctions mesurables $v : [0,T] \longrightarrow E$ telles que $\int_0^T \|v(t)\|_E^p dt < \infty$. L'espace $L^p([0,T];E)$ est un espace de Banach muni de cette norme

$$\|v\|_{L^p([0,T];E)} = \left(\int_0^T \|v(t)\|_E^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On définit $L^\infty([0,T];E)$ l'espace des fonctions mesurables $v : [0,T] \longrightarrow E$ telles que $t \mapsto \|v(t)\|_E$ est essentiellement borné sur $[0,T]$. L'espace $L^\infty([0,T];E)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|v\|_{L^\infty([0,T];E)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_E.$$

Si $(E, <.,.>_E)$ est un espace de Hilbert, $L^2([0,T];E)$ est aussi un espace de Hilbert muni de produit scalaire

$$<u,v>_{L^2([0,T];E)} = \int_0^T <u(t),v(t)>_E dt, \quad \forall u,v \in L^2([0,T];E).$$

Espaces $\mathbf{W^{k,p}([0,T];E)}$. $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$, nous présentons l'espace

$$W^{k,p}([0,T];E) = \{v \in L^p([0,T];E) \text{ tel que } \|v^{(m)}\|_{L^p([0,T];E)} < \infty,\ \forall m \leq k\}.$$

Si $p < +\infty$, on définit la norme dans l'espace $W^{k,p}([0,T];E)$ par la formule suivante

$$\|u\|_{W^{k,p}([0,T];E)} = \Big(\int_0^T \sum_{0 \leq m \leq k} \|v^{(m)}(t)\|_E^p \, dt\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = +\infty$, la norme est définie par

$$\|u\|_{W^{k,\infty}([0,T];E)} = \max_{0 \leq m \leq k} \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0,T]} \|v^{(m)}(t)\|_E.$$

Si E est un espace de Hilbert et $p = 2$, alors l'espace

$$H^k([0,T];E) \equiv W^{k,2}([0,T];E)$$

est un espace de Hilbert muni de produit scalaire

$$< u, v >_{H^k([0,T];E)} = \sum_{0 \leq m \leq k} \int_0^T < u^{(m)}(t), v^{(m)}(t) >_E dt.$$

1.4 Résultats utiles

I) Théorèmes de point fixe

Soient $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach et K est un sous ensemble non vide fermé de E. Soit $\Lambda : K \longrightarrow K$ un opérateur défini sur K. Nous sommes intéressés par l'existence d'une solution $u \in K$ de l'équation d'opérateur

$$\Lambda u = u. \tag{1.4.1}$$

Un élément $u \in K$ qui satisfait (1.4.1) est appelé un point fixe d'opérateur L.

Maintenant, nous présentons l'énoncé du théorème principal d'existence des points fixes pour des opérateurs linéaires.

Théorème 1.28. *[24] Soit K un sous ensemble non vide fermé d'un espace de Banach* $(E, \|.\|_E)$.
Supposons que $\Lambda : K \longrightarrow K$ *un opérateur contractant, c'est-à-dire, il existe une constante* $k \in]0,1[$, *telle que*

$$\|\Lambda u - \Lambda v\|_E \leq k \, \|u - v\|_E, \quad \forall u, v \in K.$$

Alors, il existe un unique $u \in K$ *tel que* $\Lambda u = u$.

Nous avons besoin d'une version du théorème de point fixe de Banach que nous rappelons dans ce qui suit. Pour un opérateur $\Lambda : K \longrightarrow K$, on définit $\Lambda^m = \Lambda(\Lambda^{m-1})$ pour $m \geq 2$.

Théorème 1.29. *[24]Soient K un sous ensemble non vide fermé d'un espace de Banach* $(E, \|.\|_E)$. *et* $\Lambda : K \longrightarrow K$. *Supposons que* $\Lambda^m : K \longrightarrow K$ *est contractant pour un entier positif m. Alors* Λ *admet un point fixe unique.*

Preuve. D'après le théorème 1.28, Λ^m a un point fixe unique $u \in K$. Donc

$$\Lambda^m \, u = u.$$

D'autre part, on a

$$\Lambda^m(\Lambda u) = \Lambda(\Lambda^m \, u) = \Lambda u.$$

Ainsi $\Lambda u \in K$ est aussi un point fixe de Λ^m, où Λ^m admet un point fixe unique. Donc, nous avons

$$\Lambda u = u.$$

c'est-à-dire u est un point fixe de Λ. L'unicité du point fixe de Λ est une conséquence d'unicité du point fixe de Λ^m. □

Lemme 1.30. *[24] Soit* $\Lambda : C([0,T]; E) \longrightarrow C([0,T]; E)$ *un opérateur satisfait la propriété suivante : il existe* $C > 0$ *tel que*

$$\|\Lambda \eta_1(t) - \Lambda \eta_2(t)\|_E \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_E \, ds, \quad \forall \eta_1, \eta_1 \in C([0,T]; E), \; t \in [0,T].$$

Alors, il existe un unique élément $\eta^* \in C([0,T]; E)$ *tel que* $\Lambda \eta^* = \eta^*$.

II) Inégalité de Gronwall

L'inégalité de Gronwall suivante sera utilisée dans l'étude des inéquations variationnelles d'évolution. Pour cela, nous utilisons ci-dessous la notation $C([a,b])$ pour l'espace des fonctions continues à valeurs réelles définies sur l'intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Lemme 1.31. *[24] Supposons $f, g \in C([a,b])$ satisfaisant*

$$f(t) \leq g(t) + C \int_0^t f(s)\, ds, \quad \forall t \in [a,b],$$

où $C > 0$ est une constante. Alors,

$$f(t) \leq g(t) + C \int_0^t g(s) e^{C(t-s)} ds, \quad \forall t \in [a,b].$$

De plus, si g est croissant, alors

$$f(t) \leq g(t) e^{C(t-a)}, \quad \forall t \in [a,b].$$

III) Inégalité de Young

Nous avons besoin du résultat suivant.

Lemme 1.32. *[24] Soient $p, q \geq 1$ deux exposants conjugués, c'est-à-dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall a, b \geq 0.$$

IV) Formule de Green

Nous avons aussi le résultat suivant.

Théorème 1.33. *[15] Soit $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in H^1(\Omega)^2$. Alors*

$$\int_\Omega \tau.\nabla v\, dx + \int_\Omega div\tau\, v\, dx = \int_\Gamma (\tau.n)\, v\, da, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Où n la normale extérieure sur Γ.

Chapitre 2

INÉQUATIONS VARIATIONNELLES D'ÉVOLUTION AVEC VISCOSITÉ

Les inégalités variationnelles étudiées dans ce chapitre sont évolutives puisqu'elles font intervenir la dérivée temporelle de la solution et une condition initiale. Leur principale caractéristique réside dans le fait qu'ils sont régis par deux formes bilinéaires, dont l'une ne fait intervenir que la dérivée temporelle de la solution. On parle des résultats d'existence et d'unicité de base puis nous considérons également les inéquations quasivariationnelles d'évolution et les inéquations variationnelles d'évolution à terme de mémoire avec viscosité pour lesquelles nous prouvons les résultats d'existence et d'unicité.

Les résultats présentés dans ce chapitre ont un intérêt, car ils peuvent être directement appliqués à l'étude des problèmes de contact frictionnel impliquant des matériaux viscoélastiques à mémoire courte.

Partout dans ce chapitre, E désigne un espace de Hilbert réel de produit scalaire $< .,. >_E$ et de norme $\|.\|_E$ et, de plus, $[0, T]$ désigne l'intervalle de temps d'intérêt, où $T > 0$.

2.1 Inéquations variationnelles et quasivariationnelles elliptiques

Dans cette section, nous présentons quelques théorèmes sur la résolvabilité des inéquations variationnelles et quasivariationnelles elliptiques.

2.1.1 Inéquations variationnelles elliptiques

Nous commençons par un résultat d'existence et d'unicité pour les inéquations variationnelles elliptiques de première espèce, puis nous passons aux inéquations variationnelles elliptiques de deuxième espèce.

2.1.1.1 Inéquations variationnelles de première espèce

Soient $a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f \in E$. Nous considérons le problème de trouver un élément $u \in E$ tel que

$$a(u, v-u) \geq < f, v-u >_E, \quad \forall v \in E. \tag{2.1.1}$$

Une inéquation de la forme (2.1.1) s'appelle inéquation variationnelle elliptique de première espèce.

On s'intéresse aux résultats standard d'existence et d'unicité des solutions pour les inéquations de forme (2.1.1). Pour cela, nous avons l'hypothèses suivante :

$$\left.\begin{array}{l} a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{une forme bilinéaire symétrique et} \\ (\mathbf{a})\text{Il existe une constante } M > 0 \text{ telle que} \\ \qquad \Big|a(u,v)\Big| \leq M\|u\|_E\|v\|_E, \quad \forall u, v \in E. \\ (\mathbf{b})\text{Il existe une constante } m > 0 \text{ telle que} \\ \qquad a(v,v) \geq m\|v\|_E^2, \quad \forall v \in E. \end{array}\right\} \tag{2.1.2}$$

Notons que d'après les définitions 1.22 et 1.23, les conditions (2.1.2)(**a**) et (2.1.2)(**b**) montrent que la forme bilinéaire a est continue et E-elliptique, respectivement.

Nous avons le résultat de base d'existence et d'unicité.

Théorème 2.1. *[24] Soient E un espace de Hilbert. Supposons que l'hypothèses*(2.1.2) *est vérifiée. Alors pour tout $f \in E$ l'inéquation variationnelle elliptique* (2.1.1) *admet une solution unique.*

2.1.1.2 Inéquations variationnelles de deuxième espèce

Soient $a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in E$ et une fonction $j : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Nous considérons le problème de trouver un élément $u \in E$ tel que

$$a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq < f, v-u >_E, \quad \forall v \in E. \tag{2.1.3}$$

Une inéquation variationnelle de la forme (2.1.3) est appelée inéquation variationnelle elliptique de deuxième espèce.

Dans le cas particulier, lorsque $j \equiv 0$, l'inéquation variationnelle(2.1.3) représente une inéquation variationnelle elliptique de première espèce.

Dans l'étude de problème (2.1.3), nous supposons que l'hypothèse ci-dessus (2.1.2) est satisfaite, de plus

$$j : E \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{est une fonction convexe et s.c.i.} \tag{2.1.4}$$

Le premier résultat principal est le suivant.

Théorème 2.2. *[24] Supposons que les hypothèses*(2.1.2) *et* (2.1.4) *sont satisfaites. Alors pour tout $f \in E$ l'inéquation variationnelle elliptique* (2.1.3) *admet une solution unique.*

2.1.2 Inéquations quasivariationnelles elliptiques

Ici, nous considérons des inéquations quasivariationnelles elliptiques, c'est-à-dire que nous permettons à la fonctionnelle j de dépendre explicitement de la solution. Par conséquent, étant donné une forme bilinéaire $a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in E$ et une fonctionnelle $j : E \longrightarrow \mathbb{R}$.

Maintenant, nous considérons le problème de trouver un élément $u \in E$ tel que

$$a(u, v-u) + j(u, v) - j(u, u) \geq < f, v-u >_E, \quad \forall v \in E. \tag{2.1.5}$$

Une inéquation de la forme (2.1.5) est appelée inéquation quasivariationnelle elliptique.

Dans l'étude de problème (2.1.5), en plus de (2.1.2) ci-dessus, nous considérons l'hypothèse suivante sur la fonctionnelle j :

$$\left.\begin{array}{l} j : E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \text{ et} \\ (\mathbf{a})\text{Pour tout } \eta \in E,\ j(\eta, .) \text{ est convexe et s.c.i sur E.} \\ (\mathbf{b})\text{Il existe } \alpha > 0 \text{ tel que} \\ \qquad j(\eta_1, v_2) - j(\eta_1, v_1) + j(\eta_2, v_1) - j(\eta_2, v_2) \\ \qquad\qquad \leq \alpha \|\eta_1 - \eta_2\|_E \|v_1 - v_2\|_E, \quad \forall \eta_1, \eta_2, v_1, v_2 \in E. \end{array}\right\} \tag{2.1.6}$$

Le deuxième résultat qu'on va présenter en étudiant les inéquations quasivariationnelles elliptique (2.1.5) est le suivant.

Théorème 2.3. *[24] Supposons que les hypothèses* (2.1.2) *et* (2.1.6) *sont satisfaites. De plus, supposons que $m > \alpha$. Alors, pour tout $f \in E$ l'inéquation quasi-variationnelle elliptique* (2.1.5) *admet une solution unique.*

2.2 Inéquations variationnelles et quasivariationnelles elliptiques dépendantes du temps

Les inéquations variationnelles et quasivariationnelles elliptiques étudiées dans cette section sont dépendantes du temps, c'est-à-dire que les données et la solution dépendent à la fois de la variable de temps, qui joue le rôle d'un paramètre.

