

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université de Mohammed Seddik Ben Yahia-Jijel



Faculté des Sciences Exactes et Informatique  
Département de Mathématiques

N° d'ordre :.....

N° de série :.....

## Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

**Master**

**Spécialité** : Mathématiques

**Option** : EDP et applications

### Thème

**Stabilité globale d'un problème  
d'évolution du premier ordre gouverné  
par le cône normal proximal**

**Présenté par :**

- Medjekal Bouchra

**Devant le jury composé de :**

**T. Haddad**

**Professeur Université de Jijel Président**

**S. Lounis**

**M.C.A Université de Jijel Encadreur**

**C. Arroud**

**M.C.B Université de Jijel Examineur**

Promotion **2020-2021**

## ※ *Remerciements* ※

Avant tout, je remercie ALLAH le tout puissant qui m'a donné la force et la volonté pour pouvoir finir ce mémoire de fin d'étude.

Je tiens à exprimer mon plus profond respect à ma encadreur, Mme **Lounis Sabrina**, pour ces conseils précieux et sa critique constructive qui ont été très positifs.

Il est important de remercier ma famille qui est toujours été une source d'encouragement.

Je remercie sincèrement les membres du jury :

- T. Haddad : d'avoir accepté la présidence du Jury.
- C. Arroud : d'avoir accepté l'examineur du Jury.

Merci à tous les enseignants d'université de Mohammed Seddik Ben Yahia -JIJEL-

Sans oublier tout les personnes qui ont y contribué de près ou de loin.

※ *Dédicace* ※

J'ai le grand plaisir de dédier ce modeste travail

♡ A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, celui qui s'est toujours sacrifier pour me voir réussir, à toi mon père "*Ammar*". Que Dieu te garde pour nous.

♡ A celui qui m'a appris à faire le premier pas, celui qui m'a appris à tenir la plume, ma encouragé et m'a planté dans le réel de la patience et de l'amour. Je suis très reconnaissante pour toi, ma mère "*Touffaha*", je te dédie le fruit de mon succès et J'espère que Dieu habitera en vous dans ses vastes jardins et ça fait de toi dans le paradis le plus élevé. Que Dieu ait pitié de vous, ma très chère mère.

♡ A mes chers frères "*Fouzi, Mohammed, Yahia*".

♡ A mes belles soeurs "*Yasmine, Oumaima*".

♡ A mon marie "*Adel*" qui n'a pas cessé de m'encourager tout au long de ce travail pour que j'arrive à ce jour là. Tu est très cher a mon Coeur.

♡ A mon grand-père et à ma grand-mère, je vous souhaite à la fois une bonne santé.

♡ A toute ma famille "*Medjekal*" et la famille "*Bouabdellah*".

♡ A tous mes amies surtout "*Asma*", "*Nada*", "*Khawla*", "*Nadjet*" et mes collègues de promos.

※ *Bouchra* ※♡

# Table des matières

<b>Notations générales</b>	<b>2</b>
<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Notions de bases et résultats</b>	
<b>préliminaires</b>	<b>5</b>
1.1 Ensembles convexes . . . . .	5
1.2 Fonctions convexes . . . . .	6
1.3 Distance de Hausdorff . . . . .	8
1.4 La projection . . . . .	8
1.5 Sous différentiels . . . . .	11
1.6 Cônes normaux . . . . .	12
1.6.1 Le cône normal . . . . .	12
1.6.2 Cône de Clarke . . . . .	14
1.6.3 Cône normal proximal . . . . .	15
1.7 Multi-application . . . . .	17
1.8 Les ensembles uniformément prox-réguliers . . . . .	19
1.9 Théorèmes fondamentaux d'analyse fonctionnelle . . . . .	22
1.10 Résultats préparatoires . . . . .	25
<b>2 Existence et unicité de solution pour le processus de Rafle perturbé</b>	<b>27</b>
<b>3 Exemples</b>	<b>32</b>
3.1 Le modèle de jeux. . . . .	32
3.2 Le modèle de mouvement de foule. . . . .	37
<b>Conclusion</b>	<b>37</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>38</b>

# Notations générales

<b>Symbole</b>	<b>: Description</b>
$\mathbb{R}$	: L'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{N}$	: L'ensemble des nombres naturels.
$[a, b]$	: Intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémité $a$ et $b$ .
$H$	: Espace de Hilbert muni de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .
$\text{adh}(C)$	: Adhérence de $C$ .
$\text{int}(C)$	: Intérieur de $C$ .
$C^{(p)}(u, \mathbb{R}^n)$	: L'espace des fonctions continûment différentiables d'ordre $p$ .
$C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	: L'espace des fonctions 1 fois continûment différentiables sur $\mathbb{R}$ .
$C([T_0, T], H)$	: L'espace des fonctions continue sur $[T_0, T]$ .
$L^1([T_0, T], \mathbb{R})$	: L'espace des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont la valeur absolue sur $[T_0, T]$ est intégrable au sens de Lebesgue.
$d_C(\cdot)$	: La distance sur $C$ .
$\text{Proj}_C(\cdot)$	: Projection sur $C$ .
$\text{dom}(f)$	: Domaine effectif de $f$ .
$\text{epi}(f)$	: Epigraphe de $f$ .
$f'_x$	: La dérivée partielle de $f$ par rapport à $x$ .
$\partial f(\cdot)$	: Sous différentiel de $f$ .
$\partial^C f(\cdot)$	: Sous différentiel de Clarke de $f$ .
$\partial^p f(\cdot)$	: Sous différentiel proximal de $f$ .
$B(\cdot)$	: La boule ouverte.
$\bar{B}$	: La boule fermée.
$\partial \bar{B}$	: La frontière de la boule fermée.
$\text{Dom}(F)$	: Le domaine de la multi-application $F$ .
$\text{gr}(F)$	: Le graphe de la multi-application $F$ .
$\text{Im}(F)$	: L'image de la multi-application $F$ .
$F^{-1}$	: L'inverse de la multi-application $F$ .
<i>i.e</i>	: C'est à dire.

# Introduction

Le processus de raffle a été introduit dans les années soixante-dix par J.J. Moreau, avec la motivation dans la théorie de plasticité. Et bien que la théorie ait été produite de la mécanique, mais de nos jours, ce problème reste un objet de recherches mathématiques. Un processus de raffle est le problème d'évolution défini par

$$-\dot{x}(t) \in \mathcal{N}_{C(t)}(x(t)),$$

où  $\mathcal{N}_{C(t)}(x(t))$  est le cône normal de l'ensemble  $C(t)$  au point  $x(t)$ .

L'objectif de ce mémoire, est de détailler un article de **Lakmi Niwanthi Wadippuli, Ivan Gudoshnikov et Oleg Makarenkov** [14] intitulé "Global asymptotic stability of non convexe sweeping process". Le but principal des auteurs était d'étudier l'existence et l'unicité de solution globale pour "le processus de Raffle" perturbé du premier ordre de la forme suivante

$$-\dot{x}(t) \in N_{C(t)}^P(x(t)) + f(t, x(t)) \quad (1)$$

où  $N_{C(t)}^P(x(t))$  est le cône normal proximal de l'ensemble  $C(t)$  au point  $x(t)$ ,  $C(t)$  est uniformément prox-régulier et Lipschitzienne continu et  $f(t, x(t))$  une fonction qui satisfait certaines conditions. En suite ils ont démontré que la solution globale, si elle existe, elle est périodique lorsque  $C(t)$  et  $f(t, x)$  sont périodiques.

Ce mémoire est organisée en trois chapitres. Le premier chapitre est consacré à des notions de base et quelques résultats fondamentaux qui nous ont été nécessaires dans nos diverses démonstrations tels que la convexité et la prox-régularité des ensembles, les cônes normaux, continuité des multi-applications, ... etc puis quelques théorèmes fondamentaux d'analyse fonctionnelle qui nous seront utiles dans la suite.

Dans le deuxième chapitre nous énonçons et démontrons trois théorèmes, le premier théorème donne l'existence du solutions, le deuxième théorème donne l'unicité et la stabilité exponentielle de la solution globale et le troisième théorème donne la périodicité de cette solution pour le problème (1).

Dans le troisième chapitre, nous énonçons deux exemples, dans le premier exemple on va appliquer et vérifier les conditions du théorème d'unicité pour trouver une seule solution globale et dans le deuxième exemple on va voir que le théorème d'existence est inapplicable.

# Chapitre 1

## Notions de bases et résultats préliminaires

Dans ce chapitre nous allons introduire tous les résultats et les notions qui nous seront très utiles tout au long de ce mémoire. On commence par quelques notations, puis nous présentons quelques concepts d'analyse convexe.

### 1.1 Ensembles convexes

**Définition 1.1** Soient  $x, y$  deux points de  $H$ . Le segment entre  $x$  et  $y$  noté  $[x, y]$  est défini par

$$[x, y] = \lambda x + (1 - \lambda)y, \quad \lambda \in [0, 1].$$

**Définition 1.2** (*Ensembles convexes*)

Un sous ensemble  $C$  de  $E$  est dit convexe si et seulement si pour tous  $x, y \in C$ , le segment  $[x, y]$  tout entier contenu dans  $C$ , i.e.,

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

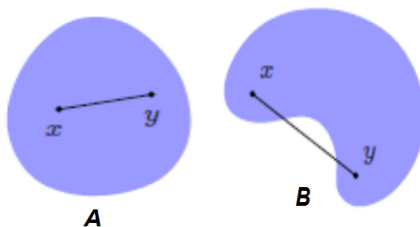


FIGURE 1.1 – convexité.

Dans A on remarque que le segment  $[x, y]$  est inclus dans l'ensemble A, mais dans B le segment  $[x, y]$  n'est pas toujours inclus. Alors, A est convexe et B n'est pas convexe.



**Exemple 1.3**

1. Tout ensemble affine est convexe.
2.  $H$  et  $\emptyset$  sont convexes.
3. Les convexes de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles de  $\mathbb{R}$ .
4. Une boule ouverte ou fermée est convexe.
5. Le cylindre circulaire droit  $C = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$  est un convexe de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Propriété 1.3.1** Soient  $C, C_1$  et  $C_2$  des convexes. Alors, on a

1. pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda(C_1 + C_2) = \lambda C_1 + \lambda C_2$ .
2. pour tout  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $(\lambda + \mu)C = \lambda C + \mu C$ .
3. Toute intersection des ensembles convexes est convexe.
4. Une combinaison linéaire des convexes est un convexe.
5. L'intérieur et l'adhérence d'un convexe  $C$  est un convexe.
6. L'image directe (resp. réciproque) d'un convexe par une application linéaire est convexe.

**Remarque 1.4** L'union des ensembles convexes n'est pas forcément convexe. En effet, prenons les deux boules suivantes

$$B_1 = B((2, 1), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x - 2)^2 + (y - 1)^2 \leq 1\},$$

$$B_2 = B((2, 4), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x - 2)^2 + (y - 4)^2 \leq 1\},$$

on a  $(2, 1), (2, 4) \in B_1 \cup B_2$ , mais si nous prenons  $t = \frac{1}{2}$ , on trouve que

$$\frac{1}{2}(2, 1) + \frac{1}{2}(2, 4) = (2, \frac{5}{2}) \notin B_1 \cup B_2,$$

d'où  $B_1 \cup B_2$  n'est pas convexe.