2.2.1 Résultats d'existence et d'unicité de l'IVE de première espèce

Nous commençons par l'étude des inéquations variationnelles dépendantes du temps. Pour cela, soit $T > 0$ et notons $[0, T]$ l'intervalle de temps d'intérêt.

Supposons $a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ et

$$f \in C([0, T]; E). \tag{2.2.1}$$

On considère le problème de trouver une fonction $u : [0, T] \longrightarrow E$ telle que

$$a(u(t), v - u(t)) \geq < f(t), v - u(t) >_E, \quad \forall v \in E,\ t \in [0, T]. \tag{2.2.2}$$

On a le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 2.4. *[24] Supposons que* (2.1.2) *et* (2.2.1) *sont vérifiées. Alors, l'inéquation variationnelle dépendante du temps* (2.2.2) *a une solution unique* $u \in C([0, T]; E)$.

2.2.2 Résultat d'existence et d'unicité de l'IVE de deuxième espèce

Supposons $a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $j : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f \in C([0, T]; E)$.

Nous considérons le problème de trouver une fonction $u : [0, T] \longrightarrow E$ telle que

$$a(u(t), v - u(t)) + j(v) - j(u(t)) \geq < f(t), v - u(t) >_E, \quad \forall v \in E,\ t \in [0, T]. \tag{2.2.3}$$

On a le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 2.5. *[24] Supposons que* (2.1.2), (2.1.4) *et* (2.2.1) *sont satisfaites. Alors, l'inéquation variationnelle dépendante du temps* (2.2.3) *a une solution unique* $u \in C([0, T]; E)$.

2.2.3 Résultat d'existence et d'unicité de l'IQVE

Nous considérons maintenant le cas des inéquations quasivariationnelles dépendantes du temps. Soit $T > 0$ et notons à nouveau $[0, T]$ l'intervalle de temps d'intérêt.

On considère le problème de trouver une fonction $u : [0, T] \longrightarrow E$ telle que

$$a(u(t), v - u(t)) + j(u(t), v) - j(u(t), u(t)) \geq < f(t), v - u(t) >_E, \quad \forall v \in E, t \in [0, T]. \tag{2.2.4}$$

Nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 2.6. *[24] Supposons que* (2.1.2), (2.1.6) *et* (2.2.1) *sont satisfaites. De plus, si* $m > \alpha$*, alors il existe une unique solution* $u \in C([0, T]; E)$ *de l'inéquation* (2.2.4).

2.3 Inéquations variationnelles d'évolution avec viscosité

Les inéquations variationnelles étudiées dans cette partie sont évolutives puisqu'elles font intervenir la dérivée temporelle de la solution et une condition initiale. Leur principale caractéristique réside dans le fait qu'elles sont régies par deux formes bilinéaires dont l'une ne fait intervenir que la dérivée temporelle de la solution. En utilisant alors la terminologie issue de la mécanique des continus, nous les appelons inéquations variationnelle d'évolution avec viscosité.

Résultat d'existence et d'unicité

Soient a et b deux formes bilinéaires sur E, $j : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : [0,T] \longrightarrow E$ et u_0 une donnée initiale.

Nous intéressons aux conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité de la solution du problème suivant :
Trouver $u : [0,T] \longrightarrow E$ tel que

$$\begin{aligned} a(u(t), v - \dot{u}(t)) + b(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + j(v) - j(\dot{u}(t)) \\ \geq < f(t), v - \dot{u}(t) >_E, \quad \forall v \in E, t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

$$u(0) = u_0. \tag{2.3.2}$$

L'inégalité (2.3.1) représente une inégalité variationnelle d'évolution contient la dérivée temporelle de la fonction inconnue u, par conséquent, la condition initiale (2.3.2)est nécessaire. Le terme $b(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t))$ dans(2.3.1) est appelé le terme de viscosité.

Dans l'étude du problème de Cauchy (2.3.1)-(2.3.2), nous supposons que

$$\left.\begin{array}{l} a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{une forme bilinéaire symétrique et} \\ \text{il existe une constante } M > 0 \text{ telle que} \\ \qquad |a(u,v)| \leq M\|u\|_E\|v\|_E, \quad \forall u, v \in E. \end{array}\right\} \tag{2.3.3}$$

$$\left.\begin{array}{l} b : E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{une forme bilinéaire symétrique et} \\ (\mathbf{a})\text{Il existe } M' > 0 \text{ tel que } \mid b(u,v) \mid \leq M' \|u\|_E \|v\|_E, \quad \forall u,v \in E. \\ (\mathbf{b})\text{Il existe } m' > 0 \text{ tel que } \mid b(v,v) \mid \geq m' \|v\|_E^2, \quad \forall v \in E. \end{array}\right\} \tag{2.3.4}$$

$$j : X \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{une fonctionnelle convexe et s.c.i.} \tag{2.3.5}$$

$$f \in C([0,T]; E). \tag{2.3.6}$$

$$u_0 \in E. \tag{2.3.7}$$

Notez que l'hypothèse (2.3.3) montre que la forme bilinéaire a est continue, tandis que l'hypothèse (2.3.4) montre que la forme bilinéaire b est symétrique, continue et E-elliptique. L'ellipticité de la forme bilinéaire a n'est pas nécessaire, ni sa symétrie, et cela est dû à la présence de la forme bilinéaire b dans (2.3.1), qui joue un rôle crucial dans l'étude du problème (2.3.1)-(2.3.2).

Le résultat principal de cette section est le suivant.

Théorème 2.7. *[24] Supposons que* (2.3.3)–(2.3.7) *sont satisfaites. Alors, il existe une solution unique u du problème* (2.3.1)-(2.3.2). *De plus, on a la régularité de la solution $u \in C^1([0,T]; E)$.*

2.4 Inéquations quasivariationnelles d'évolution avec viscosité

Dans cette section, nous considérons des inéquations quasivariationnelles d'évolution avec la viscosité, c'est-à-dire que nous permettons à la fonctionnelle j de dépendre explicitement de la solution u ou de sa dérivée $\dot{u}$.

Supposons que $j : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ et considérons le problème suivant : trouver $u : [0,T] \longrightarrow E$ tel que

$$\begin{aligned} a(u(t), v - \dot{u}(t)) + b(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \\ \geq < f(t), v - \dot{u}(t) >_E, \quad \forall v \in E, t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

$$u(0) = u_0. \tag{2.4.2}$$

Nous considérons aussi le problème de trouver $u : [0,T] \longrightarrow E$ tel que

$$\begin{aligned} a(u(t), v - \dot{u}(t)) + b(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + j(\dot{u}(t), v) - j(\dot{u}(t), \dot{u}(t)) \\ \geq < f(t), v - \dot{u}(t) >_E, \quad \forall v \in E, t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

$$u(0) = u_0. \tag{2.4.4}$$

Dans l'étude de ces inéquations quasivariationnelles d'évolution, nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 2.8. *[24] Supposons que* (2.3.3),(2.3.4), (2.3.6),(2.3.7) *et* (2.1.6) *sont satisfaites. Alors*

1. *Il existe une unique solution $u \in C^1([0,T];E)$ au problème* (2.4.1)-(2.4.2).
2. *Si $m' > \alpha$, il existe une unique solution $u \in C^1([0,T];E)$ au problème* (2.4.3)-(2.4.4).

De plus, si $f \in W^{1,p}([0,T];E)$ pour certains $p \in [1,\infty]$, alors $u \in W^{1,p}([0,T];E)$.

2.5 Inéquations quasivariationnelles d'évolution à terme de mémoire avec viscosité

Dans le reste de ce travail, nous passons à l'étude des inéquations variationnelles avec viscosité pour lesquelles la fonctionnelle j dépend de l'intégrale de la solution ou d'intégrale de sa dérivée.

2.5.1 Opérateurs à mémoire

Pour introduire le concept des inéquations variationnelles à terme de mémoire, soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et un opérateur $S : C([0,T];E) \longrightarrow C([0,T];F)$. L'opérateur S est un opérateur de mémoire si

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } L_S > 0 \text{ tel que} \\ \left\| Sv_1(t) - Sv_2(t) \right\|_F \leq L_S \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_E \, ds, \\ \qquad \forall v_1, v_2 \in C([0,T];E), t \in [0,T]. \end{array} \right. \tag{2.5.1}$$

Pour éviter toute confusion, on adopte la notation $Su(t)$ au lieu de $(Su)(t)$, pour tout $t \in [0,T]$.

Un exemple d'opérateur S qui satisfait 2.5.1 est donné par $S : C([0,T];E) \longrightarrow C([0,T];F)$ tel que

$$Sv(t) = \int_0^t A\ v(s)ds + y_0, \quad \forall v \in C([0,T];E), t \in [0,T], \tag{2.5.2}$$

où $A : E \longrightarrow F$ est un opérateur continu de Lipschitz et $y_0 \in F$.
Le deuxième exemple d'opérateur S c'est l'opérateur de Volterra $S : C([0,T];E) \longrightarrow C([0,T];F)$ donné par

$$Sv(t) = \int_0^t A(t-s)\ v(s)ds + y_0, \quad \forall v \in C([0,T];E), t \in [0,T], \tag{2.5.3}$$

où maintenant $A \in C([0,T];\mathscr{L}(E,F))$ et, encore, $y_0 \in F$.

En effet, dans le cas de l'opérateur (2.5.2), l'inégalité (2.5.1) est vraie pour L_S étant la constante de Lipschitz d'opérateur A, et dans le cas de l'opérateur (2.5.3), elle est vraie avec

$$L_S = \|A\|_{C([0,T];\mathscr{L}(E,F))} = \max_{t\in[0,T]} \|A(t)\|_{\mathscr{L}(E,F)}.$$

Il est clair, pour les opérateurs (2.5.2) et (2.5.3), la valeur actuelle $Sv(t)$ à l'instant $t \in [0,T]$ dépend de terme de mémoire des valeurs de v à l'instant $0 \leq s \leq t$ et, donc, sont des opérateurs à terme de mémoire.

2.5.2 Résultat d'existence et d'unicité

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Hilbert et supposons une fonctionnelle $j : F \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ et considérons un opérateur à terme de mémoire $S : C([0,T];E) \longrightarrow C([0,T];F)$.

Nous sommes intéressés à fournir des conditions qui garantissent la résolution unique des problèmes suivants :

Problème 01.

Trouver $u : [0, T] \longrightarrow E$ tel que

$$a(u(t), v - \dot{u}(t)) + b(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + j(Su(t), v) - j(Su(t), \dot{u}(t)) \\ \geq < f(t), v - \dot{u}(t) >_E, \quad \forall v \in E, t \in [0, T], \quad (2.5.4)$$

$$u(0) = u_0. \quad (2.5.5)$$

Problème 02.

Trouver $u : [0, T] \longrightarrow E$ tel que

$$a(u(t), v - \dot{u}(t)) + b(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + j(S\dot{u}(t), v) - j(S\dot{u}(t), \dot{u}(t)) \\ \geq < f(t), v - \dot{u}(t) >_E, \quad \forall v \in E, t \in [0, T], \quad (2.5.6)$$

$$u(0) = u_0. \quad (2.5.7)$$

Les inégalités variationnelles (2.5.4) et (2.5.6) sont des inéquations variationnelles dépendantes du temps à terme de mémoire.

La nouveauté consiste dans le fait qu'à chaque instant $t \in [0, T]$, la fonctionnelle j dépend de l'intégrale de la solution jusqu'à l'instant t,$Su(t)$, ou de l'intégrale de la dérivée de la solution jusqu'à l'instant t,$S\dot{u}(t)$. Cette caractéristique rend ces problèmes différents des inéquations quasivariationnelles étudiées à la section 2.2, puisque j a été supposé dépendre de la valeur actuelle de la solution, $u(t)$, ou de la valeur actuelle de sa dérivée, $\dot{u}(t)$.

Dans l'étude des inéquations variationnelles d'évolution à terme de mémoire avec viscosité, nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 2.9. *[24] Supposons que* (2.3.3), (2.3.4),(2.3.6), (2.3.7), (2.1.6) *et* (2.5.1) *sont satisfaites. Alors*

1. *Il existe une unique solution* $u \in C^1([0, T]; E)$ *au problème* (2.5.4)-(2.5.5).
2. *Il existe une unique solution* $u \in C^1([0, T]; E)$ *au problème* (2.5.6)-(2.5.7).

Preuve. Ici et ci-dessous, C représentera diverses constantes positives dont les valeurs peuvent changer d'une ligne à l'autre.

1. La preuve est basée sur un argument de point fixe et sera établie en plusieurs étapes. Ces étapes sont les suivantes :

   Étape 01 : Résoudre un problème intermédiaire

   Nous considérons ci-dessous le problème intermédiaire suivant :

   P_1^η **:** Soit $\eta = (\eta^1, \eta^2) \in C\big([0,T], E \times F\big)$. Trouver $w_\eta : [0,T] \longrightarrow E$, tel que

$$a(\eta^1(t), v - w_\eta(t)) + b(w_\eta(t), v - w_\eta(t)) + j(\eta^2(t), v) - j(\eta^2(t), w_\eta(t)) \geq < f(t), v - w_\eta(t) >_E, \quad \forall v \in E, t \in [0,T], \quad (2.5.8)$$

$$w_\eta(0) = u_0. \quad (2.5.9)$$

   La solvabilité unique de ce problème intermédiaire P_1^η est donnée par le théorème 2.6, donc, il existe une unique solution de régularité $w_\eta \in C([0,T]; E)$.

   Étape 02 : Un argument de point fixe

   Dans la deuxième étape, nous considérons l'opérateur $\Lambda : C([0,T]; E \times F) \longrightarrow C([0,T], E \times F)$ définie par

$$\Lambda\eta(t) = \Big(\int_0^t w_\eta(s)ds + u_0, S\big(\int_0^t w_\eta(s)ds + u_0 \big) \Big), \quad \forall \eta \in C([0,T]; E \times F), t \in [0,T], \quad (2.5.10)$$

   et prouver que Λ a un unique point fixe $\eta^* \in C([0,T]; E \times F)$.

   En effet, Soient $\eta = \big(\eta^1, \eta^2\big) \in C([0,T]; E \times F)$ et $\xi = \big(\xi^1, \xi^2\big) \in C([0,T]; E \times F)$. Et notons par w_η et w_ξ les solutions correspondantes du problème intermédiaire P_1^η, On a

$$a(\eta^1(s), v - w_\eta(s)) + b(w_\eta(s), v - w_\eta(s)) + j(\eta^2(s), v\Big) - j(\eta^2(s), w_\eta(s))$$

$$\geq < f(s), v - w_\eta(s) >_E, \quad \forall v \in E, s \in [0,T].$$

$$a(\xi^1(s), v - w_\xi(s)) + b(w_\xi(s), v - w_\xi(s)) + j(\xi^2(s), v\Big) - j\Big(\xi^2(s), w_\xi(s))$$

$$\geq < f(s), v - w_\xi(s) >_E, \quad \forall v \in E, s \in [0,T].$$

On prend $v = w_\xi(s)$ dans la première inégalité et $v = w_\eta(s)$ dans la deuxième, puis on additionne les inégalité obtenues pour trouver

$$b(w_\eta(s) - w_\xi(s), w_\eta(s) - w_\xi(s)) \leq a(\eta^1(s) - \xi^1(s), w_\xi(s) - w_\eta(s)) +$$
$$j(\eta^2(s), w_\xi(s)) - j(\eta^2(s), w_\eta(s)) + j(\xi^2(s), w_\eta(s)) - j(\xi^2(s), w_\xi(s)) \quad (2.5.11)$$

Par les hypothèses (2.3.3), (2.3.4) et (2.1.6), en résulte que

$$\Big|a\big(\eta^1(s) - \xi^1(s), w_\xi(s) - w_\eta(s)\big)\Big| \leq M\|\eta^1(s) - \xi^1(s)\|_E \|w_\xi(s) - w_\eta(s)\|_E,$$

$$b(w_\eta(s) - w_\xi(s), w_\eta(s) - w_\xi(s)) \geq m' \Big\|w_\eta(s) - w_\xi(s)\Big\|_E^2,$$

et

$$j(\eta^2(s), w_\xi(s)) - j(\eta^2(s), w_\eta(s)) + j(\xi^2(s), w_\eta(s)) - j(\xi^2(s), w_\xi(s))$$
$$\leq \alpha \Big\|\eta^2(s) - \xi^2(s)\Big\|_F \Big\|w_\eta(s) - w_\xi(s)\Big\|_E.$$

L'inégalité (2.5.11) devient

$$m' \Big\|w_\eta(s) - w_\xi(s)\Big\|_E^2 \leq M \Big\|\eta^1(s) - \xi^1(s)\Big\|_E \Big\|w_\eta(s) - w_\xi(s)\Big\|_E$$
$$+\alpha \Big\|\eta^2(s) - \xi^2(s)\Big\|_F \Big\|w_\eta(s) - w_\xi(s)\Big\|_E, \quad \forall s \in [0, T].$$

D'où

$$\Big\|w_\eta(s) - w_\xi(s)\Big\|_E^2 \leq \Big(\frac{M}{m'}\Big\|\eta^1(s) - \xi^1(s)\Big\|_E + \frac{\alpha}{m'}\Big\|\eta^2(s) - \xi^2(s)\Big\|_F\Big) \Big\|w_\eta(s) - w_\xi(s)\Big\|_E.$$

Nous utilisons l'inégalité $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}+$. On obtient

$$\Big\|w_\eta(s) - w_\xi(s)\Big\|_E^2 \leq \frac{1}{2}\Big(\frac{M}{m'}\Big\|\eta^1(s) - \xi^1(s)\Big\|_E + \frac{\alpha}{m'}\Big\|\eta^2(s) - \xi^2(s)\Big\|_F\Big)^2$$
$$+ \frac{1}{2}\Big\|w_\eta(s) - w_\xi(s)\Big\|_E^2.$$

$$\frac{1}{2}\Big\|w_\eta(s) - w_\xi(s)\Big\|_E^2 \leq \frac{1}{2}\Big(\frac{M^2}{m'^2}\Big\|\eta^1(s) - \xi^1(s)\Big\|_E^2 + \frac{\alpha^2}{m'^2}\Big\|\eta^2(s) - \xi^2(s)\Big\|_F^2$$
$$+ 2\frac{M}{m'}\Big\|\eta^1(s) - \xi^1(s)\Big\|_E \times \frac{\alpha}{m'}\Big\|\eta^2(s) - \xi^2(s)\Big\|_F\Big).$$

Donc

$$\begin{aligned}\Big\|w_\eta(s)-w_\xi(s)\Big\|_E^2 &\leq \frac{2M^2}{m'^2}\Big\|\eta^1(s)-\xi^1(s)\Big\|_E^2+\frac{2\alpha^2}{m'^2}\Big\|\eta^2(s)-\xi^2(s)\Big\|_F^2\\ &\leq \max\Big(\frac{2M^2}{m'^2},\frac{2\alpha^2}{m'^2}\Big)\Big\|\eta(s)-\xi(s)\Big\|_{E\times F}^2, \qquad (2.5.12)\end{aligned}$$

où $\|.\|_{E\times F}$ désigne la norme sur l'espace $E\times F$, donnée par

$$\|\eta\|_{E\times F}^2=\|\eta^1\|_E^2+\|\eta^2\|_F^2,\quad \forall\eta=(\eta^1,\eta^2)\in E\times F.$$

L'inégalité (2.5.12) devient

$$\Big\|w_\eta(s)-w_\xi(s)\Big\|_E^2\leq C\Big\|\eta(s)-\xi(s)\Big\|_{E\times F}^2,\quad \forall s\in[0,T]. \qquad (2.5.13)$$

D'autre part, par (2.5.10), on a

$$\begin{aligned}\Lambda\eta(t)-\Lambda\xi(t) &= \Lambda(\eta^1(t),\eta^2(t))-\Lambda(\xi^1(t),\xi^2(t))\\ &=\Big(\int_0^t w_\eta(s)ds+u_0,S\Big(\int_0^t w_\eta(s)ds+u_0\Big)\Big)-\\ &\qquad \Big(\int_0^t w_\xi(s)ds+u_0,S\Big(\int_0^t w_\xi(s)ds+u_0\Big)\Big)\\ &=\Big(\int_0^t(w_\eta(s)-w_\xi(s))ds,\int_0^t A\Big(\int_0^s w_\eta(r)dr+u_0\Big)ds\\ &\qquad -\int_0^t A\Big(\int_0^s w_\xi(r)dr+u_0\Big)ds\Big)\\ &=\Big(\int_0^t(w_\eta(s)-w_\xi(s))ds,\int_0^t A\Big(\int_0^s w_\eta(s)-w_\xi(r)dr\Big)ds\Big)\\ &=\Big(\int_0^t(w_\eta(s)-w_\xi(s))ds,S\Big(\int_0^t(w_\eta(s)-w_\xi(s))ds\Big)-y_0\Big).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\Big\|\Lambda\eta(t)-\Lambda\xi(t)\Big\|_{E\times F}^2 &=\Big\|\Big(\int_0^t(w_\eta(s)-w_\xi(s))ds,S\Big(\int_0^t(w_\eta(s)-w_\xi(s))ds\Big)-y_0\Big)\Big\|_{E\times F}^2\\ &=\Big\|\int_0^t(w_\eta(s)-w_\xi(s))ds\Big\|_E^2+\Big\|S\Big(\int_0^t(w_\eta(s)-w_\xi(s))ds\Big)-y_0\Big\|_F^2\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\Big\|\int_0^t(w_\eta(s)-w_\xi(s))ds\Big\|_E^2 &\leq \Big(\int_0^t\|w_\eta(s)-w_\xi(s)\|_E ds\Big)^2\\ &\leq\Big(\Big(\int_0^t 1^2ds\Big)^{\frac12}\Big(\int_0^t\|w_\eta(s)-w_\xi(s)\|_E^2ds\Big)^{\frac12}\Big)^2\\ &\leq T\int_0^t\|w_\eta(s)-w_\xi(s)\|_E^2ds\end{aligned}$$

(2.5.14)

Par (2.5.13), l'inégalité (2.5.14) devient

$$\Big\| \int_0^t \big(w_\eta(s) - w_\xi(s)\big)ds \Big\|_E^2 \le CT \int_0^t \Big\| \eta(s) - \xi(s) \Big\|_{E\times F}^2 ds. \qquad (2.5.15)$$

Et

$$\begin{aligned}
\Big\| S\Big(\int_0^t \big(w_\eta(s) - w_\xi(s)\big)ds\Big) - y_0 \Big\|_F^2 &= \Big\| S\Big(\int_0^t w_\eta(s)ds + u_0\Big) - S\Big(\int_0^t w_\xi(s)ds + u_0\Big) \Big\|_F^2 \\
&\le L_s^2 \Big(\int_0^t \Big\| \int_0^s \big(w_\eta(r) - w_\xi(r)\big)dr \Big\|_E ds \Big)^2 \\
&\le L_s^2 \Big(\int_0^t \int_0^s \| w_\eta(r) - w_\xi(r) \|_E dr\, ds \Big)^2 \\
&\le L_s^2 T \int_0^t \Big(\int_0^s \| w_\eta(r) - w_\xi(r) \|_X dr \Big)^2 ds \\
&\le L_s^2 T \int_0^t TC \int_0^t \| \eta(r) - \xi(r) \|_{E\times F}^2 dr\, ds \\
&\le L_s^2 T^2 C \int_0^t \int_0^s \| \eta(r) - \xi(r) \|_{E\times F}^2 dr\, ds.
\end{aligned} \qquad (2.5.16)$$

D'après (2.5.15) et (2.5.16), on a

$$\Big\| \Lambda\eta(t) - \Lambda\xi(t) \Big\|_{E\times F}^2 \le C \int_0^t \Big\| \eta(s) - \xi(s) \Big\|_{E\times F}^2 ds, \quad \forall t \in [0,T]. \qquad (2.5.17)$$

L'inégalité (2.5.17) et le lemme 1.30 montrent que l'opérateur Λ admet un unique point fixe $\eta^* \in C([0,T]; E \times F)$.

Étape 03 : Existence. Soit $\eta^* = (\eta^{1*}, \eta^{2*}) \in C([0,T]; E \times F)$ un point fixe de Λ, tel que

$$\Lambda\eta^*(t) = \eta^*(t) = \Big(\int_0^t w_{\eta*}(s)ds + u_0, S\Big(\int_0^t w_{\eta*}(s)ds + u_0 \Big)\Big), \quad \forall t \in [0,T]. \qquad (2.5.18)$$

Donc le problème (2.5.8)-(2.5.9) devient

$$\begin{aligned}
&a\Big(\int_0^t w_{\eta^*}(s)ds + u_0, v - w_{\eta^*}(t)\Big) + b(w_{\eta^*}(t), v - w_{\eta^*}(t)) + j\Big(S\Big(\int_0^t w_{\eta^*}(s)ds + u_0\Big), v\Big) \\
&- j\Big(S\Big(\int_0^t w_{\eta^*}(s)ds + u_0\Big), w_{\eta^*}(t)\Big) \ge < f(t), v - w_{\eta^*}(t) >_E \quad \forall v \in E, t \in [0,T],
\end{aligned}$$

avec $w_{\eta*}(0) = u_0$ et $w_{\eta*} \in C([0,T]; E)$.
Soit $u \in C^1([0,T]; X)$ une fonction définie par

$$u(t) = \int_0^t w_{\eta^*}(s)ds + u_0, \quad \forall t \in [0,T]. \qquad (2.5.19)$$

D'après la formule (2.5.19), l'égalité (2.5.18) devient

$$\eta^{1*}(t) = u(t), \quad \eta^{2*}(t) = Su(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Et par (2.5.19), en déduit que $u(0) = u_0$.
Donc, on conclut que u est une solution du **problème 01**. De plus, puisque $w_{\eta^*} \in C([0, T]; E)$, en déduit que u a une régularité $u \in C^1([0, T]; E)$. Ce qui conclut la partie d'existence.