## 1.2 Fonctions convexes

**Définition 1.5** On appelle domaine effectif (ou simplement domaine) d'une fonction  $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  l'ensemble

$$\text{dom}(f) := \{x \in H; f(x) < \infty\}.$$

**Définition 1.6** La fonction  $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est dite convexe si pour tous  $x, y$  dans  $\text{dom}(f)$  et tout  $\lambda \in [0, 1]$ , on a

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

**Exemple 1.7** Si  $(H, \|\cdot\|)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé, la fonction

$$\begin{aligned} f : H &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = \|x\|, \end{aligned}$$

est convexe sur  $\mathbb{R}$ . En effet, soient  $x, y \in H$  et  $t \in [0, 1]$ , on a

$$\begin{aligned} f(tx + (1 - t)y) &= \|tx + (1 - t)y\| \\ &\leq t\|x\| + (1 - t)\|y\| \\ &= tf(x) + (1 - t)f(y). \end{aligned}$$

**Remarque 1.8** 1) La somme de deux fonctions convexes à valeurs dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  est convexe.

2) Soit  $f : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  une fonction convexe et soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  une fonction convexe croissante sur  $f(H) \setminus \{+\infty\}$ . Alors la fonction  $\varphi \circ f$  définie par  $\varphi \circ f(x) = \varphi(f(x))$  si  $x \in \text{dom}(f)$  et  $(\varphi \circ f)(x) = +\infty$  si  $x \notin \text{dom}(f)$  est convexe.

**Définition 1.9** Soit  $f : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Alors son épigraphe est le sous ensemble de  $H \times \mathbb{R}$  défini par

$$\text{epi}(f) = \{(x, t) \in H \times \mathbb{R} : f(x) \leq t\}.$$

Il s'agit donc de l'ensemble des points de l'ensemble produit  $H \times \mathbb{R}$  qui sont situés au dessus du graphe de  $f$ .

**Théorème 1.10** Soit  $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Alors,  $f$  est convexe si et seulement si  $\text{epi}(f)$  est convexe.

**Définition 1.11** Soit  $C$  une partie non vide de  $H$ , on définit sa fonction indicatrice par

$$\tau_C(x) = \begin{cases} 0, & x \in C, \\ +\infty, & x \notin C. \end{cases}$$

**Remarque 1.12** •  $\text{dom}(\tau_C) = \{x \in H, \tau_C(x) < +\infty\} = C$ ,

•  $\text{epi}(\tau_C) = \{(x, t) \in H \times \mathbb{R}, \tau_C(x) \leq t\} = C \times [0, +\infty[$ ,

• la fonction indicatrice est convexe si et seulement si  $C$  est convexe.

## 1.3 Distance de Hausdorff

### Définition 1.13 (*Fonction distance*)

Soit  $C$  une partie non vide de  $H$ , la fonction distance associée à  $C$  est définie par

$$d_C(x) := \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

**Proposition 1.14** Soit  $C$  une partie non vide de  $H$ . Alors,

1.  $d_C(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \text{adh}(C)$ .
2. La fonction distance est continument Lipschitzienne de rapport égale à 1.

### Définition 1.15 (*Distance de Hausdorff*)

Soient  $H$  un espace de Hilbert,  $C_1$  et  $C_2$  deux sous-ensembles fermés non vide de  $H$ . On appelle distance de Hausdorff entre  $C_1$  et  $C_2$  la fonction numérique  $d_H(.,.)$  définie par

$$d_H(C_1, C_2) := \max(e(C_1, C_2), e(C_2, C_1)),$$

où  $e(A, B)$  est l'écart entre  $A$  et  $B$  défini par

$$e(A, B) = \sup_{a \in A} d_B(a).$$

#### Propriété 1.15.1 (*Propriétés élémentaires*)

1.  $e(A, \emptyset) = \infty$  si  $A = \emptyset$ .
2.  $e(\emptyset, B) = 0$ .
3.  $e(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$ .
4.  $e(A, B) \leq e(A, C) + e(C, B)$ , pour tout ensemble fermé  $C \in H$ .
5.  $d_H(A, B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$ .

## 1.4 La projection

**Définition 1.16** Soit  $H$  un espace de Hilbert. Pour tout  $x \in H$  donné, le sous ensemble de  $A$  noté et défini comme suit

$$\text{Proj}_A(x) = \{a \in A : d_A(x) = \|x - a\|\},$$

s'appelle l'ensemble des points de meilleure approximation de  $x$  par rapport à  $A$ . On dit aussi que  $\text{Proj}_A(x)$  est la projection de  $x$  sur  $A$ .

**Exemple 1.17** Dans le plan  $\mathbb{R}^3$ , on considère la plan  $\mathcal{P}$  de l'équation cartésienne  $2x + y + 3z + 8 = 0$ , et on considère le point  $A = (3, 2, 4)$ .

Soit le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  est le vecteur normal du plan  $\mathcal{P}$ .  $B$  étant le projeté orthogonale du point  $A$  sur le plan  $\mathcal{P}$ ,

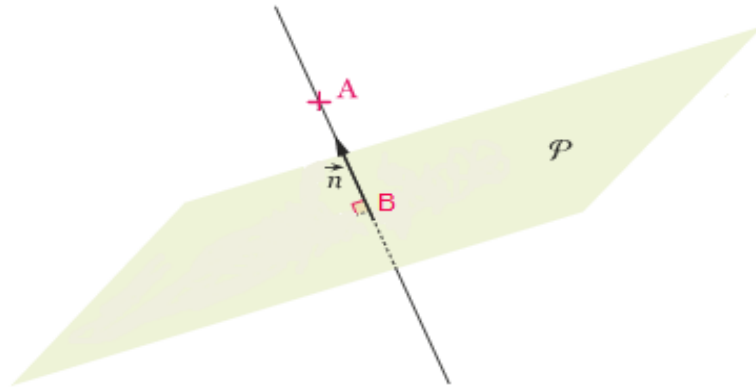


FIGURE 1.2 – Projection du  $B$  sur un plan  $\mathcal{P}$ .

*Cela signifie que la droite  $(BA)$  est orthogonale au plan  $\mathcal{P}$ .*

*Nous pouvons donc donner une écriture paramétrique de la droite  $(BA)$*

$$(BA) : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 4 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

*le point  $B(x_B, y_B, z_B)$  appartient à la droite  $(BA)$  et au plan  $\mathcal{P}$ , donc les coordonnées de  $B$  vérifient le système suivant*

$$\begin{cases} x_B = 3 + 2t \\ y_B = 2 + t \\ z_B = 4 + 3t \\ 2x_B + y_B + 3z_B + 8 = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ x_B = -1 \\ y_B = 0 \\ z_B = -2 \end{cases}$$

donc les coordonnées de la projection orthogonale  $B$  du point  $A$  sur le plan  $\mathcal{P}$  sont alors

$$B(-1, 0, -2).$$

**Remarque 1.18** Afin d'éviter que  $\text{Proj}_A(x)$  soit systématiquement vide pour certain  $x$ , on doit supposer que  $A$  est un fermé de  $H$ .

**Proposition 1.19** Si  $S$  est convexe fermé d'un espace de Hilbert  $H$ , alors la projection est unique, dans ce cas on la note  $P_S$ . De plus, les deux assertions suivantes sont équivalentes

1.  $\forall y \in S : \|x - P_S(x)\| \leq \|x - y\|, \forall x \in H$ ,
2.  $\forall y \in S : \langle x - P_S(x), y - P_S(x) \rangle \leq 0, \forall x \in H$ .

**Remarque 1.20** Soit  $x' \in \text{Proj}_S(x)$ , alors on peut écrire  $x' \in S$  et  $\|x - x'\|^2 \leq \|x - y\|^2$  pour tout  $y \in S$ . Il est facile à montrer que pour tout  $x \in H$  on a

$$x' \in \text{Proj}_S(x) \Leftrightarrow x' \in S \quad \text{et} \quad \langle x - x', y - x' \rangle \leq \frac{1}{2} \|y - x'\|^2 \quad \forall y \in S.$$

En effet, soient  $x \in H$  et  $y \in S$  alors

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|x - x' - (y - x')\|^2 \\ &= \langle x - x' - (y - x'), x - x' - (y - x') \rangle \\ &= \langle x - x', x - x' \rangle + \langle y - x', y - x' \rangle - 2\langle x - x', y - x' \rangle \\ &= \|x - x'\|^2 + \|y - x'\|^2 - 2\langle x - x', y - x' \rangle \\ &\leq \|x - y\|^2 + \|y - x'\|^2 - 2\langle x - x', y - x' \rangle, \end{aligned}$$

donc

$$\langle x - x', y - x' \rangle \leq \frac{1}{2} \|y - x'\|^2.$$

**Lemme 1.21** Soit  $S$  un sous ensemble non vide de  $E$ , alors pour tous  $x, y \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$

1.  $P_{S+y}(x + y) = P_S(x) + y$ .
2.  $P_{\lambda S}(\lambda x) = \lambda P_S(x)$ .

## 1.5 Sous différentiels

Nous commençons cette section par quelques concepts classique de différentiabilité (dérivée directionnelle, dérivée directionnelle de Clarke ...). Soient  $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  et  $\bar{x} \in \text{dom}(f)$ .

### Définition 1.22 ( Dérivée directionnelle )

La dérivée directionnelle de  $f$  au point  $\bar{x}$  dans la direction  $v \in H$  est donnée par

$$f'(\bar{x}, v) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x})}{h},$$

si cette limite existe.

### Définition 1.23 ( Dérivée directionnelle de Clarke )

Supposons que  $f$  est localement lipschitzienne en  $\bar{x}$ . La dérivée directionnelle au sens de Clarke de  $f$  au point  $\bar{x}$  dans la direction  $v \in H$  notée  $f^0(\bar{x}, v)$ , est définie par

$$f^0(\bar{x}, v) = \limsup_{x \rightarrow \bar{x}, t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t},$$

où  $x$  est un vecteur de  $H$  et  $t$  un scalaire positif.

### Définition 1.24 ( Sous différentiel de Clarke )

Le sous différentiel de Clarke d'une fonction localement Lipschitzienne en  $\bar{x} \in H$  est défini par

$$\partial^C f(\bar{x}) = \{ \xi \in H : \langle \xi, v \rangle \leq f^0(\bar{x}, v), \quad \forall v \in H \}.$$

### Définition 1.25 ( Sous différentiel proximal )

Le sous différentiel proximal d'une fonction localement Lipschitzienne en  $\bar{x} \in H$ , est l'ensemble  $\partial^p f(\bar{x})$  de tous les éléments  $\xi \in H$  tels qu'il existe deux constantes réelles positives  $\sigma > 0$  et  $\delta > 0$  qui vérifient

$$\langle \xi, x - \bar{x} \rangle \leq f(x) - f(\bar{x}) + \sigma \|x - \bar{x}\|^2,$$

pour tout  $x \in \overline{B}(\bar{x}, \delta)$ .

**Remarque 1.26** On a toujours

$$\partial^p f(\bar{x}) \subset \partial^C f(\bar{x}).$$

Si  $f$  est convexe continue alors

$$\partial^p f(\bar{x}) = \partial^C f(\bar{x}) = \partial f(\bar{x}).$$

Pour plus de détails voir [1].

## 1.6 Cônes normaux

**Définition 1.27** On dit qu'un sous ensemble  $\Omega$  non vide de  $H$  est un cône si  $\lambda x \in \Omega$  pour tout  $x \in \Omega$  et pour tout  $\lambda \geq 0$ . De plus, si  $\Omega$  est convexe on l'appelle cône convexe.

### 1.6.1 Le cône normal

**Définition 1.28** Soit  $S$  un sous ensemble convexe de  $H$  et soit  $\bar{x} \in S$ . Le cône normal à  $S$  en  $\bar{x}$  est défini par

$$\mathcal{N}_S(\bar{x}) := \{v \in H : \langle v, x - \bar{x} \rangle \leq 0 \quad \forall x \in S\}.$$

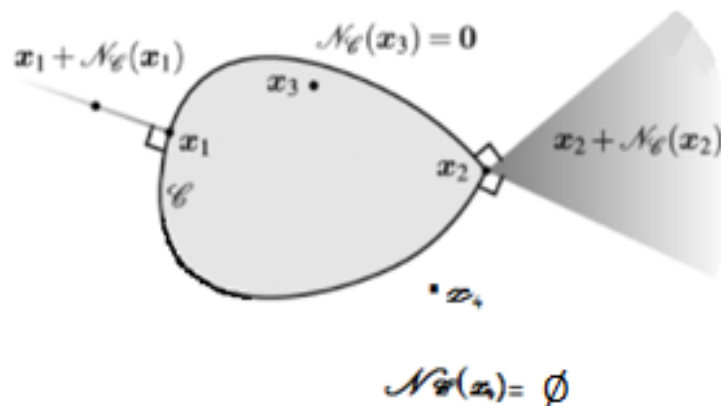


FIGURE 1.3 – Exemple du cône normal.

#### Remarque 1.29

1. Un vecteur  $v$  est un vecteur normal à  $S$  au point  $\bar{x}$  si  $v$  ne fait pas d'angle aigu avec chaque segment de ligne de  $\bar{x}$  dans  $S$ .
2. On a toujours  $\{0\} \subset \mathcal{N}_S(\bar{x})$ .
3. Par convention si  $\bar{x} \notin S$ , alors  $\mathcal{N}_S(\bar{x}) = \emptyset$ .

**Exemple 1.30** Soit  $H = \mathbb{R}$ ,  $S = [0, 1]$ .

- $\bar{x} = 0$

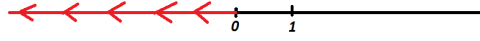


FIGURE 1.4 – Exemple du cône normal.

Donc,  $\mathcal{N}_S(0) = ]-\infty, 0]$ .

- $\bar{x} = 1$



FIGURE 1.5 – Exemple du cône normal.

Donc,  $\mathcal{N}_S(1) = [0, +\infty[$ .

**Exemple 1.31** Soit  $H = \mathbb{R}^2$ ,  $S = [0, 1] \times [-1, 0]$  et  $\bar{x} = (0, 0)$  (l'origine).

On a



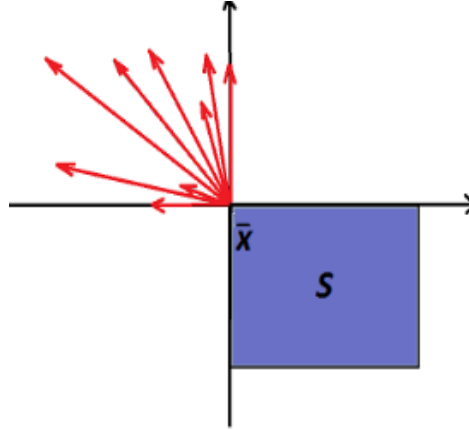


FIGURE 1.6 – Exemple du cône normal.

Donc,  $\mathcal{N}_S(0,0) = ]-\infty, 0] \times [0, +\infty[$ .

**Proposition 1.32** Soit  $S \subset H$  convexe et  $\bar{x} \in S$ , alors  $\mathcal{N}_S(\bar{x})$  est un cône convexe fermé.

**Proposition 1.33** Soit  $S$  un sous ensemble non vide convexe et d'intérieur non vide dans  $H$ . Si  $\bar{x} \in \text{int}(S)$  alors

$$\mathcal{N}_S(\bar{x}) = 0.$$

**Proposition 1.34** Soit  $S$  un sous ensemble convexe fermé de  $H$ , si  $y = \text{Proj}_S(x)$ . Alors,  $y = (I + \mathcal{N}_S)^{-1}(x)$ , donc

$$[I + \mathcal{N}_S(\cdot)]^{-1} = \text{Proj}_S(\cdot).$$

**Démonstration** Soient  $x, y \in H$  tels que  $y = \text{Proj}_S(x)$ , on a

$$\begin{aligned} y = \text{Proj}_S(x) &\Leftrightarrow \langle x - y, c - y \rangle \leq 0 \quad \forall c \in S \\ &\Leftrightarrow x - y \in \mathcal{N}_S(y) \\ &\Leftrightarrow x \in y + \mathcal{N}_S(y) \\ &\Leftrightarrow x \in [I + \mathcal{N}_S](y) \\ &\Leftrightarrow y = [I + \mathcal{N}_S]^{-1}(x). \end{aligned}$$

■

## 1.6.2 Cône de Clarke

**Définition 1.35 (Cône tangent de Clarke)**

On appelle cône tangent de Clarke de l'ensemble  $S$  au point  $\bar{x}$  noté  $T_S^C(\bar{x})$ , l'ensemble défini par

$$T_S^C(\bar{x}) = \{v \in H : d^0(\bar{x}_0; v, S) = 0\}.$$

**Définition 1.36** (*Cône normal de Clarke*)

On appelle cône normal de Clarke de l'ensemble  $S$  au point  $\bar{x}$ , qu'on note  $N_S^C(\bar{x})$ , l'ensemble défini par

$$N_S^C(\bar{x}) = (T_S^C(\bar{x}))^0 = \{\xi \in H : \langle \xi, y \rangle \leq 0, \forall y \in T_S^C(\bar{x})\}.$$

**Remarque 1.37**

1. Si  $S$  est convexe, alors

$$N_S^C(\bar{x}) = \{\xi \in H : \langle \xi, y \rangle \leq 0, \forall y \in S\} = \mathcal{N}_S(\bar{x}).$$

2. Le cône normal de Clarke de l'ensemble  $S$  au point  $\bar{x}$  et le sous différentiel de Clarke de la fonction indicatrice de l'ensemble  $S$  au point  $\bar{x}$  coïncident.

**1.6.3 Cône normal proximal**

Soit  $S$  un sous ensemble non vide de  $H$  et soit  $x \in S$ .

Le cône normal proximal de  $S$  au point  $\bar{x}$  est donné par

$$N_S^P(\bar{x}) := \{\xi \in H, \exists \alpha > 0 : d_S(\bar{x} + \alpha\xi) = \alpha\|\xi\|\},$$

en d'autres termes

$$N_S^P(\bar{x}) = \{\xi \in H, \exists \alpha > 0 : \bar{x} \in \text{Proj}_S(\bar{x} + \alpha\xi)\}.$$

**Remarque 1.38**

Quand  $x \notin S$ , le cône normal proximal est indéfini. Par contre lorsqu'on a  $\bar{x} \in S$  avec  $\bar{x} \notin \text{Proj}_S(\bar{u})$  pour tout  $\bar{u} \notin S$  (i.e., qu'il n'existe pas de point  $\bar{u}$  extérieur à  $S$  tel que  $\bar{x} \in \text{Proj}_S(\bar{u})$  ce qui est le cas quand  $\bar{x} \in \text{int}S$ ) on pose  $N_S^P(\bar{x}) = \{0\}$ .

**Proposition 1.39** *Le Cône normal proximal admet la caractérisation analytique suivante*

$$\begin{aligned} \varphi \in N_S^P(\bar{x}) &\Leftrightarrow \exists \sigma, \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} \langle \varphi, x - \bar{x} \rangle \leq \sigma \|x - \bar{x}\|^2, \\ \forall x \in (\bar{x} + \delta\bar{B}) \cap S. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists \sigma = \sigma(\varphi, \bar{x}) \quad \text{tel que} \quad \langle \varphi, x - \bar{x} \rangle \leq \sigma \|x - \bar{x}\|^2, \quad \forall x \in S. \end{aligned}$$

**Démonstration** Nous commençons par la première caractérisation. Supposons que  $\varphi \in N_S^P(\bar{x})$ . Alors,

$$\begin{aligned}
\varphi \in N_S^P(\bar{x}) &\Leftrightarrow d_S(\bar{x} + \alpha\varphi) = \alpha\|\varphi\| \quad \text{pour un certain } \alpha > 0 \\
&\Leftrightarrow \|\bar{x} + \alpha\varphi - \bar{x}\|^2 \leq \|\bar{x} + \alpha\varphi - x\|^2 \quad \forall x \in S \\
&\Leftrightarrow \|\bar{x} + \alpha\varphi\|^2 + \|\bar{x}\|^2 - 2\langle \bar{x} + \alpha\varphi, \bar{x} \rangle \leq \|\bar{x} + \alpha\varphi\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle \bar{x} + \alpha\varphi, x \rangle \quad \forall x \in S \\
&\Leftrightarrow 2\langle \bar{x} + \alpha\varphi, x - \bar{x} \rangle \leq \|x\|^2 - \|\bar{x}\|^2 \quad \forall x \in S \\
&\Leftrightarrow 2\langle \bar{x}, x \rangle - 2\|\bar{x}\|^2 + 2\alpha\langle \varphi, x - \bar{x} \rangle \leq \|x\|^2 - \|\bar{x}\|^2 \quad \forall x \in S \\
&\Leftrightarrow 2\alpha\langle \varphi, x - \bar{x} \rangle \leq \|x\|^2 + \|\bar{x}\|^2 - 2\langle x, \bar{x} \rangle \quad \forall x \in S \\
&\Leftrightarrow \langle \varphi, x - \bar{x} \rangle \leq \frac{1}{2\alpha} (\|x - \bar{x}\|^2) \quad \forall x \in S,
\end{aligned}$$

ce qui montre la première caractérisation en posant  $\sigma = \frac{1}{2}$ .