Unicité. Soient $u_1, u_2 \in C^1([0, T]; X)$ deux solutions de (2.5.4)-(2.5.5) et $t \in [0, T]$. Alors

$$\begin{aligned} a(u_1(t), v - \dot{u}_1(t)) + b(\dot{u}_1(t), v - \dot{u}_1(t)) + j(Su_1(t), v) - j(Su_1(t), \dot{u}_1(t)) \\ \geq < f(t), v - \dot{u}_1(t) >_E, \quad \forall v \in E, t \in [0, T]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(u_2(t), v - \dot{u}_2(t)) + b(\dot{u}_2(t), v - \dot{u}_2(t)) + j(Su_2(t), v) - j(Su_2(t), \dot{u}_2(t)) \\ \geq < f(t), v - \dot{u}_2(t) >_E, \quad \forall v \in E, t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Nous prenons $v = \dot{u}_2(t)$ dans la première inégalité et $v = \dot{u}_1(t)$ dans la deuxième, on trouve

$$\begin{aligned} a(u_1(t), \dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t)) + b(\dot{u}_1(t), \dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t)) + j(Su_1(t), \dot{u}_2(t)) \\ - j(Su_1(t), \dot{u}_1(t)) \geq < f(t), \dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t) >_E, \quad \forall v \in E, t \in [0, T]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(u_2(t), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)) + b(\dot{u}_2(t), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)) + j(Su_2(t), \dot{u}_1(t)) \\ - j(Su_2(t), \dot{u}_2(t)) \geq < f(t), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t) >_E, \quad \forall v \in E, t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Les deux inégalités précédentes nous donnent

$$\begin{aligned} b(\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)) \leq a(u_1(t) - u_2(t), \dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t)) \\ + j(Su_1(t), \dot{u}_2(t)) - j(Su_1(t), \dot{u}_1(t)) + j(Su_2(t), \dot{u}_1(t)) - j(Su_2(t), \dot{u}_2(t)). \end{aligned} \tag{2.5.20}$$

De plus, puisque $u_i(0) = u_0$, on a

$$u_i(t) = \int_0^t \dot{u}_i(s) ds + u_0, \quad \forall i = 1, 2. \tag{2.5.21}$$

Donc

$$\left\|u_1(t)-u_2(t)\right\|_E^2 \le \Big(\int_0^t \left\|\dot u_1(s)-\dot u_2(s)\right\|_E ds\Big)^2 \le T\int_0^t \left\|\dot u_1(s)-\dot u_2(s)\right\|_E^2 ds. \tag{2.5.22}$$

En utilisant maintenant les hypothèses (2.3.3), (2.3.4) (**b**), (2.5.1)et (2.1.6), on a

$$\begin{aligned} m'\left\|\dot u_1(t)-\dot u_2(t)\right\|_E^2 &\le M\left\|u_1(t)-u_2(t)\right\|_E\left\|\dot u_1(t)-\dot u_2(t)\right\|_E \\ &\quad+\alpha L_s\Big(\int_0^t \left\|u_1(s)-u_2(s)\right\|_E ds\Big)\times\left\|\dot u_1(t)-\dot u_2(t)\right\|_E, \end{aligned} \tag{2.5.23}$$

D'après (2.5.23) et (2.5.22), on résulte

$$\begin{aligned} \left\|\dot u_1(t)-\dot u_2(t)\right\|_E^2 &\le \Big(\frac{M}{m'}\left\|u_1(t)-u_2(t)\right\|_E+\frac{\alpha L_s}{m'}\int_0^t \left\|u_1(s)-u_2(s)\right\|_E ds\Big) \\ &\qquad\times\left\|\dot u_1(t)-\dot u_2(t)\right\|_E \\ &\le \frac{2M^2}{m'^2}\left\|u_1(t)-u_2(t)\right\|_E^2+\frac{2\alpha^2L_s^2}{m'^2}\Big(\int_0^t \left\|u_1(s)-u_2(s)\right\|_E ds\Big)^2 \\ &\le \frac{2M^2}{m'^2}\left\|u_1(t)-u_2(t)\right\|_E^2+\frac{2T\alpha^2L_s^2}{m'^2}\int_0^t \left\|u_1(s)-u_2(s)\right\|_E^2 ds \\ &\le \frac{2M^2T}{m'^2}\int_0^t \left\|\dot u_1(s)-\dot u_2(s)\right\|_E^2 ds+\frac{2T^2\alpha^2L_s^2}{m'^2}\times \\ &\qquad\int_0^t\int_0^s \left\|\dot u_1(r)-\dot u_2(r)\right\|_E^2 dr\, ds. \end{aligned}$$

D'où

$$\left\|\dot u_1(t)-\dot u_2(t)\right\|_E^2 \le C\int_0^t \left\|\dot u_1(s)-\dot u_2(s)\right\|_E^2 ds \tag{2.5.24}$$

En utilisant l'inégalité de Gronwall, on déduit

$$0 \le \left\|\dot u_1(t)-\dot u_2(t)\right\|_E^2 \le e^{C(t-0)}\times 0, \quad \forall t\in[0,T].$$

D'où $\dot u_1(t)=\dot u_2(t)$. De plus, les inégalités (2.5.21) et (2.5.22) nous donnent que $u_1(t)=u_2(t)$ pour tout $t\in[0,T]$.
Ce qui démontre la partie de l'unicité.

2. La preuve est similaire à la preuve de 1. La seule différence réside dans le choix de l'opérateur $\Lambda : C([0,T];E\times F) \longrightarrow C([0,T];E\times F)$ qui est maintenant donné par

$$\Lambda\eta(t)=\Big(\int_0^t w_\eta(s)ds+u_0,\ Sw_\eta(t)\Big), \quad \forall\eta\in C([0,T];E\times F), t\in[0,T]. \tag{2.5.25}$$

Refaire la même idée de deuxième étape de la preuve précédente, en trouvant (2.5.13). D'autre part, par (2.5.13) et (2.5.25), on a pour tous $\eta, \xi \in C([0,T]; E \times F)$ et $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}\Lambda\eta(t) - \Lambda\xi(t) &= \Lambda\big(\eta^1(t), \eta^2(t)\big) - \Lambda\big(\xi^1(t), \xi^2(t)\big)\\ &= \Big(\int_0^t w_\eta(s)ds + u_0, S\big(w_\eta(t)\big)\Big) - \Big(\int_0^t w_\xi(s)ds + u_0, Sw_\xi(t)\Big)\\ &= \Big(\int_0^t \big(w_\eta(s) - w_\xi(s)\big)ds,\ Sw_\eta(t) - Sw_\xi(t)\Big).\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\Big\|\Lambda\eta(t) - \Lambda\xi(t)\Big\|^2_{E\times F} &= \Big\|\Big(\textstyle\int_0^t \big(w_\eta(s) - w_\xi(s)\big)ds,\ Sw_\eta(t) - Sw_\xi(t)\Big)\Big\|^2_{E\times F}\\ &= \Big\|\textstyle\int_0^t \big(w_\eta(s) - w_\xi(s)\big)ds\Big\|^2_E + \Big\|Sw_\eta(t) - Sw_\xi(t)\Big\|^2_F.\end{aligned}$$

En déduit par (2.5.13) et (2.5.1) que

$$\begin{aligned}\Big\|\Lambda\eta(t) - \Lambda\xi(t)\Big\|^2_{E\times F} &\le TC\int_0^t \|\eta(s) - \xi(s)\|^2_{E\times F}ds + L_s^2\Big(\int_0^t \|w_\eta(s) - w_\xi(s)\|_E ds\Big)^2\\ &\le C\int_0^t \|\eta(s) - \xi(s)\|^2_{E\times F}ds \quad \forall t \in [0,T]. \qquad (2.5.26)\end{aligned}$$

Donc, Λ admet un unique point fixe $\eta* \in C([0,T]; E \times F)$.

Existence. Soit $\eta^* = \big(\eta^{1*}, \eta^{2*}\big) \in C([0,T]; E \times F)$ un point fixe de Λ, tel que

$$\Lambda\eta^*(t) = \eta^*(t) = \Big(\int_0^t w_{\eta^*}(s)ds + u_0, Sw_{\eta^*}(t)\Big) \quad \forall \eta \in C([0,T]; E \times F), t \in [0,T]. \qquad (2.5.27)$$

Notons $u \in C^1([0,T]; E)$ la fonction donnée par (2.5.19) et l'égalité (2.5.27) devient

$$\eta^{1*}(t) = u(t) \quad , \eta^{2*}(t) = S\dot{u}(t), \quad \forall t \in [0,T].$$

Donc, on conclut que u est une solution au **problème 02**.

Unicité. Soient $u_1, u_2 \in C^1([0,T])$ deux solutions de (2.5.6)-(2.5.7) et $t \in [0,T]$. Alors

$$\begin{aligned}a(u_1(t), v - \dot{u}_1(t)) + b(\dot{u}_1(t), v - \dot{u}_1(t)) + j(S\dot{u}_1(t), v - j(S\dot{u}_1(t), \dot{u}_1(t))\\ \ge < f(t), v - \dot{u}_1(t) >_E, \quad \forall v \in E, t \in [0,T],\end{aligned}$$

$$a(u_2(t), v - \dot{u}_2(t)) + b(\dot{u}_2(t), v - \dot{u}_2(t)) + j(S\dot{u}_2(t), v) - j(S\dot{u}_2(t), \dot{u}_2(t))$$
$$\geq < f(t), v - \dot{u}_2(t) >_E, \quad \forall v \in E, t \in [0, T].$$

Nous prenons $v = \dot{u}_2(t)$ dans la première inégalité et $v = \dot{u}_1(t)$ dans la deuxième, on trouve

$$a(u_1(t), \dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t)) + b(\dot{u}_1(t), \dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t)) + j(S\dot{u}_1(t), \dot{u}_2(t))$$
$$- j(S\dot{u}_1(t), \dot{u}_1(t)) \geq < f(t), \dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t) >_E, \quad \forall t \in [0, T].$$

$$a(u_2(t), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)) + b(\dot{u}_2(t), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)) + j(S\dot{u}_2(t), \dot{u}_1(t))$$
$$- j(S\dot{u}_2(t), \dot{u}_2(t)) \geq < f(t), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t) >_E, \quad \forall t \in [0, T].$$

Les deux inégalités nous donnent

$$\begin{aligned} b(\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)) \leq\ & a(u_1(t) - u_2(t), \dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t)) \\ & + j(S\dot{u}_1(t), \dot{u}_2(t)) - j(S\dot{u}_1(t), \dot{u}_1(t)) \\ & + j(S\dot{u}_2(t), \dot{u}_1(t)) - j(S\dot{u}_2(t), \dot{u}_2(t)) \end{aligned} \tag{2.5.28}$$

En utilisant maintenant les hypothèses (2.3.3), (2.3.4)(**b**), (2.5.1) et (2.1.6), pour obtenir

$$\begin{aligned} m' \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_E^2 \leq\ & M \|u_1(t) - u_2(t)\|_E \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_E \\ & + \alpha L_s \Big(\int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_E ds \Big) \times \ \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_E, \end{aligned} \tag{2.5.29}$$

d'où

$$\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_E^2 \leq C \int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_E^2 \, ds \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.5.30}$$

Par l'inégalité de Gronwall, on déduit

$$0 \leq \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_E^2 \leq C \times e^{C(t-0)} \times 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Donc $\dot{u}_1(t) = \dot{u}_2(t)$. De plus, par (2.5.21) et (2.5.22), on déduit que $u_1(t) = u_2(t)$, pour tout $t \in [0, T]$.
Ce qui démontre la partie de l'unicité.