Montrons maintenant l'équivalence entre les deux caractérisation du cône normal proximal. Supposons qu'il existe  $\sigma > 0$  et  $\delta > 0$  tels que

$$\langle \varphi, x - \bar{x} \rangle \leq \sigma\|x - \bar{x}\|^2,$$

pour tout  $\forall x \in (\bar{x} + \delta\bar{B}) \cap S$ . Soit  $x \in S$  de sorte que  $\|x - \bar{x}\| > \delta$ . On distingue donc deux cas :

1. Si  $\|x - \bar{x}\| \geq 1$ , on a

$$\| \|x\| - \|\bar{x}\| \| \leq \|x - \bar{x}\| \leq \|x - \bar{x}\|^2.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, x - \bar{x} \rangle &\leq \|\varphi\|\|x - \bar{x}\| \\
&\leq \|\varphi\|(\|x\| + \|\bar{x}\|) \\
&\leq \|\varphi\|(\|x\| - \|\bar{x}\| + 2\|\bar{x}\|) \\
&\leq \|\varphi\|(\|x\| - \|\bar{x}\| + 2\|\bar{x}\|) \\
&\leq \|\varphi\|(\|x - \bar{x}\|^2 + 2\|\bar{x}\|) \\
&\leq \|\varphi\|(\|x - \bar{x}\|^2 + 2\|\bar{x}\|\|x - \bar{x}\|^2) \\
&= \|\varphi\|(1 + 2\|\bar{x}\|)\|x - \bar{x}\|^2.
\end{aligned}$$

2. Si  $\|x - \bar{x}\| < 1$ , alors  $\delta < \|x - \bar{x}\| < 1$ , pour un certain  $\delta > 0$ . Ce qui montre que

$\frac{1}{\delta} \|x - \bar{x}\| > 1$  et  $\frac{1}{\delta} > 1$ . On obtient donc

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, x - \bar{x} \rangle &\leq \|\varphi\| \|x - \bar{x}\| \\
&\leq \|\varphi\| (\|x\| + \|\bar{x}\|) \\
&\leq \|\varphi\| (\|x - \bar{x}\| + 2\|\bar{x}\|) \\
&\leq \|\varphi\| \left( \frac{\|x - \bar{x}\|}{\delta} + 2\|\bar{x}\| \right) \\
&\leq \|\varphi\| \left( \frac{1}{\delta^2} \|x - \bar{x}\|^2 + 2\|\bar{x}\| \right) \\
&\leq \|\varphi\| \left( \frac{\|x - \bar{x}\|^2}{\delta^2} + 2\|\bar{x}\| \frac{\|x - \bar{x}\|^2}{\delta^2} \right) \\
&\leq \|\varphi\| (1 + 2\|\bar{x}\|) \frac{\|x - \bar{x}\|^2}{\delta^2} \\
&\leq \left( \frac{\|\varphi\|}{\delta^2} \right) (1 + 2\|\bar{x}\|) \|x - \bar{x}\|^2.
\end{aligned}$$

Prenons donc  $\bar{\sigma} = \max(\sigma, \|\varphi\|(1 + 2\|\bar{x}\|), \frac{\|\varphi\|}{\delta^2}(1 + 2\|\bar{x}\|))$  pour que

$$\langle \varphi, x - \bar{x} \rangle \leq \bar{\sigma} \|x - \bar{x}\|^2, \quad \forall x \in S.$$

L'implication inverse est évidente. ■

**Remarque 1.40** *Si l'ensemble  $S$  est convexe, alors tous les cônes cités ci-dessus coïncident*

$$\mathcal{N}_S(\bar{x}) = N_S^C(\bar{x}) = N_S^P(\bar{x}).$$

## 1.7 Multi-application

Pour plus de détails sur cette section voir [3].

**Définition 1.41** *Une multi-application (ou application multivoque)  $F$  d'un espace  $X$  vers un espace  $Y$  est une correspondance qui associée à tout élément  $x \in X$  un sous ensemble  $F(x)$  de  $Y$ . On notera  $F : X \rightarrow P(Y)$ , ( $P(Y)$  est l'ensemble de partie de  $Y$ ). Les notations  $F : X \rightarrow 2^Y$  et  $F : \rightrightarrows Y$  sont aussi utilisées dans la littérature.*

**Définition 1.42** *Le domaine, le graphe et l'image de la multi-application  $F : \rightrightarrows Y$  sont donnés par*

$$\begin{aligned}
\text{Dom}(F) &= \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}, \\
\text{gr}(F) &= \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}, \\
\text{Im}(F) &= \bigcup_{x \in \text{Dom}(F)} F(x).
\end{aligned}$$

**Remarque 1.43**

1. Une multifonction  $F : X \rightarrow P(X)$  est à valeurs fermées (resp. convexes) si  $F(x)$  est fermé (resp. convexe) pour tout  $x \in X$ .
2.  $F$  est dite bornée sur les bornés si l'ensemble

$$F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x),$$

est borné dans  $Y$  pour chaque sous ensemble  $A \in \mathcal{P}_b(X)$  où  $\mathcal{P}_b(X)$  est l'ensemble des parties bornées de  $X$ .

**Définition 1.44** Soit  $F : X \rightrightarrows Y$  une multi-application, On appelle sélection de  $F$  toute application  $f : X \rightarrow Y$  vérifie

$$f(x) \in F(x), \quad x \in X.$$

**Définition 1.45** Soit  $E_1$  et  $E_2$  deux ensembles et  $F : E_1 \rightarrow \mathcal{P}(E_2)$  une application multivoque,  $B$  un sous ensemble de  $E_2$ .

1. L'inverse  $F^{-1}$  de  $F$  est l'application multivoque de  $E_2$  dans  $E_1$  définie par la relation

$$x \in F^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in F(x) \Leftrightarrow (x, y) \in \text{gr}(F).$$

i.e.,

$$F^{-1}(y) = \{x \in E_1; y \in F(x)\} = \{x \in E_1; (x, y) \in \text{gr}(F)\}.$$

2. L'image inverse de  $B$  par  $F$  noté  $F^{-1}(B)$ , est définie par

$$F^{-1}(B) = \left\{ x \in E_1; F(x) \cap B \neq \emptyset \right\}.$$

3. Le noyau de  $F$  notée  $F^+(B)$ , est défini par

$$F^+(B) = \{x \in E_1; F(x) \subset B\}.$$

**Définition 1.46 (Continuité au sens de Hausdorff)**

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces métriques,  $F : X \rightrightarrows Y$  une multi-application à valeurs compactes est dite  $H$ -continue ou continue au sens de Hausdorff, si et seulement si, pour toute suite  $(x_n)$  de  $X$  qui converge vers  $x_0$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H(F(x_n), F(x_0)) = 0.$$

## 1.8 Les ensembles uniformément prox-réguliers

**Définition 1.47** Soit  $S$  un ensemble fermé de  $H$  et  $\eta \in ]0, +\infty]$ . On dit que l'ensemble  $S$  est uniformément  $\eta$ -prox-régulier si pour tout  $x \in S$ , et pour chaque  $v \in N_S^P(x)$  avec  $\|v\| \leq 1$  on a

$$x \in P_S(x + tv),$$

pour tout nombre réel positif  $t < \eta$ .

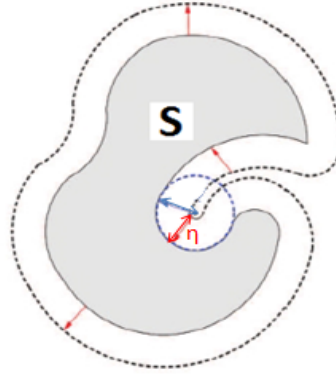


FIGURE 1.7 – L'ensemble  $S$  est  $\eta$ -prox-régulier.

Voici une autre définition de la prox-régularité.

**Définition 1.48** Pour  $\eta \in ]0, +\infty]$ , un ensemble  $S$  est uniformément  $\eta$ -prox-régulier, si et seulement si chaque normale proximale non nulle à  $S$  peut être réalisée par une boule de rayon  $\eta$ , ça signifie que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } \bar{x} \in S \text{ et tout } \xi \in N_S^P(\bar{x}) \text{ on a} \\ \langle \frac{\xi}{\|\xi\|}, x - \bar{x} \rangle \leq \frac{1}{2\eta} \|x - \bar{x}\|^2, \quad \xi \neq 0. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

**Remarque 1.49**

1) Pour tout  $x \in S$ , nous faisons la convention  $\frac{1}{\eta} = 0$  pour  $\eta = +\infty$  et donc

$$S \text{ est } \eta\text{-prox-régulier} \Leftrightarrow S \text{ est convexe.}$$

2) Les deux définitions précédentes sont équivalentes. En effet, fixons  $x \in S$  et  $v \in N_S^P(x) \cap \bar{B}$ , pour tout  $x' \in H$  on a pour tout nombre réel positif  $t \leq \eta$

$$\|x + tv - x'\|^2 = t^2 \|v\|^2 - 2t \langle v, x' - x \rangle + \|x' - x\|^2,$$

par conséquent

$$\|x + tv - x'\|^2 \leq \|x + tv - x\|^2 \quad \forall x' \in S,$$

si et seulement si on a

$$\langle v, x' - x \rangle \leq \frac{1}{2t} \|x' - x\|^2.$$

ce qui montre que  $x \in P_S(x + tv)$  si et seulement si cette dernière inégalité est vérifiée.

### Exemple 1.50

- 1) L'union de deux ensembles convexes n'est pas nécessairement convexe, par contre elle est prox-régulière.
- 2)  $H \setminus B(0, \eta)$  est prox-régulier.
- 3) L'intersection de deux ensembles prox-réguliers n'est pas prox-régulier.

La proposition suivante résume certaines conséquence importante sur la prox-régularité.

**Proposition 1.51** Soient  $S$  un sous-ensemble fermé non vide de  $H$  et  $x \in S$ , les assertions suivantes sont satisfaites

- (i) Soit  $\eta \in ]0, +\infty]$ , si  $S$  est uniformément  $\eta$ -prox-régulier alors pour tout  $x \in S$  avec  $d_S(x) < \eta$  on a  $Proj_S(x)$  existe et unique. De plus

$$\partial^P d_S(x) = \partial^C d_S(x)$$

- (ii) Soit  $\eta \in ]0, +\infty]$  et  $\eta' \in ]0, \eta]$ , si  $S$  est uniformément  $\eta$ -prox-régulier alors le sous-ensemble

$$S(\eta') = \{x \in H; d_S(x) \leq \eta'\} \text{ est } (\eta - \eta') \text{ - prox-régulier.}$$

Pour la démonstration on peut se référer à [9],[10],[13].

**Théorème 1.52** Soit  $S$  un sous-ensemble fermé non vide de  $H$  et  $\eta \in ]0, +\infty]$ , alors les assertions suivantes sont équivalentes

- (a) L'ensemble  $S$  est  $\eta$ -prox-régulier.
- (b) Pour tout  $v \in N_S^P(x) \cap \bar{B}$  et tout nombre réel positif  $t < \eta$  on a

$$x = P_S(x + tv).$$

- (c) Pour tout  $x_i \in S$ ,  $v_i \in N_S^P(x)$ ,  $i = 1, 2$  on a

$$\langle v_1 - v_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -\frac{1}{2} \left( \frac{\|v_1\|}{\eta} + \frac{\|v_2\|}{\eta} \right) \|x_1 - x_2\|^2. \quad (1.2)$$

**Démonstration** •(a)  $\Leftrightarrow$  (b) : Cette équivalence est facile à vérifié car il n'est pas difficile de voir que  $x = Proj_S(x + tv)$  lorsque  $x \in Proj_S(x + t'v)$  pour un certain  $t' > t$ .