Ce qui termine la démonstration du théorème 2.9. □

Le théorème 2.9 fournit des résultats d'existence et d'unicité dans l'étude des problèmes de Cauchy (2.5.4)-(2.5.5) et (2.5.6)-(2.5.7), respectivement, sous les mêmes hypothèses sur les données ; notons aussi que la régularité $u \in C^1([0,T];E)$ de la solution est la même, dans les deux problèmes ci-dessus. Par conséquent, nous concluons que les inéquations quasivariationnelles (2.5.4)-(2.5.5) et (2.5.6)-(2.5.7)) présentent une caractéristique commune. De plus, nous notons qu'en comparaison avec le théorème 2.8, dans le théorème 2.9 nous n'avons pas besoin d'hypothèses de petitesse dans l'étude du problème (2.5.6)-(2.5.7)). Cette caractéristique provient du fait que dans la preuve du théorème 2.9, nous utilisons l'hypothèse (2.5.1), qui implique un terme intégral et nous permet de dériver l'inégalité (2.5.17) ; et, comme il résulte du lemme 1.30, les inégalités de cette forme conduisent à une propriété de point fixe sans aucune hypothèse de petitesse sur les données.

Des exemples de problèmes aux limites qui conduisent à des inéquations quasivariationnelles de la forme (2.5.4)-(2.5.5) et (2.5.6)-(2.5.7) seront présentés dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

PROBLÈMES AUX LIMITES DE CONTACT POUR LES MATÉRIAUX VISCOÉLASTIQUES Á MÉMOIRE COURTE

Dans ce chapitre, nous présentons les notations et les préliminaires qui sont nécessaires à l'étude des problèmes aux limites de contact. Nous étudions des modèles quasi-statiques pour des problèmes de frottement impliquant des matériaux viscoélastiques à mémoire courte. Nous modélisons le frottement avec des versions de la loi de Tresca, et les lois dépendantes du glissement total et du taux de glissement total. Pour tous les modèles, nous prouvons que le champ de déplacement satisfait une inéquation variationnelle d'évolution avec le terme de viscosité. Ensuite, nous appliquons les résultats du chapitre 2 pour obtenir les résultats d'existence, d'unicité et de régularité.

Dans ce chapitre, nous utilisons un nouveau espace V, ainsi que son produit scalaire $< .,. >_V$ et la norme associée $\|.\|_V$. L'utilisation des résultats abstraits présentés dans le chapitre précédent de ce travail est faite dans le cas $E = V$, $< .,. >_E =< .,. >_V$.

3.1 Modélisation des problèmes élastiques et viscoélastiques

Cette section est consacrée à la présentation du cadre physique général et les formulations mathématiques appropriées à l'étude des problèmes de contacts, avec frottement, entre un corps élastique ou viscoélastique et une fondation rigide.

3.1.1 Cadre physique

Le cadre physique considéré dans ce mémoire est le suivant :

On considère un corps élastique ou viscoélastique qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $(d = 2, 3)$, de frontière suffisamment régulière $\partial\Omega$ partitionnée en trois parties mesurables disjointes $\Gamma_D, \Gamma_N, \Gamma_C$ correspondant aux conditions aux limites mécanique, telles que $mes(\Gamma_D) > 0$ et l'ensembles $\Gamma_D, \Gamma_N, \Gamma_C$ forment une partition disjointe de $\partial\Omega$ (voir Fig 3.1).

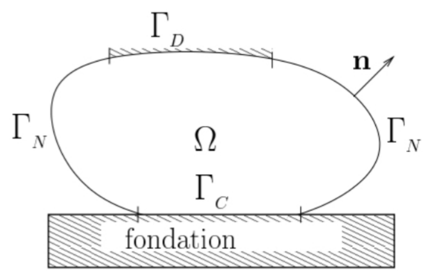

Fig 3.1. Le corps est en contact avec une fondation rigide.

On note par $\mathbf{n}$ la normale unitaire sortante à $\partial\Omega$. Le corps est encastré sur Γ_D dans une structure fixée et en contact avec frottement. Sur Γ_N agissent des tractions surfaciques de densité $\mathbf{f_2}$. Nous intéressons à l'étude de l'évolution du corps matériel sous l'action des forces volumiques de densité $\mathbf{f_0}$ et nous supposons que $\mathbf{f_0}$ et $\mathbf{f_2}$ varient très lentement par rapport au temps. Finalement, soit $[0, T]$ l'intervalle de temps avec $T > 0$.

Avant la description des modèles mathématiques associées au cadre physique présenté ci-dessus, nous donnons quelques notations et conventions que nous utiliserons tout au long de ce chapitre.

Nous notons par $\mathbb{S}^d$ l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ $\big($i.e, l'espace des matrices symétriques d'ordre d$\big)$. "." et $\|.\|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$

$$u.v = u_i v_i, \quad \|v\| = (v.v)^{\frac{1}{2}} \text{ pour tout } u = (u_i), v = (v_i) \in \mathbb{R}^d.$$

$$\sigma.\tau = \sigma_{ij}\tau_{ij}, \quad \|\tau\| = (\tau.\tau)^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour tout} \quad \sigma = (\sigma_{ij}) \ , \ \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d.$$

Le champ des déplacements :

$$u = u(x,t) = (u_i(x,t)) : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d,$$

avec $i = 1, .., d$.

Le tenseur des déformations linéarisées :

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)) : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{S}^d,$$

avec $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^t u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ et $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, 1 \leq i,j \leq d$.

$$\varepsilon(u) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(u) & \varepsilon_{12}(u) & ... & \varepsilon_{1d}(u) \\ \varepsilon_{21}(u) & \varepsilon_{22}(u) & ... & \varepsilon_{2d}(u) \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ \varepsilon_{d1}(u) & \varepsilon_{d2}(u) & ... & \varepsilon_{dd}(u) \end{bmatrix}$$

Le tenseur des contraintes :

$$\sigma = \sigma(u) = (\sigma_{ij}(u)) : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{S}^d, \quad 1 \leq i,j \leq d.$$

Le tenseur d'élasticité :

La notion d'élasticité s'intéresse exclusivement à la déformation illustré dans la figure suivante.

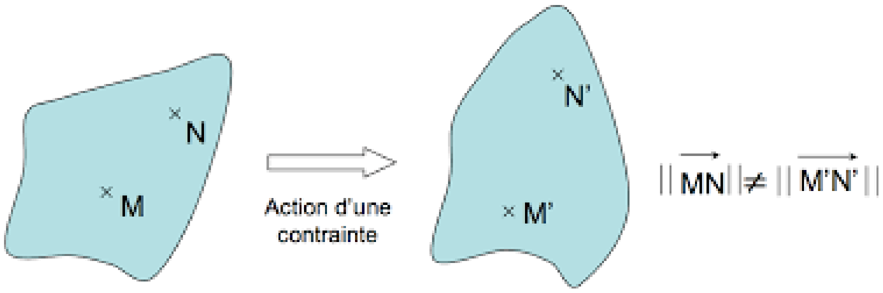

Fig 3.2. Déformation d'un corps élastique soumis à une contrainte.

L'élasticité étudie les déplacements, les déformations et les contraintes dans un corps soumis à des forces extérieures.

Le tenseur d'élasticité est un objet mathématique utilisé en élasticité. C'est un tenseur symétrique d'ordre 4 noté $\mathcal{A}$.

Frottement :
Le frottement est une force s'opposant aux mouvements d'un corps en contact avec un autre ou la force opposée à celle qui est à l'origine du mouvement.

Le tenseur de viscosité :
La viscosité caractérise le fait que tout changement de forme d'un fluide réel s'accompagne d'une résistance (frottements) , donc, la viscosité mesure la résistance d'un fluide au changement de forme ; la viscosité détermine la vitesse de mouvement du fluide (par exemple, la vitesse de déplacement d'une cuillère dans un bol ; plus le liquide est visqueux, plus le mouvement est lent).
Le tenseur de viscositéé est symétrique d'ordre 4 noté $\mathcal{B}$.

Les conditions de contact :

Nous passons maintenant à la description de diverses conditions sur la surface de contact Γ_C, ce qui sont divisées naturellement dans la direction normale et ceux qui sont dans la direction tangentielle. Pour les décrire, nous désignons par u_n et u_τ les composantes normale et tangentielle du déplacement u sur la frontière, elles sont données par

$$u_n = u.\mathbf{n} \quad , \quad u_\tau = u - u_n \mathbf{n}. \tag{3.1.1}$$

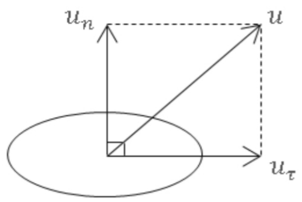

Fig 3.3. Composantes d'un vecteur de déplacement.

Nous notons par σ_n et σ_τ les composantes normale et tangentielle e d'un champ des contraintes à la frontière telles que

$$\sigma_n = (\sigma\mathbf{n}).\mathbf{n} \quad , \quad \sigma_\tau = \sigma\mathbf{n} - \sigma_n \mathbf{n}. \tag{3.1.2}$$

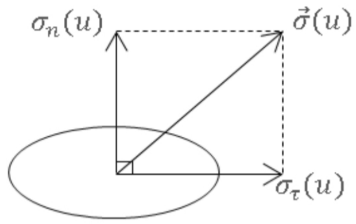

Fig 3.4. Composantes d'un vecteur contrainte.

Les relations (3.1.1) et (3.1.2) nous permettent d'écrire la relation suivante

$$(\sigma\mathbf{n}).v = \sigma_n v_n + \sigma_\tau v_\tau.$$

Nous représentons la dérivation par rapport au temps, par

$$\dot{u} = \frac{du}{dt},$$

où $\dot{u}$ désigne le champ des vitesses.

Nous notons par $\dot{u}_n$ et $\dot{u}_\tau$ les composantes normale et tangentielle du vecteur de vitesse $\dot{u}$ à la frontière telles que

$$\dot{u}_n = \dot{u}.\mathbf{n} \quad , \quad \dot{u}_\tau = \dot{u} - \dot{u}_n \mathbf{n}. \tag{3.1.3}$$

3.1.2 Modèle mathématique du cadre physique

3.1.2.1 Problèmes d'élasticité et de viscosité

Dans cette partie, nous intéressons au comportement du matériau qui est linéaire (les relations entre les contraintes et les déformations sont linéaires) et élastique (le solide reprend sa forme initiale dès que les forces appliquées sont supprimées).

3.1.2.1.1 L'équation de mouvement

Nous intéressons à un modèle mathématique décrivant l'évolution d'un corps déformable en contact avec une fondation, ses inconnues sont le champ de déplacement $u : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{S}^d$, avec $T > 0$. L'évolution de l'état mécanique du corps est décrite par l'équation du mouvement de Cauchy

$$div\ \sigma(t) + \mathbf{f_0}(t) = 0 \quad \text{dans } \ \Omega \times [0,T], \tag{3.1.4}$$

où div représente l'opérateur divergence $div\sigma = (\sigma_{ij,j})$ tel que $\sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ et $\mathbf{f_0}$ la densité des forces volumiques.
Les processus modélisés par l'équation d'équilibre (3.1.4) s'appellent processus quasi-statiques. Dans le cas statique, l'équation d'équilibre est valable dans Ω.

3.1.2.1.2 Lois de comportement

Les lois de comportements (ou lois constitutives)sont des relations entre le tenseur des contraintes σ, le tenseur des déformations ε.

A. Lois de comportement élastique
Une loi constitutive d'un corps élastique est donnée par

$$\sigma = \mathcal{A}\ \varepsilon(u), \tag{3.1.5}$$

où $\mathcal{A} = (a_{ijkh}), i, j, k, h \in \overline{1,d}$ le tenseur d'élasticité.
Sous forme de composants, les équations constitutives

$$\sigma_{ij} = a_{ijkh}\ \varepsilon_{kh}(u). \tag{3.1.6}$$

Nous permettons aux coefficients a_{ijkh} de dépendre de l'emplacement du point dans le corps.

Pour des raisons de symétrie, chaque tenseur est caractérisé par seulement deux coefficients. Ainsi, la loi de comportement linéaire d'un corps élastique est donnée par

$$\sigma = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda tr(\varepsilon(u))I, \tag{3.1.7}$$

où $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ sont des coefficients de lamé et $tr(\varepsilon(u))$ le tenseur de trace de $\varepsilon(u)$

$$tr(\varepsilon(u)) = \varepsilon_{ii}(u)$$

et I représente le tenseur d'identité (la matrice d'identité) sur $\mathbb{R}^d$.
Par une formule composants, l'équation (3.1.7) s'écrit

$$\sigma_{ij} = 2\mu\ \varepsilon_{ij}(u) + \lambda\ \varepsilon_{ii}(u)\ \delta_{ij},$$

où δ_{ij} est le delta Kronecker, i.e,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1\ , & \text{si } i = j, \\ 0\ , & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

B. Lois de comportement viscoélastique

La loi de comportement pour un corps viscoélastique à mémoire courte est donnée par

$$\sigma = \mathcal{A}\ \varepsilon(u) + \mathcal{B}\ \varepsilon(\dot{u}), \tag{3.1.8}$$

où $\mathcal{B} = (b_{ijkh}),\ i, j, k, h \in \{1, ..., d\}$, le tenseur des coefficients de viscosité.

Sous forme de composants, les équations constitutives

$$\sigma_{ij} = a_{ijkh}\ \varepsilon_{kh}(u) + b_{ijkh}\ \varepsilon_{kh}(\dot{u}). \tag{3.1.9}$$

Nous permettons aux coefficients b_{ijkh} de dépendre de l'emplacement du point dans le corps.

La loi de comportement linéaire pour un corps viscoélastique à mémoire courte est donnée par

$$\sigma = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda tr(\varepsilon(u))I + 2\theta\varepsilon(\dot{u}) + \xi tr(\varepsilon(\dot{u}))I, \tag{3.1.10}$$

où $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ sont des coefficients de lamé et $\theta > 0$, $\xi \geq 0$ sont des coefficients de viscosité.
En composants,

$$\sigma_{ij} = 2\mu\ \varepsilon_{ij}(u) + \lambda\ \varepsilon_{ii}(u)\ \delta_{ij} + 2\theta\ \varepsilon_{ij}(\dot{u}) + \xi\ \varepsilon_{ii}(\dot{u})\ \delta_{ij}.$$

3.1.2.1.3 Conditions aux limites de contact

Les conditions aux limites sur la surface de contact sont décrites à la fois en direction de la normale et dans le plan tangent, ces dernières étant appelées conditions de frottement. En direction de la normale nous pouvons distinguer le contact unilatéral (lorsque l'obstacle est rigide), bilatéral (lorsqu'il n'y a pas de séparation entre le corps et l'obstacle).

Rappelons que la frontière est divisée en trois parties disjointes et mesurables Γ_D, Γ_N et Γ_C telles que $mes(\Gamma_D) > 0$, nous donnons dans ce paragraphe les conditions aux limites sur chacune des trois parties.

A. Conditions aux limites de déplacement-traction

Dans tous les problèmes qui seront étudiés dans cette partie, le corps est encastré sur la partie Γ_D, donc

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \quad \text{(Condition de Dirichlet)} \tag{3.1.11}$$

cette relation représente la condition aux limites de déplacement.
Une traction surfacique de densité $\mathbf{f_2}$ agit sur la partie Γ_N et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma\mathbf{n}$ satisfait

$$\sigma\ \mathbf{n} = \mathbf{f_2} \quad \text{sur } \Gamma_N \quad \text{(Condition de Newman)} \tag{3.1.12}$$

cette condition est appelée la condition aux limites de traction.

B. Conditions de contact

Pour compléter le modèle mathématique qui d'écrit l'évolution du corps, il faut préciser les conditions aux limites sur Γ_C, c'est l'objet des conditions de contact et des lois de frottement que nous allons décrire dans ce qui suit.

S'il n'y a pas d'écart entre le corps et la base, nous avons

$$u_n = 0.$$

Cette condition est placée pour un contact bilatéral (le contact entre le corps et la base est maintenue en tout temps).

Sinon, dans les points de Γ_C tels que $u_n < g$, il n'existe pas de contact entre et la base rigide donc le vecteur des contraintes de Cauchy s'annule, c-à-d

$$u_n < g \Longrightarrow \sigma_n = 0, \quad \text{sur} \;\; \Gamma_C,$$

où la distance de chaque point $x \in \Gamma_C$ à la base rigide dans la direction de la normale $\mathbf{n}(x)$ est connue et notée par $g(x)$.

Nous supposons aussi que le contact entre le corps et la base rigide se produit si et seulement si $u_n = g$. Puisque la base est considérée rigide, donc

$$u_n = g \Longrightarrow \sigma_n \leq 0, \quad \text{sur} \;\; \Gamma_C.$$

On peut résumer les conditions ci dessus de la manière condensée suivante

$$u_n \leq g, \quad \sigma_n \leq 0, \quad \sigma_n(u_n - g) = 0, \quad \text{sur} \;\; \Gamma_C. \tag{3.1.13}$$

Les conditions (3.1.13) s'appellent les conditions de contact unilatéral ou conditions de contact de type Signorini.

C. Lois de contact avec ou sans frottement

La condition de contact est dite sans frottement dans la quelle la partie tangentielle de la contrainte (la force de frottement) est nulle, c'est-à-dire

$$\sigma_\tau = 0, \quad \text{sur} \;\; \Gamma_C. \tag{3.1.14}$$

Dans le cas où la force de frottement n'est pas nulle, le contact est avec frottement.

Les lois de frottement intervenant dans ce chapitre sont des versions de la loi de type Tresca. La loi de frottement de type Tresca se caractérise par l'intervention statique de la contrainte normale dans le seuil de frottement et elle peut s'énoncer comme suit

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq g, & \text{si } \dot{u}_\tau = 0, \\ \sigma_\tau = -g\frac{\dot{u}_\tau}{\|\dot{u}_\tau\|}, & \text{si } \dot{u}_\tau \neq 0. \end{cases} \tag{3.1.15}$$

Ici, $\dot{u}_\tau$ est la vitesse tangentielle ou le taux de glissement et $g : \Gamma_C \longrightarrow \mathbb{R}_+$ représente le seuil de frottement (ce seuil n'est pas fixée et dépend du coefficient de frottement et de la solution du problème).
Nous pouvons prendre pour g le choix suivant

$$g = g(Su(t)) \tag{3.1.16}$$

ou

$$g = g(S\dot{u}(t)). \tag{3.1.17}$$

Ici,

$$Sw(t) = \int_0^t \|w_\tau(s)\| ds,$$

et les fonctions $Su(x,t)$ et $S\dot{u}(x,t)$ représentent le glissement total et le taux de glissement total au point x sur Γ_C dans la période de temps $[0,t]$, respectivement.

La loi de frottement (3.1.15) associée à (3.1.16) sera appelée loi de frottement dépendant du glissement total et la même loi de frottement (3.1.15) associée à (3.1.17) sera appelée loi de frottement dépendant du taux de glissement total.

3.1.2.2 Quelques hypothèses

Nous commençons par cette notation.

Notation 3.1. *On note par*

$$div\tau = \tau_{1,1} + \tau_{2,2} \quad avec \quad \tau = (\tau_1(x_1,x_2,t), \tau_2(x_1,x_2,t)) \tag{3.1.18}$$

Or $\tau = (\tau_1(x_1,x_2), \tau_2(x_1,x_2))$

$$\nabla v = (v_{,1}, v_{,2}) \quad avec \quad v = v(x_1,x_2,t) \quad or \quad v = v(x_1,x_2) \tag{3.1.19}$$

Nous considérons un corps élastique en contact avec une base rigide. Alors, la formulation mécanique du problème de contact sans frottement est donnée par :

Problème P^1_{ela}**.** Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{S}^d$ tels que

$$\begin{cases} div\ \sigma + \mathbf{f_0} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda tr(\varepsilon(u))I. & \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \sigma\,\mathbf{n} = \mathbf{f_2} & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

Si on considère un corps élastique en contact avec frottement, le problème mécanique devient :

Problème P^2_{ela}**.** Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{S}^d$ tels que

$$\begin{cases} div\ \sigma + \mathbf{f_0} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda tr(\varepsilon(u))I. & \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \sigma\,\mathbf{n} = \mathbf{f_2} & \text{sur } \Gamma_N, \\ \begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq g, & \text{si } \dot{u}_\tau = 0, \\ \sigma_\tau = -g\frac{\dot{u}_\tau}{\|\dot{u}_\tau\|}, & \text{si } \dot{u}_\tau \neq 0. \end{cases} & \text{sur}\Gamma_C. \end{cases}$$

Maintenant, on considère les problèmes viscoélastiques sans et avec frottement par :

Problème $P^1_{viscoela}$**.** Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{S}^d$ tels que

$$\begin{cases} div\ \sigma + \mathbf{f_0} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda tr(\varepsilon(u))I + 2\theta\varepsilon(\dot{u}) + \zeta tr(\varepsilon(\dot{u}))I. & \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \sigma\,\mathbf{n} = \mathbf{f_2} & \text{sur } \Gamma_N, \\ u(0) = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Problème $P^2_{viscoela}$. Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{S}^d$ tels que

$$\begin{cases} div\,\sigma + \mathbf{f_0} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda tr(\varepsilon(u))I + 2\theta\varepsilon(\dot{u}) + \xi tr(\varepsilon(\dot{u}))I. & \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \sigma\,\mathbf{n} = \mathbf{f_2} & \text{sur } \Gamma_N, \\ \begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq g, & \text{si } \dot{u}_\tau = 0, \\ \sigma_\tau = -g\frac{\dot{u}_\tau}{\|\dot{u}_\tau\|}, & \text{si } \dot{u}_\tau \neq 0. \end{cases} & \text{sur}\Gamma_C, \\ u(0) = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Dans l'étude du problèmes mécanique ci-dessus nous supposons les hypothèses suivantes.

1. Les forces volumiques $\mathbf{f_0}$ dans Ω et les forces surfaciques $\mathbf{f_2}$ sur Γ_N sont de la forme suivante

$$\mathbf{f_0} = (0,0,f_0) \quad \text{avec} \quad f_0 = f_0(x_1,x_2,t) : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R} \tag{3.1.20}$$

$$\mathbf{f_2} = (0,0,f_2) \quad \text{avec} \quad f_2 = f_2(x_1,x_2,t) : \Gamma_N \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R} \tag{3.1.21}$$

2. Nous supposons aussi que $\mathbf{f_0}$ et $\mathbf{f_2}$ engendrent une déformation sur le corps avec un déplacement u qui est indépendant de x_3, tel que

$$u = (u_1,u_2,u_3) = (0,0,u) \quad \text{avec} \quad u = u(x_1,x_2,t) : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R} \tag{3.1.22}$$

Et le tenseur des déformations $\varepsilon(u)$ est donné par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)) \quad avec \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \ , \ i,j \in \overline{1,3}.$$

Tel que

$$\varepsilon(u) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}u_{,1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}u_{,2} \\ \frac{1}{2}u_{,1} & \frac{1}{2}u_{,2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Donc $tr\varepsilon(u) = 0$.

3. Dans le cas des corps élastiques, la loi de comportement (3.1.7) devient sous forme suivante

$$\sigma(u) = 2\mu\varepsilon(u) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu u_{,1} \\ 0 & 0 & \mu u_{,2} \\ \mu u_{,1} & \mu u_{,2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.1.23}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} \sigma_{13} = \sigma_{31} = \mu u_{,1} \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} = \mu u_{,1} \end{cases}$$

Donc l'équation d'équilibre (3.1.4) sera écrite

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} = 0 \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} = 0 \\ \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} + f_0 = 0 \end{cases} \tag{3.1.24}$$

Comme u et f_0 ne dépendent que des variables x_1, x_2 et $\mu = \mu(x_1, x_2)$, il découle de (3.1.23) que les deux premières équations de (3.1.24) sont satisfaites de façon identique. De plus, la dernière équation dans (3.1.24) devient

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + f_0 = 0.$$

D'autre part, on a

$$\nabla u = (u_{,1}, u_{,2}),$$

donc

$$\mu \nabla u = (\mu u_{,1}, \mu u_{,2}).$$

Et

$$div(\mu \nabla u) = div(\mu u_{,1}, \mu u_{,2}) = \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2}.$$

Alors, l'équation (3.1.4) devient

$$div(\mu \nabla u) + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{3.1.25}$$

Dans le cas des corps viscoélastiques, on refait les mêmes étapes précédentes, on trouve

$$div(\mu \nabla u + \theta \nabla \dot{u}) + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{3.1.26}$$

4. **Conditions de Dirichlet et Neumann**

   Nous décrivons maintenant les conditions sur la frontière $\partial\Omega$.