•(a)  $\Rightarrow$  (c) : Soit  $v_i \in N_S^P(x_i)$  avec  $i = 1, 2$ . Comme  $S$  est  $\eta$ -prox-régulier, alors par définition on a

$$\begin{aligned}\langle v_1, x_1 - x_2 \rangle &\geq -\frac{\|v_1\|}{2\eta} \|x_1 - x_2\|^2, \\ \langle -v_2, x_1 - x_2 \rangle &\geq -\frac{\|v_2\|}{2\eta} \|x_2 - x_1\|^2,\end{aligned}$$

en additionnant les dernières inégalités on trouve (c)

• Montrons maintenant que (c)  $\Rightarrow$  (a), pour  $x, x' \in S$  et  $v \in N_S^P$ , il suffit de prendre  $v_1 = v, x_1 = x, x_2 = x'$  et  $v_2 = 0$  dans l'inégalité de (c) pour obtenir (a). ■

**Remarque 1.53** Généralement, nous avons  $N_S^P(x) \subset N_S^C(x)$ . Cependant, pour un ensemble  $S$   $\eta$ -prox-régulier, Le cône normal proximal à  $S$  coïncide avec tous les cônes normaux contenus dans le cône normal de Clarke en tout point  $x \in S$ , i.e.,

$$N_S^P(x) = N_S^C(x),$$

pour tout ensemble  $S$  uniformément  $\eta$ -prox-régulier. Dans ce cas on a

$$\mathcal{N}_S(x) = N_S^P(x) = N_S^C(x).$$

**Proposition 1.54** Soit  $S$  un sous ensemble  $\eta$ -prox-régulier de  $H$  avec  $\eta \in ]0, +\infty]$  et soient  $x, x' \in H$ . Si  $x - x' \in \mathcal{N}_S(x')$  et  $\|x - x'\| \leq \eta$  (resp.  $\|x - x'\| < \eta$ ), alors

$$x' \in Proj_S(x) \quad (\text{resp. } x' = P_S(x)).$$

**Démonstration** Supposons que  $x - x' \in N_S(x')$  et  $\|x - x'\| \leq \eta$ . La non vacuité du cône normal proximal montre que  $x' \in S$ . En utilisant la définition de la prox-régularité et le fait que  $x, x' \in S$  on obtient

$$\begin{aligned}\langle x - x', y - x' \rangle &\leq \frac{1}{2\eta} \|x - x'\| \|y - x'\|, \\ &\leq \frac{1}{2} \|y - x'\|,\end{aligned}$$

et ceci montre que  $x' \in Proj_S(x)$  d'après la Remarque 1.20 .

Si en plus  $\|x - x'\| < \eta$  alors

$$d_S(x) \leq \|x - x'\| < \eta,$$

d'après la Proposition 1.51 on obtient

$$x' = P_S(x).$$
■



Considérons l'ensemble :

$$Q_{ij} = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2N}, D_{ij}(\mathbf{q}) \geq 0\}.$$

où  $D_{ij}(\mathbf{q}) = |q_i - q_j| - 2r$  est la distance signée entre les disques  $i$  et  $j$ , comme dans le dessin ci-dessous

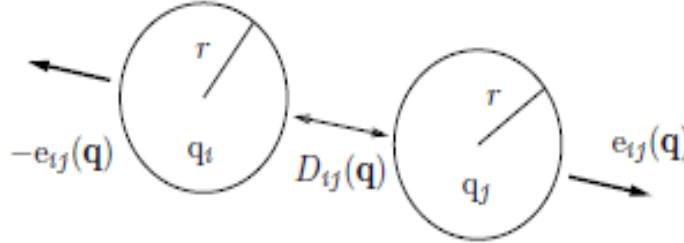


FIGURE 1.8 – Notations.

**Proposition 1.55** *L'ensemble  $Q_{ij}$  est  $\eta$ -prox-régulier avec  $\eta = \sqrt{2}r$ .*

## 1.9 Théorèmes fondamentaux d'analyse fonctionnelle

### **Théorème 1.56** (*Théorème d'Ascoli-Arzelà*)

*Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur un intervalle fermé borné  $I$ , à valeurs réelles. On suppose que cette suite de fonctions est équicontinue, i.e.,*

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in I, |x - y| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

*et qu'il existe un réel  $M > 0$  tel que  $|f_n(x)| < M$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x \in I$ . Alors on peut extraire une sous-suite  $(f_{n_k})$  qui converge uniformément sur  $I$  vers une fonction continue  $f$ .*

### **Lemme 1.57** (*Gronwall-Bellman*)

*Soit  $a : [\tau, T] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction absolument continue telle que*

$$\dot{a}(t) \leq \lambda a(t) + b(t), \quad \forall t \in [\tau, T],$$

*où  $\tau \leq T$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  sont des constantes, et  $b : [\tau, T] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable.*

*Alors,*

$$a(t) \leq e^{\lambda(t-\tau)} a(\tau) + \int_{\tau}^t e^{\lambda(t-s)} b(s) ds, \quad \forall t \in [\tau, T].$$

**Démonstration** On introduit une fonction  $\psi(t)$  telle que

$$\psi(t) = e^{\lambda(t-\tau)}a(\tau) + \int_{\tau}^t e^{\lambda(t-s)}b(s)ds.$$

En multipliant par  $e^{-\lambda t}$  on trouve que

$$\psi(t)e^{-\lambda t} = e^{-\lambda\tau}a(\tau) + \int_{\tau}^t e^{-\lambda s}b(s)ds,$$

alors

$$\psi(t)e^{-\lambda t} - \int_{\tau}^t e^{-\lambda s}b(s)ds = e^{-\lambda\tau}a(\tau),$$

dérivons par rapport à  $t$  on obtient

$$\frac{d}{dt} \left( \psi(t)e^{-\lambda t} - \int_{\tau}^t e^{-\lambda s}b(s)ds \right) = 0,$$

donc

$$\dot{\psi}(t)e^{-\lambda t} - \lambda\psi(t)e^{-\lambda t} - b(t)e^{-\lambda t} = 0,$$

d'où

$$\dot{\psi}(t) - \lambda\psi(t) = b(t).$$

D'autre part, on a

$$b(t) \geq \dot{a}(t) - \lambda a(t),$$

alors

$$\dot{\psi}(t) - \lambda\psi(t) \geq \dot{a}(t) - \lambda a(t),$$

si  $u(t) = a(t) - \psi(t)$  donc  $\dot{u}(t) = \dot{a}(t) - \dot{\psi}(t)$  et par suite

$$\dot{u}(t) - \lambda u(t) \leq 0,$$

multiplions les deux membres de cette inégalité par  $e^{-\lambda t}$  on obtient

$$e^{-\lambda t}[\dot{u}(t) - \lambda u(t)] \leq 0,$$

d'où

$$\frac{d}{dt}[u(t)e^{-\lambda t}] \leq 0,$$

ce qui montre que la fonction  $t \mapsto u(t)e^{-\lambda t}$  est décroissante et donc

$$u(t)e^{-\lambda t} \leq u(\tau)e^{-\lambda\tau},$$

mais  $u(\tau) = a(\tau) - \psi(\tau) = 0$ , alors

$$u(t) \leq 0,$$

et par suite

$$a(t) - \psi(t) \leq 0,$$

d'où

$$a(t) \leq e^{\lambda(t-\tau)}a(\tau) + \int_{\tau}^t e^{\lambda(t-s)}b(s)ds.$$

Ce qui achève la preuve de ce lemme .

■

**Définition 1.58** Une application  $f$  d'un espace métrique  $(X, d)$  dans lui même est dite  $k$ -contractante, s'il existe une constante  $k < 1$  tel que

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq kd(x, y)$$

pour tout couple de points  $x, y \in X$ .

**Théorème 1.59 (Théorème de point fixe)**

Soit  $X$  un espace métrique complet et soit  $f : X \rightarrow X$  une application  $k$ -contractante. Alors, il existe un point fixe unique de  $f$ , i.e.,  $x = f(x)$ .

**Théorème 1.60 (Théorème des fonctions implicites)**

Soit  $U$  un voisinage d'un point  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+m}$  et soit  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction qui satisfait les conditions suivantes

1.  $F \in C^{(p)}(U; \mathbb{R}^n)$ ,  $p \geq 1$ ,
2.  $F(x_0, y_0) = 0$ ,
3.  $F'_y(x_0, y_0)$  est une matrice inversible.

Alors, il existe un intervalle  $I = I_x^m \times I_y^n \subset U$ , avec

$$I_x^m = \{x \in \mathbb{R}^m; |x - x_0| < \alpha\}, \quad I_y^n = \{y \in \mathbb{R}^n; |y - y_0| < \beta\},$$

et une fonction  $f \in C^{(p)}(I_x^m; I_y^n)$  telle que

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x),$$

pour tout point  $(x, y) \in I_x^m \times I_y^n$  et

$$f'(x) = -[F'_y(x, f(x))]^{-1}[F'_x(x, f(x))].$$

## 1.10 Résultats préparatoires

Les résultats que nous allons énoncer dans cette section sont pris de la références [6].

**Proposition 1.61** *Soit  $C : [T_0] \rightrightarrows H$  une multi-application à valeurs non vides fermées telle que*

1. *pour  $t \in I$ ,  $C(t)$  est  $r$ -prox-régulier pour  $r > 0$ .*
2. *Il existe une fonction absolument continue  $v(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que, pour tout  $y \in H$  et  $s, t \in I$*

$$|d(y, C(t)), d(y, C(s))| \leq |v(t) - v(s)|.$$

*Soit  $h : [T_0, T] \rightarrow H$  une application intégrable. Alors, pour tout  $x_0 \in C(T_0)$ , le processus de Rafle perturbé*

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in \mathcal{N}(C(t), x(t)) + h(t) & \forall t \in [T_0, T] \\ x(T_0) = x_0 \end{cases}$$

*a solution unique absolument continue  $x(\cdot)$ . De plus, cette la solution vérifie l'inégalité*

$$\|\dot{x}(t) + h(t)\| \leq \|h(t)\| + |\dot{v}(t)| \quad \forall t \in [T_0, T].$$

**Théorème 1.62** *Supposons que  $C$  possède les mêmes hypothèses du Théorème 1.61 et soit  $f : [T_0, T] \times H \rightarrow H$  une application séparément mesurable sur  $[T_0, T]$  telle que*

- (i) *pour tout  $\eta > 0$ , il existe une fonction non négative  $k_\eta(\cdot) \in L^1([T_0, T], \mathbb{R})$  telle que pour tout  $t \in [T_0, T]$  et pour tout  $(x, y) \in \bar{B}(0, \eta) \times \bar{B}(0, \eta)$*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k_\eta(t) \|x - y\|.$$

- (ii) *il existe une fonction non négative  $\beta(\cdot) \in L^1([T_0, T], \mathbb{R})$  telle que, pour tout  $t \in [T_0, T]$  et pour tout  $x \in \bigcup_{s \in [T_0, T]} C(s)$*

$$\|f(t, x)\| \leq \beta(t)(1 + \|x\|).$$

*Alors, pour tout  $x_0 \in C(T_0)$ , le processus de Rafle perturbé suivant*

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in \mathcal{N}(C(t), x(t)) + f(t, x(t)) & \forall t \in [T_0, T] \\ x(T_0) = x_0 \end{cases}$$

*admet une solution unique absolument continue  $x(\cdot)$ . Cette solution satisfait*

$$\|\dot{x}(t) + f(t, x(t))\| \leq (1 + l)\beta(t) + |\dot{v}(t)| \quad \forall t \in [T_0, T],$$

et

$$\|f(t, x(t))\| \leq (1 + l)\beta(t) \quad \forall t \in [T_0, T],$$

où

$$l := \|x_0\| + \exp \left\{ 2 \int_{T_0}^T \beta(s) ds \right\} \int_{T_0}^T [2\beta(s)(1 + \|x_0\|) + |\dot{v}(s)|] ds.$$

**Proposition 1.63** *Supposons que les hypothèses du Théorème 1.62 sont satisfaites. Pour chaque  $a \in C(T_0)$ , notons  $x_a(\cdot)$  la solution unique du processus de Raftle perturbé*

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in \mathcal{N}(C(t), x(t)) + f(t, x(t)) & \forall t \in [T_0, T] \\ x(T_0) = x_0 \end{cases}$$

*Alors, l'application  $\psi : a \rightarrow x_a(\cdot)$  définie de  $C(T_0)$  à valeurs dans l'espace  $C([T_0, T], H)$  muni de la norme de la convergence uniforme, est Lipschitzienne sur tous les sous-ensembles bornés de  $C(T_0)$ .*

# Chapitre 2

## Existence et unicité de solution pour le processus de Raffle perturbé

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence de solution pour le problème

$$-\dot{x}(t) \in N_{C(t)}^P(x(t)) + f(t, x(t))$$

sur  $\mathbb{R}$  tout entier et nous établissons les conditions de stabilité globale des solutions globales et périodiques de ce problème. Pour cela considérons les deux hypothèses suivantes

( $\mathcal{H}_1$ ) Soit  $C : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$  une multi-application à valeurs non vides globalement borné qui satisfait les conditions suivantes

( $a_C$ ) Pour chaque  $t \in \mathbb{R}$ ,  $C(t)$  est  $\eta$ -prox-régulier pour un certain  $\eta > 0$  fixé.

( $b_C$ ) Pour tout  $L_C \geq 0$  on a pour tous  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ , il existe  $L_C \geq 0$  tel que

$$d_H(C(t_1), C(t_2)) \leq L_C |t_1 - t_2|.$$

( $\mathcal{H}_2$ ) Soit  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction qui satisfait les conditions suivantes

( $a_f$ ) Pour tous  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  et pour tous  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ , il existe  $L_f > 0$  tel que

$$\|f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)\| \leq L_f \left( \|t_1 - t_2\| + \|x_1 - x_2\| \right).$$

( $b_f$ ) Pour  $\alpha > 0$  fixé, on a

$$\langle f(t, x_1) - f(t, x_2), x_1 - x_2 \rangle \geq \alpha \|x_1 - x_2\|^2,$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et pour tous  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ .

**Théorème 2.1** *Supposons que la multi-application  $C$  satisfait la condition  $(a_C)$  et que  $f$  satisfait la condition  $(a_f)$ . Alors le processus de Rafle (1) a au moins une solution définie sur  $\mathbb{R}$  toute entier.*

**Démonstration** Soit  $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$  tel que  $\xi_n \in C(-n)$  pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ . Définissons

$$x_n(t) = \begin{cases} x(t, -n, \xi_n) & \text{si } t \geq -n \\ \xi_n & \text{si } t < -n \end{cases}$$

où  $t \rightarrow x(t; -n; \xi_n)$  est la solution  $t \rightarrow x(t)$  de (1) avec la condition initiale  $x(-n) = \xi_n, n \in \mathbb{N}$ . Puisque  $C(t)$  est globalement borné, alors, étant donné tout  $k \in \mathbb{N}$ , la proposition 1.61 nous s'assure que toutes les solutions du processus de Rafle (1) sur l'intervalle  $[-k, k]$  partagent la même constante de Lipschitzité  $L_k > 0$ .

Nous allons utiliser le théorème d'Ascoli-Arzelà afin d'extraire de  $\{x_n(t)\}_{n=1}^\infty$  une telle sous suite qui converge uniformément sur tout intervalle  $[-k, k], k \in \mathbb{N}$ . Pour ce but, notons  $x_n^0(t) = x_n(t)$  sur  $\mathbb{R}$  pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ . D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, il existe une sous-suite  $\{x_n^1(t)\}_{n=1}^\infty \subset \{x_n^0(t)\}_{n=1}^\infty$  qui converge uniformément sur  $[-1, 1]$ . De manière analogue, il existe une sous-suite  $\{x_n^2(t)\}_{n=1}^\infty \subset \{x_n^1(t)\}_{n=1}^\infty$  qui converge uniformément sur  $[-2, 2]$ . En répétant cette procédure, nous obtenons une famille de sous-suites  $\{x_n^k(t)\}_{n=1}^\infty \subset \{x_n^{k-1}(t)\}_{n=1}^\infty, k \in \mathbb{N}$ , tel que  $\{x_n^k(t)\}_{n=1}^\infty$  converge uniformément sur  $[-k, k]$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Définissons  $\bar{x}_n(t) = x_n^n(t)$  sur  $\mathbb{R}$  pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ . On trouve que  $\{\bar{x}_n(t)\}_{n=1}^\infty$  converge uniformément sur tout  $[-k, k], k \in \mathbb{N}$ . Soit  $\bar{x}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n(t)$  et montrons que  $\bar{x}(t)$  est une solution du problème (1). Notons par  $x(t)$  une solution de (1) avec la condition initiale  $x(\tau) = \bar{x}(\tau)$ . Supposons que  $x(t_0) \neq \bar{x}(t_0)$  pour certains  $t_0 > \tau$ , i.e.,  $x(t_0) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n(t_0)$ . Alors il existe  $\varepsilon_0 > 0$ , tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists m_n > n : \|x(t_0) - \bar{x}_{m_n}(t_0)\| \geq \varepsilon_0. \quad (2.1)$$

Rappelons que,  $\bar{x}_{m_n}(t)$  est une solution de (1) pour  $t \geq -m_n$ .

Par conséquent, d'après la Proposition 1.63 il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\begin{aligned} & \text{si } \tau \geq m_n \quad \text{et} \quad \|x(\tau) - \bar{x}_{m_n}(\tau)\| < \delta, \\ & \text{alors} \quad \|x(t) - \bar{x}_{m_n}(t)\| < \varepsilon_0, \quad t \in [\tau, t_0]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ce qui est contradiction avec (2.1) pour tout  $n \in \mathbb{N}$  suffisamment grand.

Et par conséquent,  $x(t) = \bar{x}(t)$  pour tout  $t \geq \tau$ , i.e.,  $\bar{x}(t)$  est une solution de (1). ■

**Théorème 2.2** *Sous les même hypothèses du Théorème 2.1 avec  $L_C \geq 0$ . Soit*

$$\|f(t, x)\| \leq M_f, \forall t \in \mathbb{R}, x \in \bigcup_{t \in \mathbb{R}} C(t) \quad (2.3)$$

où  $M_f$  est une constante fixée.

Supposons que  $f$  satisfait l'hypothèse  $(b_f)$  avec

$$\alpha > \frac{L_C + M_f}{\eta}. \quad (2.4)$$

Alors, le processus de Rafle (1) a une solution unique  $t \mapsto x(t)$ , défini sur  $\mathbb{R}$ . De plus, la solution globale  $t \mapsto x(t)$  est globalement exponentiellement stable.

**Démonstration** D'après la Proposition 1.61 pour toute solution  $x$  de (1) avec une condition initiale  $x(\tau) = x_0$ , on a

$$\|\dot{x}(t) + f(t, x(t))\| \leq \|f(t, x(t))\| + L_C, \quad \text{pour tout } t > \tau.$$

et comme  $f$  est uniformément borné alors

$$\|\dot{x}(t) + f(t, x(t))\| \leq M_f + L_C, \quad \text{pour } t > \tau \quad (2.5)$$

Soient  $x_1, x_2$  deux solutions de (1) avec  $x_1(\tau), x_2(\tau) \in C(\tau)$ .

Soit  $t \geq \tau$  tel que  $x_1(t), x_2(t)$  sont définis sur  $[t, \tau]$ , et que les deux dérivées  $\dot{x}_1(t)$  et  $\dot{x}_2(t)$  existent. Comme

$$\begin{aligned} -\dot{x}_1(t) - f(t, x_1(t)) &\in N_{C(t)}^P(x_1(t)), \\ -\dot{x}_2(t) - f(t, x_2(t)) &\in N_{C(t)}^P(x_2(t)), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{M_f + L_C}(-\dot{x}_1(t) - f(t, x_1(t))) &\in N_{C(t)}^P(x_1(t)), \\ \frac{\eta}{M_f + L_C}(-\dot{x}_2(t) - f(t, x_2(t))) &\in N_{C(t)}^P(x_2(t)). \end{aligned}$$

Par la condition d'hypomonotonie (1.2) du cône normale proximal et par (2.5) on a

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{-\eta}{M_f + L_C}(\dot{x}_1(t) + f(t, x_1(t))) - \frac{-\eta}{M_f + L_C}(\dot{x}_2(t) + f(t, x_2(t))), x_1(t) - x_2(t) \right\rangle \\ \geq -\|x_1(t) - x_2(t)\|^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{-\eta}{M_f + L_C} \langle \dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t), x_1(t) - x_2(t) \rangle + \frac{-\eta}{M_f + L_C} \langle f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t)), x_1(t) - x_2(t) \rangle \\ \geq -\|x_1(t) - x_2(t)\|^2, \end{aligned}$$



Et donc d'après l'hypothèse  $(b_f)$  on trouve

$$\frac{\eta}{M_f + L_C} \langle \dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t), x_1(t) - x_2(t) \rangle \leq \|x_1(t) - x_2(t)\|^2 - \frac{\eta\alpha}{M_f + L_C} \|x_1 - x_2\|^2,$$

ainsi nous avons

$$\langle \dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t), x_1(t) - x_2(t) \rangle \leq \left( \frac{M_f + L_C}{\eta} - \alpha \right) \|x_1(t) - x_2(t)\|^2,$$

i.e.,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|x_1(t) - x_2(t)\|^2 \leq \left( \frac{M_f + L_C}{\eta} - \alpha \right) \|x_1(t) - x_2(t)\|^2,$$

$$\frac{d}{dt} \|x_1(t) - x_2(t)\|^2 \leq \left( \frac{2(M_f + L_C)}{\eta} - 2\alpha \right) \|x_1(t) - x_2(t)\|^2.$$

on pose  $\bar{\alpha} = \frac{1}{\eta}(M_f + L_C - \eta\alpha)$ , puis par le lemme de Gronwall-Bellman (Lemme 1.57), pour  $t > \tau$  on a

$$\|x_1(t) - x_2(t)\|^2 \leq e^{2\bar{\alpha}(t-\tau)} \|x_1(\tau) - x_2(\tau)\|^2 \quad \forall t > \tau,$$

d'où

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq e^{\bar{\alpha}(t-\tau)} \|x_1(\tau) - x_2(\tau)\| \quad \forall t > \tau. \quad (2.6)$$

Soit maintenant  $x(t)$  une solution globale de (1) (qui existe d'après le Théorème 2.1).