   Nous supposons que les déplacements sont bloqués sur la frontière Γ_D, ainsi (3.1.22) nous donne

$$u = 0, \quad \text{sur } \Gamma_D, \quad \text{(condition de Dirichlet)}.$$

Soit $\mathbf{n}$ le vecteur normal unitaire sur $\partial\Omega$. Donc, nous avons

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, 0) \quad \text{avec} \quad n_i = (x_1, x_2) : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ i = 1, 2. \tag{3.1.27}$$

On désigne par $\partial_n u$ la dérivée normale du déplacement, donnée par

$$\partial_n u = \nabla u.\mathbf{n} = u_{,1} n_1 + u_{,2} n_2, \tag{3.1.28}$$

où

$$\begin{cases} \tau.n = \tau_1 n_1 + \tau_2.n_2. \\ \tau.\nabla v = \tau_1 v_{,1} + \tau_2 v_{,2}. \end{cases} \tag{3.1.29}$$

Par (3.1.23), (3.1.27) et (3.1.28), on obtient le vecteur $\sigma\mathbf{n} = (\sigma_{ij} n_j)$ tel que

$$\sigma\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu u_{,1} \\ 0 & 0 & \mu u_{,2} \\ \mu u_{,1} & \mu u_{u,2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu u_{,1} n_1 + \mu u_{,2} n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \nabla u.\mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \partial_n u \end{bmatrix}.$$

C'est-à-dire,

$$\sigma\mathbf{n} = (0, 0, \mu\partial_n u) \tag{3.1.30}$$

Maintenant, nous utilisons (3.1.12), (3.1.21) et (3.1.30), pour obtenir

$$\sigma\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu\partial_n u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_2 \end{bmatrix}.$$

Donc

$$\mu\partial_n u = f_2 \quad \text{sur} \ \ \Gamma_N, \quad \text{(condition de Newman).}$$

Pour les corps viscoélastiques, on a

$$\sigma\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu\partial_n u + \theta\partial_n \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_2 \end{bmatrix}.$$

Donc, la condition de Newman devient

$$\mu\partial_n u + \theta\partial_n \dot{u} = f_2 \quad \text{sur} \ \ \Gamma_N.$$

5. **Lois de frottement**

D'abord, à partir de (3.1.22) et (3.1.27), nous déduisons que le déplacement

normal disparait $u_n = 0$, ce qui montre que le contact est bilatéral, c'est-à-dire que le contact est conservé pendant toute la durée du processus.
En utilisant maintenant (3.1.22), (3.1.23), (3.1.19) et (3.1.27) nous conclurons que

$$u_\tau = (0,0,u) \quad , \quad \sigma_n(u) = 0 \quad , \quad \sigma_\tau(u) = (0,0,\mu\partial_n u) \tag{3.1.31}$$

Nous pouvons maintenant décrire les principales conditions de frottement. Nous supposons que le frottement est modélisé par les conditions(3.1.15) ci-dessus sur Γ_C.
En utilisant (3.1.31), pour trouver que (3.1.15) devient

$$\begin{cases} \mid \mu\partial_n u \mid \leq g, & \text{si } \dot{u} = 0, \\ \mu\partial_n u = -g\frac{\dot{u}}{|\dot{u}|}, & \text{si } \dot{u} \neq 0. \end{cases} \tag{3.1.32}$$

La fonction g satisfait

$$g \in L^2(\Gamma_C), \quad g(x) \geq 0 \quad p.p.\ x \in \Gamma_C. \tag{3.1.33}$$

Mais, si la loi de frottement (3.1.32) dépendant de glissement total ou du taux de glissement total, alors g satisfait

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(a)} & g : \Gamma_C \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+. \\ \text{(b)} & \text{Il existe } L_g > 0 \text{ tel que} \\ & \qquad |g(x,r_1) - g(x,r_2)| \leq L_g\ |r_1 - r_2|, \\ & \qquad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, p.p.x \in \Gamma_C. \\ \text{(c)} & \text{L'application } x \mapsto g(x,r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_C, \\ & \text{pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ \text{(d)} & \text{L'application } x \mapsto g(x,0) \text{ appartient à } L^2(\Gamma_C). \end{array}\right\} \tag{3.1.34}$$

Notons que la condition (3.1.34)(b) montre que $g(x,) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue de Lipschitz, uniformément par rapport à $x \in \Gamma_C$; les autres conditions de (3.1.34) sont introduites pour des raisons mathématiques, puisqu'elles garantissent que l'application $x \longrightarrow g(x,\xi(x))$ appartient à $L^2(\Gamma_C)$ pour tout $\xi \in L^2(\Gamma_C)$.

Ici, et dans ce qui suite nous intéressons aux problèmes suivants.

Trouver $u : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$
(\mathbf{P_{CFGT}}) \begin{cases} div(\mu\nabla u(t) + \theta\nabla\dot{u})(t) + f_0(t) = 0 & \text{dans } \Omega \times [0,T], \\ u(t) = 0 & \text{sur } \Gamma_D \times [0,T], \\ \mu\partial_n u(t) + \theta\partial_n\dot{u}(t) = f_2(t) & \text{sur } \Gamma_N \times [0,T], \\ \begin{cases} | \mu\partial_n u(t) + \theta\partial_n\dot{u}(t) | \leq g(Su(t)), & \text{si } \dot{u}(t) = 0, \\ \mu\partial_n u(t) + \theta\partial_n\dot{u}(t) = -g(Su(t))\frac{\dot{u}(t)}{|\dot{u}(t)|}, & \text{si } \dot{u}(t) \neq 0. \end{cases} & \text{sur } \Gamma_C \times [0,T], \\ u(0) = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}
$$

$$
(\mathbf{P_{CFTGT}}) \begin{cases} div(\mu\nabla u(t) + \theta\nabla\dot{u})(t) + f_0(t) = 0 & \text{dans } \Omega \times [0,T], \\ u(t) = 0 & \text{sur } \Gamma_D \times [0,T], \\ \mu\partial_n u(t) + \theta\partial_n\dot{u}(t) = f_2(t) & \text{sur } \Gamma_N \times [0,T], \\ \begin{cases} | \mu\partial_n u(t) + \theta\partial_n\dot{u}(t) | \leq g(S\dot{u}(t)), & \text{si } \dot{u}(t) = 0, \\ \mu\partial_n u(t) + \theta\partial_n\dot{u}(t) = -g(S\dot{u}(t))\frac{\dot{u}(t)}{|\dot{u}(t)|}, & \text{si } \dot{u}(t) \neq 0. \end{cases} & \text{sur } \Gamma_C \times [0,T], \\ u(0) = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}
$$

Dans l'étude des problèmes mécanique $(\mathbf{P_{CFGT}})$ et $(\mathbf{P_{CFTGT}})$ nous supposons les hypothèses suivantes.

Nous supposons que les forces volumiques f_0 et les tractions surfaciques f_2 ont la régularité suivante

$$
f_0 \in C([0,T]; L^2(\Omega)), \quad f_2 \in C([0,T]; L^2(\Gamma_N)). \tag{3.1.35}
$$

On suppose que les coefficients de l'élasticité et de viscosité satisfont

$$
\mu \in L^\infty(\Omega) \tag{3.1.36}
$$

$$
\theta \in L^\infty(\Omega), \text{ il existe } \theta^* > 0, \text{ tel que } \theta(x) \geq \theta^* \text{ p.p } x \in \Omega. \tag{3.1.37}
$$

Nous introduisons l'espace fonctionnel V donné par

$$
V = \{v \in H^1(\Omega), \quad v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D\}.
$$

Ici, l'égalité $v = 0$ sur Γ_D s'entend au sens de traces. L'espace V est un espace de Hilbert séparable muni de produit scalaire

$$
< u, v >_V = < \nabla u, \nabla v >_{L^2(\Omega)^2} .
$$

Par conséquent, par la définition de V, nous obtenons que

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|v\|_V, \quad \forall v \in V. \tag{3.1.38}$$

Nous combinons (3.1.38) et (1.3.1) pour voir qu'il existe $C_\Omega > 0$, qui dépend de Ω et Γ, tel que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega\|v\|_V, \quad \forall v \in V. \tag{3.1.39}$$

Enfin, la donnée initiale vérifiée

$$u_0 \in V. \tag{3.1.40}$$

3.2 Problèmes de friction dépendant du glissement total et du taux de glissement total

Nous définissons les formes bilinéaires : $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ et la fonction $f : [0, T] \longrightarrow V$ par

$$a(u, v) = \int_\Omega \mu \nabla u . \nabla v \, dx, \quad \forall u, v \in V. \tag{3.2.1}$$

$$b(u, v) = \int_\Omega \theta \nabla u . \nabla v \, dx, \quad \forall u, v \in V. \tag{3.2.2}$$

$$< f(t), v >_V = \int_\Omega f_0(t) \; v \; dx + \int_{\Gamma_N} f_2(t) \; v \; da, \quad \forall v \in V, t \in [0, T]. \tag{3.2.3}$$

avec

$$f \in C([0, T]; V). \tag{3.2.4}$$

Pour les problèmes que nous étudions dans cette section, le seuil de frottement g est supposée dépendre du glissement total ou du taux de glissement total et donc g satisfait (3.1.16) ou (3.1.17), respectivement. Pour cette raison, dans ce qui suit, pour chaque fonction $v \in C([0, T]; V)$ on note $Sv(t)$ l'élément de $L^2(\Gamma_C)$ donné par

$$Sv(t) = \int_0^t \mid v(s) \mid ds, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.2.5}$$

Notez également que dans (3.2.5) nous écrivons $|v(s)|$ pour la valeur absolue de la trace de la fonction $v(s)$ sur Γ_C qui est un élément de $L^2(\Gamma_C)$ et l'intégrale ci-dessus

est comprise dans l'espace $L^2(\Gamma_C)$. En conséquent, $Sv(t) \in L^2(\Gamma_C)$, et S est un opérateur qui associe chaque fonction $v \in C([0,T];V)$ à la fonction $Sv \in C([0,T];L^2(\Gamma_C))$, c'est-à-dire ; $S : C([0,T];V) \longrightarrow C([0,T];L^2(\Gamma_C))$.
La fonctionnelle $j : L^2(\Gamma_C) \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$j(\eta, v) = \int_{\Gamma_C} g(\eta) \mid v \mid da, \quad \forall \eta \in L^2(\Gamma_C), v \in V. \tag{3.2.6}$$

Ainsi, le problème de contact viscoélastique antiplan avec la loi de frottement total dépendant du glissement est formulée par $(\mathbf{P_{CFGT}})$ et la formulation classique du problème de contact viscoélastique antiplan avec loi de frottement dépendant du taux de glissement total est formulée par $(\mathbf{P_{CFTGT}})$.

Maintenant, on va énoncer les deux problèmes variationnels suivants :

Problème 01.

Trouver $u : [0,T] \longrightarrow V$ tel que

$$a(u(t), v - \dot{u}(t)) + b(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + j(Su(t), v) - j(Su(t), \dot{u}(t))$$
$$\geq < f(t), v - \dot{u}(t) >_V, \quad \forall v \in V, t \in [0,T], \tag{3.2.7}$$
$$u(0) = u_0. \tag{3.2.8}$$

Problème 02.

Trouver $u : [0,T] \longrightarrow V$ tel que

$$a(u(t), v - \dot{u}(t)) + b(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + j(S\dot{u}(t), v) - j(S\dot{u}(t), \dot{u}(t))$$
$$\geq < f(t), v - \dot{u}(t) >_V, \quad \forall v \in V, t \in [0,T], \tag{3.2.9}$$
$$u(0) = u_0. \tag{3.2.10}$$

3.2.1 Formulations variationnelles

Nous allons présenter dans la suite les deux formulations variationnelles des problèmes $(\mathbf{P_{CFGT}})$ et $(\mathbf{P_{CFTGT}})$.

Supposons que le problème ($\mathbf{P_{CFGT}}$) admet une solution $u \in V$. Multiplier l'équation d'équilibre par $(v - \dot{u}(t)) \in V$, pour tout $t \in [0, T]$, puis en intégrant le résultat sur Ω.

$$\int_{\Omega} div(\mu \nabla u(t) + \theta \nabla \dot{u}(t))(v - \dot{u}(t))dx + \int_{\Omega} f_0(t)(v - \dot{u}(t))dx = 0, \quad \forall v \in V.$$

On utilise la formule de Green, on trouve

$$\int_{\Omega} (\mu \nabla u(t) + \theta \nabla \dot{u}(t)).\nabla(v - \dot{u}(t))dx = \int_{\Omega} f_0(t)(v - \dot{u}(t))dx +$$
$$\int_{\Omega} ((\mu \nabla u(t) + \theta \nabla \dot{u}(t)).\mathbf{n})(v - \dot{u}(t))da, \quad \forall v \in V,$$

et

$$\int_{\Omega} (\mu \nabla u(t) + \theta \nabla \dot{u}(t)).\nabla(v - \dot{u}(t))dx = \int_{\Omega} f_0(t)(v - \dot{u}(t))dx + \tag{3.2.11}$$
$$\int_{\Gamma} (\mu \partial_n u(t) + \theta \partial_n \dot{u}(t))(v - \dot{u}(t))da, \quad \forall v \in V.$$

D'abord, calculons l'intégrale $\int_{\Gamma} (\mu \partial_n u(t) + \theta \partial_n \dot{u}(t))(v - \dot{u}(t))da$.

Puisque $\Gamma = \Gamma_N \cup \Gamma_D \cup \Gamma_C$ et chaque élément $v \in V$ s'annule sur Γ_D.Alors

L'intégrale sur Γ_D : Sur Γ_D, on a $u = 0$. Donc

$$\int_{\Gamma_D} (\mu \partial_n u(t) + \theta \partial_n \dot{u}(t))(v - \dot{u}(t))da = 0, \quad \forall v \in V. \tag{3.2.12}$$

L'intégrale sur Γ_N : Sur Γ_N, on a $\mu \partial_n u(t) + \theta \partial_n \dot{u}(t) = f_2(t)$.