Cette solution globale est unique car, si c'est le contraire, i.e., il existe une autre solution globale  $\bar{x}(t)$ . Alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , en utilisant (2.4) on trouve que  $\bar{\alpha} < 0$ .

Ce qui assure la stabilité exponentielle de la solution.

De plus, d'après (2.6)

$$\|x(t) - \bar{x}(t)\| \leq e^{\bar{\alpha}(t-\tau)} \|x(\tau) - \bar{x}(\tau)\| \quad \forall t > \tau, \quad (2.7)$$

passons donc à la limite lorsque  $\tau \rightarrow -\infty$  on trouve que

$$\|x(t) - \bar{x}(t)\| = 0,$$

et donc  $x(t) = \bar{x}(t)$ .

■

Nous donnons maintenant un théorème sur la périodicité de la solution globale unique établie dans le Théorème 2.2.

**Théorème 2.3** *L'unique solution globale  $x_0$  obtenue dans le Théorème 2.2 est  $T$ -périodique, si les deux applications  $t \mapsto C(t)$  et  $t \mapsto f(t, x)$  sont  $T$ -périodiques.*

**Démonstration**

L'application  $a \mapsto x_a(T)$  est une contraction de  $C(0)$  à  $C(T) = C(0)$ , où  $x_a$  est la solution de (1) sur  $[0, T]$  avec la condition initiale  $x_a(0) = a \in C(0)$ .

En effet, d'après (2.6), pour  $a, b \in C(0)$

$$\|x_a(T) - x_b(T)\| \leq e^{\bar{\alpha}T} \|a - b\|$$

où  $\bar{\alpha} < 0$ . Alors, d'après la Proposition 1.63  $a \mapsto x_a(T)$  est continue sur  $C(0)$ , et d'après le Théorème 1.59, il existe  $\bar{x} : [0, T] \rightarrow C(0)$  tel que (1) est satisfaite et  $\bar{x}(0) = \bar{x}(T)$  sur  $[0, T]$ . Comme  $t \mapsto C(t)$  et  $t \mapsto f(t, x)$  sont  $T$ -périodiques, on peut étendre donc  $\bar{x}$  à une solution  $T$ -périodique défini sur  $\mathbb{R}$ .

■

# Chapitre 3

## Exemples

### 3.1 Le modèle de jeux.

Soit  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la fonction définie par

$$f(t, x) := \alpha x, \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2, \quad (3.1)$$

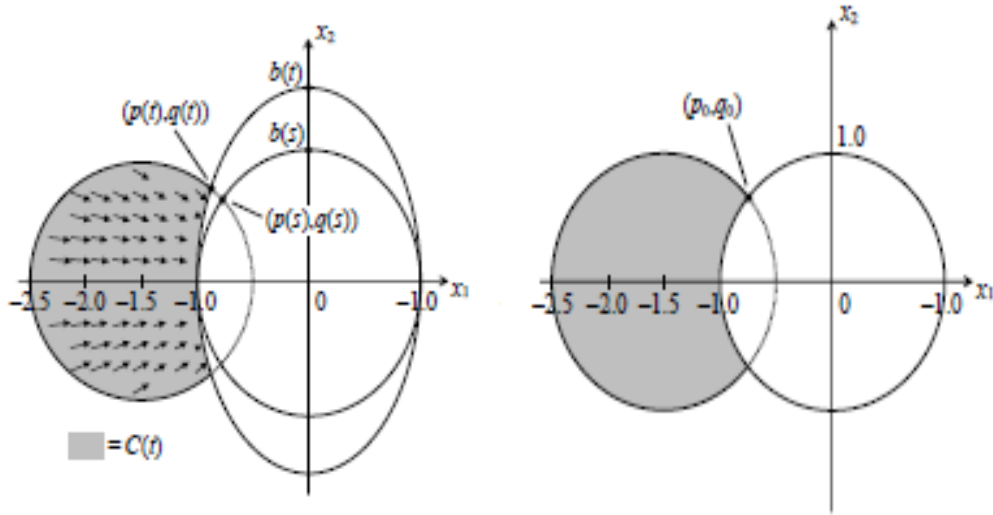
où  $\alpha > 0$  est une constante fixée. On définit l'ensemble mobile  $C(t)$  à l'aide d'une fonction  $b \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  qui est borné par  $\beta \geq 1$  et admet une constante Lipschitzienne global  $L_b$ , i.e.,

$$|b(t_1) - b(t_2)| \leq L_b |t_1 - t_2|, \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Définissons

$$C(t) := \overline{B}_1 \cap S(t), \quad S(t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + \frac{x_2^2}{b(t)^2} \geq 1 \right\}. \quad (3.3)$$

où  $\overline{B}_1$  est la boule fermée de rayon 1 et centrée au point  $(-1.5, 0)$ .

FIGURE 3.1 – Les flèches est le champ vectoriel de  $\dot{x} = -\alpha x$ .

Afin d'appliquer le Théorème 2.2, on doit démontrer que

- i) la fonction  $f$  est fortement monotone et bornée.
- ii)  $C(t)$  est Lipschitzienne continue.
- iii)  $C(t)$  est prox-régulier.

En effet,

- i)  $f$  est fortement monotone et bornée. En effet,

$$\langle f(t, x) - f(t, y), x - y \rangle = \langle \alpha x - \alpha y, x - y \rangle = \alpha \|x - y\|^2,$$

on en déduit donc que  $f$  est fortement monotone avec la constante  $\alpha$  et elle bornée sur  $B_1 \supset C(t)$  par  $M_f = 2.5\alpha$ .

- ii) Montrons maintenant la continuité Lipschitzienne de  $C(t)$ . La frontière  $\partial \bar{B}_1$  de  $\bar{B}_1$  coupe la frontière  $\partial S(t)$  de  $S(t)$  en un point unique  $(p(t), q(t))$  avec  $q(t) \geq 0$ . Puisque

$$d_H(C(t), C(s)) \leq \|(p(t), q(t)) - (p(s), q(s))\|.$$

(voir Fig.3.1). On va calculer maintenant les constantes de Lipschitz des fonctions  $p$  et  $q$ . Comme  $b \in C^1(\mathbb{R}, [1, \infty[)$ , le théorème des fonctions implicites (Théorème 1.60), nous assure que  $p$  et  $q$  sont différentiables sur  $\mathbb{R}$ . Par conséquent, par le théorème de la valeur moyenne

$$d_H(C(t), C(s)) \leq \|(p'(t_p), q'(t_q))\| \cdot |t - s|, \quad (3.4)$$

où  $t_p, t_q$  sont situés entre  $t$  et  $s$ . Pour calculer  $(p'(t_p), q'(t_q))$ , nous utilisons la formule donnée par le théorème des fonctions implicites ( Théorème 1.60)

$$(p'(t), q'(t))^T = -(F'_{(p,q)})^{-1}(p(t), q(t), t)F'_t(p(t), q(t), t),$$

appliqué avec

$$F(p, q, t) = \begin{pmatrix} (p + 1.5)^2 + q^2 - 1 \\ p^2 + \frac{q^2}{b(t)^2} - 1 \end{pmatrix}$$

puisque

$$F'_{(p,q)}(p, q, t) = 2 \begin{pmatrix} p + 1.5 & q \\ p & \frac{q}{b(t)^2} \end{pmatrix}, \quad F'_t(p, q, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2b(t)^{-3}b'(t)q^2 \end{pmatrix},$$

$$(F'_{(p,q)})^{-1}(p, q, t) = \frac{1}{2\frac{1}{b(t)^2}(p(t) + 1.5)q(t) - p(t)q(t)} \begin{pmatrix} \frac{q}{b(t)^2} & -q \\ -p & p + 1.5 \end{pmatrix},$$

on obtient la formule suivante pour les dérivées  $p'$  et  $q'$

$$\begin{pmatrix} p'(t) \\ q'(t) \end{pmatrix} = -\frac{1}{\frac{1}{b(t)^2}(p(t) + 1.5)q(t) - p(t)q(t)} \begin{pmatrix} q(t) \\ -(p(t) + 1.5) \end{pmatrix} \frac{1}{b(t)^3}q(t)^2b'(t).$$

Notant que les propriétés  $1 + p(t) > 0$  et  $-p(t)b(t)^2 > 0$  impliquent

$$\frac{1}{b(t) \cdot (p(t) + 1.5 - p(t)b(t)^2)} \leq \frac{1}{\beta \cdot (-p(t)b(t)^2)} \leq \frac{1}{\beta^3|p_0|},$$

on en déduit donc que

$$|p'(t)| \leq \frac{L_b}{\beta^3|p_0|}, \quad |q'(t)| \leq \frac{L_b}{\beta^3|p_0|},$$

où  $p_0$  est tel que  $p(t) \leq p_0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Puisque  $b(t) \geq 1$ , on peut prendre  $p_0$  comme le abscisse de l'intersection de  $\partial\bar{B}_1$  avec un cercle unitaire centré à 0, i.e.,  $p_0 = -0.75$  (voir Fig.3.1).

Nous substituons dans (3.4), on trouve que

$$d_H(C(t), C(s)) \leq \frac{4L_b}{3\beta^3}|t - s|,$$

ce qui donne  $L_C = \frac{4L_b}{3\beta^3}$ .