Donc

$$\int_{\Gamma_N} (\mu \partial_n u(t) + \theta \partial_n \dot{u}(t))(v - \dot{u}(t))da = \int_{\Gamma_N} f_2(t)(v - \dot{u}(t))da, \quad \forall v \in V. \tag{3.2.13}$$

L'intégrale sur Γ_C : Nous montrons

$$\mu \partial_n u + \theta \partial_n \dot{u} \geq g(Su(t)) \mid \dot{u}(t) \mid - g(Su(t)) \mid v \mid .$$

En effet,

Si $\dot{u} \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
(\mu \partial_n u(t) + \theta \partial_n \dot{u}(t))(v - \dot{u}(t)) &= -g(Su(t)) \frac{\dot{u}(t)}{\mid \dot{u}(t) \mid}(v - \dot{u}(t)) \\
&= -g(Su(t)) \frac{\dot{u}(t)v}{\mid \dot{u}(t) \mid} + g(Su(t)) \frac{\dot{u}^2(t)}{\mid \dot{u}(t) \mid} \\
&= g(Su(t)) \mid \dot{u}(t) \mid - g(Su(t)) \frac{\dot{u}(t)v}{\mid \dot{u}(t) \mid}
\end{aligned}$$

D'autre part, on a $\dot{u}(t)v \leq\mid \dot{u}(t)v \mid$, alors $\frac{\dot{u}(t)v}{|\dot{u}(t)|} \leq \frac{|\dot{u}(t)v|}{|\dot{u}(t)|}$. Donc

$$(\mu\partial_n u(t) + \theta\partial_n \dot{u}(t))(v - \dot{u}(t)) \geq g(Su(t)) \mid \dot{u}(t) \mid -g(Su(t)) \mid v \mid$$

Si $\dot{u} \neq 0$, on a aussi

$$\begin{aligned}(\mu\partial_n u(t) + \theta\partial_n \dot{u}(t))(v - \dot{u}(t)) &= (\mu\partial_n u(t) + \theta\partial_n \dot{u}(t))v \\ &\geq - \mid \mu\partial_n u(t) + \theta\partial_n \dot{u}(t) \mid\mid v \mid\end{aligned}$$

Par $(\mathbf{P_{CFGT}})$, on a $\mid \mu\partial_n u(t) + \theta\partial_n \dot{u}(t) \mid\leq g(Su(t))$. Donc

$$\begin{aligned}\mu\partial_n u(t) + \theta\partial_n \dot{u}(t) &\geq -g(Su(t)) \mid v \mid \\ &= g(Su(t)) \mid \dot{u}(t) \mid -g(Su(t)) \mid v \mid .\end{aligned}$$

D'où

$$\int_{\Gamma_C} (\mu\partial_n u(t) + \theta\partial_n \dot{u}(t))(v - \dot{u}(t))da \geq \int_{\Gamma_C} g(Su(t)) \mid \dot{u}(t) \mid da - \int_{\Gamma_C} g(Su(t)) \mid v \mid da. \tag{3.2.14}$$

Par les inégalités (3.2.12),(3.2.13) et (3.2.14), la formule (3.1.26) devient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} (\mu\nabla u(t) + \theta\nabla\dot{u}(t)).\nabla(v - \dot{u}(t))dx &\geq \int_{\Omega} f_0(t)(v - \dot{u}(t))dx + \int_{\Gamma_C} g(Su(t)) \mid \dot{u}(t) \mid da \\ &- \int_{\Gamma_C} g(Su(t)) \mid v \mid da + \int_{\Gamma_N} f_2(t)(v - \dot{u}(t))da,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \mu\nabla u(t).\nabla(v - \dot{u}(t))dx + \int_{\Omega} \theta\nabla\dot{u}(t).\nabla(v - \dot{u}(t))dx + \int_{\Gamma_C} g(Su(t)) \mid v \mid da \\ - \int_{\Gamma_C} g(Su(t)) \mid \dot{u}(t) \mid da \geq \int_{\Omega} f_0(t)(v - \dot{u}(t))dx + \int_{\Gamma_N} f_2(t)(v - \dot{u}(t))da.\end{aligned}$$

En utilisant les relations (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3) et (3.2.6) avec une condition initiale, alors on obtient (3.2.7) et (3.2.8).

Ce qui conclut la formulation variationnelle du problème $(\mathbf{P_{CFGT}})$ (voir le **problème01**).

Refaire les mêmes étapes précédente pour obtenir la formulation variationnelle du problème $(\mathbf{P_{CFGT}})$, à part dans le calcule d'intégrale $\int_{\Gamma} (\mu\partial_n u(t) + \theta\partial_n \dot{u}(t))(v - \dot{u}(t))da$ sur Γ_C, au lieu de prendre $g(Su(t))$ on écrit $g(S\dot{u}(t))$.

3.2.2 Principaux résultats d'existence et d'unicité

Maintenant, nous allons présenter les résultats d'existence et d'unicité des solutions faibles des problèmes **01** et **02**.

Théorème 3.2. *Supposons que* (3.1.35), (3.1.36),(3.1.37) (3.1.40), *et* (3.1.34) *sont satisfaites. Alors*
(1) Il existe une solution unique $u \in C^1([0,T];V)$ *du* ***problème 01****.*
(2) Il existe une solution uniqueu $\in C^1([0,T];V)$ *du* ***problème 02****.*

Preuve. Nous commençons par montrer les conditions suivantes.
1. La continuité des formes bilinéaires symétriques
Soit la forme bilinéaire symétrique $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \mu \nabla u.\nabla v dx, \quad \forall u,v \in V.$$

Et $\mu \in L^\infty(\Omega)$. On a pour tout $u,v \in V$

$$\mid a(u,v) \mid = \mid \int_{\Omega} \mu \nabla u.\nabla v \; dx \mid \leq \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} \mid \int_{\Omega} \nabla u.\nabla v \; dx \mid .$$

Par la définition $\nabla u = (u_{,1}, u_{,2})$, on a

$$\mid a(u,v) \mid \leq \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} \mid \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} u_{,i} v_{,i} dx \mid .$$

En utilisant maintenant le produit scalaire

$$< f, g >_{L^2(\Omega)^n} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} f_i(x) g_i(x) dx. \tag{3.2.15}$$

On trouve

$$\mid a(u,v) \mid \leq \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} \mid < \nabla u, \nabla v >_{L^2(\Omega)^2} \mid . \tag{3.2.16}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-schwartz sur (3.2.16), on obtient

$$\begin{aligned} \mid a(u,v) \mid &\leq \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^2} \; \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^2}, \\ &= \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_V \|v\|_V. \end{aligned}$$

Donc, il existe $M = \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} > 0$, tel que

$$| \, a(u,v) \, | \leq M \|u\|_V \|v\|_V.$$

D'où la continuité de la forme a.

Par la même méthode on montre que la forme b est continue (i.e, il existe $M' \|\theta\|_{L^\infty(\Omega)} > 0$), telle que

$$| \, b(u,v) \, | \leq M' \|u\|_V \|v\|_V.$$

2. La Coercivité des formes bilinéaires symétriques

Soit $\theta \in L^\infty(\Omega)$. Pour tout $v \in V$, on a

$$b(v,v) = \int_\Omega \theta \nabla v . \nabla v \, dx.$$

Par (3.1.37), on a

$$\begin{aligned}
b(v,v) &\geq \int_\Omega \theta^* \nabla v . \nabla v \, dx, \\
&\geq \theta^* \int_\Omega \nabla v . \nabla v \, dx, \\
&= \theta^* \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} v_{,i}^2 \, dx, \\
&= \theta^* \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega v_{,i}^2 \, dx = \theta^* \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)^2} = \theta^* \|v\|_V^2 \,, \quad \forall v \in V.
\end{aligned}$$

Donc il existe $m = \theta^* > 0$, tel que

$$b(v,v) \geq m \|v\|_V^2 \,, \quad \forall v \in V.$$

D'où la coercivité de la forme b.

Par la même méthode on montre que la forme a est coercive (i.e il existe $m' = \mu^* > 0$, telle que $a(v,v) \geq m' \|v\|_V^2$, pour tout $v \in V$).

3. La condition (3.1.34) sur g implique que la fonctionnelle j donnée par (3.2.6) satisfait l'hypothèse (2.1.6) avec $E = V$ et $F = L^2(\Gamma_C)$, aussi, il résulte de (3.2.5)que

$$\Big\| S v_1(t) - S v_2(t) \Big\|_{L^2(\Gamma_C)} \leq \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_{L^2(\Gamma_C)} \, ds,$$
$$\forall v_1, v_2 \in C([0,T]; V), t \in [0,T].$$

Et par(3.1.39), l'opérateur $S : C([0,T];V) \longrightarrow C([0,T];L^2(\Gamma_C))$ satisfait (2.5.1) pour $E = V$ et $F = L^2(\Gamma_C)$.
La régularité (3.2.4) et (3.1.40) montrent (2.3.6) et (2.3.7).

D'après toutes ces propriétés, nous appliquons le résultat du théorème 2.9 aux problèmes (3.2.7)-(3.2.8) et (3.2.9)-(3.2.10), on trouve les résultats d'existence et d'unicité de la solution $u \in C^1([0,T];V)$ de chaque problème posé.
Ce qui termine la démonstration. $\square$

Bibliographie

[1] **R.A. Adams,** Sobolev spaces. Academic Press, New York, (1975).

[2] **R.A. Adams, J Fournier,** Sobolev Spaces. Edition Academic, Elsevier, (2003).

[3] **R.A . Adams, J. Fournier,** Some imbedding theorems for Sobolev spaces. Canad. J. Math. 23,3 (1971), 517– 530.

[4] **G. Allaire,** Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique. Editions Ecole Polytechnique, (2005).

[5] **D. Azé,** Eléments d'Analyse Convexe et Variationnelle. Ellipses, (1998).

[6] **A. Bensoussan, J-L. Lions,** Inéquations quasi variationnelles dépendant d'un paramètre. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze 4.2 (1977), 231–255.

[7] **N. Boccara,** Analyse Fonctionnelle : une introduction pour physiciens. Ellipses, (1984).

[8] **F. Boyer,** Analyse Fonctionnelle : cours de Master Mathématiques et Applications Première année. Aix-Marseille Université, (2014).

[9] **H. Brezis,** Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications. Masson, Paris, (1987).

[10] **H. Brezis,** Functional Analysis, Sobolev Spaces and Pariel Differential Equation. Springer, (2010).

[11] **G. Duvaut, J.L.Lions,** Les inéquations en Mécanique et en Physique. Dunod, (1972).

[12] **I. Ekeland, R. Temam,** Convex analysis and variational problems. American Elsevier Publishing Company, Inc, New York, (1976).

[13] **G. Fichera.** Problemi elastostatici con vincoli unilaterali, II Problema di Signorini con ambique condizioni al contorno. Mem. Accad. Naz. Lincei, S. VIII, Vol. VII, Sez. I., 5, (1964).

[14] **V. Isakov,** Sobolev Espace in Mathématics III, Apllication in Mathématical physiques. Springer, (2009).

[15] **Y. Privat,** Espaces Vectoriels Normés et Topologie : cours 2ème année Cycle Préparatoire Polytechnique. Université Henri Poincaré Nancy 1, (2000).

[16] **W. Rudin,** Functional analysis. Tata McGraw, (1973).

[17] **H. Saoud, S. Adly, M. Théra,** Étude des problèmes unilatéraux. Thèse de Dotorat, Département Maths-Info, Laboratoire XLIM, Université de Limoges, N 12, (2009).

[18] **L. Schwartz,** Analyse hilbertienne. Paris-Hermann, (1979).

[19] **A. Signorini,** Questioni de elasticita non linearizzata e semi-linearizzata. Rend de Matematica, Rome, (1959).

[20] **A. Signorini,** Sopra alcune questioni di elastostatica. Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, (1933).

[21] **M. Sofonea, A. Matei,** Variational inequalities with applications, A study of antiplane frictional contact problems. Advances inmachanics and mathematics, Springer, (2009).

[22] **M. Sofonea,** Modélisation Mathématique en Mécanique du Contact. Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series 32 (2005), 67–74.

[23] **M. Sofonea,** Problèmes non linéaires dans la Théorie de l'élasticité : cours de Magister de Mathématiques Appliquées. Université de Sétif, Algérie, (1993).

[24] **P. Villaggio,** Mathematical Models for Elastic. Cambridge University Press, New York, (1997).

[25] **M. Willem,** Analyse Convexe et Optimisation. Editions Ciaco, Bruxelles, (1989).

[26] **M. Willem,** Analyse fonctionnelle élémentaire. Cassini, Paris, (2003).