- iii) Pour la constante  $\eta$  de la prox-régularité de  $C(t)$ . On rappelle que  $C(t)$  est  $\eta$ -prox-régulier si  $C(t)$  admet une boule tangente externe de rayon plus petit que  $\eta$  pour chaque point  $x \in \partial C(t)$ . Les points de  $\partial C(t) \setminus \partial S(t)$  admettent une boule tangente

externe de n'importe quel rayon. Par conséquent, pour trouver  $\eta$  qui détermine la  $\eta$ -prox-régularité de  $C(t)$ , il suffit de se concentrer sur les points de  $\partial C(t) \cap \partial S(t)$ . C'est pourquoi, pour un  $t \in \mathbb{R}$  fixé, nous pouvons choisir  $\eta$  comme minimum du rayon de courbure passant par  $x \in \partial C(t) \cap \partial S(t)$ . Fixons  $t \in \mathbb{R}$  et utilisons le paramétrage

$$P(\phi) = (-\cos \phi, b(t) \sin \phi), \phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

pour le côté gauche de l'ellipse  $x^2 + \frac{y^2}{b(t)^2} = 1$ . Alors, le rayon de courbure  $R(\phi)$  de  $\partial C(t) \cap \partial S(t)$  en  $P(\phi)$  est

$$R(\phi) = \frac{1}{b(t)} (\sin^2 \phi + b(t)^2 \cos^2 \phi)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{b(t)} (b(t)^2 + (1 - b(t)^2) \sin^2(\phi))^{\frac{3}{2}}.$$

(voir Lockwood [7, P.xi,P.21]). Observez que  $R$  décroissante lorsque  $|\phi|$  augmente de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ . En effet,

$$\begin{aligned} R'(\phi) &= \left( \frac{1}{b(t)} (b(t)^2 + (1 - b(t)^2) \sin^2(\phi))^{\frac{3}{2}} \right)' \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{b(t)} \times 2(1 - b(t)^2) \sin \phi \cos \phi (b(t)^2 + (1 - b(t)^2) \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}} \leq 0, \end{aligned}$$

alors,  $R(\phi)$  est décroissante. Par conséquent, la courbure minimale de  $\partial C(t) \cap \partial S(t)$  est atteinte au point  $(p(t), q(t))$  que nous a définie dans (ii).

Soit  $\phi_0$  tel que  $P(\phi_0) = (p(t), q(t))$  et soit  $\phi_* > 0$  tel que la deuxième composante  $P_2(\phi_*)$  de  $P(\phi_*)$  soit égale à 1, qui existe parce que  $b(t) \geq 1$  (voir Fig.3.2).

Puisque  $q(t) \leq 1$ , nous avons  $\phi_0 \leq \phi_*$ , comme  $\phi \rightarrow R(\phi)$  est décroissante lorsque  $|\phi|$  augmente, on a

$$R(\phi_0) \geq R(\phi_*).$$

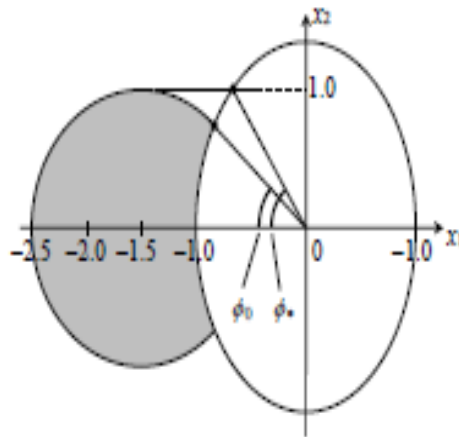


FIGURE 3.2 – Les paramètres  $\phi_0$  et  $\phi_*$ .

Comme  $P_2(\phi_*) = 1$  alors  $b(t) \sin \phi_* = 1$ , nous avons  $\sin \phi_* = \frac{1}{b(t)}$  et donc

$$\begin{aligned}
R(\phi_0) &\geq R(\phi_*) = \frac{1}{b(t)} (b(t)^2 + (1 - b(t)^2) \sin^2(\phi_*))^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{b(t)} \left( b(t)^2 + (1 - b(t)^2) \frac{1}{b(t)^2} \right)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{b(t)} \cdot \left( \frac{b(t)^4 + (1 - b(t)^2)}{b(t)^2} \right)^{\frac{3}{2}} \\
&= \left( \frac{b(t)^4 + (1 - b(t)^2)}{b(t)^{\frac{8}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}} \\
&= \left( b(t)^{\frac{4}{3}} + b(t)^{-\frac{8}{3}} - b(t)^{-\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \\
&\geq \left( b(t)^{\frac{4}{3}} - b(t)^{-\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}},
\end{aligned}$$

donc

$$R(\phi_0) \geq \left( b(t)^{\frac{4}{3}} - b(t)^{-\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Notons que la fonction  $g : b \mapsto \left( b^{\frac{4}{3}} - b^{-\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}$ , est croissante sur  $[1, \infty[$ . En effet,

$$g'(b) = \frac{3}{2} \left( \frac{4}{3} b^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} b^{-\frac{5}{3}} \right) \left( b^{\frac{4}{3}} - b^{-\frac{2}{3}} \right) \geq 0,$$

donc, la fonction  $g$  est croissante sur  $[1, \infty[$ . Finalement

$$\begin{aligned}
R(\phi_0) &\geq g(b) \geq g(\beta), \\
R(\phi_0) &\geq \left( \beta^{\frac{4}{3}} - \beta^{-\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,  $C(t)$  est  $\eta$ -prox-régulier avec  $\eta = \left( \beta^{\frac{4}{3}} - \beta^{-\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}$ .

Substituons les valeurs de  $M_f, L_C$  et  $\eta$  dans la formule (2.4) on obtient la proposition suivante

**Proposition 3.1** *Soient  $\alpha > 0$  une constante arbitraire,  $b \in C^1(\mathbb{R}, [\beta, \infty[)$  une certaine constante  $\beta \geq 1$ . Supposons que (3.2) est satisfaite. Si*

$$\alpha > \frac{\frac{4L_b}{3\beta^3} + \frac{5}{2}\alpha}{\left( \beta^{\frac{4}{3}} - \beta^{-\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Alors, la solution globale

$$x(t) = (-1, 0), \quad t \in \mathbb{R},$$

du problème (1) avec  $C(t)$  et  $f(t, x)$  donnés par (3.3) et (3.1), est globalement asymptotiquement stable.

## 3.2 Le modèle de mouvement de foule.

Nous donnons une brève introduction sur le modèle donné par Maury-Venel [8], puis nous expliquons quelles sont les raisons qui rendent le Théorème 2.2 inapplicable.

Considérons  $N$  personnes avec des positions données par  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ , où chaque personne est représentée géométriquement comme un disque de centre  $x_i \in \mathbb{R}^2$  et de rayon  $r$ , de sorte que  $x \in \mathbb{R}^{2N}$ . Deux personnes (disons  $i$ -ème et  $j$ -ème) ne peuvent pas se chevaucher, donc nous avons une contrainte unilatérale  $\|x_i - x_j\| \geq 2r$

$$C = \{x \in \mathbb{R}^{2N} : \|x_i - x_j\| - 2r \geq 0 \quad \forall i < j\}. \quad (3.5)$$

Soit  $U(x) = (U_1(x), U_2(x), \dots, U_N(x))$  la vitesse spontanée de chaque personne à la position  $x$ , i.e.,  $U_i(x)$  est la vitesse que la  $i$ -ième personne aurait en l'absence de les autres gens. Puisque le but de Maury-Venel [8] est d'avoir un modèle qui décrit personnes dans une situation très dense, la vitesse réelle d'une personne est définie comme étant la plus proche de la vitesse spontanée. Ainsi, la vitesse réelle est calculée comme projection de la vitesse spontanée sur l'ensemble des vitesses réalisables. Cela donne le processus de Raffle.

$$\begin{cases} -\dot{x} \in N_C^P(x) - U(x) \\ x(0) = x_0 \in C. \end{cases} \quad (3.6)$$

Prenons la situation où il n'y a que deux personnes. D'après la Proposition 1.55, l'ensemble  $C$  est  $\eta$ -prox régulier avec  $\eta = r\sqrt{2}$ .

Considérons  $U(x) = -x$ , alors  $f(t, x) = x$  et donc  $\alpha = 1$  dans l'hypothèse  $(b_f)$ . Alors, la condition (2.4) du Théorème 2.2 prend la forme  $\sqrt{2}r > L_C + M_f$ , où  $L_C = 0$  car  $C$  dans (3.6) ne dépend pas de  $t$ .

Par conséquent, (2.4) implique  $M_f < \sqrt{2}r$ . Par contre, d'après (2.3),  $M_f$  doit satisfaire  $M_f \geq \|f(t, x)\|$  avec  $f(t, x) = x$  pour chaque  $x \in C$ . Considérons une paire de personnes positionnées en  $(0, -r)$  et  $(0, r)$ . Puisque  $\|(0, -r) - (0, r)\| = 2r$ , on a  $(0, -r, 0, r) \in C$  et donc  $M_f$  vérifie

$$M_f \geq \|f(0, -r, 0, r)\| = \|(0, -r, 0, r)\| = \sqrt{0^2 + (-r)^2 + 0^2 + r^2} = \sqrt{2}r.$$

Par conséquent, le Théorème 2.2 ne s'applique pas.



# Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons démontré l'existence d'au moins une solution globale unique pour le processus de Raffle du premier ordre non convexe avec une perturbation Lipschitzienne. La stabilité exponentielle de la solution s'ensuit lorsque le champ vecteur est uniformément borné et fortement monotone.

# Bibliographie

- [1] **M. Bounkhel**, *Régularité concepts in Nonsmooth Analysis, Theory and Application*, Optimization and Application, Springer, 2012.
- [2] **C. Castaing and M. D. Monteiro Marques** , BV periodic solutions of an evolution problem associated with continuous moving convex sets, *Set-Valued Analysis*, **3** (1995), 381-399.
- [3] **C. Casting et M. Valadier**, *Convex analysis and Measurable Multifonction*, springer-verlage, Berlin(1977).
- [4] **G. Colombo, V. V. Goncharov**, *The sweeping processes without convexity*. Set-valued Anal. 7, 357-374(1999).
- [5] **G. Colombo and M. D. Monteiro Marques**, Sweeping by a continuous prox-regular set, *Journal of Differential Equations*, **187**(2003), 46-62.
- [6] **J.F.Edmond and L. Thibault** , Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process, *Mathematical Programming*, **104** (2005), 347-373.
- [7] **E. H. Lockwood**, *A Book of Curves*, Cambridge University Press, New York, 1961.
- [8] **B. Maury and J. Venel**, A discrete contact model for crowd motion, *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **45**(2011), 145-168.
- [9] **M. D. P. Monteiro- Marques**, *Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problemes Shocks and Dry Friction*. Birkhäuser, Basel(1993).
- [10] **B. S. Mordukhovich** , *Approximation Method in problems of Optimization and control.*, Nauka, Moscow(1988).
- [11] **R. A. Poliquin, R. T. Rockafellar, L. Thibault**, Local differentiability of distance functions, *Transactions of American Mathematical Society*, **352** (2000), 5231-5249.
- [12] **W. Rudin**, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-hill New York, 1976.
- [13] **K. S. Lau**, *Almost Chebychev subsets in reflexive Banach spaces*, Indiana Univ. Math. J., Vol 2, 1978, pp.791-795.

- 
- [14] **L. N. Wadippuli, I. Gudoshnikov and O. Makarenkov**, *Global asymptotic stability of non convex sweeping process*, *Discret and continuos dynamical systems*, Series B, Volume 25, Number 3, 1129-1139, (March 2020).
- [15] **V. A. Zorich**, *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004.